Теорема. *Если* $C_2 = -\gamma C_1^2$ *и* $C_3 = 2\gamma^2 C_1^3$, *то обобщенными решениями задачи Коши являются распределения*

$$W^{\pm} = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi \frac{1}{\gamma}\delta_a,$$

где $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$, *и только они.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грицук, Е. В. Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве / Е. В. Грицук, Е. В. Кузьмина // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 64–72.

2. Антоневич, А. Б. Существование восьми обобщенных решений задачи Коши для третьего уравнения иерархии Риккати / А. Б. Антоневич, Е. В Кузьмина // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики, Белорус. гос. ун-т ; сост. Т. С. Бусел. – Минск : Беларус. навука, 2024. – Ч. 1. – С. 64–66.

УДК 517.986.2

М. М. ЛОГИНОВСКАЯ[1], И. Л. ЛЮКСЕМБУРГ[2]

[1]Беларусь, Минск, БГУ

[2]Беларусь, Минск, Институт математики НАН Беларуси

НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДОПУСКАЮЩИХ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

Согласно теории Гельфанда [1], симметричная банахова алгебра A ограниченных комплекснозначных функций изоморфна алгебре всех непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов $\mathfrak{M}(A)$ этой алгебры, которое является компактным топологическим пространством. Это пространство обычно интерпретируется как естественная область определения рассматриваемых функций, при этом структура этого пространства отражает возможные типы разрывов этих функций.

В работе рассматриваются замкнутые в равномерной норме симметричные алгебры ограниченных комплекснозначных функций, определенных на линейно упорядоченных множествах и имеющих разрывы только первого рода. Для данного класса алгебр построены в явном виде пространства максимальных идеалов. Показано, что даже для таких алгебр, состоящих из функций, допускающих разрывы простейшего вида, пространства максимальных идеалов оказались компактными пространствами с экзотическими свойствами. В частности, одним из таких пространств является известное пространство «две стрелки» [4; 5]. Оно было впервые введено Александровым и Урысоном в их классической работе [3] и используется как универсальный пример компактного пространства со сложной структурой. Например, оно не метризуемо, но при этом для него выполнено 6 из 7 известых условий метризуемости.

Итак, пусть $(X, <)$ – упорядоченное множество, компактное в порядковой топологии. В таком множестве существует наименьший элемент $\widehat{0}$ и наибольший элемент $\widehat{1}$. Пусть $JD(X)$ есть алгебра всех комплекснозначных функций, которые в каждой точке имеют односторонние пределы. Напомним, что пределом f в точке x слева называется такое число y, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x'(\varepsilon) < x : \forall x'' \in (x'; x) \ |f(x'') - y| < \varepsilon.$$

Далее обозначаем $y = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f^-(x_0)$, аналогично вводится предел справа и, соответственно, обозначения $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f^+(x_0)$. Определение предела слева содержательно, если никакой интервал $(x'; x)$ не пуст, в противном случае существование этого предела не накладывает никаких ограничений на f. Если же в упорядоченном пространстве нет сечений типа скачок, то в любой окрестности любой точки, за исключением $\widehat{0}$ и $\widehat{1}$, есть точки как слева, так и справа. Далее мы рассматриваем только упорядоченные пространства без скачков.

Пусть $L = \{x \in X : \widehat{0} < x < \widehat{1}\}$, построим

$$\mathfrak{E}_X = \{\widehat{0}, \widehat{0}^+, \widehat{1}^-, \widehat{1}\} \cup L \times \{-1, 0, 1\}$$

и введем на этом множестве порядок по правилам:

1) на $L \times \{-1, 0, 1\}$ вводим лексикографический порядок;

2) $\widehat{0} < \widehat{0}^+ < x < \widehat{1}^- < \widehat{1} \ \forall x \in L \times \{-1, 0, 1\}$.

Множество $\mathfrak{E}_X$ и порядок на нем можно кратко описать на языке арифметики порядковых типов [2]. В данном случае X имеет тип $1+\lambda+1$, где λ – порядковый тип L, а $\mathfrak{E}_X$ имеет тип $2+3\cdot\lambda+2$.

Пусть $x\in X$, $x\neq\widehat{0},\widehat{1}$, обозначим $x^-=x\times\{-1\}$, $x^+=x\times\{1\}$, $x^0=x\times\{0\}$. Также $L^-=L\times\{-1\}\cup\{\widehat{1}^-\}$, $L^0=L\times\{-1\}\cup\{\widehat{0}\}\cup\{\widehat{1}\}$, $L^+=L\times\{1\}\cup\{\widehat{0}^+\}$. Далее любой элемент $L^-(L^+)$ обозначаем $x^-(x^+)$.

Каждая точка $x^-\in L^-(x^+\in L^+)$ имеет ФСО, состоящую из открыто-замкнутых окрестностей, лежащих слева от x^-(справа от x^+), то есть меньше x^-(больше x^+). Действительно: $U(x^-)=(z^0;x^0)=$ $=[z^+;x^-]$, где $z<x$ и $U(x^+)=(x^0;z^0)=[x^+;z^-]$, где $z>x$. Кроме того, всякая точка из L^0 изолирована. Следовательно, построенное пространство $\mathfrak{E}_X$ нульмерно, а значит и вполне несвязно и содержит всюду плотное дискретное подпространство L^0. Сформулируем условие непрерывности на $\mathfrak{E}_X$:

Лемма 1. *Для того, чтобы функция была непрерывна на $\mathfrak{E}_X$ необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева на L^- и непрерывна справа на L^+.*

Теорема 1. *$\mathfrak{E}_X$ компактно и гомеоморфно $\mathfrak{M}(JD(X))$.*

Теорема доказывается с помощью построения изоморфизма φ из $JD(X)$ в $C(\mathfrak{E}_X)$. Построим $\widehat{f}=\varphi(f)$:

1) $\widehat{f}(\widehat{0})=f(\widehat{0})$ и $\widehat{f}(\widehat{1})=f(\widehat{1})$;

2) $\widehat{f}(x^0)=f(x)$, $\widehat{f}(x^+)=f^+(x)$ и $\widehat{f}(x^-)=f^-(x)$.

По построению изоморфизма, множество $\mathfrak{M}(JD(X))$ состоит из M_τ, M_τ^- и M_τ^+. M_τ состоит из функций обращающихся в нуль в точке τ, $M_\tau^-(M_\tau^+)$ состоит из функций? предел которых слева (справа) в точке τ равен нулю. Поскольку есть взаимнооднозначное соответствие между максимальными идеалами и мультипликативными функционалами, $M_\tau(f)=f(\tau)$, $M_\tau^-(f)=f^-(\tau)$ и $M_\tau^+(f)=f^+(\tau)$ – мультипликативные функционалы алгебры $JD(X)$.

В случае $X=[0;1]$, $\mathfrak{E}_X$ сепарабельно, имеет континуальный вес, не метризуемо, не совершенно нормально, является примером не диадического компакта. Пусть $T[0;1]$ подалгебра $JD[0;1]$, состоящая из непрерывных слева и непрерывных в 0 функций. Тогда $\mathfrak{M}(T[0;1])$ есть фактор-пространство $\mathfrak{E}_X$, получаемое «склеиванием» идеалов M_τ^- и M_τ. $\mathfrak{M}(T[0;1])$ гомеоморфно пространству «две стрелки» (рисунок).

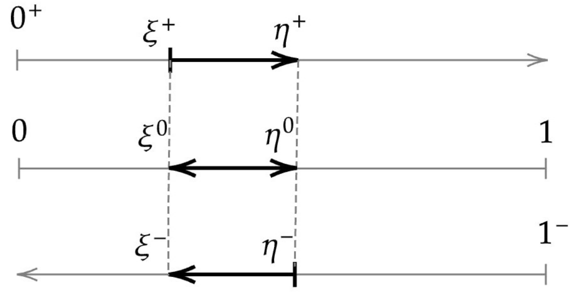

Рисунок – $\mathfrak{E}_{[0;1]}$ с выделенной окрестностью точки $(\xi;1)$

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф25МП-010).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 316 с.

2. Александров, П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров. – М. : Наука, 1977. – 368 с.

3. Александров, П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П. С. Александров, П. С. Урысон. – М. : Наука, 1971. – 144 с.

4. Люксембург, И. Л. Пространства максимальных идеалов алгебр разрывных функций / И. Л. Люксембург // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики, Белорус. гос. ун-т ; сост. Т. С. Бусел. – Минск : Беларус. навука, 2024. – Ч. 1. – С. 68–69.

5. Антоневич, А. Б. Алгебры разрывных функций и их непрерывное представление /А. Б. Антоневич, И. Л. Люксембург // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 30 янв. – 4 февр. 2025 г. / Воронеж. гос. ун-т ; Москов. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж : ВГУ, 2025. – С. 55–57.