

УДК 371.24+371.212

В. И. ГОРБАЧЕВ, Н. В. ТРОШИНА

Россия, Брянск, БрГУ имени И. Г. Петровского

СОДЕРЖАНИЕ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В СИСТЕМЕ ДИСЦИПЛИНАРНЫХ ОНТОЛОГИЙ

В содержании общего математического образования исследуются закономерности его спектральной и уровневой систематизации. В мировоззренческом плане выделяется спектр математических пространств, структурирующих «общеобразовательный слой» современного математического знания. В методологии пространственно-теоретического подхода представление каждого из математических пространств формируется на последовательных уровнях деятельности содержательного абстрагирования.

Введение. Идея традиционности общего математического образования, выраженная приверженностью к геометрии Евклида, арифметике Пифагора и Ф. Виета, алгебре И. Ньютона, созерцательному мышлению Р. Декарта, несомненно, наследует достижения общей культуры, но только ее ограниченной части, выраженной в эмпирической форме, на уровне обыденного сознания. За алгоритмической деятельностью исследования свойств базовых математических объектов (числа, фигуры, векторы, функции, уравнения, события), имеющих наглядно-конструктивную форму, не прослеживается методология модельно-абстрактного представления соответствующих математических пространств, их дисциплинарная систематизация.

Проектирование содержания общего математического образования, направленного на формирование абстрактного математического мышления, предполагает формирование модельных представлений целостного спектра математических пространств, отражающих различные свойства реального мира, последующее конструирование дедуктивных теорий абстрактных математических пространств с аналитико-синтетическим методом исследования, обоснования их закономерностей в методологии пространственно-теоретического подхода [1].

Результаты исследования. Общее математическое образование, отражающее содержание математики в ее более чем двухтысячелетней истории следует гуманитарной идее развития субъекта деятельности учения, направленности обучения математике на формирование адекватного образовательной области абстрактного мышления. Абстрактное математическое мышление выступает одной из предметных проекций категории абстрактного мышления, как и проекцией имеющих общеучебный характер типов мышления (логического, алгоритмического).

Дисциплинарный анализ структуры абстрактного математического мышления развивается в содержании его уровневой и спектральной систематизации. Уровневая систематизация абстрактного математического мышления отражает объективные закономерности деятельности содержательного абстрагирования. Направленная на формирование абстрактного математического мышления и исходящая из математического отражения реального мира деятельность содержательного абстрагирования характеризуется последовательными уровнями математического абстрагирования: «от предметов реального мира», в системе создаваемых на уровне обыденного сознания разноплановых образов объектов математических пространств; «от образных представлений объектов», в системе создаваемых в содержательной логической форме определяемых понятий учебных теорий абстрактных математических пространств; «от содержания понятий», в модельно-теоретическом и понятийно-категориальном анализе учебных математических теорий в их интеграции.

Деятельность абстрагирования «от предметов реального мира» имеет философскую форму «математического отражения реального мира», направлена на создание образных представлений базовых и производных математических пространств [2].

Числовое пространство задается в математическом отражении свойств счета, измерения, упорядочения и оперирования числами и величинами человеческой практики. Различные образы числа (точка на координатной прямой или окружности, систематическая запись числа, класс эквивалентности упорядоченных пар или последовательностей) создают представление числового пространства в системе расширяющихся геометрических, арифметических, алгебраических моделей.

Геометрическое пространство создается в математическом отражении формы, меры, пространственной расположенности, субъектной

ориентации реального физического пространства. Различные образы объектов геометрического пространства (наглядно-образные, векторные, аналитические) вместе с преобразованиями, отношениями приводят к его представлению наглядно-образной, векторной и арифметической моделями с модельно-специфическими методами исследования. Евклидово пространство, формируемое на базе субъектных представлений геометрического пространства, определяется в математическом отражении свойств размерности, пространственной ориентации, метрической характеристики реального физического пространства. Различные образы векторов, векторных операций (векторные, координатные, аналитические) определяют модельную структуру евклидова пространства с адекватными методами исследования соответствующих моделей геометрических фигур.

Функциональное пространство, опосредованное модельным представлением числового, геометрического, евклидова пространств, задается в математическом отражении свойства функциональной зависимости. Система векторных, геометрических, числовых (дискретная, непрерывная) моделей функционального пространства, свойства которых опосредованы свойствами объектов каждого из математических пространств, задает интегральное модельное представление пространства числовых и нечисловых функций.

Предикатное пространство, опосредованное представлениями числового и функционального пространств, создается в математическом отражении свойств равновесия, сравнения на множестве числовых характеристик реального мира. Модели пространства числовых элементарных функций (алгебраические, трансцендентные) определяют систему моделей пространства числовых предикатов, характеризующихся как общим для моделей функционально-графическим представлением, так и функционально-аналитическим методом исследования на базе соответствующих равносильных преобразований.

Стохастическое пространство, интегрирующее представления пространств случайных событий, дискретных и непрерывных случайных величин, статистических совокупностей, описываемых значениями функции вероятности, задается в математическом отражении процессов реального мира, характеризующихся свойством случайности (субъектной непредсказуемости). Представление стохастического пространства опре-

деляется системой конечных, счетно-конечных, счетных, непрерывных моделей пространства случайных событий, расширяемых в соответствующие модели пространства случайных величин и используемых в исследовании пространства статистических совокупностей.

В структуре представления каждого из математических пространств объективно выделяются абстрактно-алгоритмический и системно-структурный виды деятельности. Составляющими абстрактно-алгоритмический вид обобщенными учебными действиями выступают: создание наглядных образов объектов, операций, преобразований каждого из математических пространств в системе конструктивных, знаковых средств; анализ операторных действий на множестве объектов с целью выявления их наглядно воспринимаемых свойств; оперирование объектами, классами объектов в системе свойств математического пространства. Системно-структурный вид представления характеризуется модельным представлением математического пространства, действиями систематизации и классификации объектов, созданием алгоритмических схем оперирования для исследования фундаментальных свойств математического пространства.

Дальнейшее развитие наглядно-образных представлений математических пространств востребует новый уровень математического абстрагирования – абстрагирование «от образных представлений объектов математического пространства». Задачей деятельности содержательного абстрагирования данного уровня выступает создание во внутреннем плане субъекта нового конструкта – учебной теории математического пространства. В содержании учебной теории модельные представления математического пространства субъектным сознанием отклоняются, математические пространства становятся абстрактными. При этом в процедуре математического абстрагирования общие моделям свойства сохраняются либо в содержании аксиом (числовое, геометрическое, евклидово пространства), либо в содержании абстрактных определений понятий (функциональное, предикатное, стохастическое пространства) абстрактного математического пространства.

В отличие от деятельности представления теоретико-пространственная деятельность структурируется дедуктивным конструированием учебной теории, аналитико-синтетическим исследованием свойств абстрактного математического пространства, методологическим (модельно-теоре-

тическим, понятийно-категориальным) анализом учебной теории. Детализируемые обобщенными учебными действиями виды теоретико-пространственной деятельности позволяют сформировать теоретико-пространственный тип мышления в составе абстрактно-дедуктивного, аналитико-синтетического и методологического уровней. Интеграция формируемых в деятельности содержательного абстрагирования пространственно-математического и теоретико-пространственного типов мышления характеризует содержание пространственно-теоретического подхода, определяющего уровневую систематизацию абстрактного математического мышления [3].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пространственно-теоретический подход в формировании абстрактного мышления // Итоги науки : коллектив. моногр. / А. В. Антюхов, В. И. Горбачев, Н. В. Трошина. – М. : Рос. акад. наук, 2022. – С. 102–137. – (Итоги науки. Вып. 50). – DOI: 10.22281/ROS_I50_CN4_P102-133_2022.
2. Горбачев, В. И. Систематизация моделей учебных теорий математических пространств в содержании общего образования / В. И. Горбачев, Е. Н. Пузырева, Н. В. Трошина // Наука и школа. – 2024. – № 6. – С. 102–115. – DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-102-115.
3. Горбачев, В. И. Предметные компетенции общего математического образования в категории субъектного развития : монография / В. И. Горбачев. – М. : ИНФРА-М, 2020. – 403 с. – DOI: 10.12737/1031176.

УДК 512.542

Н. В. МАСЛОВА

Россия, Екатеринбург, ИММ УрО РАН, Уральский математический центр; Новосибирск, ИМ СО РАН

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество всех порядков ее элементов. Граф Грюнберга – Кегеля (или граф простых чисел) $\Gamma(G)$ определяется следующим образом: вершинами графа $\Gamma(G)$