

УДК 512.542

Д. Г. НОВИКОВА, М. М. СОРОКИНА

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

**СВОЙСТВА КЛАССА ГРУПП, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО
 $\mathfrak{F}^\omega$ -ИНЪЕКТОРАМИ**

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный класс групп. Понятие $\mathfrak{F}$ -инъектора группы было введено в рассмотрение в совместной работе Б. Фишера, В. Гашюца и Б. Хартли [1]. В настоящее время $\mathfrak{F}$ -инъекторы в конечных группах достаточно хорошо изучены, установлены их связи с другими подгруппами в группах, описаны их свойства в зависимости от свойств класса $\mathfrak{F}$ (например, [2; 3]). В [4] были определены $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторы групп и установлены их простейшие свойства. Пусть ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в G , если H – $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в G и для каждой субнормальной ω -подгруппы K группы G пересечение $H \cap K$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в K [4]. В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, понятие $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора совпадает с понятием $\mathfrak{F}$ -инъектора группы (например, [3, с. 564]). Через $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ и $\text{Inj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ обозначаются соответственно совокупности всех $\mathfrak{F}$ -инъекторов и всех $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов группы G .

В монографии [3] для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, содержащегося в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп, и произвольного класса групп $\mathfrak{H}$ был введен в рассмотрение класс групп $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$, состоящий из всех групп $G \in \mathfrak{S}$, удовлетворяющих условию $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathfrak{H}$. Отметим, что для указанного класса групп $\mathfrak{F}$ и любой группы $G \in \mathfrak{S}$ множество $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ непусто (например, [3]).

Пусть $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – произвольные классы групп. Следуя [3], определим класс групп $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$ следующим образом:

$$\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{B} \mid \emptyset \neq \text{Inj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) \subseteq \mathfrak{H}\}.$$

В теореме 1 проводится исследование свойств данного класса.

Через $\pi(G)$ обозначается совокупность всех простых делителей порядка группы G ; G' – коммутант группы G . Группа G называется ω -группой, если $\pi(G) \subseteq \omega$ [5, с. 250]. Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем Q^ω -замкнутым,

если из того, что $G \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная ω -подгруппа группы G , всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$; R_0^ω -замкнутым, если из того, что $G/N_1, G/N_2 \in \mathfrak{F}$, где N_1, N_2 – нормальные ω -подгруппы группы G , всегда следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$. Отметим, что всякий Q -замкнутый класс групп является Q^ω -замкнутым для любого множества ω . Всякий R_0 -замкнутый класс групп является R_0^ω -замкнутым для любого множества ω . В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, понятия Q -замкнутого и Q^ω -замкнутого (R_0 -замкнутого и R_0^ω -замкнутого) классов групп совпадают.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, ω – непустое множество простых чисел, $\mathfrak{B} = \{G \in \mathfrak{S} \mid \pi(G') \subseteq \omega\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $\mathfrak{H}$ – Q^ω -замкнутый класс групп, то класс $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$ также является Q^ω -замкнутым.

2) Если $\mathfrak{H}$ – R_0^ω -замкнутый класс групп, то класс $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$ также является R_0^ω -замкнутым.

В случае, когда ω совпадает с множеством $\mathbb{P}$, из теоремы 1 вытекает следующий результат. Отметим, что при $\omega = \mathbb{P}$, наряду с обозначением $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$, используется обозначение $\mathfrak{F} \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Если класс групп $\mathfrak{H}$ является формацией, то класс $\mathfrak{F} \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$ также является формацией.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fischer, B. Injektoren Endlicher Auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Mathematische Zeitschrift. – 1967. – Vol. 102, No 5. – P. 337–339.
2. Ballester-Bolinchés, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinchés, L. M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 381 p.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Новикова, Д. Г. Об одном свойстве $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов конечных групп / Д. Г. Новикова, М. М. Сорокина // Теоретические и прикладные аспекты естественно-научного образования в эпоху цифровизации : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Брянск, 11–12 апр. 2024 г. – Брянск : РИСО БГУ, 2024. – С. 148–150.
5. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 271 с.