а при $a > 0$ функция

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{4} + \frac{29}{30} - \frac{88+29a}{60+30a}(x+1), & x \in [-1;0), \\ \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{30} + \frac{32+a}{60+30a}(x-1), & x \in [0;1]. \end{cases}$$

На рисунке мы видим, что наличие δ-слагаемого в уравнении (1) вызывает излом графика решения в точке $x = 0$.

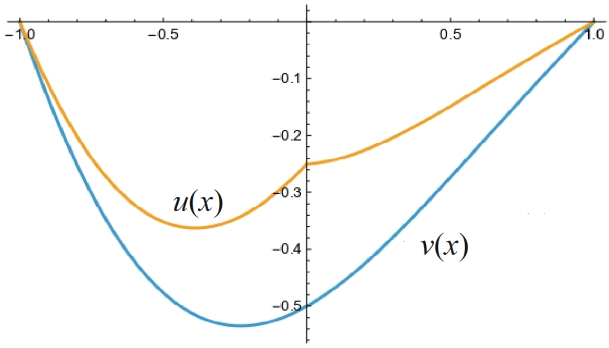

Рисунок – Графики функций $v(x)$ и $u(x)$ при $a = 2$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Изд. 4-е. – М. : Наука, 1981. – 512 с.

2. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фадеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 5. – С. 1011–1014.

УДК 519.65

М. В. ИГНАТЕНКО
Беларусь, Минск, БГУ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ЭРМИТА ОТНОСИТЕЛЬНО ПЯТИКРАТНЫХ УЗЛОВ

Пусть на $[a, b]$ заданы различные точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – узлы интерполирования, в которых известны конечные значения интерполируемой функции $f : [a, b] \to R$ и значения ее первых четырех производных.

Рассмотрим интерполяционную задачу типа Эрмита с узлами пятой кратности относительно алгебраической системы функций, состоящую в построении многочлена $P_{5n+4}(x) = \sum_{i=0}^{5n+4} a_i x^i$ степени не выше $5n+4$, удовлетворяющего условиям

$$P_{5n+4}^{(s)}(x_j) = f^{(s)}(x_j) \ (j = 0, 1, ..., n; \ s = 0, 1, 2, 3, 4) \qquad (1).$$

Коэффициенты a_i $(i = 0, 1, ..., 5n+4)$ многочлена $P_{5n+4}(x)$ находятся из системы уравнений (1) единственным образом. Приведем решение этой задачи в явном виде.

Теорема. *Для алгебраического многочлена Эрмита с узлами пятой кратности*

$$P_{5n+4}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^5(x)}{(x-x_k)^5[\omega'(x_k)]^5} \{f(x_k) \times$$

$$\times \left[1 + C_{1,k}(x-x_k) + C_{2,k}(x-x_k)^2 + C_{3,k}(x-x_k)^3 + C_{4,k}(x-x_k)^4\right] +$$

$$+f'(x_k)\left[(x-x_k) + C_{1,k}(x-x_k)^2 + C_{2,k}(x-x_k)^3 + C_{3,k}(x-x_k)^4\right] +$$

$$+f''(x_k)\left[(x-x_k)^2 + C_{1,k}(x-x_k)^3 + C_{2,k}(x-x_k)^4\right]/2+$$

$$+f'''(x_k)\left[(x-x_k)^3 + C_{1,k}(x-x_k)^4\right]/6 + f^{(4)}(x_k)(x-x_k)^4/24\Big\},$$

где функции

$$C_{1,k} = -\frac{5\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}, \ C_{2,k} = -\frac{5\omega'''(x_k)}{6\omega'(x_k)} + \frac{15}{4}\left[\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right]^2,$$

$$C_{3,k} = -\frac{35}{8}\left[\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right]^3 + \frac{5\omega''(x_k)\,\omega'''(x_k)}{2[\omega'(x_k)]^2} - \frac{5\omega^{(4)}(x_k)}{24\omega'(x_k)},$$

$$C_{4,k} = \frac{35}{8}\left[\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right]^4 - \frac{35[\omega''(x_k)]^2\omega'''(x_k)}{8[\omega'(x_k)]^3} + \frac{5}{12}\left[\frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right]^2 +$$

$$+\frac{5\omega''(x_k)\,\omega^{(4)}(x_k)}{8[\omega'(x_k)]^2} - \frac{\omega^{(5)}(x_k)}{24\omega'(x_k)} \ \ (k = 0, 1, ..., n); \ \omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

выполняются условия (1).

Если функция $f(x)$ имеет конечную производную $f^{(N+1)}(x)$ на наименьшем отрезке $[a, b]$, содержащем узлы $x_0, x_1, ..., x_n$ и точку интерполирования y, то существует точка $\xi = \xi(y)$, $a < \xi < b$, такая, что для погрешности

$$R_{5n+4}(f, y) = f(y) - P_{5n+4}(y)$$

алгебраического многочлена Эрмита с узлами пятой кратности $P_{5n+4}(x)$ справедливо [1] следующее представление:

$$R_{5n+4}(f, y) = \frac{f^{(5n+5)}(\xi)}{(5n+5)!}\omega^5(y).$$

Ряд интерполяционных операторных формул, представляющих решение задачи Эрмита с узлами произвольной кратности, основанных на тождественных преобразованиях функций, имеется в работе [2]. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографиях [3; 4].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений : учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб. : Изд–во С. Петерб. ун–та, 1998. – 472 с.

2. Янович, Л. А. О взаимосвязи интерполирования операторов и функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 3. – С. 9–16.

3. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск : Беларус. навука, 2016. – 281 с.

4. Янович, Л. А. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск : Беларус. навука, 2020. – 476 с.