

УДК 517.983.54

О. В. МАТЫСИК, И. В. КОВАЛЬЧУК

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**ВЫБОР МОМЕНТА ОСТАНОВА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОГО
ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В
ПОЛУНОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА**

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное некорректное уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где $A : H \rightarrow H$ – положительный, ограниченный, самосопряженный оператор ($0 \in SpA$, и, следовательно, рассматриваемая задача неустойчива). Решать данную задачу будем при помощи трехслойного явного итерационного процесса

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, x_0 = x_1 = 0,$$

который при возмущениях ($\|y - y_\delta\| \leq \delta$) в правой части уравнения (1) примет вид:

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (2)$$

Изучим сходимость метода (2) в полунорме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$, в случае единственного решения уравнения (1) при возмущениях в правой части. При этом число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ .

Теорема. При условии $\alpha \in (0, \frac{5}{4\|A\|}]$ метод (2) сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Для метода (2) справедлива оценка погрешности:

$$\begin{aligned} \|x - x_{n,\delta}\|_A &\leq (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\| + \\ &+ 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, n \geq 1. \end{aligned}$$

Для минимизации оценки погрешности метода (2) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2 \cdot 3^{1/4} (e+1)^{1/4} (e+4)^{1/4} e^{-3/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$$

и

$$n_{\text{опт}} = 1 + 3^{-1/2} (\alpha\delta)^{-1} (e+1)^{1/2} (e+4)^{1/2} e^{-3/2} \|x\|.$$

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2) в полунорме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-1})$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-1} , и такой порядок обеспечивает сходимость (регуляризующие свойства) трехслойного явного итерационного процесса (2).

Замечание. Оптимальная оценка погрешности не зависит от α , но от α зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$, т. е. объема вычислительной работы, следует брать α возможно большим из условия $\alpha \in (0, \frac{5}{4\|A\|}]$, и чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

УДК 517.983.54

О. В. МАТЫСИК, И. В. КОСТЕНКОВ

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ПОЛУЧЕНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, линейный, самосопряженный оператор. Здесь $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и $0 \in SpA$ (но нуль не является собственным значением A), поэтому рассматриваемая задача некорректна (неустойчива). Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим неявную итерационную процедуру с $\alpha > 0$:

$$(E + \alpha A^2) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2) x_{n,\delta} + 2\alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (1)$$