

4. Хуан, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А. Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 210–220.

5. 5. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Archiv der Mathematik – 1989. – No 53. – P. 318–326.

6. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, P. Shum, A. N. Skiba // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2006. – Т. 68, No 3–4. – P. 433–449.

УДК 512.542

А. С. НЕСТЕРОВ, М. М. СОРОКИНА

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

О МИНИМАЛЬНЫХ σ_Ω -КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. В теории классов конечных групп важную роль играют функциональные методы, с помощью которых были построены локальные (В. Гашюц, 1963), композиционные (Л. А. Шеметков, 1978), ω -локальные (Л. А. Шеметков, 1984), $\mathfrak{L}$ -композиционные (А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, 1999) формации, где ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, $\mathfrak{L}$ – непустой подкласс класса $\mathfrak{J}$ всех простых групп (например, [1]). Серии ω -векрных и Ω -расслоенных формаций (В. А. Ведерников, 1999) включают ω -локальные и $\mathfrak{L}$ -композиционные (при $\Omega = \mathfrak{L}$) формации соответственно. Важное место в современной алгебре занимает разработанная А. Н. Скибой σ -теория конечных групп, с помощью методов которой были построены σ -локальные (А. Н. Скиба, 2017), Бэра σ -локальные (В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова, А. Н. Скиба, 2019), $\bar{\omega}$ -векрные (М. М. Сорокина, А. А. Горепекина, 2021) формации конечных групп, σ -локальные (В. Го, Ли Чжан, Н. Т. Воробьев, 2020), $\omega\sigma$ -векрные и $\Omega\zeta$ -расслоенные (О. В. Камозина, 2020) классы Фиттинга конечных групп, σ_Ω -расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных T -групп (Е. Н. Бажанова, 2023). С помощью развития понятия Ω -расслоенной формации конечных групп в работе [3] были построены σ_Ω -расслоенные формации конечных групп, где σ_Ω – произвольное разбиение класса Ω . Одним из видов

σ_Ω -расслоенных формаций являются σ_Ω -канонические формации. В теореме 1 изучаются минимальные σ_Ω -канонические формации, т. е. такие неединичные σ_Ω -канонические формации, которые не содержат нетривиальных σ_Ω -канонических подформаций.

Используемые обозначения и определения стандартны (например, [1]). Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией (классом Фиттинга), если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений (относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп). Для непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы G . Пусть $\mathfrak{G}$ – класс всех конечных групп, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых групп, $\mathfrak{E}$ – класс всех единичных групп; $(\mathfrak{X})$ – класс групп, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$. Через $K(G)$ обозначается класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $K(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} K(G)$. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – классы групп. Произведением классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называется класс групп $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid \text{существует } N \triangleleft G, \text{ где } N \in \mathfrak{F}_1 \text{ и } G/N \in \mathfrak{F}_2)$.

Следуя [4], для любого непустого подкласса Δ класса $\mathfrak{I}$ будем полагать: $\mathfrak{G}_\Delta = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \Delta)$; $\mathfrak{G}_{\Delta'} = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \cap \Delta = \emptyset)$; $O_\Delta(G) = \mathfrak{G}_\Delta$ -радикал группы G .

Пусть Ω – произвольный непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, σ_Ω – произвольное разбиение класса Ω , т. е. $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$, где Ω_i – непустой класс групп для любого $i \in I$, $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ и $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ для любых $i, j \in I, i \neq j$. Для произвольной группы G полагаем

$$\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap K(G) \neq \emptyset\}.$$

Функция вида

$$\varphi : \sigma_\Omega \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\},$$

удовлетворяющая условию $\mathfrak{G}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, называется *формационно-радикальной σ_Ω -функцией* или коротко *$\sigma_\Omega FR$ -функцией*. Функция вида

$$f : \sigma_\Omega \cup \{\sigma_\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\sigma_\Omega') \neq \emptyset$, называется *формационной σ_Ω -функцией* или коротко *$\sigma_\Omega F$ -функцией*.

Пусть φ и f – некоторые $\sigma_\Omega FR$ -функция и $\sigma_\Omega F$ -функция соответственно. Формация вида $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$ называется σ_Ω -расслоенной формацией и обозначается $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega F(f, \varphi)$. Функция f называется *спутником*, а функция φ – *направлением* σ_Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ [3].

Неединичная σ_Ω -расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с направлением φ называется *минимальной* σ_Ω -расслоенной формацией с направлением φ , если она не содержит собственных σ_Ω -расслоенных подформаций с направлением φ , отличных от $\mathfrak{E}$.

σ_Ω -расслоенная формация $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega F(f, \varphi)$ называется σ_Ω -канонической, если $\varphi(\Omega_i) = \mathfrak{E}_{\Omega_i'} \mathfrak{E}_{\Omega_i}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Через $\sigma_\Omega KF(G)$ обозначается σ_Ω -каноническая формация, порожденная группой G , т. е. пересечение всех σ_Ω -канонических формаций, содержащих группу G .

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega KF(G)$, где G – простая группа такая, что $K(G) \subseteq \Omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ_Ω -канонической формацией.

В случае, когда σ_Ω – такое разбиение класса Ω , что для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ имеет место равенство $\Omega_i = (A)$ для некоторой группы $A \in \mathfrak{J}$, из теоремы 1 вытекает известный результат для Ω -канонических формаций ([5], с. 48).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
2. Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable Subgroups of Finite Groups / A. N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 79–82.
3. Сорокина, М. М. О спутниках σ_Ω -расслоенных формаций / М. М. Сорокина, А. С. Нестеров // Дискретная математика. – 2023. – Т. 36, № 1. – С. 103–115.
4. Ведерников, В. А. Ω -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 125–144.
5. Коптюх, Д. Г. Ω -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / Д. Г. Коптюх, О. А. Хомякова // Вестник Брянского государственного университета. – 2008. – № 4. – С. 46–49.