

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев, О. Е. Современные численные методы решения интегродифференциальных уравнений, возникающих в приложениях / О. Е. Кудрявцев. – М. : Вуз. кн., 2010. – 141 с.
2. Самсонов, А. Численные методы и программирование / А. Самсонов. – М.: Наука, 2019. – 640 с.

УДК 517.925

Э. В. МУСАФИРОВ

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

О ТРЕХМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СКРЫТЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Введение. Согласно [1], «аттрактор называется скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся». В частности, у системы, не имеющей состояний равновесия или имеющей только устойчивые состояния равновесия, аттрактор является скрытым.

Вещественная автономная двумерная система имеет замкнутую траекторию только если у нее существует хотя бы одно состояние равновесия [2, с. 124]. В. И. Булгаков привел пример трехмерной системы [3], которая, в отличие от двумерных систем, не обладает указанным свойством:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2xz + ay, \\ \dot{y} &= 2yz - ax, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ \dot{z} &= z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2,\end{aligned}\tag{1}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – параметры системы. В этой системе при $-2 < b < 0$ имеется предельный цикл, но отсутствуют состояния равновесия (в этом случае предельный цикл является скрытым аттрактором и система демонстрирует скрытые колебания).

Основной результат. С помощью теории отражающей функции Мироненко (ОФМ) [4, 5] и подхода, изложенного в [6–9], получено множество неавтономных систем, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко и обладающих скрытыми колебаниями. В частности, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\alpha_i = \alpha_i(t) (i = \overline{1, 5})$ — произвольные скалярные непрерывные нечетные функции, тогда:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (2xz + ay)(1 + \alpha_1) + 2xz\alpha_2 + y\alpha_3, \\ \dot{y} &= (2yz - ax)(1 + \alpha_1) + 2yz\alpha_2 - x\alpha_3, \\ \dot{z} &= (z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2); \end{aligned} \quad (2)$$

2. при $a = \pm 2, b = 0$ ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2(xz \pm y)(1 + \alpha_1) + 2xz\alpha_2 + y\alpha_3 \pm 2(xy \pm z)\alpha_4 \mp \\ &\quad \mp (1 + x^2 - y^2 - z^2)\alpha_5, \\ \dot{y} &= 2(yz \mp x)(1 + \alpha_1) + 2yz\alpha_2 - x\alpha_3 \pm (1 - x^2 + y^2 - z^2)\alpha_4 \mp \\ &\quad \mp 2(xy \mp z)\alpha_5, \\ \dot{z} &= (1 - x^2 - y^2 + z^2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2) \pm 2(yz \mp x)\alpha_4 \mp 2(xz \pm y)\alpha_5; \end{aligned}$$

3. при $a = b = 0$ ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2xz(1 + \alpha_1(t)) + 2xy\alpha_2(t) - (1 - x^2 + y^2 + z^2)\alpha_3(t) + y\alpha_4(t), \\ \dot{y} &= 2yz(1 + \alpha_1(t)) - (1 + x^2 - y^2 + z^2)\alpha_2(t) + 2xy\alpha_3(t) - x\alpha_4(t), \\ \dot{z} &= (1 - x^2 - y^2 + z^2)(1 + \alpha_1(t)) + 2yz\alpha_2(t) + 2xz\alpha_3(t). \end{aligned}$$

Для полученных возмущенных неавтономных систем изучена устойчивость по Ляпунову стационарных решений, доказано существование предельного цикла и периодических решений, а также изучен характер их устойчивости по Ляпунову. Показано, что возмущенная неавтономная система (2), как и исходная автономная система (1), при определенных значениях параметров проявляет скрытые колебания (имеет предельный цикл, но не имеет стационарных решений) (таблица 1).

Таблица 1 – Характер устойчивости предельного цикла (ПЦ) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ и равновесных решений

$$P \left(0, 0, -\frac{1}{2} \left(b + \sqrt{b^2 - 4} \right) \right), Q \left(0, 0, -\frac{1}{2} \left(b - \sqrt{b^2 - 4} \right) \right)$$

системы (2) в случае, когда $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) > -1 \forall t \geq 0$

b	Равновесные решения	ПЦ
$(-\infty, -2)$	P и Q неустойчивы	устойчив
-2	$P = Q = (0, 0, 1)$ устойчиво	устойчив
$(-2, 0)$	отсутствуют	устойчив
0	отсутствуют	—
$(0, 2)$	отсутствуют	неустойчив
2	$P = Q = (0, 0, -1)$ неустойчиво	неустойчив
$(2, +\infty)$	P асимптотически устойчиво, Q неустойчиво	неустойчив

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф25КИ-087.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов, Н. В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления / Н. В. Кузнецов // Известия РАН. Теория и Системы управления. – 2020. – № 5 – С. 5–27.
2. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1990. – 488 с.
3. Булгаков, В. И. О фазовом портрете автономной системы третьего порядка / В. И. Булгаков // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 10 – С. 1821–1822.
4. Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель : ГГУ, 2004. – 196 с.
5. Мироненко, В. В. Возмущения дифференциальных систем, не изменяющие временных симметрий / В. В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10 – С. 1325–1332.
6. Мусафиров, Э. В. Нестационарные дифференциальные системы, эквивалентные системе Лотки–Вольтерра с логистической поправкой / Э. В. Мусафиров // Наука Красноярья. – 2012. – № 1 – С. 97–104.

7. Мусафиров, Э. В. Допустимые возмущения модели Костицына «хищник-жертва» / Э. В. Мусафиров // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – № 7-2 – С. 248–252.

8. Мусафиров, Э. В. Допустимые возмущения системы Лэнгфорда / Э. В. Мусафиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 – С. 47–51.

9. Мусафиров, Э. В. Допустимые возмущения обобщенной системы Носе – Гувера в одном случае / Э. В. Мусафиров // Ползуновский альманах. – 2020. – № 1 – С. 221–222.

УДК 519.7

А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА

Россия, Санкт-Петербург, СПб ФИЦ РАН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ТРАНСФОРМАЦИЙ ГИБРИДНОЙ СТРУКТУРОЙ УРАВНЕНИЙ

Статья рассматривает проблематику моделирования эволюционных процессов в противоборствующем сообществе организмов и адаптации одной из компонент биофизической системы. Инвазионные процессы в биосистемах при вселении видов с высоким репродуктивным параметром в новый ареал запускают многообразные нелинейные процессы и некоторые из инвазионных вторжений развиваются стремительно в форме вспышки из одного пика.

В статье опишем формирование моделирующих структур с включенной логикой, задающей условия переопределения системы уравнений на основе отслеживания изменяющихся эволюционных характеристик и трансформирующихся параметров. Гибридная модель из набора выбираемых по заданным условиям переопределяемых функций активаций и демпфирования колебаний имитирует последствия событийной эволюции возбудителя. На основе алгоритмической реализации структуры переходов между режимами поведения в серии имитационных сценариев развития эпидемических волн в регионах в зависимости от факторов иммунизации и оценки действенности антиэпидемических мер. Получены