УДК 512.542

П. А. ПАВЛУШКО, А. А. ТРОФИМУК
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ *tcc*-ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы A и B группы G называются cc-*перестановочными в* G (*условно перестановочными*) [1], если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$.

В последнее десятилетие активно развивается направление, связанное с изучением строения групп с заданными системами условно перестановочных подгрупп. Очевидно, что если в группе подгруппа перестановочна со всеми подгруппами группы, то она перестановочна и со всеми подгруппами из добавления к ней. Так, в работе [2] введено понятие tcc-подгруппы (подгруппа A группы G называется tcc-*подгруппой* в группе G, если в G существует подгруппа Y такая, что $G = AY$ и каждая подгруппа из A cc-перестановочна с каждой подгруппой из Y. В [2] также получен целый ряд признаков сверхразрешимости группы с заданными системами tcc-подгрупп.

Сузив множество перестановочных подгрупп из подгруппы и добавления к ней, введем следующее

Определение. Подгруппа A группы G называется *слабой* tcc-*подгруппой в* G, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$;

2) каждая нормальная подгруппа из A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T.

Очевидно, что каждая tcc-подгруппа группы G является слабой tcc-подгруппой группы G, но обратное не всегда выполняется. Например, в симметрической группе S_4 знакопеременная подгруппа A_4 является слабой tcc-подгруппой в G, но не является tcc-подгруппой.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. 1. *Пусть A и B – слабые* tcc-*подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы, то G сверхразрешима.*

2. *Пусть $G = AB$ – произведение подгрупп A и B. Если все силовские подгруппы из A и из B являются слабыми* tcc-*подгруппами в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 1.1. *Пусть A и B – слабые* tcc-*подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B p-сверхразрешимы, то G p-сверхразрешима.*

Из теоремы 1 и следствия 1.1 вытекают результаты работ [1–4], представленных в следствии 1.2.

Следствие 1.2. 1. *Пусть $G = AB$ – тотально перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G сверхразрешима,* [3, теорема 3.1].

2. *Пусть $G = AB$ –* tcc-*перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G сверхразрешима,* [1, теорема A].

3. *Пусть $G = AB$ – произведение сверхразрешимых* tcc-*подгрупп A и B. Тогда G сверхразрешима,* [2, теорема 4.1].

4. *Пусть $G = AB$ – тотально перестановочное произведение p-сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G p-сверхразрешима,* [4, лемма *].

5. *Пусть $G = AB$ –* tcc-*перестановочное произведение p-сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G p-сверхразрешима,* [3, теорема 4.1].

6. *Пусть $G = AB$ – произведение p-сверхразрешимых* tcc-*подгрупп A и B. Тогда G p-сверхразрешима,* [2, теорема 4.1].

7. *Если все силовские подгруппы из A и из B являются* tcc-*подгруппами в $G = AB$, то G сверхразрешима,* [2, теорема 4.2].

Группы, у которых 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп, минимальные подгруппы удовлетворяют некоторому типу перестановочности, исследовались многими авторами, (см., например, литературу в [5; 6]).

В теореме 2 изучено строение конечной группы, у которой 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются слабыми tcc-подгруппами.

Теорема 2. 1. *Если каждая максимальная (силовская) подгруппа из G является слабой* tcc-*подгруппой в G, то группа G сверхразрешима.*

2. *Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из G является слабой* tcc-*подгруппой в G, то группа G сверхразрешима.*

3. *Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является слабой* tcc-*подгруппой в G, то группа G сверхразрешима.*

4. *Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы G является слабой* tcc-*подгруппой в G, то группа G сверхразрешима.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (*ГПНИ «Конвергенция*-2025*», номер государственной регистрации* 20211467).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.

2. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – Vol. 20, № 2. – 18 p. – DOI: 10.1142/S0219498821500201.

3. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Archiv der Mathematik. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.

4. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.

5. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 5. – P. 889–895.

6. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ-permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.

УДК 512.542

А. А. ТРОФИМУК

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ УСЛОВНО ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Более слабое