

3. Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является слабой тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.

4. Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовой подгруппы разрешимой группы G является слабой тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номер государственной регистрации 20211467).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
2. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some тсс-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – Vol. 20, № 2. – 18 p. – DOI: 10.1142/S0219498821500201.
3. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Archiv der Mathematik. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
4. Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
5. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 5. – P. 889–895.
6. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.

УДК 512.542

А. А. ТРОФИМУК

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДААННЫМИ СИСТЕМАМИ УСЛОВНО ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Более слабое

условие перестановочности было приведено в работе [1]: подгруппы A и B группы G называются *сс-перестановочными* в G , если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$. Подгруппа A группы G называется *сс-перестановочной* в G , если A сс-перестановочна с каждой подгруппой группы G .

Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G , если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A перестановочна с каждой подгруппой из T . В [2] исследованы группы с полунормальными подгруппами. Вполне естественно рассмотреть следующее

Определение ([3]). Подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* подгруппой в G , если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A сс-перестановочна с каждой подгруппой из T .

В работе [4] установлена принадлежность группы G с заданными системами условно полунормальных подгрупп к произвольной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Здесь $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп.

Теорема 1 ([4]). 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ и H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в каждом из следующих случаев:

1.1) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из H является условно полунормальной подгруппой в G ;

1.2) все максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы из H являются условно полунормальными подгруппами в G ;

1.3) если H разрешима и все максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы из $F(H)$ являются условно полунормальными подгруппами в G .

2. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая формацию всех p -нильпотентных групп, и H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы из силовской p -подгруппы P из H являются условно полунормальными подгруппами в G и $N_G(P)$ p -нильпотентна, то $G \in \mathfrak{F}$.

Следствие 1.1. [3] Пусть G – группа. Тогда G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:

1) в группе G все максимальные (силовские, 2-максимальные) подгруппы являются условно полунормальными;

2) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из

нормальной подгруппы H группы G является условно полунормальной в G и G/H сверхразрешима;

3) в разрешимой группе G все максимальные подгруппы из произвольной нециклической силовой подгруппы являются условно полунормальными.

Следствие 1.2. [1] Пусть G – группа. Тогда группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:

- 1) в группе G все 2-максимальные подгруппы *сс-перестановочны*;
- 2) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из G является *сс-перестановочной* в G .

Разработанные в теореме 1 методы позволили установить строение группы, представимой в виде произведения условно полунормальных подгрупп.

Теорема 2. [4] Пусть A и B – условно полунормальные подгруппы группы G и $G = AB$.

1. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $A, B \in \mathfrak{F}$ и коммутант G' нильпотентен, то $G \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{D}$. Если $A, B \in \mathfrak{F}$ и $(|A|, |B|) = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$. Здесь $\mathcal{D}$ – формация всех групп, имеющих силовскую башню сверхразрешимого типа.

Следствие 2.1. [5] Предположим, что $G = AB$, где $A, B \in \mathfrak{U}$. Пусть коммутант G' нильпотентен. Если подгруппа A *сс-перестановочна* с каждой подгруппой из подгруппы B и подгруппа B *сс-перестановочна* с каждой подгруппой из подгруппы A , то G сверхразрешима.

Понятие p -силовайзера было введено Гашюцем [6]. Подгруппа S группы G называется p -силовайзером p -подгруппы R в G , если S – максимальная подгруппа в G , в которой R является силовой p -подгруппой. Гашюц [6] показал, что p -силовайзеры данной p -подгруппы в разрешимой группе не всегда сопряжены, а также привел некоторые достаточные условия, при которых p -подгруппа имеет сопряженные p -силовайзеры.

В настоящей работе исследованы группы, у которых каждая максимальная подгруппа из силовой p -подгруппы P имеет условно полунормальный силовайзер. Доказана следующая теорема.

Теорема 3. 1. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и G p -разрешима. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет условно полунормальный силовайзер, то G p -сверхразрешима.

2. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер, который является условно полунормальной подгруппой в G , то каждый неабелевый композиционный pd -фактор группы G изоморфен одной из следующих подгрупп: $PSL(2, 7)$ и $p = 7$; $PSL(2, 11)$ и $p = 11$, M_{11} и $p = 11$; M_{23} и $p = 23$; $PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ – простое число Ферма; $PSL(n, q)$, $n \geq 3$ – простое, $(n; q - 1) = 1$ и $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$; A_p и $p \geq 5$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф23РНФ-237).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.

2. Монахов, В. С. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 1. – С. 148–159.

3. Трофимук, А. А. О сверхразрешимости группы с заданными системами условно полунормальных подгрупп / А. А. Трофимук // Труды Института математики. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 81–90.

4. Trofimuk, A. A. Finite groups with given systems of conditionally seminormal subgroups / A. A. Trofimuk // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No 12. – P. 6624–6632.

5. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2006. – Vol. 68, No 3–4. – P. 433–449.

6. Gaschütz, W. Sylowisatoren / W. Gaschütz // Mathematische Zeitschrift. – 1971. – Vol. 122, No 4. – P. 319–320.