УДК 517.946

В. В. ДАЙНЯК
Беларусь, Минск, БГУ

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В данной работе рассмотрена граничная задача типа Дирихле на плоскости, для уравнений четвертого порядка определенного вида с постоянными коэффициентами в главной части. С помощью методов функционального анализа доказана теорема об энергетических неравенствах, а также с помощью операторов осреднения с переменным шагом доказана теорема о существовании и единственности обобщённого решения рассматриваемых граничных задач.

Эти дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1)$ запишем в виде:

$$Lu = \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + a\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_0^2} + b\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + L_2 u = f(x), \tag{1}$$

где

$$L_2 u = a_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + p_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + p_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda(x)u.$$

Здесь a и b постоянные, коэффициенты полинома $L_2 u$ измеримы и ограничены.

Обозначим через Ω произвольную ограниченную область плоскости переменных x с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $n = (n_0, n_1)$ – единичный вектор нормали к поверхности $\partial\Omega$ и

$$L_0(n) = n_0^4 + an_0^2 n_1^2 + bn_1^4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$u|_{\partial\Omega^-} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^-} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $L_0(n) < 0$.

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать и сопряженную задачу, т. е.

$$L^*u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + a\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_0^2} + b\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + L_2^* u = g(x), \qquad (3)$$

$$u|_{\partial\Omega^+} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^+} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \qquad (4)$$

где $\partial\Omega^+$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $L_0(n) > 0$, L_2^* – формально сопряженный к L_2 оператор.

Условие 1. Коэффициенты уравнений (1)-(4) удовлетворяют соотношениям: 1) $b > 0$, 2) $4b - a^2 > 0$.

Пусть $H_0^s(\Omega)$ $(\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))$, $s = 1, 2, 3, 4$ – подпространства Соболева $H^s(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют граничным условиям (2) ((4)).

Задачу (1)-(2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = f \qquad (5)$$

с областью определения $D(\mathcal{L}) = H_0^4(\Omega)$, а задачу (3)-(4) – как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}^*v = g \qquad (6)$$

с областью определения $D(L^*) = \overset{\circ}{H}{}^4(\Omega)$.

Для доказательства разрешимость (5) при любых $f \in H_0^{-2}$, строим расширение L оператора $\mathcal{L}$ такое, что множество его значений $R(L)$ совпадает с пространством H_0^{-2}. Аналогично для оператора $\mathcal{L}^*$ строим расширение L^*.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *При выполнении условия 1 для любых* u *и* v *из* $H_0^2(\Omega)$, *при достаточно большом* $\lambda(x)$ *справедливы неравенства:*

$$||u||_{H_0^2(\Omega)} \leq C||Lu||_{H_0^{-2}}, \quad ||v||_{H_0^2(\Omega)} \leq C^*||L^*v||_{H_0^{-2}},$$

где постоянные C и C^* положительны и не зависят от функций u и v.

Теорема 2. *При выполнении условий* 1 *и достаточно большом* $\lambda(x)$ *для любого* $f \in H_0^{-2}$ $(g \in \overset{\circ}{H}{}^{-2})$ *существует и единственно обобщенное решение* $\mathrm{u} \in H_0^2(\Omega)$ $(v \in \overset{\circ}{H}{}_0^2(\Omega))$ *задачи* (1)-(2) ((3)-(4)).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2013. – 368 с.

2. Дайняк, В. В. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка / В. В. Дайняк, В. И. Корзюк, А. А. Протько // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 3. – С. 116–121.

3. Дайняк, В. В. Некоторые граничные задачи для линейного дифференциального уравнения пятого порядка / В. В. Дайняк, К. В. Латушкин // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXVI : материалы междунар. конф. «Воронежская весенняя математическая школа», Воронеж, 26–30 апр. 2024 г. / Воронеж. гос. ун-т ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж, 2024. – С. 110–112.

УДК 517.9

Д. Д. ЕЛЕЦ[1], Т. А. ЯЦУК[2]
[1]Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина
[2]Беларусь, Брест, БрГТУ

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Пусть $f \in L_2[-1;1]$, $a > 0$. Рассмотрим задачу нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным потенциалом

$$u''(x) - a\delta(x)u(x) = f(x) \ \ (x \in (-1;1)) \tag{1}$$

и удовлетворяющего граничным условиям

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

В формуле (1) $\delta(x)$ – δ-функция Дирака [1, с. 82].

Основной вопрос, возникающий при изучении уравнений с обобщенными коэффициентами, состоит в определении понятия решения такого уравнения. Одной из первых работ, в которой был придан строгий