

Для минимизации оценки погрешности метода (2) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2 \cdot 3^{1/4} (e+1)^{1/4} (e+4)^{1/4} e^{-3/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$$

и

$$n_{\text{опт}} = 1 + 3^{-1/2} (\alpha\delta)^{-1} (e+1)^{1/2} (e+4)^{1/2} e^{-3/2} \|x\|.$$

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2) в полунорме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-1})$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-1} , и такой порядок обеспечивает сходимость (регуляризующие свойства) трехслойного явного итерационного процесса (2).

Замечание. Оптимальная оценка погрешности не зависит от α , но от α зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$, т. е. объема вычислительной работы, следует брать α возможно большим из условия $\alpha \in (0, \frac{5}{4\|A\|}]$, и чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

УДК 517.983.54

О. В. МАТЫСИК, И. В. КОСТЕНКОВ

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ПОЛУЧЕНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, линейный, самосопряженный оператор. Здесь $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и $0 \in SpA$ (но нуль не является собственным значением A), поэтому рассматриваемая задача некорректна (неустойчива). Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим неявную итерационную процедуру с $\alpha > 0$:

$$(E + \alpha A^2) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2) x_{n,\delta} + 2\alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (1)$$

Метод (1) является сходящимся, если приближения (1) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ , т. е. что $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

Теорема. *Процесс (1) сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n^{1/2} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Если точное решение x уравнения $Ax = y_\delta$ истокпредставимо ($x = A^s z$, $s > 0$), то для метода итераций (1) справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{\frac{s}{2}} (2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}} \|z\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta,$$

и априорный момент останова

$$n_{opt} = 2^{-(s+4)/(s+1)} s^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}.$$

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (1), а z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т. е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} [(E - \alpha A^2) z_n + 2\alpha A y_\delta] + \alpha \gamma_n, \quad z_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (2) равенство (1). Имеем

$$\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2) \varepsilon_n + \alpha \gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Поскольку нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E + \alpha A^2)^{-(n-1-i)} (E - \alpha A^2)^{n-1-i} \alpha \gamma_i.$$

В силу $\alpha > 0$ и того, что $0 \in Sp A$, справедливо

$$\left\| (E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2) \right\| \leq 1,$$

поэтому $\|\varepsilon_n\| \leq n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности неявного метода (1) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \|x - z_n\| &\leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^{s/2} (2n\alpha e)^{-s/2} \|z\| + \\ &+ 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

УДК 517.983.54

О. В. МАТЫСИК, С. С. ТКАЧ

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

В статье рассматривается некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором $A : H \rightarrow H$. Для решения применим явный метод итераций

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^3 x_n + A^{-1}(E - (E - \alpha A)^3)y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь E – единичный оператор, а оператор A^{-1} , фигурирующий в (2), не означает, что для рассматриваемой схемы (2) необходимо его знать. Нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора A .

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора (случай неединственного решения уравнения (1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$ ядро оператора A , $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Доказана

Теорема. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$. Тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения: