

СЕКЦИЯ 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

А. Б. АНТОНЕВИЧ, В. А. БОРБУТ

Беларусь, Минск, БГУ

АБСОЛЮТНАЯ ЧАСТЬ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

Обратимое непрерывное отображение $\alpha : X \rightarrow X$ компактного метрического пространства X задает динамическую систему с дискретным временем и задает операторы, действующие в заданном пространстве $F(X)$ функций на X по формуле

$$Bu(x) = a_0(x)u(\alpha(x)), \quad (1)$$

где a_0 – заданная функция. Такие операторы называют *операторами взвешенного сдвига*, или *операторами композиции с весом*.

Операторы рассматриваемого вида и порожденные ими функциональные уравнения исследовались в работах многих авторов, поскольку они естественно возникают в теории динамических систем, в теории функционально-дифференциальных уравнений, теории аналитических функций, теории случайных блужданий и ряде других направлений.

В данной работе исследуется зависимость спектральных свойств операторов взвешенного сдвига от динамики отображения $\alpha : X \rightarrow X$ в случае отображений следующего вида. Непрерывное обратимое отображение $\alpha : X \rightarrow X$ компактного метрического пространства X называется *отображением типа Морса-Смейла*, если оно имеет конечное число неподвижных точек F_k ; $k = 1, 2, \dots, N + 1$, и для любой точки τ , не являющейся неподвижной, траектория $\alpha^n(\tau)$ при $n \rightarrow +\infty$ стремится к неподвижной точке, которую обозначим τ^+ , а при $n \rightarrow -\infty$ стремится к неподвижной точке, которую обозначим τ^- .

В пространствах Лебега $L_2(X, \mu)$ при условии согласования меры μ с отображением существует функция γ такая, что оператор $T_\alpha u(x) = \gamma(x)u(\alpha(x))$ является унитарным в пространстве $L_2(X, \mu)$ [1]. Поэтому

оператор (1) представляется в виде $B = aT_\alpha$, где $a(x) = \frac{1}{\gamma(x)}a_0(x)$ есть так называемый *приведенный коэффициент*.

Вид спектра такого оператора aT_α известен и задается через значения приведенного коэффициента [1]. При условии, что a есть непрерывная функция на X и $a(x) \neq 0$ для всех x спектром является кольцо

$$\Sigma(B) = \{\lambda : m \leq |\lambda| \leq M\},$$

где $m = \min |a(F_k)|$, $M = \max |a(F_k)|$.

При спектральном значении λ оператор $B - \lambda I$ необратим, но необратимые операторы могут обладать «хорошими» свойствами. Одним из таких свойств является односторонняя обратимость оператора.

Существенным спектром $\Sigma_{es}(B)$ будем называть множество λ , при которых оператор $B - \lambda I$ не имеет правого обратного и не имеет левого обратного.

Односторонняя обратимость оператора $B - \lambda I$ существенно связана с динамикой отображения α , которая описывается *графом Смейла*. Это ориентированный граф, вершинами которого являются неподвижные точки F_k , ориентированное ребро $F_k \rightarrow F_j$ входит в граф, если существует точка $\tau \in X$ такая, что $\tau^+ = F_j$, $\tau^- = F_k$.

Если $|\lambda| \neq |a(F_k)|$ для всех k , то при заданной функции a число λ задает *разбиение графа* на два подмножества

$$G^+(\alpha, \lambda; a) = \{F_k : |\lambda| > |a(F_k)|\}; \quad (2)$$

$$G^-(\alpha, \lambda; a) = \{F_j : |\lambda| < |a(F_j)|\}.$$

Разбиение графа называется *ориентированным вправо* (*ориентированным влево*), если любая дуга, соединяющая точку $F_k \in G^-(\alpha, \lambda; a)$ с точкой $F_j \in G^+(\alpha, \lambda; a)$, имеет ориентацию $(F_k \rightarrow F_j)$ (имеет ориентацию $(F_j \rightarrow F_k)$).

Теорема 1. [2] *Оператор $B - \lambda I$ обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда $|\lambda| \neq |a(F_k)|$ для всех k и разбиение (2) графа $G(\alpha)$ ориентировано вправо (влево).*

Из теоремы 1 следует, что спектр оператора B разбивается окружностями $|\lambda| = |a(F_k)|$ на N колец, часть из которых входит в существенный спектр. При этом в ряде примеров оказывается, что в существенный спектр всегда входит некоторый набор таких колец.

Пусть S есть подмножество множества неподвижных точек (вершин графа) и

$$m_S = \min\{|a(F_k)| : F_k \in S\}, \quad M_S = \max\{|a(F_k)| : F_k \in S\}.$$

Множество S будем называть *абсолютно спектральным*, если при любом коэффициенте a кольцо

$$K(a; S) = \{\lambda : m_S \leq |\lambda| \leq M_S\} \quad (3)$$

принадлежит существенному спектру и является максимальным в следующем смысле – существует коэффициент a_1 такой, что $a(F_k) = a_1(F_k)$, если $F_k \in S$, и при этом кольцо $K(a; S)$ является компонентой связности существенного спектра оператора $a_1 T_\alpha$, т. е. нет более широкого кольца, принадлежащего существенному спектру.

Объединение колец (3), соответствующих всем абсолютно спектральным множествам, будем называть *абсолютной частью существенного спектра*.

Вопрос заключается в получении описания абсолютно спектральных множеств, использующего только динамику отображения. Сформулируем основной результат в этом направлении.

Последовательность вершин графа $\{F_{k_1}, F_{k_2}, \dots\}$ называется *ориентированным циклом*, если она периодическая ($F_{k_j+P} = F_{k_j}$ при некотором $P > 0$) и соседние члены связаны соотношением $F_{k_i} \rightarrow F_{k_{i+1}}$.

Будем говорить, что вершина F_k эквивалентна вершине F_j , если существует ориентированный цикл, содержащий эти вершины.

Компонентой графа будем называть класс эквивалентных вершин.

Теорема 2. *Множество вершин графа является абсолютно спектральным тогда и только тогда, когда оно является компонентой графа Смейла.*

Следствие. *Абсолютная часть существенного спектра есть объединение колец $K(a; S_\nu)$, соответствующих компонентам S_ν графа Смейла.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневиц, А. Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А. Б. Антоневиц. – Минск : Университетское, 1988. – 232 с.

2. Antonevich, A. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points / A. Antonevich, Ju. Makowska // Complex Analysis and Operator Theory. – 2008. – Vol. 2. – P. 215–240.

УДК 517.956

А. И. БАСИК¹, Е. В. ГРИЦУК², О. В. БОЛТРУШКО¹

¹Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

²Беларусь, Брест, БрГТУ

ИНДЕКС КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^3$

В ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, гомеоморфной шару, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим систему четырех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & -b_2 \\ -b_2 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & b_2 & -a_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & -b_3 \\ -b_3 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_3 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где $U = (U_1(x), U_2(x), U_3(x), U_4(x))^T$ – неизвестная вектор-функция, T означает транспонирование, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $a_2, a_3, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Характеристическая матрица системы (1) имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & 0 \\ -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 & 0 & -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 \\ -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 & 0 & \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 \\ 0 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det \mathfrak{A}(\xi) = \left(\xi_1^2 + (a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2 + (b_2\xi_2 + b_3\xi_3)^2 \right)^2,$$

то, как нетрудно видеть, система (1) является эллиптической тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$, которое в дальнейшем предполагаем выполненным.