УДК 519.63

**В. М. ВОЛКОВ, Ц. ДУН**
Беларусь, Минск, БГУ

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ 2D-ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ

**Введение.** Численные особенности задач конвекции-диффузии преимущественно связаны с наличием малого параметра при старших производных [1]. С одной стороны, это порождает характерное поведение решения в виде пограничного слоя, требующее адекватной формулировки дискретной модели для численного анализа [2]. С другой стороны, преобладание конвективных слагаемых приводит к существенному доминированию кососимметричной составляющей пространственного оператора дискретной модели, что негативно сказывается на сходимости итерационных методов при решении стационарных задач [1].

В настоящей работе предлагаются и исследуются эффективные алгоритмы реализации спектральных методов на основе полиномов Чебышева [3] с использованием стабилизированного итерационного метода бисопряженных градиентов [4]. Основное внимание уделяется вопросам выбора переобусловливателя и техники их обработки [5]. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

**Постановка задачи и численный метод.** Рассмотрим краевую задачу для стационарного уравнения конвекции–диффузии в прямоугольной области $\Omega$ с границей $\partial\Omega$

$$v_x\frac{\partial u}{\partial x}+v_y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{Pe}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f,\quad (x,y)\in\Omega=[0,1]\times[0,1],\quad (1)$$

$$u(x,y)=0,(x,y),\ (x,y)\in\partial\Omega \quad (2)$$

$$v_x=v_x(x,y),\ v_y=v_y(x,y),\ \operatorname{div}\vec{v}=0. \quad (3)$$

Поле скоростей может быть задано с помощью некоторой гармонической функции $\Psi=\Psi(x,y)$:

$$v_x=\frac{\partial\Psi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\Psi}{\partial y}. \quad (4)$$

Проведен сравнительный анализ спектрального метода Чебышева и разностного метода второго порядка точности с центральной формулой аппроксимации первых производных для решения задачи (1)–(3).

Реализация дискретных моделей проводилась на основе стабилизированного итерационного метода бисопряженных градиентов с различными типами переобусловливателей: на основе неполной LU - факторизации с регулируемым порогом заполнения [6] (iLU) и симметричной части дискретного (разностного) аналога оператора конвекции – диффузии с постоянными коэффициентами, реализуемого с помощью алгоритма Бартелса – Стюарта (B-S).

**Результаты численных экспериментов.** В качестве тестовой задачи (1)–(4) использовано поле скоростей $\Psi(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ и правая часть, обеспечивающая точное решение, имеющего признаки особенностей типа пограничного слоя. На рисунке 1 представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующих эффективность используемых переобусловливателей при решении задачи (1)–(3), $Pe = 1000$, на сетке размером $n \times n$.

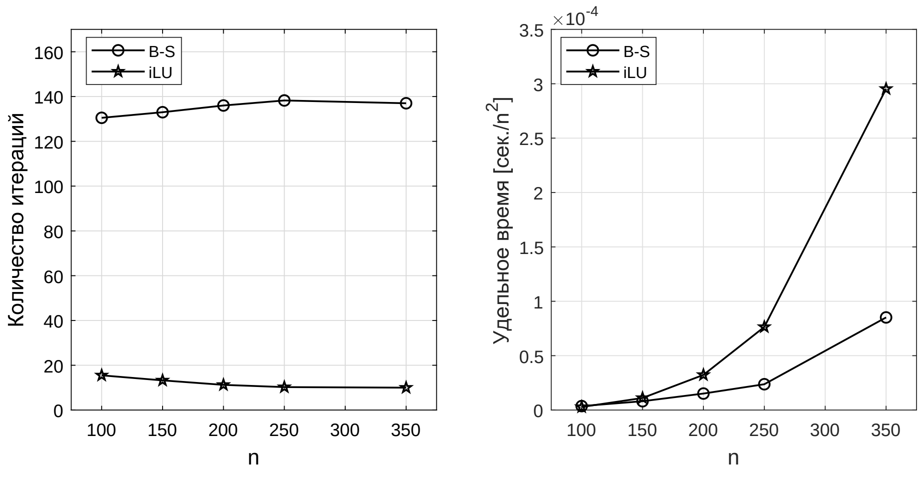


Рисунок 1 – Зависимости количества итераций и удельного времени вычислений от количества узлов сетки

Заметим, что количество итераций практически не возрастает при увеличении размерности сетки. Время решения задачи при использовании переобусловливателя iLU при этом возрастает быстрее в силу больших вычислительных затрат на построение данного переобусловливателя.

Сравнение эффективности спектрального и разностного методов, как и в случае других эллиптических задач [7], при достаточной гладкости решения показывает существенное преимущество спектрального метода (рисунок 2).

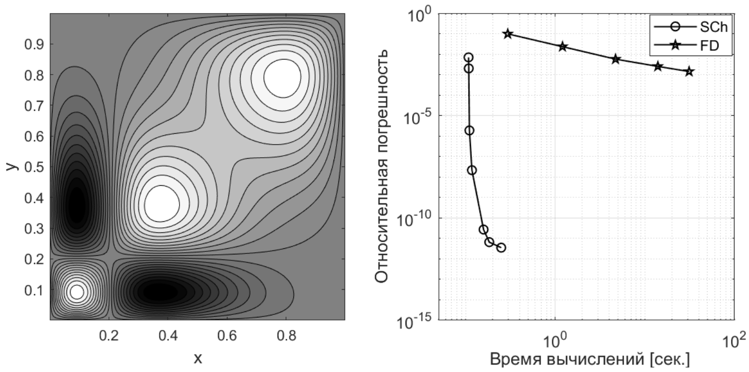


Рисунок 2 – Вид решения задачи и время вычислений для достижения заданной точности для спектрального (SCh) и разностного (FD) методов

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Самарский, А. А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Либроком, 2015. – 248 с.

2. Бахвалов, Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859.

4. Trefethen, L. N. Spectral Methods in MATLAB / L. N. Trefethen. – Philadelphia : SIAM, 2000. – 160 p.

5. Van der Vorst, H. A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. Van der Vorst // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1992. – Vol. 13, № 2. – P. 631–644.

6. Li, N. Crout versions of ILU for general sparse matrices / N. Li, Y. Saad, E. Chow // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2003. – Vol. 25, № 2. — С. 716–728.

7. Волков, В. М. О реализации спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Ц. Дун // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 2. – С. 82–92.