

4. Finite groups in which modularity is a transitive relation / A. M. Liu, W. Guo, I. N. Safonova, A. N. Skiba // Archiv der Mathematik. – 2023. – Vol. 121. – P. 111–121.

5. Finite groups in which σ -quasinormality is a transitive relation / A. M. Liu, W. Guo, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Journal of Algebra. – 2024. – Vol. 658. – P. 869–887.

6. Iwasawa, K. Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen / K. Iwasawa // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Section I. – 1941. – Vol. 4. – P. 171–199.

7. A criterion for modularity of the subgroup lattice of a finite soluble group / A. M. Liu, S. Wang, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, No 3. – 23 p. – DOI: 10.1142/S0219498825503785.

УДК 517.977

О. Б. ЦЕХАН

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

О ДЕКОМПОЗИЦИОННОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ И УПРАВЛЕНИЮ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Введение. Сингулярно возмущенные системы (далее – СВС) являются *математическими моделями динамических систем*, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами. Примерами являются электрические сети с очень маленькими индуктивностями или емкостями, химические реакции или биологические системы с очень разными скоростями процессов, механические системы с очень легкими или жесткими компонентами. Динамика многотемповых систем может быть описана в стандартной форме системами дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. Наличие запаздывания отражает инерционность процессов или пространственную распределенность в реальных системах и приводит к моделям, описываемым функционально-

дифференциальными уравнениями. Примеры СВС с запаздыванием (далее – СВСЗ) – модель нейросистемы, уравнение подсолнечника, модель динамики ядерного реактора, модель следования за автомобилем [1].

При решении задач теории управления для СВС возникают проблемы: высокая размерность, нерегулярная зависимость от параметра условий структурных свойств, законов управления и наблюдения. Значения малого параметра могут быть неизвестны, поэтому стремятся получать условия наличия у СВС тех или иных свойств не только при некотором фиксированном значении малого параметра, а для всех достаточно малых его значений и важно, чтобы условия не зависели от параметра.

Применение асимптотических методов и методов разделения движений позволяет решить эти проблемы и свести исследование СВС к анализу регулярно возмущенных независимых подсистем в разных масштабах времени, описывающих движения с различными скоростями. Декомпозиция СВС по темпам изменения переменных позволяет решать задачи управления отдельно для медленных и быстрых переменных [2].

Один из подходов к декомпозиции СВС основан на использовании замены переменных [3]. Порожденный такой заменой оператор преобразует оператор СВС без запаздывания к блочно-диагональному виду, что соответствует расщеплению СВС на разделенные по темпам системы меньшей размерности, чем исходная, при этом в отличие от исходной эти подсистемы регулярным образом зависят от малого параметра.

Наличие запаздывания в СВС вносит принципиальные сложности в разработку методов декомпозиционных преобразований, что связано с бесконечномерностью пространства состояний систем с запаздыванием. Для СВС с «немалым» запаздыванием возникают следующие *проблемы*: 1) конечномерное преобразование [2; 3], примененное к СВСЗ, приводит лишь к частичной декомпозиции системы, что обусловлено нелокальным действием оператора системы с запаздыванием; 2) в общем случае невозможно преобразовать СВСЗ с пространством состояний кусочно-непрерывных функций на отрезке длины запаздывания в систему с разделенными движениями в том же функциональном пространстве.

Постановка задачи. Описание подхода к декомпозиции. В работе рассматривается линейная нестационарная сингулярно возму-

щенная система управления с наблюдаемым выходом и запаздыванием по состоянию (далее – ЛНСВСЗ) вида ($T \triangleq [t_0, t_1]$)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_{10}(t)x(t) + A_{11}(t)x(t-h) + A_{20}(t)y(t) + A_{21}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu \dot{y}(t) &= A_{30}(t)x(t) + A_{31}(t)x(t-h) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t), \quad t \in T, \\ v(t) &= C_{10}(t)x(t) + C_{11}(t)x(t-h) + C_{20}(t)y(t) + C_{21}(t)y(t-h), \quad t \in T, \quad (1) \\ (x(\theta), y(\theta)) &= (\phi(\theta), \psi(\theta)), \quad \theta \in T_h \triangleq [t_0 - h, t_0].\end{aligned}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ – медленная переменная, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ – быстрая переменная, μ – параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $h = \text{const} > 0$ – запаздывание, $A_{ij}(t)$, $i = \overline{1, 3}$, $j = 0, 1$, $A_4(t)$, $B_i(t)$, $C_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $t \in T$, – непрерывные на T матричные функции подходящих размеров, $u(t)$ – функция управления, $u(\cdot) \in L^2[T; \mathbb{R}^r]$, $\phi(\theta), \psi(\theta)$, $\theta \in T_h$ – заданные кусочно-непрерывные на T_h функции, $v(t)$ – выходная функция.

Ставится *задача* построения эквивалентного преобразования, обобщающего расщепляющее преобразование [3] на ЛНСВСЗ (1). При этом надо, чтобы декомпозиционное преобразование сохраняло структурные свойства системы с запаздыванием и было обратимым. Эта задача впервые решена автором на основе операторного подхода, представления оператора правой части системы в кольце полиномов от оператора запаздывания и использования нелокальных операторов преобразования [4].

Для корректного применения метода преобразований к декомпозиции ЛНСВСЗ обосновано вложение ЛНСВСЗ в семейство систем с запаздыванием в расширенном пространстве состояний с оператором в кольце степенных рядов. Это позволяет расширить класс допустимых замен переменных и построить нелокальное обратимое расщепляющее преобразование ЛНСВСЗ. При этом разделенная по темпам изменения переменных система оказывается системой с бесконечным запаздыванием с исчезающей памятью. На основе асимптотических методов построено семейство обратимых аппроксимаций расщепляющего преобразования, приводящих ЛНСВСЗ к эквивалентным разделенным по временным шкалам подсистемам с конечным запаздыванием.

Эквивалентные преобразования. Представим правую часть ЛНСВСЗ (1) в операторной форме, введя оператор дифференцирования $p \triangleq \frac{d}{dt}$ и оператор чистого запаздывания e^{-ph} : $e^{-ph}x(t) = x(t - h)$.

Обозначим $\mathcal{M} = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$,

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = A_0(t) + A_1(t) e^{-ph} \in \mathcal{A},$$

$$\mathbf{C}(t, e^{-ph}) = C_0(t) + C_1(t) e^{-ph} \in \mathcal{C},$$

$$C_0(t) = (C_{10}(t), C_{20}(t)), \quad C_1(t) = (C_{11}(t), C_{21}(t)),$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{20} \\ A_{30} & A_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{31} & 0 \end{pmatrix},$$

и определим множества $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{B}_\mu$ и $\mathcal{C}$ непрерывных на T операторов $\mathbf{A}_\mu$ правой части свободной системы, B_μ управляющей части и $\mathbf{C}$ выхода (1):

$$\mathbf{A}_\mu \triangleq \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}(t, e^{-ph}) \in \mathcal{A}_\mu,$$

$$B_\mu \triangleq B(t, \mu) = \mathcal{M}^{-1} B(t) \in \mathcal{B}_\mu.$$

Здесь и далее для любого оператора $\mathcal{P}$ будем обозначать $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{P}$. Тогда ЛНСВСЗ (1) можно записать в виде:

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) z(t) + B(t, \mu) u(t),$$

$$v(t) = \mathbf{C}(t, e^{-ph}) z(t), \quad z(t) = \text{col}(x, y),$$

и отождествить с тройкой операторов $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu, \mathbf{C}) \in (\mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}_\mu, \mathcal{C})$.

Погрузим систему $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu, \mathbf{C})$ (1) в семейство систем. Для этого продолжим с T на $(-\infty, t_1]$ матричные функции системы (1) так, что $A_{ij}(t)$, $i = \overline{1, 3}$, $j = 0, 1$, $A_4(t)$ ограничены, непрерывно дифференцируемы. Функции $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ доопределим влево тождественно нулями.

Обозначим $T_{kh} \triangleq [t_0 - (k+1)h, t_0]$, $k = 0, 1, \dots$. Пусть $M_j^m(t)$, $m, j = \overline{0, k}$, $-n \times n$ -матричные функции с элементами из кольца кусочно-непрерывных на $T_{kh} \cup T$ функций. Погрузим классы операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\mu$ в семейства классов $\mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_{\mu k}$, $k = 0, 1, \dots$ операторов

$$\mathbf{O}_k(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{m=0}^k \mu^m M_j^m(t) e^{-jph} \in \mathcal{O}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{O}_{\mu k} \in \mathcal{O}_{\mu k}.$$

Введем также группу $\mathcal{O}_\infty$ операторов

$$\mathbf{O}_\infty(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m M_j^m(t) e^{-jph}$$

с элементами из кольца $\overline{PC}((-\infty, t_1]; \mathbb{R})[[\mu, e^{-ph}]]$ формальных степенных рядов от μ, e^{-ph} над кольцом кусочно-непрерывных ограниченных на $(-\infty, t_1]$ функций и класс $\mathcal{O}_{\mu\infty}$. В классах $\mathcal{O}_k, \mathcal{O}_{\mu k}, k = 0, 1, \dots, \mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{O}_{\infty}$ выделим подклассы $\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{\mu k}, k = 0, 1, \dots, \mathcal{A}_{\mu\infty}, \mathcal{A}_{\infty}$ операторов, для которых $M_0^0(t), M_1^0(t)$ имеют вид $A_0(t), A_1(t)$ и все остальные $M_j^m(t) \equiv 0, t \in T$. Таким образом на расширенном пространстве состояний $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$ определены вложенные классы операторов такие, что

$$\mathcal{A}_{\mu k} \subset \mathcal{A}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{O}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{A}_{\mu k} \subset \mathcal{A}_{\mu\infty} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}, k = 0, 1, \dots$$

Аналогично введем вложенные системы операторов управляющей части и выхода ЛНСВСЗ (1) таким образом, что определено погружение ЛНСВСЗ (1) $(\mathbf{A}_{\mu}, \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C}) \in (\mathcal{A}_{\mu}, \mathcal{B}_{\mu}, \mathcal{C}) \subset (\mathcal{A}_{\mu k}, \mathcal{B}_{\mu k}, \mathcal{C}_{\mu k}) \subset (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k}) \subset (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty}, \mathcal{W}_{\mu\infty}), k = 0, 1, \dots$

Теорема 1. Пусть элементы функций $A_{ij}(t), i = \overline{1, 3}, j = 0, 1, A_4(t)$, определены, ограничены и непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на $(-\infty, t_1]$;

$$\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -a < 0; \|A_4(t)\| \leq b; \|\dot{A}_4(t)\| \leq c \forall t \in (-\infty, t_1].$$

Тогда для достаточно малых $\mu > 0$ существует унимодулярный оператор нелокального преобразования Ляпунова [5]

$$\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) : (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty}, \mathcal{W}_{\mu\infty}) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty}, \mathcal{W}_{\mu\infty}),$$

действующий на $(\mathbf{A}_{\mu}, \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C})$ по правилу

$$\mathbf{K} * (\mathbf{A}_{\mu}, \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C}) = (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_{\mu} \mathbf{K} - \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C} \mathbf{K})$$

и преобразующий ЛНСВСЗ (1) к системе с блочно-диагональным оператором $\mathbf{A}_{\xi\eta} = \mathbf{K} * \mathbf{A}_{\mu} = \operatorname{diag} \{ \mathbf{A}_{\xi}(t, \mu, e^{-ph}), \mu^{-1} \mathbf{A}_{\eta}(t, \mu, e^{-ph}) \}$.

Компоненты оператора $\mathbf{K}$ могут быть представлены в виде асимптотических рядов по μ , выраженных через матрицы ЛНСВСЗ (1).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для достаточно малых $\mu > 0$ в результате замены переменных

$$z(t) = \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) \operatorname{col}(\xi(t), \eta(t)), \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, t \in (-\infty, t_1],$$

при $\varphi(\theta) \equiv 0, \psi(\theta) \equiv 0$ ЛНСВСЗ (1) преобразуется в алгебраически и

асимптотически эквивалентную систему с разделенными движениями с бесконечным запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) \xi(t) + \mathbf{B}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) u(t), \\ \Sigma_{\xi\eta} \quad \mu \dot{\eta}(t) &= \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \eta(t) + \mathbf{B}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) u(t), \quad t \in T, \\ v(t) &= \mathbf{C}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) \xi(t) + \mathbf{C}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \eta(t), \quad t \in T, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{A}_\xi, \mathbf{B}_\xi, \mathbf{C}_\xi, \mathbf{A}_\eta, \mathbf{B}_\eta, \mathbf{C}_\eta$ выражаются через матрицы ЛНСВСЗ (1) и представимы в виде асимптотических рядов по μ .

Наряду с расщепляющим преобразованием $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ определяем семейство невырожденных при каждом $t \in T$ $n \times n$ -матричных унимодулярных операторов $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) : (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k}) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k})$, $k = 1, 2, \dots$, которые аппроксимируют $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ и компоненты которых выражаются через матрицы ЛНСВСЗ в виде конечных сумм (по μ, e^{-ph}). Применяя преобразования $\mathbf{K}^{[k]}$ к ЛНСВСЗ (1) как системе класса $(\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k})$, получаем подсистемы с конечным запаздыванием, операторы которых аппроксимируют операторы расщепленной системы (2) с точностью $O(\mu^k)$. В частности, при $k = 0$ эти системы совпадают с независимыми от параметра μ вырожденной системой (далее – ВС) и присоединенной системой (далее – ПС), которые формально получаются из СВС, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$. При $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$ ВС имеет вид n_1 -мерной нестационарной системой с запаздыванием в состоянии, управлении и выходе, а ПС является стационарной n_2 -системой без запаздывания [6]. Эквивалентные преобразования ЛНСВСЗ (1) с помощью операторов семейства $\mathbf{K}^{[k]}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ сохраняют структурные свойства и позволяют получить последовательность уточняющих достаточных условий структурных свойств ЛНСВСЗ, аппроксимации любых порядков ее решений, строить регуляторы и наблюдатели с требуемой точностью.

Заключение. Впервые построено эквивалентное декомпозиционное преобразование, полностью разделяющее медленные и быстрые динамики ЛНСВСЗ. Установлено, что разделенная по темпам изменения переменных система является системой с бесконечным запаздыванием с исчезающей памятью. Введено семейство обратимых операторов, аппроксимирующих декомпозиционное преобразование, применение которых к ЛНСВСЗ позволяет выводить свойства исходной ЛНСВСЗ (1) из аналогичных свойств регулярно возмущенных систем с конечным запаздыванием меньшей размерности в разных масштабах времени. По-

лучены условия на параметры ЛНСВСЗ, при которых структурные свойства ЛНСВСЗ (1) (устойчивости, стабилизируемости, управляемости, наблюдаемости) следуют из аналогичных структурных свойств разделенных по темпам изменения переменных подсистем. Доказаны независимые от малого параметра достаточные условия структурных свойств ЛССВСЗ. Их выполнение гарантирует наличие изучаемых свойств у ЛССВСЗ для всех достаточно малых значений параметра. Построены аппроксимации решений ЛНСВСЗ через решения аппроксимаций расщепленной системы (2), композитные регуляторы и наблюдатели, компоненты которых можно рассчитывать отдельно и параллельно для ВС и ПС.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», 1.2.04.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glizer, V. Singularly perturbed linear time delay systems / V. Glizer. – Birkhauser : Cham, 2021. – 416 p.
2. Kokotovic, P. V. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly. – New York : Academic Press, 1999. – 386 p.
3. Chang, K. Singular perturbations of a general boundary value problem / K. Chang // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1972. – Vol. 3, No 3. – P. 520–526.
4. Marchenko, V. M. Realization of dynamical systems in scales of systems with aftereffect: I. Realizability / V. M. Marchenko, J. J. Loiseau // Differential Equations. – 2006. – Vol. 42. – P. 1587–1595.
5. Mazanik, S. A. Lyapunov transformations of linear differential systems / S. A. Mazanik. – Minsk : BSU, 2008. – 175 p.
6. Цехан, О. Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием / О. Б. Цехан // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2024. – Т. 14, № 1. – С. 37–47.
7. Цехан, О. Б. Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром / О. Б. Цехан // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 50–61.

8. Pawluszewicz, E. Stability and stabilisability of the singularly perturbed system with delay on time scales: a decomposition approach / E. Pawluszewicz, O. Tsekhan // International Journal of Control. – 2021. – Vol. 94, iss. 9. – P. 2406–2419.

УДК 539.12

**V. M. RED'KOV¹, A. V. IVASHKEVICH¹, A. V. BURY¹,
A. M. KUZMICH², E. M. OVSIYUK³**

¹Belarus, Minsk, B. I. Stepanov Institute of Physics

²Belarus, Brest, Brest State A. S. Pushkin University

³Belarus, Mozyr, Mozyr State Pedagogical I. P. Shamyakin University

SPIN 1 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT AND POLARISABILITY IN PRESENCE OF UNIFORM MAGNETIC AND ELECTRIC FIELDS

In the paper we study a generalized Duffin–Kemmer equation for spin 1 particle with two characteristics, anomalous magnetic moment and polarizability in presence of external uniform magnetic and electric fields.

After separating the variables, we get the system of ten first order partial differential equations for 10 functions $f_i(r, z)$. To describe the r -dependence of 10 functions $f_A(r, z)$, $A = 1, \dots, 10$, we apply the method by Fedorov – Gronskey; so the complete 10-component wave function is decomposed into the sum of three projective constituents, dependence of each component on the polar coordinate r is determined by only one corresponding function, $F_i(r)$, $i = 1, 2, 3$; these three basic functions are constructed in terms of the confluent hypergeometric functions, at this there arises the quantization rule due to the presence of magnetic field.

After that we derive a system of 10 ordinary differential equations for 10 functions $f_A(z)$. This system is solved by using the elimination method and with the help of special linear combining of the involved functions. As the result, we find three separated second order differential equations, their solutions are constructed in the terms of the confluent hypergeometric functions. The numerical studied of the obtained analytical results is done.