

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2013. – 368 с.
2. Дайняк, В. В. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка / В. В. Дайняк, В. И. Корзюк, А. А. Протьюко // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 3. – С. 116–121.
3. Дайняк, В. В. Некоторые граничные задачи для линейного дифференциального уравнения пятого порядка / В. В. Дайняк, К. В. Латушкин // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXVI : материалы междунар. конф. «Воронежская весенняя математическая школа», Воронеж, 26–30 апр. 2024 г. / Воронеж. гос. ун-т ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж, 2024. – С. 110–112.

УДК 517.9

Д. Д. ЕЛЕЦ¹, Т. А. ЯЦУК²¹Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина²Беларусь, Брест, БрГТУ**ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

Пусть $f \in L_2[-1; 1]$, $a > 0$. Рассмотрим задачу нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным потенциалом

$$u''(x) - a\delta(x)u(x) = f(x) \quad (x \in (-1; 1)) \quad (1)$$

и удовлетворяющего граничным условиям

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (2)$$

В формуле (1) $\delta(x)$ – δ -функция Дирака [1, с. 82].

Основной вопрос, возникающий при изучении уравнений с обобщенными коэффициентами, состоит в определении понятия решения такого уравнения. Одной из первых работ, в которой был придан строгий

математический смысл понятию решения уравнения с дельтообразным коэффициентом, была статья Ф. А. Березина и Л. Д. Фаддеева [2]. В этой работе рассматривался оператор Шредингера с сингулярным потенциалом в трехмерном пространстве.

Заметим, что если $u(x)$ гладкое решение (1), (2), то для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(-1; 1)$ имеет место равенство [1, с. 101]:

$$\langle \delta(x)u(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x)u(0), \varphi(x) \rangle.$$

А поэтому левая часть (1) запишется как

$$u''(x) - a\delta(x)u(0). \quad (3)$$

Однако, если $u(0) \neq 0$, то левая часть (1) не принадлежит $L_2[-1, 1]$. Таким образом, $u(x)$ не может быть гладкой функцией.

Далее для простоты рассуждений будем считать, что $f \in C[-1; 1]$. Пусть также $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим семейство уравнений

$$u''(x) - a\delta_\varepsilon(x)u(x) = f(x) \quad (x \in (-1; 1)), \quad (4)$$

где $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \chi_{(0; \varepsilon)}(x)$ ($\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A). Нетрудно видеть, что $\delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(-1; 1)$.

На каждом из промежутков $[-1; 0]$, $(0; \varepsilon)$ и $[\varepsilon; 1]$ уравнение (4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть

$$u_1 : [-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_2 : (0; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_3 : [\varepsilon; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

есть общие решения (4) на соответствующих промежутках. Отметим, что каждая из функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ зависит от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных найдем из граничных условий: $u_1(-1) = 0$, $u_3(1) = 0$ и условий сопряжения в точках $x = 0$ и $x = \varepsilon$: $u_1(-0) = u_2(+0)$, $u_2(\varepsilon - 0) = u_3(\varepsilon + 0)$, $u_1'(-0) = u_2'(+0)$, $u_2'(\varepsilon - 0) = u_3'(\varepsilon + 0)$. Явные выражения для $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ не приводим ввиду их громоздкости. Таким образом, функция

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{при } x \in [-1; 0], \\ u_2(x), & \text{при } x \in (0; \varepsilon), \\ u_3(x), & \text{при } x \in [\varepsilon; 1] \end{cases}$$

является непрерывно дифференцируемой на $[-1; 1]$, удовлетворяет граничным условиям (2) и уравнению (4) за исключением $x = 0$ и $x = \varepsilon$.

Теорема. В каждой точке x отрезка $[-1; 1]$ существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon(x) =: u(x)$, где

$$u(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (x-t)f(t) dt + \frac{(x+1)(A + aA + B - C - D)}{2+a}, & x \in [-1; 0), \\ -\int_x^1 (x-t)f(t) dt + \frac{(x-1)(A - B - C - aC + D)}{2+a}, & x \in [0; 1], \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^0 tf(t)dt, \quad B = -\int_{-1}^0 f(t)dt, \quad C = -\int_0^1 tf(t)dt, \quad D = \int_0^1 f(t)dt.$$

Справедливы следующие утверждения

- (i) $u(x)$ непрерывна на $[-1; 1]$ и $u(-1) = u(1) = 0$;
- (ii) $u(x)$ имеет непрерывную производную на промежутках $[-1; 0)$ и $(0; 1]$, существуют $u'(-0)$ и $u'(0)$ и выполняется условие

$$u'(0) - u'(-0) = au(0);$$

- (iii) $u''(x) = f(x)$ при $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Пусть теперь u_g'' – вторая производная функции u в смысле теории обобщенных функций. Тогда для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(-1; 1)$ выполняется равенство $\langle u_g''; \varphi \rangle = \langle u''(x) + (u'(0) - u'(-0))\delta(x); \varphi \rangle$, которое с учетом утверждений (ii) и (iii) теоремы принимает вид

$$\langle u_g'' - au(0)\delta(x); \varphi \rangle = \langle f; \varphi \rangle.$$

Последнее равенство и утверждение (i) теоремы показывают, что $u(x)$ является решением задачи (1), (2).

Пример. Пусть $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Тогда решением задачи (1), (2) при $a = 0$ является функция

$$v(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{60}x - \frac{1}{2},$$

а при $a > 0$ функция

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{4} + \frac{29}{30} - \frac{88+29a}{60+30a}(x+1), & x \in [-1; 0), \\ \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{30} + \frac{32+a}{60+30a}(x-1), & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

На рисунке мы видим, что наличие δ -слагаемого в уравнении (1) вызывает излом графика решения в точке $x = 0$.

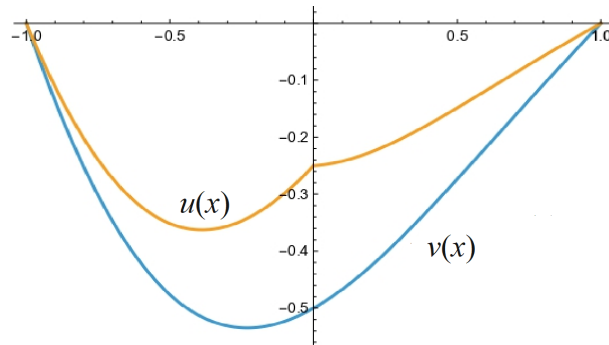


Рисунок – Графики функций $v(x)$ и $u(x)$ при $a = 2$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Изд. 4-е. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
2. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фадеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 5. – С. 1011–1014.

УДК 519.65

М. В. ИГНАТЕНКО

Беларусь, Минск, БГУ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ЭРМИТА ОТНОСИТЕЛЬНО ПЯТИКРАТНЫХ УЗЛОВ

Пусть на $[a, b]$ заданы различные точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ – узлы интерполирования, в которых известны конечные значения интерполируемой функции $f : [a, b] \rightarrow R$ и значения ее первых четырех производных.