УДК 517.927.21

С. А. МАРЗАН
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО

Пусть $I^{\alpha}_{a+}f$, $D^{\alpha}_{a+}g$ – правосторонние дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ $(Re(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси [1, § 2.2, 2.4].

Через $({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ обозначим дробную производную Капуто [2], определяемую формулой

$$({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)\right]\right)(x),$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, и $n = \alpha$ при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Если $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha \leqslant n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $y \in C^n[a, b]$, то при $\alpha \in \mathbb{N}$ производная ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}y$ совпадает с обычной производной:

$$({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^n y)(x) \quad \left(n \in \mathbb{N},\ D = \frac{d}{dx}\right),$$

а при $n - 1 < \alpha < n$ оператор ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования Римана – Лиувилля $I^{n-\alpha}_{a+}$ и оператора дифференцирования D^n: $({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+}D^n y\right)(x)$.

В практических приложениях использование дробной производной Капуто дает более естественное решение проблемы начальных условий при решении дифференциальных уравнений нецелых порядков.

Обозначим через $C_{\gamma}[a, b]$ $(\gamma \in \mathbb{C})$ класс функций $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, что $(x - a)^{\gamma}g(x) \in C[a, b]$:

$$C_{\gamma}[a, b] = \left\{g(x) :\ \|g\|_{C_{\gamma}} = \|(x - a)^{\gamma}g(x)\|_{C} < \infty\right\},\ C_0[a, b] = C[a, b].$$

Для $\gamma \in \mathbb{C}$ $(0 \leqslant Re(\gamma) < 1)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ $(0 < Re(\alpha) < 1)$:

$$C^{\alpha}_{\gamma}[a, b] = \left\{y \in C[a, b] : {}^{c}D^{\alpha}_{a+}y \in C_{\gamma}[a, b]\right\},$$

$$C^{\alpha,1}_{\gamma}[a,b] = \left\{ y \in C^1[a,b] : {}^cD^{\alpha}_{a+}y \in C_{\gamma}[a,b] \right\}.$$

Обозначим через $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ $(z \in \mathbb{C};\ \alpha,\beta \in \mathbb{C};\ Re(\alpha) > 0)$ функцию Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто

$$\left({}^cD^{\alpha_s}_{a+}y_s\right)(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k(x) + h_s(x),\ y_s(a) = b_s \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $\alpha_s \in \mathbb{C}$ $(0 < Re(\alpha_s) < 1)$, $\lambda_s \in \mathbb{C}$ $(s = 1,\ldots,m)$.

Пусть

$$\overline{C}^{\overline{\alpha}}_{\overline{\gamma}}[a,b] = C^{\alpha_1}_{\gamma_1}[a,b] \times C^{\alpha_2}_{\gamma_2}[a,b] \times \ldots \times C^{\alpha_m}_{\gamma_m}[a,b],$$

$$\overline{C}^{\overline{\alpha},1}_{\overline{\gamma}}[a,b] = C^{\alpha_1,1}_{\gamma_1}[a,b] \times C^{\alpha_2,1}_{\gamma_2}[a,b] \times \ldots \times C^{\alpha_m,1}_{\gamma_m}[a,b].$$

Применяя к задаче Коши (1) результаты, полученные в работах [3], [4], можно показать справедливость следующих теорем.

Теорема 1. *Если $h_s \in C_{\gamma_s}[a,b]$, $\gamma_s \in \mathbb{C}$ $(0 \leqslant Re(\gamma_s) < 1)$, то задача Коши (1) имеет в банаховом пространстве $\overline{C}^{\overline{\alpha}}_{\overline{\gamma}}[a,b]$ единственное решение*

$$y_s(x) = b_s E_{\alpha_s,1}\left[\lambda_s(x-a)\right] + \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha_s-1} E_{\alpha_s,\alpha_s}\left[\lambda_s(x-t)^{\alpha_s}\right] h_s(t)dt,$$

$s = 1,\ldots,m.$

В частности, $y_s(x) = b_s E_{\alpha_s,1}\left[\lambda_s(x-a)^{\alpha_s}\right]$ – единственное решение задачи Коши

$$\left({}^cD^{\alpha_s}_{a+}y_s\right)(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k(x),\ y_s(a) = b_s\ (s = 1,\ldots,m).$$

Теорема 2. *Если $h_s(x) \in C_{\gamma_s}[a,b]$, $\theta_s \neq 0$, $\gamma_s \in \mathbb{C}$ $(0 \leqslant Re(\gamma_s) < 1)$, то задача Коши*

$$\left({}^cD^{1+i\theta_s}_{a+}y_s\right)(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k(x) + h_s(x),\ y_s(a) = b_{1s} \in \mathbb{C},\ y_s'(a) = b_{2s} \in \mathbb{C},$$

имеет в $\overline{C}_{\overline{\gamma}}^{\overline{1+i\theta},1}[a,b]$ *единственное решение*

$$y_s(x) = b_{1s}E_{1+i\theta_s,1}\left[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}\right] + b_{2s}E_{1+i\theta_s,2}\left[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}\right] +$$

$$+\int\limits_a^x (x-t)^{i\theta_s}E_{1+i\theta,1+i\theta_s}\left[\lambda_s(x-t)^{1+i\theta_s}\right]h_s(t)dt,\ \ s=1,\ldots,m.$$

В частности, решение задачи

$$\left({}^cD_{a+}^{1+i\theta_s}y_s\right)(x) = \sum_{s=1}^{m}\lambda_s y_s(x),\ \ y_s(a)=b_{1s}\in\mathbb{C},\ \ y_s'(a)=b_{2s}\in\mathbb{C}$$

имеет вид

$$y_s(x) = b_{1s}E_{1+i\theta_s,1}\left[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}\right] + b_{2s}E_{1+i\theta_s,2}\left[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}\right],$$

$s=1,\ldots,m.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

3. Марзан, С. А. Основные свойства дробных интегралов и производных Римана – Луивилля в весовом пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан, И. В. Мороз // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. ст. Респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2018. – С. 95–97.

4. Марзан, С. А. Существование и единственность решения задачи типа Коши для дифференциального уравнения комплексного порядка в весовом пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 63–71.

УДК 517.983.54

О. В. МАТЫСИК, И. В. КОВАЛЬЧУК
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ВЫБОР МОМЕНТА ОСТАНОВА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОГО ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В ПОЛУНОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное некорректное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $A : H \to H$ – положительный, ограниченный, самосопряженный оператор ($0 \in SpA$, и, следовательно, рассматриваемая задача неустойчива). Решать данную задачу будем при помощи трехслойного явного итерационного процесса

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, x_0 = x_1 = 0,$$

который при возмущениях ($\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$) в правой части уравнения (1) примет вид:

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \tag{2}$$

Изучим сходимость метода (2) в полунорме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$, в случае единственного решения уравнения (1) при возмущениях в правой части. При этом число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ.

Теорема. *При условии* $\alpha \in (0, \frac{5}{4\|A\|}]$ *метод* (2) *сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $\sqrt{n-1}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. *Для метода* (2) *справедлива оценка погрешности:*

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\| +$$

$$+3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, n \geq 1.$$

Для минимизации оценки погрешности метода (2) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2 \cdot 3^{1/4}(e+1)^{1/4}(e+4)^{1/4}e^{-3/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$$

и

$$n_{\text{опт}} = 1 + 3^{-1/2}(\alpha\delta)^{-1}(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\|.$$

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2) в полунорме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $\sqrt{n-1}\delta \to 0$, $n \to \infty, \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-1})$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-1}, и такой порядок обеспечивает сходимость (регуляризующие свойства) трехслойного явного итерационного процесса (2).

Замечание. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от α, но от α зависит $n_{опт}$. Поэтому для уменьшения $n_{опт}$, т. е. объема вычислительной работы, следует брать α возможно большим из условия $\alpha \in (0, \frac{5}{4\|A\|}]$, и чтобы $n_{опт}$ было целым.*

УДК 517.983.54

О. В. МАТЫСИК, И. В. КОСТЕНКОВ
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ПОЛУЧЕНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, линейный, самосопряженный оператор. Здесь $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и $0 \in SpA$ (но нуль не является собственным значением A), поэтому рассматриваемая задача некорректна (неустойчива). Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим неявную итерационную процедуру с $\alpha > 0$:

$$\left(E + \alpha A^2\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right) x_{n,\delta} + 2\alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \qquad (1)$$

Метод (1) является сходящимся, если приближения (1) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т. е. что $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Теорема. *Процесс* (1) *сходится, если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/2}\delta \to 0, \quad n\to\infty, \quad \delta \to 0$. *Если точное решение* x *уравнения* $Ax = y_\delta$ *истокопредставимо* ($x = A^s z$, $s > 0$), *то для метода итераций* (1) *справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{\frac{s}{2}} (2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}} \|z\| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,$$

и априорный момент останова

$$n_{onm} = 2^{-(s+4)/(s+1)} s^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}.$$

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (1), а z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т. е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^2\right) z_n + 2\alpha A y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \qquad (2)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (2) равенство (1). Имеем

$$\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)\, \varepsilon_n + \alpha\gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Поскольку нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(E + \alpha A^2\right)^{-(n-1-i)} \left(E - \alpha A^2\right)^{n-1-i} \alpha\gamma_i.$$

В силу $\alpha > 0$ и того, что $0 \in Sp\, A$, справедливо

$$\left\|\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)\right\| \leqslant 1,$$

поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности неявного метода (1) запишется в виде:

$$\|x - z_n\| \leqslant \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leqslant s^{s/2}\,(2n\alpha e)^{-s/2}\,\|z\| \; +$$

$$+\,4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + n\alpha\gamma,\ n \geqslant 1.$$

УДК 517.983.54

О. В. МАТЫСИК, С. С. ТКАЧ
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

В статье рассматривается некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором $A : H \to H$. Для решения применим явный метод итераций

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^3 x_n + A^{-1}(E - (E - \alpha A)^3)y, x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь E – единичный оператор, а оператор A^{-1}, фигурирующий в (2), не означает, что для рассматриваемой схемы (2) необходимо его знать. Нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора A.

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора (случай неединственного решения уравнения (1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$ ядро оператора A, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Доказана

Теорема. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$. *Тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения:*

a) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$

b) последовательность x_n *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax_n = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае*

$$x_n \to P(A)x_0 + x^*,$$

где x^* *– минимальное решение уравнения* (1).

Замечание. *В рассматриваемом случае* $x_0 = 0$, *поэтому* $x_n \to x^*$, *т. е. процесс* (2) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

УДК 004.942:519.218

П. А. МЕРКУШЕВИЧ, И. Ю. СВЕРБА, Л. П. МАХНИСТ, Т. И. КАРИМОВА
Беларусь, Брест, БрГТУ

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ ГИДРОЛОГИИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии (например, в [1] и [2]):

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \left.\frac{d\theta_1}{d\xi}\right|_{\xi=\infty} = 0, \quad \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0 \qquad (1)$$

Уравнение (1) при решении некоторых прикладных задач, интегрировалось различными методами, например, в [3], а в работах [4], [5] исследовалась сходимость решения таких уравнений. В работах [6] и [7] для решения уравнения (1) использовалась система компьютерной алгебры.

Приведем решение этого уравнения, используя степенные ряды.

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = \frac{df_1}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$, с начальным условием $f_1(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$.

Решение последнего уравнения будем искать в виде $f_1(\xi) = u(\xi)v(\xi)$. Тогда, учитывая, что $f_1'(\xi) = u'(\xi)v(\xi) + u(\xi)v'(\xi)$, получим уравнение

$$u'v + u(v' - \xi v) = -1 \qquad (2).$$

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v' - \xi v = 0$. Разделяя переменные в уравнении $\frac{dv}{d\xi} = \xi v$, решением которого, очевидно, является $v = 0$, получим $\frac{dv}{v} = \xi d\xi$. Интегрируя последнее уравнение, получим $\int \frac{dv}{v} = \int \xi d\xi + C_2$. Откуда $\ln|v| = \frac{\xi^2}{2} + \ln C_1$ или $v = \pm C_1 e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Следовательно, $v = Ce^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $v' - \xi v = 0$.

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например, $v = e^{\frac{\xi^2}{2}}$, при $C = 1$. Подставляя его в уравнение (2), имеем $u'e^{\frac{\xi^2}{2}} = -1$ или $u' = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Откуда $u = -\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C$.

Следовательно, $f_1(\xi) = u(\xi)v(\xi) = \left(-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или $f_1(\xi) = \left(C - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Тогда, учитывая начальное условие $f_1(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$, имеем $f_1(\xi) = \left(\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или $f_1(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$, что можно проверить, используя правило Лопиталя.

Далее решение дифференциального уравнения $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ будем искать в виде степенного ряда $f_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$. Тогда $f_1'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1}$. Подставляя $f_1(\xi)$ и $f_1'(\xi)$ в уравнение $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{n+1} = -1.$$

Введя замены $n - 1 = k$ и $n + 1 = m$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} \xi^k - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} \xi^m = -1$ или, полагая $k = n$ и $m = n$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} \xi^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \xi^n = -1$ или уравнение $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) c_{n+1} - c_{n-1}\right) \xi^n = -1$ для любого ξ . Следовательно, $(n+1) c_{n+1} - c_{n-1} = 0$ или $c_{n+1} = \frac{c_{n-1}}{n+1}$, если n – натуральное число, и $c_1 = -1$.

При $n = 2k-1$ – нечетное число ($k \in \mathbb{N}$), получим $c_{2k} = \frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{c_0}{(2k)!!}$, где $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)$ – двойной факториал четного числа $2k$.

При $n = 2k-1$ – четное число ($k \in \mathbb{N}$), получим $c_{2k+1} = \frac{c_{2k-1}}{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!!}$, где $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)$ – двойной факториал нечетного числа $2k+1$.

Следовательно,

$$f_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1\xi + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1\xi + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\xi^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}\xi^{2k+1} =$$

$$= c_0 + c_1\xi + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} = c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!},$$

полагая, что $0!! = 1$.

Так как $c_0 = f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $c_1 = -1$, то

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, то

$$\theta_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)} + C.$$

Учитывая начальное условие, $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$, где

$$S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)}$$

или

$$S_1(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{n}{2}\right\}} \frac{(-1)^{n-1}\xi^n}{(n-1)!!n},$$

где $\{t\}$ – дробная часть числа t соответственно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волчек, А. А. О сходимости решения одной малопараметрической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2009. – № 5. – С. 2–5.

2. Волчек, А. А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.

3. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.

4. Волчек, А. А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.

5. Волчек, А. А. О моментах распределения вероятностей модели диффузионного типа в практике гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Математика и ее приложения : межвуз. сб. науч. тр. / Ассоциация математиков вузов северо-запада ; под ред. Д. П. Голоскокова, А. Р. Шкадовой. – СПб, 2011. – Вып. 3. – С. 139–148.

6. Махнист, Л. П. Применение систем компьютерной алгебры для решения модели стохастической гидрологии / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 96–98.

7. Махнист, Л. П. К решению задачи гидрологии с использованием систем компьютерной алгебры / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2022. – С. 17–19.

УДК 519.24

Е. И. МИРСКАЯ
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОКОН ПРОСМОТРА ДАННЫХ

В спектральном анализе временных рядов одной из проблем является построение оценок спектральных плотностей второго порядка стационарных случайных процессов, так как они дают важную информацию о структуре процесса.

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа временных рядов. Это связано с широким применением анализа временных рядов к анализу данных, которые возникают в физике, технике, теории распознавания образов, экономике. Часто данные являются многомерными. Такая ситуация особенно характерна для экономических данных.

В данной работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности исследована статистика, построенная по методу Уэлча. Предложенная оценка использована для анализа многомерных временных рядов.

В данной работе с помощью метода Уэлча [1] проведен сравнительный анализ дисперсии оценки спектральной плотности в зависимости от окон просмотра данных для временного ряда, представляющего ежемесячные данные по геомагнитной активности (магнитные бури на Земле) с 1984 г. по 2024 г.

Пусть $X^r(t)$, $t \in Z$ – r-мерный действительный стационарный в широком смысле случайный процесс. Будем предполагать, что взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$ случайного процесса неизвестна.

В работе исследована сглаженная оценка взаимной спектральной плотности вида

$$\widetilde{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{l=1}^{T} W_{ab}\left(\lambda - \frac{2\pi l}{T}\right) I_{ab}^{T}\left(\frac{2\pi l}{T}\right), \tag{1}$$

где $W_{ab}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b = \overline{1, r}$ – спектральное окно, $I_{ab}^T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ – расширенная периодограмма процесса $X^r(t)$, $t \in Z$, заданная соотношением

$$I_{ab}^T(\lambda) = d_a^N(\lambda)\overline{d_b^N(\lambda)}.$$

Показано, что оценка (1) является асимптотически несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности процесса $X^r(t)$, $t \in Z$.

Проведен сравнительный анализ дисперсии оценки взаимной спектральной плотности, заданной соотношением (1), для различных окон просмотра данных. Уменьшение дисперсии оценок достигается за счет выбора функции окна просмотра данных.

Показано, что наименьшей дисперсией обладает оценка, построенная с использованием прямоугольного окна просмотра данных.

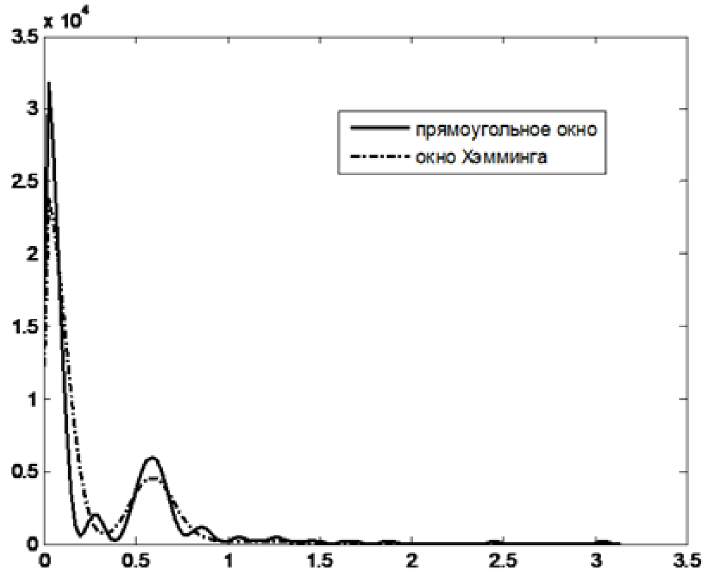

Рисунок – Графики оценки спектральной плотности,
построенные для временного ряда с использованием окна Хэмминга
и прямоугольного окна

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms / P. D. Welch // Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Audio and Electroacoustics. – 1967. – Vol. AU–15, № 2. – P. 70–73.