

Учреждение образования  
«Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина»

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И НОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МАТЕМАТИКЕ**

Сборник материалов  
Международной научно-практической конференции

Брест, 24–26 апреля 2025 года



Брест  
БрГУ имени А. С. Пушкина  
2025

УДК 51–047.58+37.01:001.895(082)

ББК 22.1в631.0я431+74.044.3я431

М34

*Под общей редакцией*

*кандидата физико-математических наук, доцента А. И. Басика*

*Рецензенты:*

доцент кафедры математики и информатики

УО «Брестский государственный технический университет»

кандидат физико-математических наук, доцент **Е. В. Грицук**

заведующий кафедрой прикладной математики и информатики

УО «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина»

кандидат физико-математических наук, доцент **Д. В. Грицук**

М 34 **Математическое** моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 24–26 апр. 2025 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2025. – 220 с.  
ISBN 978-985-22-0901-4.

В сборник включены материалы докладов, посвященных решению актуальных проблем физики, математики и информатики, а также отражающих опыт преподавания соответствующих дисциплин в высших и средних учебных заведениях.

Издание адресуется научным работникам, аспирантам, преподавателям и студентам высших учебных заведений, специалистам системы образования.

**УДК 51–047.58+37.01:001.895(082)**

**ББК 22.1в631.0я431+74.044.3я431**

**ISBN 978-985-22-0901-4**

© УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», 2025

## ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

УДК 512.542

**Е. Н. БАЖАНОВА**

Россия, Москва, МГПУ, МИФИ

### СТРОЕНИЕ $\sigma_\Omega$ -РАССЛОЕННОГО КЛАССА ФИТТИНГА $T$ -ГРУПП

В 2001 году В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной был предложен способ построения новых видов формаций и классов Фиттинга путем рассмотрения еще одной функции-направления. В работах [1], [2] ими были построены соответственно  $\omega$ -веерные и  $\Omega$ -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп, включающиеся в себя известные  $\omega$ -локальные и  $\Omega$ -композиционные формации и классы Фиттинга. В дальнейшем В. А. Ведерников и Е. Н. Бажанова распространили идею расслоенных формаций и классов Фиттинга на класс мультиоператорных  $T$ -групп, обладающих конечными композиционными рядами [3; 4].

В 2015 году А. Н. Скиба разработал  $\sigma$ -теорию конечных групп, где  $\sigma$  – произвольное разбиение множества всех простых чисел, и применил ее методы к построению  $\sigma$ -локальных формаций [5], явившихся естественным обобщением локальных формаций. В дальнейшем на основе  $\sigma$ -методов были построены классы, обобщающие  $\omega$ -веерные и  $\Omega$ -расслоенные классы Фиттинга конечных групп [6; 7],  $\omega$ -веерные и  $\Omega$ -расслоенные формации конечных групп [8; 9]. Естественным продолжением исследований стало обобщение  $\Omega$ -расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных  $T$ -групп [10].

Аддитивная группа  $G$  с нулевым элементом  $0$  называется *мультиоператорной  $T$ -группой* с системой мультиоператоров  $T$ , если в  $G$  задана еще некоторая система  $n$ -арных алгебраических операций  $T$  при некоторых  $n$ , удовлетворяющих условию  $n > 0$ , причем для всех  $t \in T$  выполняется условие  $t(0, \dots, 0) = 0$ , где слева элемент  $0$  записан  $n$  раз, если операция  $t$   $n$ -арна [11].

Пусть  $\mathfrak{C}$  – класс всех  $T$ -групп с конечными композиционными рядами,  $\mathfrak{I}$  – класс всех простых  $T$ -групп. Все рассматриваемые  $T$ -группы принадлежат классу  $\mathfrak{C}$ . Для любого непустого подкласса  $\Delta$  класса  $\mathfrak{I}$  будем полагать:  $\mathfrak{C}_\Delta = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \subseteq \Delta)$  и  $\mathfrak{C}_{\Delta'} = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \cap \Delta = \emptyset)$ ,

где  $\mathfrak{K}(G)$  — класс всех простых  $T$ -групп, изоморфных композиционным факторам  $T$ -группы  $G$ ;  $O^\Delta(G)$  —  $\mathfrak{C}_\Delta$ -корадикал  $T$ -группы  $G$ .

Класс  $T$ -групп, содержащийся в классе  $\mathfrak{C}$ , будем называть  $\mathfrak{C}$ -классом. Пусть  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{Y}$  —  $\mathfrak{C}$ -классы. Тогда  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G \in \mathfrak{C} \mid G \text{ имеет идеал } N \in \mathfrak{X} \text{ с } G/N \in \mathfrak{Y})$ .

Далее  $\Omega$  — непустой подкласс класса  $\mathfrak{I}$ ,  $\sigma_\Omega$  — произвольное разбиение класса  $\Omega$ , т. е.  $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$ , где  $\Omega_i$  — непустой подкласс класса  $\Omega$  для любого  $i \in I$ ,  $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$  и  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  для любых  $i, j \in I, i \neq j$ . Для произвольной  $T$ -группы  $G$  и произвольного класса  $T$ -групп  $\mathfrak{F}$  полагаем  $\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \emptyset\}$ ;  $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma_\Omega(G)$ .

Функция вида  $f : \sigma_\Omega \cup \{\sigma'_\Omega\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга } T\text{-групп}\}$ , где  $f(\sigma'_\Omega) \neq \emptyset$ , называется  $\sigma_\Omega R$ -функцией. Функция вида  $\varphi : \sigma_\Omega \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга } T\text{-групп}\}$ , удовлетворяющая условию  $\mathfrak{C}_{\Omega'_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$  для любого  $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ , называется  $\sigma_\Omega FR$ -функцией.

Пусть  $f$  и  $\varphi$  — некоторые  $\sigma_\Omega R$ -функция и  $\sigma_\Omega FR$ -функция соответственно. Класс Фиттинга  $T$ -групп вида  $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f(\sigma'_\Omega) \text{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$  называется  $\sigma_\Omega$ -расслоенным классом Фиттинга  $T$ -групп и обозначается  $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$ . Функция  $f$  называется *спутником*, а функция  $\varphi$  — *направлением*  $\sigma_\Omega$ -расслоенного класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ .

Пусть  $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$  —  $\sigma_\Omega$ -расслоенный класс Фиттинга  $T$ -групп. Обозначим  $\sigma_\Omega(f) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid f(\Omega_i) \neq \emptyset\}$ . Дадим описание строения класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  в зависимости от подмножества  $\sigma_\Omega(f)$  множества  $\sigma_\Omega$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f(\sigma'_\Omega) \text{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$ . Тогда

$$\mathfrak{F} = \begin{cases} f(\sigma'_\Omega)\mathfrak{C}_\Omega \cap \left( \bigcap_{\Omega_i \in \sigma_\Omega(f)} f(\Omega_i)\varphi(\Omega_i) \right) \cap \left( \bigcap_{\Omega_j \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(f)} \mathfrak{C}_{\Omega'_j} \right), \\ \emptyset \neq \sigma_\Omega(f) \neq \sigma_\Omega, \\ f(\sigma'_\Omega)\mathfrak{C}_\Omega \cap \left( \bigcap_{\Omega_i \in \sigma_\Omega} f(\Omega_i)\varphi(\Omega_i) \right), \sigma_\Omega(f) = \sigma_\Omega, \\ f(\sigma'_\Omega)\mathfrak{C}_\Omega \cap \left( \bigcap_{\Omega_i \in \sigma_\Omega} \mathfrak{C}_{\Omega'_i} \right), \sigma_\Omega(f) = \emptyset. \end{cases}$$

**Следствие 1.** Пусть  $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$  –  $\sigma_\Omega$ -расслоенный класс Фиттинга  $T$ -групп со спутником  $f$  и направлением  $\varphi$ . Тогда  $\mathfrak{F} \subseteq f(\sigma_\Omega')\mathfrak{C}_\Omega$  и  $\mathfrak{F} \subseteq f(\Omega_i)\varphi(\Omega_i)$  для всех  $\Omega_i \in \sigma_\Omega(f)$ .

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведерников, В. А.  $\omega$ -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 1. – С. 43–60.
2. Ведерников, В. А.  $\Omega$ -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 125–144.
3. Ведерников, В. А.  $\Omega$ -расслоенные формации мультиоператорных  $T$ -групп / В. А. Ведерников, Е. Н. Демина // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 990–1009.
4. Ведерников, В. А.  $\Omega$ -расслоенные классы Фиттинга  $T$ -групп / В. А. Ведерников, Е. Н. Бажанова // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – С. 629–639.
5. Skiba, A. N. On one generalization of the local formations / A. N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – Vol 1, № 34. – P. 79–82.
6. Камозина, О. В.  $\omega\sigma$ -веерные классы Фиттинга / О. В. Камозина // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21, № 4. – С. 107–116.
7. Камозина, О. В.  $\Omega\zeta$ -расслоенные классы Фиттинга / О. В. Камозина // Известия Саратовского университета. Нов. сер. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. – Т. 20, № 4. – С. 424–433.
8. Сорокина, М. М.  $\bar{\omega}$ -Веерные формации конечных групп / М. М. Сорокина, А. А. Горепекина // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22, № 3. – С. 232–244.
9. Сорокина, М. М. Построение  $\bar{\Omega}$ -расслоенных формаций конечных групп / М. М. Сорокина, А. С. Нестеров // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2023. – Т. 2. – С. 7–12.
10. Бажанова, Е. Н.  $\sigma_\Omega$ -расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных  $T$ -групп и их спутники / Е. Н. Бажанова // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. 25, № 5. – С. 2–17.
11. Общая алгебра : в 2 т. / В. А. Артамонов, Л. А. Скорняков, В. Н. Салий [ и др.] ; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М. : Наука, 1991. – Т. 1. – 480 с.

УДК 519.63

**В. М. ВОЛКОВ, Ц. ДУН**

Беларусь, Минск, БГУ

## **СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ 2D-ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ**

**Введение.** Численные особенности задач конвекции-диффузии преимущественно связаны с наличием малого параметра при старших производных [1]. С одной стороны, это порождает характерное поведение решения в виде пограничного слоя, требующее адекватной формулировки дискретной модели для численного анализа [2]. С другой стороны, преобладание конвективных слагаемых приводит к существенному доминированию кососимметричной составляющей пространственного оператора дискретной модели, что негативно сказывается на сходимости итерационных методов при решении стационарных задач [1].

В настоящей работе предлагаются и исследуются эффективные алгоритмы реализации спектральных методов на основе полиномов Чебышева [3] с использованием стабилизированного итерационного метода бисопряженных градиентов [4]. Основное внимание уделяется вопросам выбора переобусловливателя и техники их обработки [5]. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

**Постановка задачи и численный метод.** Рассмотрим краевую задачу для стационарного уравнения конвекции-диффузии в прямоугольной области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$

$$v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f, \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad (1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (2)$$

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3)$$

Поле скоростей может быть задано с помощью некоторой гармонической функции  $\Psi = \Psi(x, y)$ :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (4)$$

Проведен сравнительный анализ спектрального метода Чебышева и разностного метода второго порядка точности с центральной формулой аппроксимации первых производных для решения задачи (1)–(3).

Реализация дискретных моделей проводилась на основе стабилизированного итерационного метода бисопряженных градиентов с различными типами переобусловливателей: на основе неполной LU - факторизации с регулируемым порогом заполнения [6] (iLU) и симметричной части дискретного (разностного) аналога оператора конвекции – диффузии с постоянными коэффициентами, реализуемого с помощью алгоритма Бартелса – Стюарта (B-S).

**Результаты численных экспериментов.** В качестве тестовой задачи (1)–(4) использовано поле скоростей  $\Psi(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$  и правая часть, обеспечивающая точное решение, имеющего признаки особенностей типа пограничного слоя. На рисунке 1 представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующих эффективность используемых переобусловливателей при решении задачи (1)–(3),  $Pe = 1000$ , на сетке размером  $n \times n$ .

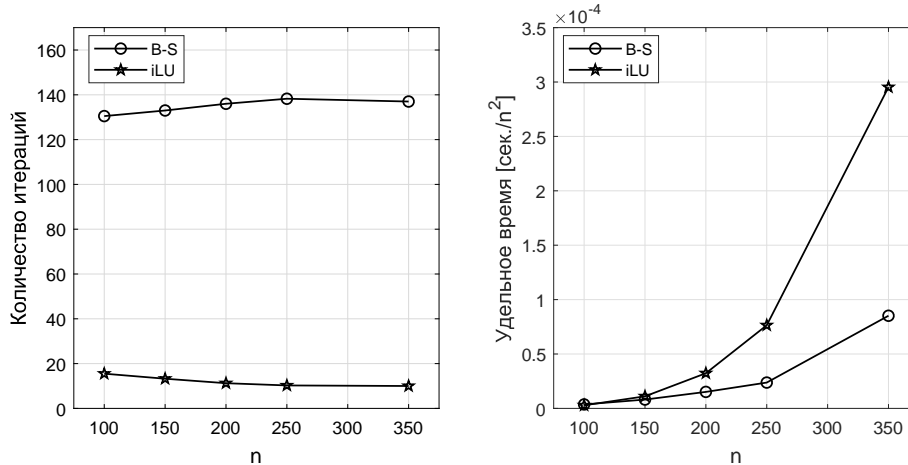


Рисунок 1 – Зависимости количества итераций и удельного времени вычислений от количества узлов сетки

Заметим, что количество итераций практически не возрастает при увеличении размерности сетки. Время решения задачи при использовании переобусловливателя iLU при этом возрастает быстрее в силу больших вычислительных затрат на построение данного переобусловливателя.

Сравнение эффективности спектрального и разностного методов, как и в случае других эллиптических задач [7], при достаточной гладкости решения показывает существенное преимущество спектрального метода (рисунок 2).

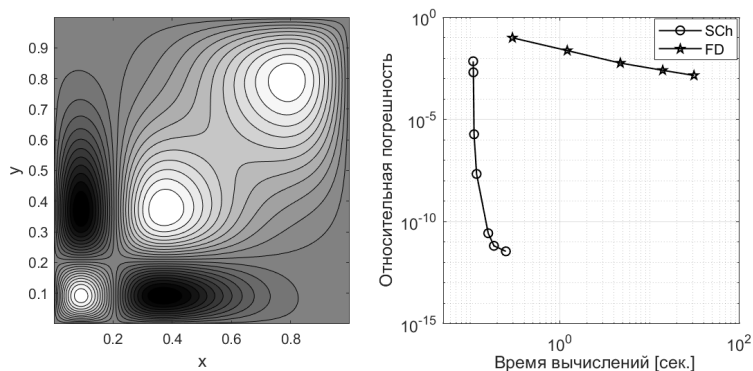


Рисунок 2 – Вид решения задачи и время вычислений для достижения заданной точности для спектрального (SCh) и разностного (FD) методов

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский, А. А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Либликом, 2015. – 248 с.
2. Бахвалов, Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859.
4. Trefethen, L. N. Spectral Methods in MATLAB / L. N. Trefethen. – Philadelphia : SIAM, 2000. – 160 p.
5. Van der Vorst, H. A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. Van der Vorst // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1992. – Vol. 13, № 2. – P. 631–644.
6. Li, N. Crout versions of ILU for general sparse matrices / N. Li, Y. Saad, E. Chow // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2003. – Vol. 25, № 2. – С. 716–728.
7. Волков, В. М. О реализации спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Ц. Дун // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 2. – С. 82–92.



УДК 371.24+371.212

**В. И. ГОРБАЧЕВ, Н. В. ТРОШИНА**

Россия, Брянск, БрГУ имени И. Г. Петровского

## **СОДЕРЖАНИЕ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В СИСТЕМЕ ДИСЦИПЛИНАРНЫХ ОНТОЛОГИЙ**

В содержании общего математического образования исследуются закономерности его спектральной и уровневой систематизации. В мировоззренческом плане выделяется спектр математических пространств, структурирующих «общеобразовательный слой» современного математического знания. В методологии пространственно-теоретического подхода представление каждого из математических пространств формируется на последовательных уровнях деятельности содержательного абстрагирования.

**Введение.** Идея традиционности общего математического образования, выраженная приверженностью к геометрии Евклида, арифметике Пифагора и Ф. Виета, алгебре И. Ньютона, созерцательному мышлению Р. Декарта, несомненно, наследует достижения общей культуры, но только ее ограниченной части, выраженной в эмпирической форме, на уровне обыденного сознания. За алгоритмической деятельностью исследования свойств базовых математических объектов (числа, фигуры, векторы, функции, уравнения, события), имеющих наглядно-конструктивную форму, не прослеживается методология модельно-абстрактного представления соответствующих математических пространств, их дисциплинарная систематизация.

Проектирование содержания общего математического образования, направленного на формирование абстрактного математического мышления, предполагает формирование модельных представлений целостного спектра математических пространств, отражающих различные свойства реального мира, последующее конструирование дедуктивных теорий абстрактных математических пространств с аналитико-синтетическим методом исследования, обоснования их закономерностей в методологии пространственно-теоретического подхода [1].

**Результаты исследования.** Общее математическое образование, отражающее содержание математики в ее более чем двухтысячелетней истории следует гуманитарной идее развития субъекта деятельности учения, направленности обучения математике на формирование адекватного образовательной области абстрактного мышления. Абстрактное математическое мышление выступает одной из предметных проекций категории абстрактного мышления, как и проекцией имеющих общеучебный характер типов мышления (логического, алгоритмического).

Дисциплинарный анализ структуры абстрактного математического мышления развивается в содержании его уровневой и спектральной систематизации. Уровневая систематизация абстрактного математического мышления отражает объективные закономерности деятельности содержательного абстрагирования. Направленная на формирование абстрактного математического мышления и исходящая из математического отражения реального мира деятельность содержательного абстрагирования характеризуется последовательными уровнями математического абстрагирования: «от предметов реального мира», в системе создаваемых на уровне обыденного сознания разноплановых образов объектов математических пространств; «от образных представлений объектов», в системе создаваемых в содержательной логической форме определяемых понятий учебных теорий абстрактных математических пространств; «от содержания понятий», в модельно-теоретическом и понятийно-категориальном анализе учебных математических теорий в их интеграции.

Деятельность абстрагирования «от предметов реального мира» имеет философскую форму «математического отражения реального мира», направлена на создание образных представлений базовых и производных математических пространств [2].

Числовое пространство задается в математическом отражении свойств счета, измерения, упорядочения и оперирования числами и величинами человеческой практики. Различные образы числа (точка на координатной прямой или окружности, систематическая запись числа, класс эквивалентности упорядоченных пар или последовательностей) создают представление числового пространства в системе расширяющихся геометрических, арифметических, алгебраических моделей.

Геометрическое пространство создается в математическом отражении формы, меры, пространственной расположенности, субъектной

ориентации реального физического пространства. Различные образы объектов геометрического пространства (наглядно-образные, векторные, аналитические) вместе с преобразованиями, отношениями приводят к его представлению наглядно-образной, векторной и арифметической моделями с модельно-специфическими методами исследования. Евклидово пространство, формируемое на базе субъектных представлений геометрического пространства, определяется в математическом отражении свойств размерности, пространственной ориентации, метрической характеристики реального физического пространства. Различные образы векторов, векторных операций (векторные, координатные, аналитические) определяют модельную структуру евклидова пространства с адекватными методами исследования соответствующих моделей геометрических фигур.

Функциональное пространство, опосредованное модельным представлением числового, геометрического, евклидова пространств, задается в математическом отражении свойства функциональной зависимости. Система векторных, геометрических, числовых (дискретная, непрерывная) моделей функционального пространства, свойства которых опосредованы свойствами объектов каждого из математических пространств, задает интегральное модельное представление пространства числовых и нечисловых функций.

Предикатное пространство, опосредованное представлениями числового и функционального пространств, создается в математическом отражении свойств равновесия, сравнения на множестве числовых характеристик реального мира. Модели пространства числовых элементарных функций (алгебраические, трансцендентные) определяют систему моделей пространства числовых предикатов, характеризуемых как общим для моделей функционально-графическим представлением, так и функционально-аналитическим методом исследования на базе соответствующих равносильных преобразований.

Стохастическое пространство, интегрирующее представления пространств случайных событий, дискретных и непрерывных случайных величин, статистических совокупностей, описываемых значениями функции вероятности, задается в математическом отражении процессов реального мира, характеризуемых свойством случайности (субъектной непредсказуемости). Представление стохастического пространства опре-

деляется системой конечных, счетно-конечных, счетных, непрерывных моделей пространства случайных событий, расширяемых в соответствующие модели пространства случайных величин и используемых в исследовании пространства статистических совокупностей.

В структуре представления каждого из математических пространств объективно выделяются абстрактно-алгоритмический и системно-структурный виды деятельности. Составляющими абстрактно-алгоритмический вид обобщенными учебными действиями выступают: создание наглядных образов объектов, операций, преобразований каждого из математических пространств в системе конструктивных, знаковых средств; анализ операторных действий на множестве объектов с целью выявления их наглядно воспринимаемых свойств; оперирование объектами, классами объектов в системе свойств математического пространства. Системно-структурный вид представления характеризуется модельным представлением математического пространства, действиями систематизации и классификации объектов, созданием алгоритмических схем оперирования для исследования фундаментальных свойств математического пространства.

Дальнейшее развитие наглядно-образных представлений математических пространств востребует новый уровень математического абстрагирования – абстрагирование «от образных представлений объектов математического пространства». Задачей деятельности содержательного абстрагирования данного уровня выступает создание во внутреннем плане субъекта нового конструкта – учебной теории математического пространства. В содержании учебной теории модельные представления математического пространства субъектным сознанием отклоняются, математические пространства становятся абстрактными. При этом в процедуре математического абстрагирования общие моделям свойства сохраняются либо в содержании аксиом (числовое, геометрическое, евклидово пространства), либо в содержании абстрактных определений понятий (функциональное, предикатное, стохастическое пространства) абстрактного математического пространства.

В отличие от деятельности представления теоретико-пространственная деятельность структурируется дедуктивным конструированием учебной теории, аналитико-синтетическим исследованием свойств абстрактного математического пространства, методологическим (модельно-теоре-

тическим, понятийно-категориальным) анализом учебной теории. Детализируемые обобщенными учебными действиями виды теоретико-пространственной деятельности позволяют сформировать теоретико-пространственный тип мышления в составе абстрактно-дедуктивного, аналитико-синтетического и методологического уровней. Интеграция формируемых в деятельности содержательного абстрагирования пространственно-математического и теоретико-пространственного типов мышления характеризует содержание пространственно-теоретического подхода, определяющего уровневую систематизацию абстрактного математического мышления [3].

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пространственно-теоретический подход в формировании абстрактного мышления // Итоги науки : коллектив. моногр. / А. В. Антюхов, В. И. Горбачев, Н. В. Трошина. – М. : Рос. акад. наук, 2022. – С. 102–137. – (Итоги науки. Вып. 50). – DOI: 10.22281/ROS\_I50\_CN4\_P102-133\_2022.

2. Горбачев, В. И. Систематизация моделей учебных теорий математических пространств в содержании общего образования / В. И. Горбачев, Е. Н. Пузырева, Н. В. Трошина // Наука и школа. – 2024. – № 6. – С. 102–115. – DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-102-115.

3. Горбачев, В. И. Предметные компетенции общего математического образования в категории субъектного развития : монография / В. И. Горбачев. – М. : ИНФРА-М, 2020. – 403 с. – DOI: 10.12737/1031176.

УДК 512.542

**Н. В. МАСЛОВА**

Россия, Екатеринбург, ИММ УрО РАН, Уральский математический центр; Новосибирск, ИМ СО РАН

### ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

*Спектром  $\omega(G)$  конечной группы  $G$  называется множество всех порядков ее элементов. Граф Грюнберга – Кегеля (или граф простых чисел)  $\Gamma(G)$  определяется следующим образом: вершинами графа  $\Gamma(G)$*

являются все простые делители порядка группы  $G$ , и две вершины  $p$  и  $q$  смежны в  $\Gamma(G)$  тогда и только тогда, когда  $pq \in \omega(G)$ .

Вопрос характеристики конечной группы ее спектром изучается с середины 80-х годов XX века, и в этом направлении получены сильные и интересные результаты; подробный обзор этих результатов можно найти в [3] с обновлениями в [5, Section 2]. Легко понять, что любая группа, которая может быть определена однозначно с точностью до изоморфизма по графу Грюнберга – Кегеля, также однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим спектром; обратное не верно. При этом граф Грюнберга – Кегеля конечной группы гораздо проще, чем спектр, восстановить из «видимых» свойств объекта, на котором действует такая группа, но, как было показано в [1], вопрос характеристики по графу Грюнберга – Кегеля имеет смысл рассматривать только для почти простых групп. Тем не менее конечная простая группа может однозначно с точностью до изоморфизма быть определена не только ее графом Грюнберга – Кегеля, но даже изоморфным типом ее графа Грюнберга – Кегеля. Примеры таких групп были недавно построены в [1], [2] и [4]. Обзор известных результатов о характеристике конечной группы графом Грюнберга – Кегеля можно найти в [1], [5] и [6].

В этом докладе будут обсуждаться недавние результаты автора о характеристике конечных простых групп по графу Грюнберга – Кегеля и по изоморфному типу графа Грюнберга – Кегеля. Доклад основан на совместных работах в В. В. Паньшиным и с М. Chen и М. Р. Зиновьевой.

Результаты о характеристике конечных групп графом Грюнберга – Кегеля (например, групп  $F_4(q)$  для нечетных  $q$ ) получены за счет Российского научного фонда, проект 24-11-00119, <https://rscf.ru/en/project/24-11-00119/>. Работа о характеристике конечных групп изоморфным типом графа Грюнберга – Кегеля выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cameron, P. J. Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg – Kegel graph / P. J. Cameron, N. V. Maslova // Journal of Algebra. – 2022. – Vol. 607, Part A. – P. 186–213.
2. Chen, M. On characterization of groups by isomorphism type of

Gruenberg – Kegel graph / M. Chen, N. V. Maslova, M. R. Zinov'eva // Cornell University Library. – 15 p. – DOI: 10.48550/arXiv.2504.14703.

3. Finite groups isospectral to simple groups / M. A. Grechkoseeva, V. D. Mazurov, W. Shi [et al.] // Communications in Mathematics and Statistics. – 2023. – Vol. 11. – P. 169–194.

4. Lee, M. Recognisability of the sporadic groups by the isomorphism types of their prime graphs / M. Lee, T. Popiel // Cornell University Library. – 23 p. – DOI: 10.48550/arXiv.2310.10113.

5. Maslova, N. V. On arithmetical properties and arithmetical characterizations of finite groups / N. V. Maslova // Cornell University Library. – 15 p. – DOI: 10.48550/arXiv.2401.04633.

6. Maslova, N. V. On characterization by Gruenberg–Kegel graph of finite simple exceptional groups of Lie type / N. V. Maslova, V. V. Panshin, A. M. Staroletov // European Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 9, No 3. – 17 p. – DOI: 10.1007/s40879-023-00672-7.

УДК 517.53

**Н. М. МАХИНА**

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

## **НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Конформные отображения, переводящие заданную область  $D \subset \mathbb{C}$  в единичный круг  $S = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ , играют ключевую роль в комплексном анализе, математической физике и прикладных задачах.

Хорошо известно что, если  $D$  – односвязная область, то существует единственная конформная функция  $\varphi : D \rightarrow S$ , нормированная условиями:  $f(a) = 0$ ,  $f'(a) > 0$ ,  $a \in D$ , реализующая конформный изоморфизм между  $D$  и  $S$ .

При этом ставятся следующие вопросы: «Как оценить  $|\varphi(z)|$  и  $|\varphi'(z)|$  в зависимости от геометрии  $D$ ?», «Какие явные формулы или приближения существуют для конкретных областей?», «Где применяются такие оценки?».

Теорема Кёбе об искажении – один из классических результатов, дающих ответ на первый вопрос в терминах расстояния до границы односвязной области  $D$  (см. [1]):

$$\frac{1}{4} \frac{d(\varphi(z), \partial D)}{1 - |z|} \leq |\varphi'(z)| \leq 4 \frac{d(\varphi(z), \partial D)}{1 - |z|}.$$

Конформное отображение  $\varphi$ , переводящее область  $D$  в единичный круг  $S$ , сильно зависит от гладкости и геометрических свойств границы  $\partial D$ . Различные классы кривых (гладкие, кусочно-гладкие, жордановы, фрактальные) приводят к разным оценкам  $\varphi$  и её производных.

В случае гладкой границы  $\partial D$  (класса  $C^k$ , аналитической) конформное отображение  $\varphi$  продолжается аналитически через границу, при этом если  $\partial D \in C^k$ ,  $k \geq 2$ , то справедливы оценки вида

$$|\varphi'(z)| \leq c_1 d(z, \partial D)^{-1/2}, z \rightarrow \partial D, c_1 = const > 0.$$

В случае границы  $\partial D$  из класса Ляпунова  $C^{1,\alpha}$   $\varphi'$  имеет степенную особенность:

$$|\varphi'(z)| \sim d(z, \partial D)^{\alpha-1}.$$

В случае кусочно-гладкой границы  $\partial D$  (с внутренними углами  $\pi\alpha_j$ ,  $0 < \alpha_j < 2$ ) вблизи угла  $z_j$  отображение ведёт себя как

$$\varphi(z) \sim (z - z_j)^{1/\alpha_j}.$$

В частности, для многоугольника  $\varphi$  выражается через интеграл:

$$\varphi(z) = C \int \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{\alpha_j - 1} dz.$$

Производную  $\varphi'$  в областях с кусочно-гладкой границей можно оценить следующим образом:

$$|\varphi'(z)| \sim d(z, \partial D)^{\frac{1}{\alpha_j} - 1}.$$



Области с асимптотически конформными границами  $\partial D$  представляют собой класс областей, промежуточных между областями с гладкими и произвольными жордановыми границами:

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in \partial D \\ |z_1 - z_2| \leq \delta}} \sup_{z \in \Gamma} \left( \frac{|z_1 - z| + |z_2 - z|}{|z_2 - z_1|} - 1 \right) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0,$$

где  $\Gamma$  – кратчайшая дуга на границе  $\partial D$ , соединяющая точки  $z_1$  и  $z_2$  [2]. В данных областях оценки конформно отображающей функции принимают вид:

$$(1 - |z|) \left| \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right| \rightarrow 0, |z| \rightarrow 1 - 0.$$

В случае областей с границами класса Лаврентьева – класса негладких жордановых кривых, для которых конформное отображение сохраняет ряд полезных аналитических свойств, несмотря на отсутствие гладкости:  $\exists C > 0 : \forall z_1, z_2 \in \partial D$ :

$$\text{diam}(\gamma(z_1, z_2)) \leq C|z_1 - z_2|,$$

где  $\gamma(z_1, z_2)$  – меньшая из двух дуг, соединяющих  $z_1, z_2$  на  $\partial D$ , – можно говорить об интегральных оценках производной конформно отображающей функции.

Используя результаты работ [3] и [4], получаем:

**Теорема 1.** Пусть  $D$  – область с границей  $\partial D$  класса Лаврентьева,  $\varphi : D \rightarrow S$ ,  $\varphi(0) = a$ ,  $a \in D$ ,  $\zeta, z \in S$ . Тогда

$$\int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1 - |z|)^\beta}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\eta+2}} dm_2(z) \leq \frac{c_2 |\varphi'(\zeta)|^{\beta+2} (1 - |\zeta|)^\beta}{(1 - |\zeta|)^\eta},$$

при  $\beta > -1, \eta > \beta + 1, c_2 = \text{const} > 0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $D$  – область с границей  $\partial D$  класса Лаврентьева,  $\varphi : D \rightarrow S$ ,  $\varphi(0) = a$ ,  $a \in D$ ,  $\zeta, z \in S$ . Тогда при  $1 < p < +\infty$  справедливо неравенство:

$$\int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1 - |z|)^\beta \chi_\gamma^p(z)}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\eta+2} |1 - \bar{w}z|^\sigma} dm_2(z) \leq \frac{c_3 |\varphi'(\zeta)|^{\beta+2} (1 - |\zeta|)^\beta \chi_\gamma(\zeta) \chi_\gamma^{\frac{p}{q}}(w)}{(1 - |\zeta|)^{\eta+2-\frac{2}{p}} (1 - |w|)^{\sigma-\frac{2}{q}}},$$

где  $\chi_\gamma(\zeta) = (1-|\zeta|)^{-\frac{\gamma}{pq}}; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \beta > -1, 0 < \frac{\gamma}{q} < \beta p + 1, \eta \geq \beta - 2 + \frac{3}{p} - \frac{\gamma}{pq}; \sigma > 2 - \frac{\gamma}{q^2}, c_3 = const > 0.$

Подобные оценки производной конформно отображающей функции применяются при решении различного рода задач в комплексном и гармоническом анализе: теории операторов, теории приближении, описании функционалов и построении базисов в различных пространствах функций.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. – М. : Наука, 1966. – 628 с.
2. Альфорс, Л. Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс. – М. : Мир, 1969. – 133 с.
3. Махина, Н. М. Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей / Н. М. Махина // Вестник Омского университета. – 2018. – Т. 23, № 3. – С. 47–51.
4. Махина, Н. М. Некоторые свойства классов ВМОА и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева / Н. М. Махина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2019. – Т. 51, № 4. – С. 487–495.

УДК 512.542

**В. И. МУРАШКО**

Беларусь, Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

### **ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

Все рассматриваемые группы конечны. Теория групп находит применения как внутри самой математики (геометрия, топология, теория чисел, дифференциальные уравнения и др.), так и за ее пределами в информатике, химии, физике, финансах и эпидемиологии [1].

Основной задачей любой содержательной математической теории является изучение структуры ее объектов для последующей их классификации. В рамках теории групп существуют несколько методов решения данной задачи. Одним из них является метод классов групп. Его суть заключается в построении классов групп, изучении свойств групп в данном классе, распознавании принадлежности группы данному классу и выделении в каждой группе подгрупп, несущих информацию, связанную с данным классом групп. Результаты данного метода представлены в ряде монографий (Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы, К. Дёрка и Т. Хоукса, Го Вэнбиня, А. Баллестера-Болиншеса и Л. Эсквейро и др.). Отметим, что в настоящее время данный метод продолжает свое активное развитие.

Возникающие в приложениях группы могут иметь достаточно большой порядок. Например, группа преобразований кубика Рубика имеет порядок 43252003274489856000. Поэтому актуальным является вопрос построения эффективных алгоритмов изучения строения группы.

В настоящее время имеется достаточно число эффективных алгоритмов, позволяющих находить классические характеристики и подгруппы группы [2]. Однако до недавнего времени вычислительной теории классов групп уделялось мало внимания. Так, в работе [3] предложены алгоритмы вычисления  $\mathfrak{F}$ -нормализаторов,  $\mathfrak{F}$ -проекторов и  $\mathfrak{F}$ -корадикалов для разрешимой группы и насыщенной формации  $\mathfrak{F}$ . В работе [4] предложены алгоритмы вычисления  $\mathfrak{F}$ -проекторов,  $\mathfrak{F}$ -инъекторов,  $\mathfrak{F}$ -радикалов и  $\mathfrak{F}$ -корадикалов для разрешимых групп. Однако даже автором этой работы отмечалось, что данные алгоритмы могут быть улучшены при использовании свойств  $\mathfrak{F}$ .

Из вышеизложенного следует, что вычислительная теория классов конечных групп требует дальнейшего развития. Первым шагом является переход от разрешимых групп к произвольным. Одним из классических способов задания формаций групп  $\mathfrak{F}$  является их определение с помощью действия  $\mathfrak{F}$ -группы на ее главном ряде. Таким образом определяются формации нильпотентных, разрешимых, сверхразрешимых и квазинильпотентных групп, локальные, Бэр-локальные и ступенчатые формации.

**Определение** ([5; 6]). Пусть  $f$  – функция, присваивающая 0 или 1 каждой группе  $G$  и ее главному фактору  $H/K$  такая, что

1.  $f(H/K, G) = f(M/N, G)$ , если  $H/K$  и  $M/N$  являются  $G$ -изоморфными главными факторами  $G$ ;

2.  $f(H/K, G) = f((H/N)/(K/N), G/N)$  для любой  $N \trianglelefteq G$  такой, что  $N \leq K$ . Такие функции  $f$  будем называть функциями главных факторов. Обозначим через  $\mathcal{C}(f)$  класс групп ( $G \mid G \simeq 1$  или  $f(H/K, G) = 1$  для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$ ).

3. Через  $Z(G, f)$  будем обозначать наибольшую нормальную подгруппу группы  $G$ , что  $f(H/K, G) = 1$  для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$  ниже ее.

Подгруппа  $Z(G, f)$  совпадает с  $\mathfrak{X}$ -гиперцентром  $Z_{\mathfrak{X}}(G)$  группы  $G$ , если  $f$  проверяет главный фактор на  $\mathfrak{X}$ -центральность.

Пусть  $f_1$  проверяют абелевость  $H/K$  и  $f_2$  проверяют разрешимость  $G/C_G(H/K)$ . Тогда

$$\mathcal{C}(f_1) = \mathcal{C}(f_2) = \mathfrak{S},$$

$Z(G, f_1)$  и  $Z(G, f_2)$  – разрешимые радикал и гиперцентр  $G$ . Полупрямое произведение знакопеременной группы  $A_5$  степени 5 и ее точного неприводимого модуля над  $\mathbb{F}_5$  является примером группы, для которой данные подгруппы различны. Нами доказана

**Теорема** ([5; 6]). *Предположим, что  $f(H/K, G)$  можно вычислить за полиномиальное время от  $n$  для любой группы перестановок  $G$  степени  $n$  и любого  $n$ . Тогда  $\mathfrak{F}$ -корадикал и  $\mathfrak{F}$ -гиперцентр группы  $G/K$  можно вычислить за полиномиальное время для любых*

$$K \trianglelefteq G \leq S_n.$$

**Следствие** ([5; 6]). *Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация, определяемая функцией  $f$ . Предположим, что  $(G/K)^{f(p)}$  может быть вычислен за полиномиальное время для любых  $K \trianglelefteq G \leq S_n$  и простого  $p$ . Тогда за полиномиальное время можно вычислить  $Z_{\mathfrak{F}}(G/K)$  и  $(G/K)^{\mathfrak{F}}$  для любых  $K \trianglelefteq G \leq S_n$ .*

Алгоритмы, построенные при доказательстве теоремы и ее следствия, являются теоретическими. Они сводятся к известным алгоритмам в группах перестановок. Отметим, что не все из них в полной мере имплементированы в системы компьютерной алгебры. Поэтому важной перспективой вычислительной теории классов конечных групп является имплементация данных алгоритмов.

Вычисления в группах зависят от того, как группа задана. Построенные при доказательстве теоремы алгоритмы верны для любого задания группы, но их эффективность доказана только для групп перестановок. Поэтому еще одной перспективой вычислительной теории классов групп является нахождение эффективных алгоритмов для каждого из способов задания группы. В докладе будут также обсуждаться и иные результаты и перспективы развития вычислительной теории классов групп.

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РНФ (проект Ф23РНФ-237).*

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu, X. Interdisciplinary applications of finite group theory – From epidemic modeling to financial market analysis / X. Liu, Y. Wu, H. Yin, H. Zhao // Theoretical and Natural Science. – 2024. – Vol. 43, No 1. – P. 253–261.
2. Seress, Á. Permutation group algorithms / Á. Seress. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 264 p.
3. Eick, B. Computing subgroups by exhibition in finite solvable groups / B. Eick, C. R. B. Wright // Journal of Symbolic Computation. – 2002. – Vol. 33, No 2. – P. 129–143.
4. Höfling, B. Computing projectors, injectors, residuals and radicals of finite soluble groups / B. Höfling // Journal of Symbolic Computation. – 2001. – Vol. 32, No 5. – P. 499–511.
5. Murashka, V. I. Formations of finite groups in polynomial time:  $\mathfrak{F}$ -residuals and  $\mathfrak{F}$ -subnormality / V. I. Murashka // Journal of Symbolic Computation. – 2024. – Vol. 122. – P. 154–165.
6. Murashka, V. I. Formations of finite groups in polynomial time II: the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter and its generalizations / V. I. Murashka // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. – 2025. – Vol. 31, No 1. – P. 154–165.

УДК 372016:53

**В. А. ПЛЕТЮХОВ, О. А. СЕМЕНЮК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **ТЕНЗОРНАЯ МАССА И АНИЗОТРОПНЫЙ ХАРАКТЕР ИНЕРТНЫХ СВОЙСТВ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ТЕЛ**

Понятие инертности тела (не путать с инерцией!) является одним из важнейших понятий динамики. В классической (нерелятивистской) механике смысл инертности раскрывается при рассмотрении второго закона Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad (1)$$

где положительный параметр  $m$  обладает следующими свойствами:

а) для данного тела  $m$  является константой, не зависящей от времени, модуля скорости тела и действующей на него силы (свойство инвариантности);

б)  $m$  является скалярной по отношению к преобразованиям поворотов величиной, т. е. не зависит от направления скорости тела и действующей на него силы (свойство изотропности).

Параметр  $m$  называется **массой** тела, иногда его называют **классической массой**.

В силу свойства (а) уравнение (1) можно переписать в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \vec{F}, \quad (2)$$

где  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  – ускорение тела.

Под инертностью тела понимается его способность приобретать определенное ускорение (изменять скорость) под действием данной силы. В качестве естественной количественной меры инертности в уравнениях (1) и (2) выступает масса  $m$ , которую по указанной причине называют еще **инертной массой**. В силу свойства массы (б) инертность тела носит изотропный характер, т. е. ускорение тела не зависит от угла между направлениями скорости тела и действующей на него силы, причем в каждый момент времени  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}$ .

В специальной теории относительности (далее – СТО) второй закон Ньютона (1) трансформируется и приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \vec{F} \quad \left( \beta = \frac{v}{c} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) называется трехмерным релятивистским уравнением движения.

Очевидно, что (3) не может быть представлено в форме (2), где явно фигурирует ускорение. Отсюда следует, что скалярный параметр  $m$  при больших скоростях не является коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением, т. е. не может служить количественной мерой инертности в классическом смысле. Поэтому возникает вопрос, можно ли в СТО найти подходящую замену понятию классической инертной массы. Другими словами, можно ли ввести в (3) такую математическую конструкцию, которая выступала бы в качестве «коэффициента пропорциональности» между силой и ускорением и давала бы наглядное представление об инертных свойствах быстро движущегося тела без решения сложных дифференциальных уравнений.

Для ответа на поставленный вопрос раскроем левую часть уравнения (3), выполнив в ней операцию дифференцирования по времени. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{c^2 (1-\beta^2)^{3/2}} \left( \vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2 (1-\beta^2)} \right) \vec{a} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}{(1-\beta^2)} \right) \vec{a}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ,  $(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt}) = (\vec{v}, \vec{a})$  – скалярное произведение;  $\vec{v} \cdot \vec{v}, \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$  – прямое (диадное) произведение векторов. Если представить векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{a}$  в виде столбцов

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

то диада  $\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$  представляет собой матрицу

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 \\ \beta_2\beta_1 & \beta_2^2 & \beta_2\beta_3 \\ \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В преобразованиях (4) использовано свойство диады

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b}, \vec{c}). \quad (7)$$

С учетом (4) уравнение (3) принимает вид

$$\vec{F} = \mu \vec{a}, \quad (8)$$

где  $\vec{F}$  и  $\vec{a}$  – трехмерные вектор-столбцы (5),  $\mu$  – матрица  $3 \times 3$  вида

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}{1 - \beta^2} \right). \quad (9)$$

В индексных обозначениях будем соответственно иметь:

$$F_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} a_j, \quad (10)$$

где

$$\mu_{ij} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( \delta_{ij} + \frac{\beta_i \beta_j}{1 - \beta^2} \right) \quad (11)$$

и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнения (8), (10) можно обратить:

$$\vec{a} = \mu^{-1} \vec{F}, \quad a_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij}^{-1} F_j, \quad (12)$$

где обратная матрица  $\mu^{-1}$  имеет вид

$$\mu^{-1} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{m} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}), \quad \mu_{ij}^{-1} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{m} (\delta_{ij} - \beta_i \beta_j). \quad (13)$$

Очевидно, что именно тензор-матрица  $\mu$ , выступающая в качестве «коэффициента пропорциональности» между векторами силы и ускорения, адекватно отражает смысл понятия «мера инертности» в релятивистской динамике. Тензорный характер этой величины означает, что инертность релятивистского тела не является изотропным свойством.

В случае покоящегося или медленно движущегося тела тензорная масса  $\mu_{ij}$  предельным образом переходит в классическую скалярную



инвариантную массу  $m$  (она же масса покоя), являющуюся мерой инертности тела в нерелятивистском приближении.

Тензорные соотношения (10)–(13) можно переписать в более доступной для учащихся и студентов векторной форме, не вводя явно в рассмотрение тензорную массу, а именно [1]:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \vec{a} + |\vec{a}| \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \vec{v}_0 \cos \alpha \right), \quad (14)$$

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \left( \vec{F} - |\vec{F}| \beta^2 \vec{v}_0 \cos \varphi \right), \quad (15)$$

где  $\vec{v}_0$  – единичный вектор, задающий направление скорости тела в момент действия силы,  $\alpha$  – угол между направлениями ускорения и скорости,  $\varphi$  – угол между направлениями силы и скорости.

Из формул (14), (15) можно извлечь важную информацию об инертных свойствах релятивистского тела, не прибегая к решению дифференциального уравнения (3). В частности:

– модуль ускорения зависит не только от модуля силы, но и от скорости, которой обладает тело в момент действия силы;

– модуль ускорения зависит от угла между направлениями силы и скорости;

– направления ускорения и силы не совпадают, исключение составляют лишь два случая, когда  $\vec{F} \parallel \vec{v}$  и  $\vec{F} \perp \vec{v}$ .

В первом случае тензорные уравнения (10) – (13) и эквивалентные им векторные уравнения (14), (15) принимают вид:

$$\vec{F} = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \vec{a}, \quad \vec{a} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{m} \vec{F}. \quad (16)$$

Здесь в качестве меры инертности тела выступает скалярная величина

$$m_{\parallel} = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad (17)$$

называемая продольной массой [2, с. 45–48].

Во втором случае, когда  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , из (14), (15) следует:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{a}, \quad \vec{a} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \vec{F}. \quad (18)$$

Коэффициент пропорциональности между  $\vec{a}$  и  $\vec{F}$  в (18)

$$m_{\perp} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (19)$$

естественно назвать поперечной массой [2, с. 45–48]. Данный случай реализуется, когда тело движется по дуге окружности, например при движении заряженных частиц в магнитном поле.

Отметим также, что с учетом обозначения (19) знаменитая эйнштейновская формула для полной релятивистской энергии тела

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (20)$$

может быть переписана в виде

$$E = m_{\perp} c^2. \quad (21)$$

Эта формула устанавливает связь между полной энергией и инертностью тела, соответствующей его движению по окружности (связь между энергией и поперечной массой). Обычно приводимая в современной научной и учебно-методической литературе формула

$$E_0 = mc^2 \quad (22)$$

является нерелятивистским пределом (20), (21).

Подведем краткий итог. В релятивистской механике количественная мера инертности тел является тензорной величиной (тензорная масса). Тензорный характер релятивистской массы означает, что инертность не является изотропным свойством. Указанная неизотропность обусловлена тем, что движущееся тело создает в пространстве выделенное направление, совпадающее с направлением скорости тела в данный момент времени. В то же время адекватное и достаточно полное представление об инертных свойствах релятивистских тел можно получить и без явного введения тензорной массы, используя векторные формулы (14), (15).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Второй закон Ньютона и релятивистская масса / В. А. Плетюхов // Фізика. – 2018. – № 2. – С. 18–21.
2. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов : в 4 т. / А. Эйнштейн. – М. : Наука, 1965–1967. – Т. 1. – 1965. – 700 с.

УДК 378.14

**А. Н. СЕНДЕР, Н. Н. СЕНДЕР**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТА В УНИВЕРСИТЕТЕ**

В последнее время проблеме качества во всех отраслях уделяется все большее внимание. Предыдущий год в нашей стране был объявлен годом качества. Конечно, эта проблема актуальна и для образования, в том числе и высшего.

Качество образования определяется многими факторами, среди которых:

- а) качество подготовки поступающих абитуриентов,
- б) качество содержания образования,
- в) качество технологии обучения,
- г) уровень взаимодействия студентов и преподавателей в образовательном процессе,
- д) уровень квалификации педагогов и ряд других факторов.

От качества подготовки студентов зависит:

- 1) конкурентоспособность выпускников как профессионалов, их способность к саморазвитию,
- 2) развитие науки, воспроизводство научных кадров,
- 3) стратегическое развитие страны.

Конечно, качество подготовки поступающих абитуриентов, особенно на педагогические специальности, является определяющим при подготовке специалистов на выходе.

На ряде специальностей у выпускников школ высокий уровень подготовки, и, соответственно, проходные баллы по этим специальностям высокие. Но по ряду специальностей (в основном это педагогические специальности физико-математического профиля) проходные баллы невысокие и с трудом удается набрать студентов на бюджетные места. Вместе с тем именно учителя физики и математики очень востребованы на рынке труда.

Содержание образования – важнейшая составляющая подготовки педагога-профессионала, владеющего профессиональными компетенци-

ями. Содержание образования, закрепленное в современных образовательных программах и стандартах, значительно урезано по сравнению с тем, каким оно было несколько лет назад, что говорит о сложности реализации фундаментальной подготовки будущего специалиста совместно с профессиональной направленностью обучения.

Одним из решений данной проблемы является формирование методологических знаний студентов, способов учебной деятельности, чтобы обучающийся с позиции знающего переходил в позицию познающего, формирование у них умений рефлексивно-оценочной деятельности.

Неумение работать с литературой, информацией, ее анализировать, сравнивать, делать выводы говорит о невладении многими студентами логическими операциями. Многие студенты не владеют элементарными математическими, физическими, философскими, педагогическими понятиями. Отвечая на экзаменах на вопросы о законах Ньютона, Кулона, студенты не могут дать ответ на вопрос «Что такое закон?», «Что такое величина?», «Что такое геометрическая фигура?» и т. д. Вместе с тем освоение базовых понятий – основа мышления человека, о формировании их идет речь уже в начальной школе. Поэтому будущий педагог должен уметь ответить на самые, казалось бы, простые вопросы учащихся. А значит, студент должен владеть различными мыслительными умениями, рациональными приемами и способами умственной деятельности.

Современные информационные технологии (например, Интернет) имеют определенную пользу в организации образовательного процесса. Но постоянное обращение к Интернету не развивает мыслительные навыки. «Погружение в информационный поток не приводит к автоматическому превращению знаний, а значит, не усложняет когнитивную сферу субъекта, находящегося в этом потоке. Человека делают умнее работа с информацией, ее преобразования, переструктурирование, схематизация, дополнение и т. д.» [1].

Следовательно, один из показателей качественного образования – единство формирования предметных и методологических знаний [2].

От уровня взаимодействия преподавателей и студентов зависит результативность образовательного процесса. Это взаимодействие должно быть построено на основе сотрудничества, т. е. совместной деятельности студента и преподавателя, объединенных взаимопониманием, нацеленностью на результат, личностным принятием друг друга.

Именно при такой деятельности у студентов формируется положительная мотивация к обучению, происходит не только передача информации от преподавателя студентам, но и преобразование полученных при этом знаний в ценности, значимые для будущей профессии.

Процесс сотрудничества преподавателя и студентов строится на основе общения, предполагающего владение участниками образовательного процесса коммуникативными умениями и управление общением со стороны педагога. Такое отношение партнерства в процессе обучения создает условие для познавательной активности студентов, эмоционально-продуктивной атмосферы во время занятий, обеспечивая тем самым «педагогический резонанс» (Ю. К. Бабанский).

Как было сказано выше, важным показателем качественного образования является развитие науки и воспроизводство научных кадров. В настоящее время в Беларуси 513 докторов наук и 2687 кандидатов наук (население нашей страны 9 млн 156 тыс. человек). Для сравнения в России 79 тыс. докторов наук (население 146 млн человек). Если говорить о соотношении ученых в рамках Союзного государства, то в Беларуси должно быть около 5 тыс. докторов наук.

Подготовка кандидатов и докторов наук – сложная и многоаспектная задача, требующая временных, материальных и интеллектуальных ресурсов. Вместе с тем в настоящее время как в аспирантуру, так и в докторантуру желающих поступать немного. А значит, вопрос воспроизводства научных кадров – серьезная проблема, решение которой связано в том числе и с социальным статусом ученого. В рамках университетского образования решение этой проблемы необходимо начинать с привлечения студентов к научно-исследовательской деятельности, создания ведущими учеными научно-педагогических школ.

Таким образом, овладение студентами предметными и методологическими знаниями позволит им в будущем решать теоретические и прикладные профессиональные задачи. Привлечение студентов к научной деятельности позволяет развивать у них умения ставить задачи, видеть способы их решения, что так необходимо исследователю.

Научная деятельность, рассматриваемая на уровне университета и на уровне общества в целом, представляет собой сложный феномен, перспективы и результат которого, обеспечивают наряду с другими видами профессиональной деятельности инновационное развитие страны.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведская, Е. И. Цифровизация образования: о рисках деинтеллектуализации поколения Z / Е. И. Медведская // Адукацыя і выхаванне. – 2020. – № 7. – С. 55–63.

2. Сендер, А. Н. История и методология начального курса математики / А. Н. Сендер. – Брест : БрГУ, 2003. – 155 с.

УДК 512.542

**М. М. СОРОКИНА**

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

### О ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Рассматриваются только конечные группы. Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Минимальной не  $\mathfrak{F}$ -группой называется группа, не принадлежащая классу  $\mathfrak{F}$ , все собственные подгруппы которой принадлежат  $\mathfrak{F}$  [1]. В работе [2] для насыщенной наследственной формации  $\mathfrak{F}$  установлены условия, при которых разрешимая группа с единичной подгруппой Фраттини является минимальной не  $\mathfrak{F}$ -группой. В теореме 1 получено обобщение данного результата для случая  $\omega$ -насыщенной формации  $\mathfrak{F}$ , где  $\omega$  – непустое множество простых чисел.

Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация,  $G$  – группа,  $G^{\mathfrak{F}}$  –  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , факторгруппа по которой принадлежит  $\mathfrak{F}$ ;  $O_{\omega}(G)$  – наибольшая нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ . Максимальная подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}^{\omega}$ -нормальной ( $\mathfrak{F}^{\omega}$ -абнормальной) в  $G$ , если  $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M \cap O_{\omega}(G)$  (соответственно,  $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M \cap O_{\omega}(G)$ ). Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}^{\omega}$ -субнормальной в  $G$ , если либо  $H = G$  и  $G^{\mathfrak{F}}$  –  $\omega$ -группа, либо существует максимальная  $(G - H)$ -цепь вида

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = H$$

такая, что  $H_i$  –  $\mathfrak{F}^{\omega}$ -нормальная подгруппа в  $H_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, k}$  [3]. Очевидно, что  $\mathfrak{F}^{\omega}$ -субнормальная подгруппа группы  $G$  является  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$  (например, [1, с. 90]). В случае, когда  $\omega$  совпадает с множеством

$\mathbb{P}$  всех простых чисел, понятие  $\mathfrak{F}^\omega$ -субнормальной подгруппы совпадает с понятием  $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы.

Группа  $G$  называется  $\omega$ -примитивной, если в  $G$  существует максимальная подгруппа  $M$  такая, что  $\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$ , при этом подгруппа  $M$  называется  $\omega$ -примитиватором группы  $G$  [4]. Формация  $\mathfrak{F}$  называется  $\omega$ -насыщенной, если ей принадлежит всякая группа  $G$ , удовлетворяющая условию  $G/L \in \mathfrak{F}$ , где  $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$  [5].

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная  $\omega$ -насыщенная формация и  $G$  – разрешимая группа,  $O_\omega(G) \neq 1$ ,  $\Phi(G) \cap O_\omega(G) = 1$ . Группа  $G$  является минимальной не  $\mathfrak{F}$ -группой в том и только в том случае, когда  $G$  –  $\omega$ -примитивная группа с  $\mathfrak{F}^\omega$ -субнормальным  $\omega$ -примитиватором  $M$  и любая собственная подгруппа из  $M$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -субнормальной в  $G$ .

В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$ , из теоремы 1 вытекает теорема 2.2 из [2].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
2. Семенчук, В. Н. О конечных группах с обобщенно субнормальными подгруппами / В. Н. Семенчук, М. В. Селькин, В. М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 66–68.

УДК 512.542

**И. Л. СОХОР**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МОДУЛЯРНЫМИ CP-ПОДГРУППАМИ

Рассматриваются только конечные группы.

Одним их обобщений нормальности является модулярность. Напомним, что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется модулярной в  $G$  подгруппой [1], если  $H$  является модулярным элементом решетки подгрупп группы  $G$ , т. е.

- 1)  $\langle X, H \rangle \cap Y = \langle X, H \cap Y \rangle$  для всех  $X, Y \leq G$  таких, что  $X \leq Y$ ;
- 2)  $\langle H, X \rangle \cap Y = \langle H, X \cap Y \rangle$  для всех  $X, Y \leq G$  таких, что  $H \leq Y$ .

Подгруппа, порожденная модулярными в группе  $G$  подгруппами, модулярна в  $G$ . Поэтому множество всех модулярных подгрупп группы  $G$  образует верхнюю полурешетку относительно частичного упорядочения включения. В то же время пересечение модулярных в группе  $G$  подгрупп может быть немодулярной в  $G$  подгруппой, например, группа  $G = C_2^2 \rtimes C_8$  [2, SmallGroup(32,5)]. Поэтому множество модулярных подгрупп не образует решетку относительно частичного упорядочения включения. Модулярность не транзитивна. Так, например, подгруппа  $C_2$  модулярна в подгруппе  $C_2^2$ , которая в свою очередь модулярна в  $A_4$ , но  $C_2$  не модулярна в  $A_4$ . Группы, в которых модулярность транзитивна, называют *MT*-группами. Разрешимая группа  $G$  является *MT*-группой тогда и только тогда, когда решетка подгрупп группы  $G$  модулярна [3]. В общем случае *MT*-группы и их обобщения описаны в работах [4], [5].

Понятно, что группа, в которой каждая *CP*-подгруппа модулярна, имеет модулярную решетку подгрупп, в частности, такая группа является *MT*-группой. Строение групп с модулярной решеткой подгрупп описано в работах [1], [6], [7]. Вполне естественно возникает задача исследования групп, в которых не все *CP*-подгруппы модулярны.

Доказана

**Теорема.** Пусть в группе  $G$  каждая *CP*-подгруппа модулярна или самонормализуема, тогда либо группа  $G$  имеет модулярную решетку подгрупп, либо  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ , где  $\langle x \rangle$  – силовская подгруппа и подгруппа Картера группы  $G$  и коммутант  $G'$  группы  $G$  нильпотентен.

Заметим, что утверждение теоремы необратимо. Так, например, знакопеременная группа  $A_4$  степени 4 представима в виде  $A_4 = C_2^2 \rtimes C_3$ , но при этом содержит немодулярную подгруппу  $C_2$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № государственной регистрации 20211467).*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin ; New York : De Gruyter, 1994. – 572 p.
2. A system for computational discrete algebra GAP 4.13.1. – URL: <https://www.gap-system.org> (date of access: 11.01.2025).
3. Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Mathematische Zeitschrift. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.



4. Finite groups in which modularity is a transitive relation / A. M. Liu, W. Guo, I. N. Safonova, A. N. Skiba // Archiv der Mathematik. – 2023. – Vol. 121. – P. 111–121.

5. Finite groups in which  $\sigma$ -quasinormality is a transitive relation / A. M. Liu, W. Guo, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Journal of Algebra. – 2024. – Vol. 658. – P. 869–887.

6. Iwasawa, K. Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen / K. Iwasawa // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Section I. – 1941. – Vol. 4. – P. 171–199.

7. A criterion for modularity of the subgroup lattice of a finite soluble group / A. M. Liu, S. Wang, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, No 3. – 23 p. – DOI: 10.1142/S0219498825503785.

УДК 517.977

**О. Б. ЦЕХАН**

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

## **О ДЕКОМПОЗИЦИОННОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ И УПРАВЛЕНИЮ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

**Введение.** Сингулярно возмущенные системы (далее – СВС) являются *математическими моделями динамических систем*, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами. Примерами являются электрические сети с очень маленькими индуктивностями или емкостями, химические реакции или биологические системы с очень разными скоростями процессов, механические системы с очень легкими или жесткими компонентами. Динамика многотемповых систем может быть описана в стандартной форме системами дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. Наличие запаздывания отражает инерционность процессов или пространственную распределенность в реальных системах и приводит к моделям, описываемым функционально-

дифференциальными уравнениями. Примеры СВС с запаздыванием (далее – СВСЗ) – модель нейросистемы, уравнение подсолнечника, модель динамики ядерного реактора, модель следования за автомобилем [1].

При решении задач теории управления для СВС возникают проблемы: высокая размерность, нерегулярная зависимость от параметра условий структурных свойств, законов управления и наблюдения. Значения малого параметра могут быть неизвестны, поэтому стремятся получить условия наличия у СВС тех или иных свойств не только при некотором фиксированном значении малого параметра, а для всех достаточно малых его значений и важно, чтобы условия не зависели от параметра.

Применение асимптотических методов и методов разделения движений позволяет решить эти проблемы и свести исследование СВС к анализу регулярно возмущенных независимых подсистем в разных масштабах времени, описывающих движения с различными скоростями. Декомпозиция СВС по темпам изменения переменных позволяет решать задачи управления отдельно для медленных и быстрых переменных [2].

Один из подходов к декомпозиции СВС основан на использовании замены переменных [3]. Порожденный такой заменой оператор преобразует оператор СВС без запаздывания к блочно-диагональному виду, что соответствует расщеплению СВС на разделенные по темпам системы меньшей размерности, чем исходная, при этом в отличие от исходной эти подсистемы регулярным образом зависят от малого параметра.

Наличие запаздывания в СВС вносит принципиальные сложности в разработку методов декомпозиционных преобразований, что связано с бесконечномерностью пространства состояний систем с запаздыванием. Для СВС с «немалым» запаздыванием возникают следующие *проблемы*: 1) конечномерное преобразование [2; 3], примененное к СВСЗ, приводит лишь к частичной декомпозиции системы, что обусловлено нелокальным действием оператора системы с запаздыванием; 2) в общем случае невозможно преобразовать СВСЗ с пространством состояний кусочно-непрерывных функций на отрезке длины запаздывания в систему с разделенными движениями в том же функциональном пространстве.

**Постановка задачи. Описание подхода к декомпозиции.** В работе рассматривается линейная нестационарная сингулярно возму-

щенная система управления с наблюдаемым выходом и запаздыванием по состоянию (далее – ЛНСВСЗ) вида ( $T \triangleq [t_0, t_1]$ )

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}(t)x(t) + A_{11}(t)x(t-h) + A_{20}(t)y(t) + A_{21}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu \dot{y}(t) &= A_{30}(t)x(t) + A_{31}(t)x(t-h) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t), \quad t \in T, \\ v(t) &= C_{10}(t)x(t) + C_{11}(t)x(t-h) + C_{20}(t)y(t) + C_{21}(t)y(t-h), \quad t \in T, \quad (1) \\ (x(\theta), y(\theta)) &= (\phi(\theta), \psi(\theta)), \quad \theta \in T_h \triangleq [t_0 - h, t_0]. \end{aligned}$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  – медленная переменная,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$  – быстрая переменная,  $\mu$  – параметр,  $\mu \in (0, \mu^0]$ ,  $\mu^0 \ll 1$ ,  $h = \text{const} > 0$  – запаздывание,  $A_{ij}(t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $j = 0, 1$ ,  $A_4(t)$ ,  $B_i(t)$ ,  $C_{ij}(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1$ ,  $t \in T$ , – непрерывные на  $T$  матричные функции подходящих размеров,  $u(t)$  – функция управления,  $u(\cdot) \in L^2[T; \mathbb{R}^r]$ ,  $\phi(\theta), \psi(\theta)$ ,  $\theta \in T_h$  – заданные кусочно-непрерывные на  $T_h$  функции,  $v(t)$  – выходная функция.

Ставится *задача* построения эквивалентного преобразования, обобщающего расщепляющее преобразование [3] на ЛНСВСЗ (1). При этом надо, чтобы декомпозиционное преобразование сохраняло структурные свойства системы с запаздыванием и было обратимым. Эта задача впервые решена автором на основе операторного подхода, представления оператора правой части системы в кольце полиномов от оператора запаздывания и использования нелокальных операторов преобразования [4].

Для корректного применения метода преобразований к декомпозиции ЛНСВСЗ обосновано вложение ЛНСВСЗ в семейство систем с запаздыванием в расширенном пространстве состояний с оператором в кольце степенных рядов. Это позволяет расширить класс допустимых замен переменных и построить нелокальное обратимое расщепляющее преобразование ЛНСВСЗ. При этом разделенная по темпам изменения переменных система оказывается системой с бесконечным запаздыванием с исчезающей памятью. На основе асимптотических методов построено семейство обратимых аппроксимаций расщепляющего преобразования, приводящих ЛНСВСЗ к эквивалентным разделенным по временным шкалам подсистемам с конечным запаздыванием.

**Эквивалентные преобразования.** Представим правую часть ЛНСВСЗ (1) в операторной форме, введя оператор дифференцирования  $p \triangleq \frac{d}{dt}$  и оператор чистого запаздывания  $e^{-ph}$ :  $e^{-ph}x(t) = x(t - h)$ .

Обозначим  $\mathcal{M} = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$ ,

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = A_0(t) + A_1(t) e^{-ph} \in \mathcal{A},$$

$$\mathbf{C}(t, e^{-ph}) = C_0(t) + C_1(t) e^{-ph} \in \mathcal{C},$$

$$C_0(t) = (C_{10}(t), C_{20}(t)), \quad C_1(t) = (C_{11}(t), C_{21}(t)),$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{20} \\ A_{30} & A_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{31} & 0 \end{pmatrix},$$

и определим множества  $\mathcal{A}_\mu$ ,  $\mathcal{B}_\mu$  и  $\mathcal{C}$  непрерывных на  $T$  операторов  $\mathbf{A}_\mu$  правой части свободной системы,  $B_\mu$  управляющей части и  $\mathbf{C}$  выхода (1):

$$\mathbf{A}_\mu \triangleq \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}(t, e^{-ph}) \in \mathcal{A}_\mu,$$

$$B_\mu \triangleq B(t, \mu) = \mathcal{M}^{-1} B(t) \in \mathcal{B}_\mu.$$

Здесь и далее для любого оператора  $\mathcal{P}$  будем обозначать  $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{P}$ . Тогда ЛНСВСЗ (1) можно записать в виде:

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) z(t) + B(t, \mu) u(t),$$

$$v(t) = \mathbf{C}(t, e^{-ph}) z(t), \quad z(t) = \text{col}(x, y),$$

и отождествить с тройкой операторов  $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu, \mathbf{C}) \in (\mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}_\mu, \mathcal{C})$ .

Погрузим систему  $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu, \mathbf{C})$  (1) в семейство систем. Для этого продолжим с  $T$  на  $(-\infty, t_1]$  матричные функции системы (1) так, что  $A_{ij}(t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $j = 0, 1$ ,  $A_4(t)$  ограничены, непрерывно дифференцируемы. Функции  $\varphi(\theta)$ ,  $\psi(\theta)$  доопределим влево тождественно нулями.

Обозначим  $T_{kh} \triangleq [t_0 - (k+1)h, t_0]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Пусть  $M_j^m(t)$ ,  $m, j = \overline{0, k}$ ,  $-n \times n$ -матричные функции с элементами из кольца кусочно-непрерывных на  $T_{kh} \cup T$  функций. Погрузим классы операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_\mu$  в семейства классов  $\mathcal{O}_k$ ,  $\mathcal{O}_{\mu k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  операторов

$$\mathbf{O}_k(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{m=0}^k \mu^m M_j^m(t) e^{-jph} \in \mathcal{O}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{O}_{\mu k} \in \mathcal{O}_{\mu k}.$$

Введем также группу  $\mathcal{O}_\infty$  операторов

$$\mathbf{O}_\infty(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m M_j^m(t) e^{-jph}$$

с элементами из кольца  $\overline{PC}((-\infty, t_1]; \mathbb{R})[[\mu, e^{-ph}]]$  формальных степенных рядов от  $\mu, e^{-ph}$  над кольцом кусочно-непрерывных ограниченных на  $(-\infty, t_1]$  функций и класс  $\mathcal{O}_{\mu\infty}$ . В классах  $\mathcal{O}_k, \mathcal{O}_{\mu k}, k = 0, 1, \dots, \mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{O}_{\infty}$  выделим подклассы  $\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{\mu k}, k = 0, 1, \dots, \mathcal{A}_{\mu\infty}, \mathcal{A}_{\infty}$  операторов, для которых  $M_0^0(t), M_1^0(t)$  имеют вид  $A_0(t) A_1(t)$  и все остальные  $M_j^m(t) \equiv 0, t \in T$ . Таким образом на расширенном пространстве состояний  $PC((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^n)$  определены вложенные классы операторов такие, что

$$\mathcal{A}_{\mu k} \subset \mathcal{A}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{O}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{A}_{\mu k} \subset \mathcal{A}_{\mu\infty} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}, k = 0, 1, \dots$$

Аналогично введем вложенные системы операторов управляющей части и выхода ЛНСВСЗ (1) таким образом, что определено погружение ЛНСВСЗ (1)  $(\mathbf{A}_{\mu}, \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C}) \in (\mathcal{A}_{\mu}, \mathcal{B}_{\mu}, \mathcal{C}) \subset (\mathcal{A}_{\mu k}, \mathcal{B}_{\mu k}, \mathcal{C}_{\mu k}) \subset (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k}) \subset (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty}, \mathcal{W}_{\mu\infty}), k = 0, 1, \dots$

**Теорема 1.** Пусть элементы функций  $A_{ij}(t), i = \overline{1, 3}, j = 0, 1, A_4(t)$ , определены, ограничены и непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на  $(-\infty, t_1]$ ;

$$\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -a < 0; \|A_4(t)\| \leq b; \|\dot{A}_4(t)\| \leq c \forall t \in (-\infty, t_1].$$

Тогда для достаточно малых  $\mu > 0$  существует унимодулярный оператор нелокального преобразования Ляпунова [5]

$$\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) : (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty}, \mathcal{W}_{\mu\infty}) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty}, \mathcal{W}_{\mu\infty}),$$

действующий на  $(\mathbf{A}_{\mu}, \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C})$  по правилу

$$\mathbf{K} * (\mathbf{A}_{\mu}, \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C}) = (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_{\mu} \mathbf{K} - \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_{\mu}, \mathbf{C} \mathbf{K})$$

и преобразующий ЛНСВСЗ (1) к системе с блочно-диагональным оператором  $\mathbf{A}_{\xi\eta} = \mathbf{K} * \mathbf{A}_{\mu} = \operatorname{diag} \{ \mathbf{A}_{\xi}(t, \mu, e^{-ph}), \mu^{-1} \mathbf{A}_{\eta}(t, \mu, e^{-ph}) \}$ .

Компоненты оператора  $\mathbf{K}$  могут быть представлены в виде асимптотических рядов по  $\mu$ , выраженных через матрицы ЛНСВСЗ (1).

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 для достаточно малых  $\mu > 0$  в результате замены переменных

$$z(t) = \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) \operatorname{col}(\xi(t), \eta(t)), \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, t \in (-\infty, t_1],$$

при  $\varphi(\theta) \equiv 0, \psi(\theta) \equiv 0$  ЛНСВСЗ (1) преобразуется в алгебраически и

асимптотически эквивалентную систему с разделенными движениями с бесконечным запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) \xi(t) + \mathbf{B}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) u(t), \\ \Sigma_{\xi\eta} \quad \mu \dot{\eta}(t) &= \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \eta(t) + \mathbf{B}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) u(t), \quad t \in T, \\ v(t) &= \mathbf{C}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) \xi(t) + \mathbf{C}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \eta(t), \quad t \in T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}_\xi, \mathbf{B}_\xi, \mathbf{C}_\xi, \mathbf{A}_\eta, \mathbf{B}_\eta, \mathbf{C}_\eta$  выражаются через матрицы ЛНСВСЗ (1) и представимы в виде асимптотических рядов по  $\mu$ .

Наряду с расщепляющим преобразованием  $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$  определяем семейство невырожденных при каждом  $t \in T$   $n \times n$ -матричных унимодулярных операторов  $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) : (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k}) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , которые аппроксимируют  $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$  и компоненты которых выражаются через матрицы ЛНСВСЗ в виде конечных сумм (по  $\mu, e^{-ph}$ ). Применяя преобразования  $\mathbf{K}^{[k]}$  к ЛНСВСЗ (1) как системе класса  $(\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}, \mathcal{W}_{\mu k})$ , получаем подсистемы с конечным запаздыванием, операторы которых аппроксимируют операторы расщепленной системы (2) с точностью  $O(\mu^k)$ . В частности, при  $k = 0$  эти системы совпадают с независимыми от параметра  $\mu$  вырожденной системой (далее – ВС) и присоединенной системой (далее – ПС), которые формально получаются из СВС, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при  $\mu = 0$ . При  $\det A_4(t) \neq 0$ ,  $t \in T$  ВС имеет вид  $n_1$ -мерной нестационарной системой с запаздыванием в состоянии, управлении и выходе, а ПС является стационарной  $n_2$ -системой без запаздывания [6]. Эквивалентные преобразования ЛНСВСЗ (1) с помощью операторов семейства  $\mathbf{K}^{[k]}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  сохраняют структурные свойства и позволяют получить последовательность уточняющих достаточных условий структурных свойств ЛНСВСЗ, аппроксимации любых порядков ее решений, строить регуляторы и наблюдатели с требуемой точностью.

**Заключение.** Впервые построено эквивалентное декомпозиционное преобразование, полностью разделяющее медленные и быстрые динамики ЛНСВСЗ. Установлено, что разделенная по темпам изменения переменных система является системой с бесконечным запаздыванием с исчезающей памятью. Введено семейство обратимых операторов, аппроксимирующих декомпозиционное преобразование, применение которых к ЛНСВСЗ позволяет выводить свойства исходной ЛНСВСЗ (1) из аналогичных свойств регулярно возмущенных систем с конечным запаздыванием меньшей размерности в разных масштабах времени. По-

лучены условия на параметры ЛНСВСЗ, при которых структурные свойства ЛНСВСЗ (1) (устойчивости, стабилизируемости, управляемости, наблюдаемости) следуют из аналогичных структурных свойств разделенных по темпам изменения переменных подсистем. Доказаны независимые от малого параметра достаточные условия структурных свойств ЛССВСЗ. Их выполнение гарантирует наличие изучаемых свойств у ЛССВСЗ для всех достаточно малых значений параметра. Построены аппроксимации решений ЛНСВСЗ через решения аппроксимаций расщепленной системы (2), композитные регуляторы и наблюдатели, компоненты которых можно рассчитывать отдельно и параллельно для ВС и ПС.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», 1.2.04.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glizer, V. Singularly perturbed linear time delay systems / V. Glizer. – Birkhauser : Cham, 2021. – 416 p.
2. Kokotovic, P. V. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design / P. V. Kokotovic , H. K. Khalil, J. O'Reilly. – New York : Academic Press, 1999. – 386 p.
3. Chang, K. Singular perturbations of a general boundary value problem / K. Chang // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1972. – Vol. 3, No 3. – P. 520–526.
4. Marchenko, V. M. Realization of dynamical systems in scales of systems with aftereffect: I. Realizability / V. M. Marchenko, J. J. Loiseau // Differential Equations. – 2006. – Vol. 42. – P. 1587–1595.
5. Mazanik, S. A. Lyapunov transformations of linear differential systems / S. A. Mazanik. – Minsk : BSU, 2008. – 175 p.
6. Цехан, О. Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием / О. Б. Цехан // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2024. – Т. 14, № 1. – С. 37–47.
7. Цехан, О. Б. Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром / О. Б. Цехан // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 50–61.

8. Pawluszewicz, E. Stability and stabilisability of the singularly perturbed system with delay on time scales: a decomposition approach / E. Pawluszewicz, O. Tsekhan // International Journal of Control. – 2021. – Vol. 94, iss. 9. – P. 2406–2419.

УДК 539.12

**V. M. RED'KOV<sup>1</sup>, A. V. IVASHKEVICH<sup>1</sup>, A. V. BURY<sup>1</sup>,  
A. M. KUZMICH<sup>2</sup>, E. M. OVSIYUK<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Belarus, Minsk, B. I. Stepanov Institute of Physics

<sup>2</sup>Belarus, Brest, Brest State A. S. Pushkin University

<sup>3</sup>Belarus, Mozyr, Mozyr State Pedagogical I. P. Shamyakin University

### **SPIN 1 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT AND POLARISABILITY IN PRESENCE OF UNIFORM MAGNETIC AND ELECTRIC FIELDS**

In the paper we study a generalized Duffin–Kemmer equation for spin 1 particle with two characteristics, anomalous magnetic moment and polarizability in presence of external uniform magnetic and electric fields.

After separating the variables, we get the system of ten first order partial differential equations for 10 functions  $f_i(r, z)$ . To describe the  $r$ -dependence of 10 functions  $f_A(r, z)$ ,  $A = 1, \dots, 10$ , we apply the method by Fedorov – Gronskiy; so the complete 10-component wave function is decomposed into the sum of three projective constituents, dependence of each component on the polar coordinate  $r$  is determined by only one corresponding function,  $F_i(r)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; these three basic functions are constructed in terms of the confluent hypergeometric functions, at this there arises the quantization rule due to the presence of magnetic field.

After that we derive a system of 10 ordinary differential equations for 10 functions  $f_A(z)$ . This system is solved by using the elimination method and with the help of special linear combining of the involved functions. As the result, we find three separated second order differential equations, their solutions are constructed in the terms of the confluent hypergeometric functions. The numerical studied of the obtained analytical results is done.



Thus, in this paper, the three types of solutions for a vector particle with two additional electromagnetic characteristics in presence of external uniform magnetic and electric fields are found.

These results are extended to presence of uniform electric field, and into presence of both magnetic and electric fields. In the last case, the problem for solving reduce to the system of 10 partial differential equations in two cylindrical coordinates  $(r, z)$ .

#### REFERENCES

1. Elementary particles with internal structure in external fields / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – Vol. I : General Theory. – 402 p. ; Vol. II : Physical Problems. – 404 p.
2. Fields of particles with spin, theory and application / A. V. Ivashkevich, N. G. Krylova, E. M. Ovsiuyk [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2023. – 435 p.
3. Solutions with cylindrical symmetry for graviton field in linear approximation, the gauge degrees of freedom / A. V. Ivashkevich, A. V. Bury, V. M. Red'kov [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2024. – Vol. 27, No. 3. – P. 256–277.
4. Spin  $\frac{1}{2}$  Particle with Anomalous Magnetic Moment and Polarizability / В. В. Кисель, А. В. Бурый, П. О. Саченок, Е. М. Овсюк // *Вестник Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка*. – 2024. – № 2. – С. 7–27.
5. Fradkin Equation for a Spin  $3/2$  particle in the magnetic field / A. V. Ivashkevich, E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2024. – Vol. 27, No 4. – P. 341–365.
6. Spin 1 Particle with two additional electromagnetic characteristics in presence of the uniform electric field / A. V. Ivashkevich, A. M. Kuzmich, P. O. Sachenok, E. M. Ovsiyuk // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2025. – Vol. 28, No 1. – P. 41–63.
7. Ivashkevich, A. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in external uniform electric field, solutions with cylindric symmetry / A. Ivashkevich, V. Red'kov, A. Chichurin // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2025 (in press); <https://doi.org/10.1002/mma.10831>.
8. Gronskiy, V. K. Magnetic properties of a particle with spin  $3/2$  / V. K. Gronskiy, F. I. Fedorov // *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. – 1960. – Vol. 4, No 7. – P. 278–283.

**СЕКЦИЯ 1**  
**АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ИХ СОВРЕМЕННЫЕ**  
**ПРИЛОЖЕНИЯ**

УДК 512.542

**Е. В. ЗУБЕЙ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**РАЗРЕШИМОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ**  
**С  $OS$ -ПРОПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ СИЛОВСКИМИ**  
**ПОДГРУППАМИ**

Рассматриваются только конечные группы.

Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется  $OS$ -проперестановочной в  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = N_G(A)B$ ,  $AB$  является подгруппой группы  $G$  и подгруппа  $A$  перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из  $B$ . Напомним, что группой Шмидта называется конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [1].

Понятие  $OS$ -проперестановочной подгруппы было введено в работе [2], там же указаны основные свойства этих подгрупп, и установлена для простого числа  $p \geq 7$   $p$ -разрешимость группы, в которой силовская  $p$ -подгруппа  $OS$ -проперестановочна.

В работе [3] для  $p < 7$  перечислены все неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская  $p$ -подгруппа  $OS$ -проперестановочна. Из этой работы вытекает разрешимость группы с  $OS$ -проперестановочными силовскими 2- и 3-подгруппами.

**Лемма 1.** *Если в группе  $G$  силовские 2- и 3-подгруппы  $OS$ -проперестановочны, то группа  $G$  разрешима.*

**Лемма 2.** *Если в группе  $G$  силовские 2- и 7-подгруппы  $OS$ -проперестановочны, то группа  $G$  разрешима.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номер государственной регистрации – 20211467).*

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Труды Украинского математического конгресса 2001. – Киев : Ин-т математики. – 2002. – С. 81–90.
2. Зубей, Е. В. Конечные группы с  $OS$ -проперестановочными подгруппами / Е. В. Зубей // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22, № 3. – С. 457–463.
3. Zubei, E. V. On a finite group with  $OS$ -propermutable Sylow subgroup / E. V. Zubei // Acta Mathematica Hungarica. – 2024. – Vol. 174 (2). – P. 1–8. – DOI: 10.1007/s10474-024-01495-y.

УДК 512.542:51-37

**Я. А. КУПЦОВА, В. И. МУРАШКО**

Беларусь, Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

### ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕБИПРИМАРНОГО ГРАФА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Рассматриваются только конечные группы. Изучение графов, определяемых с помощью классов групп, является довольно актуальным направлением исследований [1; 2]. Он позволяет изучать структуру группы по свойствам сопоставляемого ей графа. Среди таких графов выделяются коммутативные [3] и некоммутативные [4], нильпотентные [5] и ненильпотентные [6], разрешимые [7] и неразрешимые, сверхразрешимые [1] и несверхразрешимые, циклические [8] и нециклические [9], бипримарные и небипримарные [10] графы, а также их обобщения.

В данной работе мы подробнее остановимся на изучении небипримарного графа. Для этого рассмотрим класс всех таких групп, порядка которых имеют не более двух различных простых делителей. Обозначим его через  $\mathfrak{B}$ .

**Определение 1.** Небипримарным графом конечной группы  $G$  называется простой граф, вершинами которого является множество  $G \setminus \mathcal{J}_{\mathfrak{B}}(G)$ , где

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{B}}(G) = \{y \in G \mid \forall x \in G (\langle x, y \rangle \in \mathfrak{B})\}$$

и две вершины  $x$  и  $y$  соединены ребром  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \notin \mathfrak{B}$ .

Согласно [10], в общем случае  $\mathcal{J}_{\mathfrak{S}}(G)$  не является подгруппой  $G$ .

Анализируя литературу, нетрудно заметить, что о небипримарном графе известно довольно мало. В связи с этим для более подробного изучения данного графа на языке программирования GAP были написаны функции, позволяющие вычислять данный граф.

1. Функция  $\text{Vertices}(G)$  возвращает множество вершин небипримарного графа. Кроме того, с помощью данной функции можно найти количество вершин рассматриваемого нами графа.

2. Функция  $\text{Edges}(G)$  возвращает список ребер небипримарного графа. Кроме того, с помощью данной функции можно найти количество ребер рассматриваемого нами графа.

Для демонстрации практической применимости данных функций в таблице приведем результаты по времени их выполнения (в секундах). Все результаты, представленные в таблице, были получены с использованием GAP 4.13.1 на ноутбуке с процессором Intel(R) Core(TM) i7-4702MQ CPU @ 2.20GHz 2.20 GHz с 2 ГБ оперативной памяти.

Таблица – Результаты выполнения функций

Группа	Порядок	Функция Vertices	Число вершин	Функция Edges	Число ребер
$C_{49} : C_6$	$2 \cdot 3 \cdot 7^2$	0,219	293	4,531	28224
$C_{20} \times (C_7 : C_9)$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	0,172	1260	104,469	780282
$C_{125} : C_{16}$	$2^4 \cdot 5^3$	0,00001	0	0,00001	0

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ-РНФ М, проект Ф23РНФМ-63).*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Delizia, C. Finite groups in which some property of two-generator subgroups is transitive / C. Delizia, P. Moravec, C. Nicotera // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 2007. – Vol. 75, № 2. – P. 313-320.
2. Lucchini, A. The non- $\mathfrak{S}$  graph of a finite group / A. Lucchini, D. Nemi // Mathematische Nachrichten. – 2021. – Vol. 294, № 10. – P. 1912–1921.
3. Brauer, R. On groups of even order / R. Brauer, K. A. Fowler // Annals of Mathematics. – 1955. – Vol. 62, № 3. – P. 565–583.

4. Abdollahi, A. Non-commuting graph of a group / A. Abdollahi, S. Akbari, H. R. Maimani // Journal of Algebra. – 2006. – Vol. 298, № 2. – P. 468–492.
5. Das, A. K. On the genus of the nilpotent graphs of finite groups / A. K. Das, D. Nongsiang // Communications in Algebra. – 2015. – Vol. 43, № 12. – P. 5282–5290.
6. Abdollahi, A. Non-nilpotent graph of a group / A. Abdollahi, M. Zarrin // Communications in Algebra. – 2010. – Vol. 38, № 12. – P. 4390–4403.
7. Burness, T. C. On the soluble graph of a finite group / T. C. Burness, A. Lucchini, D. Nemmi // Journal of Combinatorial Theory. Series A. – 2023. – Vol. 194. – 39 p. — DOI: 10.1016/j.jcta.2022.105708.
8. Imperatore, D. A condition in finite solvable groups related to cyclic subgroups / D. Imperatore, M. L. Lewis // Bulletin of the Australian Mathematical Society – 2011. – Vol. 83, № 2. – P. 267–272.
9. Abdollahi, A. Noncyclic graph of a group / A. Abdollahi, A. M. Hassannabadi // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35., № 7. – P. 2057–2081.
10. Garatea-Zaballa, K. The non-two-primes graph of a finite group / K. Garatea-Zaballa, A. Lucchini // Transactions on Combinatorics. – 2025. – 9 p. – DOI: 10.22108/toc.2025.142373.2201.

УДК 512.542

**С. И. ЛЕНДЕНКОВА**

Беларусь, Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

### **О КОРАДИКАЛЕ ГРУППЫ, ФАКТОРИЗУЕМОЙ СЛАБО $tcc$ -ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

В работе рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и терминология соответствуют [1].

Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация и  $G$  – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы  $G$ , фактор-группы по которым принадлежат  $\mathfrak{F}$ , обозначается через  $G^{\mathfrak{F}}$  и называется  $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы  $G$ . В случае, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$  или  $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{F}$ -корадикал называют нильпотентным или сверхразрешимым соответственно. Напомним, что группа  $G$  метанильпотентна

(мета- $p$ -нильпотентна), если существует нильпотентная ( $p$ -нильпотентная) нормальная подгруппа, фактор-группа по которой нильпотентна (соответственно  $p$ -нильпотентна).

Развитие тотально и взаимно перестановочных подгрупп привело, в частности, к такому понятию, как *tcc*-перестановочные подгруппы.

Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *tcc*-перестановочными [2], если для любой подгруппы  $X$  из  $A$  и для любой подгруппы  $Y$  из  $B$  существует элемент  $u \in \langle X, Y \rangle$  такой, что  $XY^u \leq G$ . Здесь и далее запись  $H = \langle H_1, H_2 \rangle$  означает, что подгруппа  $H$  порождается своими подгруппами  $H_1$  и  $H_2$ .

В монографии А. А. Трофимука [3] отражены известные результаты этой тематики.

В работе Ц. Хуана, Б. Ху и А. Н. Скибы [4] введено новое понятие слабо субнормальной подгруппы, связанное с порождением двух подгрупп, одна из которых субнормальна, а вторая обладает определенными свойствами.

Используя их идею, введем

**Определение.** Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  будем называть *слабо tcc*-перестановочными, если  $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ ,  $B = \langle B_1, B_2 \rangle$ , где  $A_1, B_1$  субнормальны в  $G$ , а  $A_2, B_2$  *tcc*-перестановочны.

На основе результатов работ [5] и [6] доказана следующая

**Теорема.** Пусть  $G = AB$ ,  $A$  и  $B$  — слабо *tcc*-перестановочные подгруппы группы  $G$ .

(1) Если  $A$  и  $B$  сверхразрешимы, то сверхразрешимый корадикал группы  $G$  метанильпотентен.

(2) Если  $A$  и  $B$   $p$ -сверхразрешимы, то  $p$ -сверхразрешимый корадикал группы  $G$  мета- $p$ -нильпотентен.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // Journal of Algebra. – 2017. – Vol. 476. – С. 395–414.

3. Трофимук, А. А. Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители / А. А. Трофимук. – Минск : Изд. центр БГУ, 2021. – 262 с.

4. Хуан, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А. Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 210–220.

5. 5. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Archiv der Mathematik – 1989. – No 53. – P. 318–326.

6. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, P. Shum, A. N. Skiba // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2006. – Т. 68, No 3–4. – P. 433–449.

УДК 512.542

**А. С. НЕСТЕРОВ, М. М. СОРОКИНА**

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

### **О МИНИМАЛЬНЫХ $\sigma_\Omega$ -КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

Рассматриваются только конечные группы. В теории классов конечных групп важную роль играют функциональные методы, с помощью которых были построены локальные (В. Гашюц, 1963), композиционные (Л. А. Шеметков, 1978),  $\omega$ -локальные (Л. А. Шеметков, 1984),  $\mathfrak{L}$ -композиционные (А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, 1999) формации, где  $\omega$  – непустое подмножество множества  $\mathbb{P}$  всех простых чисел,  $\mathfrak{L}$  – непустой подкласс класса  $\mathfrak{J}$  всех простых групп (например, [1]). Серии  $\omega$ -вверных и  $\Omega$ -расслоенных формаций (В. А. Ведерников, 1999) включают  $\omega$ -локальные и  $\mathfrak{L}$ -композиционные (при  $\Omega = \mathfrak{L}$ ) формации соответственно. Важное место в современной алгебре занимает разработанная А. Н. Скибой  $\sigma$ -теория конечных групп, с помощью методов которой были построены  $\sigma$ -локальные (А. Н. Скиба, 2017), Бэра  $\sigma$ -локальные (В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова, А. Н. Скиба, 2019),  $\bar{\omega}$ -вверные (М. М. Сорокина, А. А. Горепекина, 2021) формации конечных групп,  $\sigma$ -локальные (В. Го, Ли Чжан, Н. Т. Воробьев, 2020),  $\omega\sigma$ -вверные и  $\Omega\zeta$ -расслоенные (О. В. Камозина, 2020) классы Фиттинга конечных групп,  $\sigma_\Omega$ -расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных  $T$ -групп (Е. Н. Бажанова, 2023). С помощью развития понятия  $\Omega$ -расслоенной формации конечных групп в работе [3] были построены  $\sigma_\Omega$ -расслоенные формации конечных групп, где  $\sigma_\Omega$  – произвольное разбиение класса  $\Omega$ . Одним из видов

$\sigma_\Omega$ -расслоенных формаций являются  $\sigma_\Omega$ -канонические формации. В теореме 1 изучаются минимальные  $\sigma_\Omega$ -канонические формации, т. е. такие неединичные  $\sigma_\Omega$ -канонические формации, которые не содержат нетривиальных  $\sigma_\Omega$ -канонических подформаций.

Используемые обозначения и определения стандартны (например, [1]). Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется формацией (классом Фиттинга), если  $\mathfrak{F}$  замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений (относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп). Для непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  через  $G_{\mathfrak{F}}$  обозначается  $\mathfrak{F}$ -радикал группы  $G$ , т. е. наибольшая нормальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы  $G$ . Пусть  $\mathfrak{G}$  – класс всех конечных групп,  $\mathfrak{I}$  – класс всех простых групп,  $\mathfrak{E}$  – класс всех единичных групп;  $(\mathfrak{X})$  – класс групп, порожденный множеством групп  $\mathfrak{X}$ . Через  $K(G)$  обозначается класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы  $G$ ;  $K(\mathfrak{X}) = \cup_{G \in \mathfrak{X}} K(G)$ . Пусть  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  – классы групп. Произведением классов  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  называется класс групп  $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid \text{существует } N \triangleleft G, \text{ где } N \in \mathfrak{F}_1 \text{ и } G/N \in \mathfrak{F}_2)$ .

Следуя [4], для любого непустого подкласса  $\Delta$  класса  $\mathfrak{I}$  будем полагать:  $\mathfrak{G}_\Delta = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \Delta)$ ;  $\mathfrak{G}_{\Delta'} = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \cap \Delta = \emptyset)$ ;  $O_\Delta(G) = \mathfrak{G}_\Delta$ -радикал группы  $G$ .

Пусть  $\Omega$  – произвольный непустой подкласс класса  $\mathfrak{I}$ ,  $\sigma_\Omega$  – произвольное разбиение класса  $\Omega$ , т. е.  $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$ , где  $\Omega_i$  – непустой класс групп для любого  $i \in I$ ,  $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$  и  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  для любых  $i, j \in I, i \neq j$ . Для произвольной группы  $G$  полагаем

$$\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap K(G) \neq \emptyset\}.$$

Функция вида

$$\varphi : \sigma_\Omega \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\},$$

удовлетворяющая условию  $\mathfrak{G}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$  для любого  $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ , называется *формационно-радикальной  $\sigma_\Omega$ -функцией* или коротко  *$\sigma_\Omega FR$ -функцией*.

Функция вида

$$f : \sigma_\Omega \cup \{\sigma_\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\},$$

где  $f(\sigma_\Omega') \neq \emptyset$ , называется *формационной  $\sigma_\Omega$ -функцией* или коротко  *$\sigma_\Omega F$ -функцией*.



Пусть  $\varphi$  и  $f$  – некоторые  $\sigma_\Omega FR$ -функция и  $\sigma_\Omega F$ -функция соответственно. Формация вида  $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega')$  и  $G/G_{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$  для любого  $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$ ) называется  $\sigma_\Omega$ -*расслоенной* формацией и обозначается  $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega F(f, \varphi)$ . Функция  $f$  называется *спутником*, а функция  $\varphi$  – *направлением*  $\sigma_\Omega$ -расслоенной формации  $\mathfrak{F}$  [3].

Неединичная  $\sigma_\Omega$ -расслоенная формация  $\mathfrak{F}$  с направлением  $\varphi$  называется *минимальной*  $\sigma_\Omega$ -расслоенной формацией с направлением  $\varphi$ , если она не содержит собственных  $\sigma_\Omega$ -расслоенных подформаций с направлением  $\varphi$ , отличных от  $\mathfrak{E}$ .

$\sigma_\Omega$ -расслоенная формация  $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega F(f, \varphi)$  называется  $\sigma_\Omega$ -*канонической*, если  $\varphi(\Omega_i) = \mathfrak{E}_{\Omega_i}' \mathfrak{E}_{\Omega_i}$  для любого  $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ . Через  $\sigma_\Omega KF(G)$  обозначается  $\sigma_\Omega$ -каноническая формация, порожденная группой  $G$ , т. е. пересечение всех  $\sigma_\Omega$ -канонических формаций, содержащих группу  $G$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega KF(G)$ , где  $G$  – простая группа такая, что  $K(G) \subseteq \Omega$ . Тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma_\Omega$ -канонической формацией.

В случае, когда  $\sigma_\Omega$  – такое разбиение класса  $\Omega$ , что для любого  $\Omega_i \in \sigma_\Omega$  имеет место равенство  $\Omega_i = (A)$  для некоторой группы  $A \in \mathfrak{J}$ , из теоремы 1 вытекает известный результат для  $\Omega$ -канонических формаций ([5], с. 48).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
2. Skiba, A. N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable Subgroups of Finite Groups / A. N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 79–82.
3. Сорокина, М. М. О спутниках  $\sigma_\Omega$ -расслоенных формаций / М. М. Сорокина, А. С. Нестеров // Дискретная математика. – 2023. – Т. 36, № 1. – С. 103–115.
4. Ведерников, В. А.  $\Omega$ -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 125–144.
5. Коптюх, Д. Г.  $\Omega$ -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / Д. Г. Коптюх, О. А. Хомякова // Вестник Брянского государственного университета. – 2008. – № 4. – С. 46–49.

УДК 512.542

**Д. Г. НОВИКОВА, М. М. СОРОКИНА**

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

## СВОЙСТВА КЛАССА ГРУПП, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО $\mathfrak{F}^\omega$ -ИНЪЕКТОРАМИ

Рассматриваются только конечные группы. Пусть  $\mathfrak{F}$  – произвольный класс групп. Понятие  $\mathfrak{F}$ -инъектора группы было введено в рассмотрение в совместной работе Б. Фишера, В. Гашюца и Б. Хартли [1]. В настоящее время  $\mathfrak{F}$ -инъекторы в конечных группах достаточно хорошо изучены, установлены их связи с другими подгруппами в группах, описаны их свойства в зависимости от свойств класса  $\mathfrak{F}$  (например, [2; 3]). В [4] были определены  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторы групп и установлены их простейшие свойства. Пусть  $\omega$  – непустое подмножество множества  $\mathbb{P}$  всех простых чисел. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ , если  $H$  –  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G$  и для каждой субнормальной  $\omega$ -подгруппы  $K$  группы  $G$  пересечение  $H \cap K$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K$  [4]. В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$ , понятие  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора совпадает с понятием  $\mathfrak{F}$ -инъектора группы (например, [3, с. 564]). Через  $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$  и  $\text{Inj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$  обозначаются соответственно совокупности всех  $\mathfrak{F}$ -инъекторов и всех  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов группы  $G$ .

В монографии [3] для класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , содержащегося в универсуме  $\mathfrak{S}$  всех конечных разрешимых групп, и произвольного класса групп  $\mathfrak{H}$  был введен в рассмотрение класс групп  $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$ , состоящий из всех групп  $G \in \mathfrak{S}$ , удовлетворяющих условию  $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathfrak{H}$ . Отметим, что для указанного класса групп  $\mathfrak{F}$  и любой группы  $G \in \mathfrak{S}$  множество  $\text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$  непусто (например, [3]).

Пусть  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – произвольные классы групп. Следуя [3], определим класс групп  $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$  следующим образом:

$$\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{B} \mid \emptyset \neq \text{Inj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) \subseteq \mathfrak{H}\}.$$

В теореме 1 проводится исследование свойств данного класса.

Через  $\pi(G)$  обозначается совокупность всех простых делителей порядка группы  $G$ ;  $G'$  – коммутант группы  $G$ . Группа  $G$  называется  $\omega$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \omega$  [5, с. 250]. Класс групп  $\mathfrak{F}$  назовем  $Q^\omega$ -замкнутым,

если из того, что  $G \in \mathfrak{F}$  и  $N$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ , всегда следует, что  $G/N \in \mathfrak{F}$ ;  $R_0^\omega$ -замкнутым, если из того, что  $G/N_1, G/N_2 \in \mathfrak{F}$ , где  $N_1, N_2$  – нормальные  $\omega$ -подгруппы группы  $G$ , всегда следует, что  $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$ . Отметим, что всякий  $Q$ -замкнутый класс групп является  $Q^\omega$ -замкнутым для любого множества  $\omega$ . Всякий  $R_0$ -замкнутый класс групп является  $R_0^\omega$ -замкнутым для любого множества  $\omega$ . В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$ , понятия  $Q$ -замкнутого и  $Q^\omega$ -замкнутого ( $R_0$ -замкнутого и  $R_0^\omega$ -замкнутого) классов групп совпадают.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга,  $\omega$  – непустое множество простых чисел,  $\mathfrak{B} = \{G \in \mathfrak{S} \mid \pi(G') \subseteq \omega\}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если  $\mathfrak{H}$  –  $Q^\omega$ -замкнутый класс групп, то класс  $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$  также является  $Q^\omega$ -замкнутым.

2) Если  $\mathfrak{H}$  –  $R_0^\omega$ -замкнутый класс групп, то класс  $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$  также является  $R_0^\omega$ -замкнутым.

В случае, когда  $\omega$  совпадает с множеством  $\mathbb{P}$ , из теоремы 1 вытекает следующий результат. Отметим, что при  $\omega = \mathbb{P}$ , наряду с обозначением  $\mathfrak{F}^\omega \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$ , используется обозначение  $\mathfrak{F} \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга. Если класс групп  $\mathfrak{H}$  является формацией, то класс  $\mathfrak{F} \uparrow_{\mathfrak{B}} \mathfrak{H}$  также является формацией.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fischer, B. Injektoren Endlicher Auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Mathematische Zeitschrift. – 1967. – Vol. 102, No 5. – P. 337–339.
2. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 381 p.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Новикова, Д. Г. Об одном свойстве  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов конечных групп / Д. Г. Новикова, М. М. Сорокина // Теоретические и прикладные аспекты естественно-научного образования в эпоху цифровизации : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Брянск, 11–12 апр. 2024 г. – Брянск : РИСО БГУ, 2024. – С. 148–150.
5. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 271 с.

УДК 512.542

**П. А. ПАВЛУШКО, А. А. ТРОФИМУК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ *tcc*-ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *сс-перестановочными* в  $G$  (условно перестановочными) [1], если  $A$  перестановочна с  $B^g$  для некоторого элемента  $g \in \langle A, B \rangle$ .

В последнее десятилетие активно развивается направление, связанное с изучением строения групп с заданными системами условно перестановочных подгрупп. Очевидно, что если в группе подгруппа перестановочна со всеми подгруппами группы, то она перестановочна и со всеми подгруппами из добавления к ней. Так, в работе [2] введено понятие *tcc-подгруппы* (подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *tcc-подгруппой* в группе  $G$ , если в  $G$  существует подгруппа  $Y$  такая, что  $G = AY$  и каждая подгруппа из  $A$  *сс-перестановочна* с каждой подгруппой из  $Y$ . В [2] также получен целый ряд признаков сверхразрешимости группы с заданными системами *tcc-подгрупп*.

Сузив множество перестановочных подгрупп из подгруппы и добавления к ней, введем следующее

**Определение.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *слабой tcc-подгруппой* в  $G$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) в  $G$  существует подгруппа  $T$  такая, что  $G = AT$ ;
- 2) каждая нормальная подгруппа из  $A$  *сс-перестановочна* с каждой подгруппой из  $T$ .

Очевидно, что каждая *tcc-подгруппа* группы  $G$  является слабой *tcc-подгруппой* группы  $G$ , но обратное не всегда выполняется. Например, в симметрической группе  $S_4$  знакопеременная подгруппа  $A_4$  является слабой *tcc-подгруппой* в  $G$ , но не является *tcc-подгруппой*.

Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** 1. Пусть  $A$  и  $B$  – слабые *tcc-подгруппы* группы  $G$  и  $G = AB$ . Если  $A$  и  $B$  сверхразрешимы, то  $G$  сверхразрешима.

2. Пусть  $G = AB$  – произведение подгрупп  $A$  и  $B$ . Если все силовские подгруппы из  $A$  и из  $B$  являются слабыми *tcc-подгруппами* в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.

**Следствие 1.1.** Пусть  $A$  и  $B$  – слабые тсс-подгруппы группы  $G$  и  $G = AB$ . Если  $A$  и  $B$   $p$ -сверхразрешимы, то  $G$   $p$ -сверхразрешима.

Из теоремы 1 и следствия 1.1 вытекают результаты работ [1–4], представленных в следствии 1.2.

**Следствие 1.2.** 1. Пусть  $G = AB$  – тотально перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$  сверхразрешима, [3, теорема 3.1].

2. Пусть  $G = AB$  – тсс-перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$  сверхразрешима, [1, теорема А].

3. Пусть  $G = AB$  – произведение сверхразрешимых тсс-подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$  сверхразрешима, [2, теорема 4.1].

4. Пусть  $G = AB$  – тотально перестановочное произведение  $p$ -сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$   $p$ -сверхразрешима, [4, лемма \*].

5. Пусть  $G = AB$  – тсс-перестановочное произведение  $p$ -сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$   $p$ -сверхразрешима, [3, теорема 4.1].

6. Пусть  $G = AB$  – произведение  $p$ -сверхразрешимых тсс-подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$   $p$ -сверхразрешима, [2, теорема 4.1].

7. Если все силовские подгруппы из  $A$  и из  $B$  являются тсс-подгруппами в  $G = AB$ , то  $G$  сверхразрешима, [2, теорема 4.2].

Группы, у которых 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп, минимальные подгруппы удовлетворяют некоторому типу перестановочности, исследовались многими авторами, (см., например, литературу в [5; 6]).

В теореме 2 изучено строение конечной группы, у которой 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются слабыми тсс-подгруппами.

**Теорема 2.** 1. Если каждая максимальная (силовская) подгруппа из  $G$  является слабой тсс-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

2. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из  $G$  является слабой тсс-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

3. Если каждая 2-максимальная подгруппа из  $G$  является слабой тсс-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

4. Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы  $G$  является слабой тсс-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номер государственной регистрации 20211467).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.

2. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some тсс-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – Vol. 20, № 2. – 18 p. – DOI: 10.1142/S0219498821500201.

3. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Archiv der Mathematik. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.

4. Carocca, A.  $p$ -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.

5. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 5. – P. 889–895.

6. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups  $\sigma$ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.

УДК 512.542

**А. А. ТРОФИМУК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

#### КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДААННЫМИ СИСТЕМАМИ УСЛОВНО ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *перестановочными*, если  $AB = BA$ . Более слабое

условие перестановочности было приведено в работе [1]: подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *сс-перестановочными* в  $G$ , если  $A$  перестановочна с  $B^g$  для некоторого элемента  $g \in \langle A, B \rangle$ . Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *сс-перестановочной* в  $G$ , если  $A$  сс-перестановочна с каждой подгруппой группы  $G$ .

Напомним, что подгруппа  $A$  называется *полунормальной* в группе  $G$ , если в  $G$  существует подгруппа  $T$  такая, что  $G = AT$  и  $A$  перестановочна с каждой подгруппой из  $T$ . В [2] исследованы группы с полунормальными подгруппами. Вполне естественно рассмотреть следующее

**Определение ([3]).** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *условно полунормальной* подгруппой в  $G$ , если в  $G$  существует подгруппа  $T$  такая, что  $G = AT$  и  $A$  сс-перестановочна с каждой подгруппой из  $T$ .

В работе [4] установлена принадлежность группы  $G$  с заданными системами условно полунормальных подгрупп к произвольной насыщенной формации  $\mathfrak{F}$  такой, что  $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ . Здесь  $\mathfrak{U}$  – формация всех сверхразрешимых групп.

**Теорема 1 ([4]).** 1. Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация такая, что  $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$  и  $H$  – нормальная подгруппа группы  $G$  такая, что  $G/H \in \mathfrak{F}$ . Тогда  $G \in \mathfrak{F}$  в каждом из следующих случаев:

1.1) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из  $H$  является условно полунормальной подгруппой в  $G$ ;

1.2) все максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы из  $H$  являются условно полунормальными подгруппами в  $G$ ;

1.3) если  $H$  разрешима и все максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы из  $F(H)$  являются условно полунормальными подгруппами в  $G$ .

2. Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация, содержащая формацию всех  $p$ -нильпотентных групп, и  $H$  – нормальная подгруппа группы  $G$  такая, что  $G/H \in \mathfrak{F}$ . Если все максимальные подгруппы из силовской  $p$ -подгруппы  $P$  из  $H$  являются условно полунормальными подгруппами в  $G$  и  $N_G(P)$   $p$ -нильпотентна, то  $G \in \mathfrak{F}$ .

**Следствие 1.1.** [3] Пусть  $G$  – группа. Тогда  $G$  сверхразрешима в каждом из следующих случаев:

1) в группе  $G$  все максимальные (силовские, 2-максимальные) подгруппы являются условно полунормальными;

2) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из

нормальной подгруппы  $H$  группы  $G$  является условно полунормальной в  $G$  и  $G/H$  сверхразрешима;

3) в разрешимой группе  $G$  все максимальные подгруппы из произвольной нециклической силовой подгруппы являются условно полунормальными.

**Следствие 1.2.** [1] Пусть  $G$  – группа. Тогда группа  $G$  сверхразрешима в каждом из следующих случаев:

- 1) в группе  $G$  все 2-максимальные подгруппы сс-перестановочны;
- 2) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из  $G$  является сс-перестановочной в  $G$ .

Разработанные в теореме 1 методы позволили установить строение группы, представимой в виде произведения условно полунормальных подгрупп.

**Теорема 2.** [4] Пусть  $A$  и  $B$  – условно полунормальные подгруппы группы  $G$  и  $G = AB$ .

1. Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация такая, что  $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ . Если  $A, B \in \mathfrak{F}$  и коммутант  $G'$  нильпотентен, то  $G \in \mathfrak{F}$ .

2. Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация такая, что  $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$ . Если  $A, B \in \mathfrak{F}$  и  $(|A|, |B|) = 1$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ . Здесь  $\mathfrak{D}$  – формация всех групп, имеющих силовскую башню сверхразрешимого типа.

**Следствие 2.1.** [5] Предположим, что  $G = AB$ , где  $A, B \in \mathfrak{U}$ . Пусть коммутант  $G'$  нильпотентен. Если подгруппа  $A$  сс-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы  $B$  и подгруппа  $B$  сс-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы  $A$ , то  $G$  сверхразрешима.

Понятие  $p$ -силовайзера было введено Гашюцем [6]. Подгруппа  $S$  группы  $G$  называется  $p$ -силовайзером  $p$ -подгруппы  $R$  в  $G$ , если  $S$  – максимальная подгруппа в  $G$ , в которой  $R$  является силовой  $p$ -подгруппой. Гашюц [6] показал, что  $p$ -силовайзеры данной  $p$ -подгруппы в разрешимой группе не всегда сопряжены, а также привел некоторые достаточные условия, при которых  $p$ -подгруппа имеет сопряженные  $p$ -силовайзеры.

В настоящей работе исследованы группы, у которых каждая максимальная подгруппа из силовой  $p$ -подгруппы  $P$  имеет условно полунормальный силовайзер. Доказана следующая теорема.



**Теорема 3.** 1. Пусть  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  и  $G$   $p$ -разрешима. Если каждая максимальная подгруппа из  $P$  имеет условно полунормальный силовайзер, то  $G$   $p$ -сверхразрешима.

2. Пусть  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ . Если каждая максимальная подгруппа из  $P$  имеет силовайзер, который является условно полунормальной подгруппой в  $G$ , то каждый неабелевый композиционный  $pd$ -фактор группы  $G$  изоморфен одной из следующих подгрупп:  $PSL(2, 7)$  и  $p = 7$ ;  $PSL(2, 11)$  и  $p = 11$ ,  $M_{11}$  и  $p = 11$ ;  $M_{23}$  и  $p = 23$ ;  $PSL(2, 2^t)$  и  $p = 2^t + 1 > 3$  – простое число Ферма;  $PSL(n, q)$ ,  $n \geq 3$  – простое,  $(n; q - 1) = 1$  и  $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ;  $A_p$  и  $p \geq 5$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф23РНФ-237).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.

2. Монахов, В. С. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 1. – С. 148–159.

3. Трофимук, А. А. О сверхразрешимости группы с заданными системами условно полунормальных подгрупп / А. А. Трофимук // Труды Института математики. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 81–90.

4. Trofimuk, A. A. Finite groups with given systems of conditionally seminormal subgroups / A. A. Trofimuk // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No 12. – P. 6624–6632.

5. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2006. – Vol. 68, No 3–4. – P. 433–449.

6. Gaschütz, W. Sylowisatoren / W. Gaschütz // Mathematische Zeitschrift. – 1971. – Vol. 122, No 4. – P. 319–320.

**СЕКЦИЯ 2**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ**  
**УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 517.9

**А. Б. АНТОНЕВИЧ, В. А. БОРБУТ**

Беларусь, Минск, БГУ

**АБСОЛЮТНАЯ ЧАСТЬ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА**  
**ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА**

Обратимое непрерывное отображение  $\alpha : X \rightarrow X$  компактного метрического пространства  $X$  задает динамическую систему с дискретным временем и задает операторы, действующие в заданном пространстве  $F(X)$  функций на  $X$  по формуле

$$Bu(x) = a_0(x)u(\alpha(x)), \quad (1)$$

где  $a_0$  – заданная функция. Такие операторы называют *операторами взвешенного сдвига*, или *операторами композиции с весом*.

Операторы рассматриваемого вида и порожденные ими функциональные уравнения исследовались в работах многих авторов, поскольку они естественно возникают в теории динамических систем, в теории функционально-дифференциальных уравнений, теории аналитических функций, теории случайных блужданий и ряде других направлений.

В данной работе исследуется зависимость спектральных свойств операторов взвешенного сдвига от динамики отображения  $\alpha : X \rightarrow X$  в случае отображений следующего вида. Непрерывное обратимое отображение  $\alpha : X \rightarrow X$  компактного метрического пространства  $X$  называется *отображением типа Морса-Смейла*, если оно имеет конечное число неподвижных точек  $F_k$ ;  $k = 1, 2, \dots, N + 1$ , и для любой точки  $\tau$ , не являющейся неподвижной, траектория  $\alpha^n(\tau)$  при  $n \rightarrow +\infty$  стремится к неподвижной точке, которую обозначим  $\tau^+$ , а при  $n \rightarrow -\infty$  стремится к неподвижной точке, которую обозначим  $\tau^-$ .

В пространствах Лебега  $L_2(X, \mu)$  при условии согласования меры  $\mu$  с отображением существует функция  $\gamma$  такая, что оператор  $T_\alpha u(x) = \gamma(x)u(\alpha(x))$  является унитарным в пространстве  $L_2(X, \mu)$  [1]. Поэтому

оператор (1) представляется в виде  $B = aT_\alpha$ , где  $a(x) = \frac{1}{\gamma(x)}a_0(x)$  есть так называемый *приведенный коэффициент*.

Вид спектра такого оператора  $aT_\alpha$  известен и задается через значения приведенного коэффициента [1]. При условии, что  $a$  есть непрерывная функция на  $X$  и  $a(x) \neq 0$  для всех  $x$  спектром является кольцо

$$\Sigma(B) = \{\lambda : m \leq |\lambda| \leq M\},$$

где  $m = \min |a(F_k)|$ ,  $M = \max |a(F_k)|$ .

При спектральном значении  $\lambda$  оператор  $B - \lambda I$  необратим, но необратимые операторы могут обладать «хорошими» свойствами. Одним из таких свойств является односторонняя обратимость оператора.

*Существенным спектром*  $\Sigma_{es}(B)$  будем называть множество  $\lambda$ , при которых оператор  $B - \lambda I$  не имеет правого обратного и не имеет левого обратного.

Односторонняя обратимость оператора  $B - \lambda I$  существенно связана с динамикой отображения  $\alpha$ , которая описывается *графом Смейла*. Это ориентированный граф, вершинами которого являются неподвижные точки  $F_k$ , ориентированное ребро  $F_k \rightarrow F_j$  входит в граф, если существует точка  $\tau \in X$  такая, что  $\tau^+ = F_j$ ,  $\tau^- = F_k$ .

Если  $|\lambda| \neq |a(F_k)|$  для всех  $k$ , то при заданной функции  $a$  число  $\lambda$  задает *разбиение графа* на два подмножества

$$G^+(\alpha, \lambda; a) = \{F_k : |\lambda| > |a(F_k)|\}; \quad (2)$$

$$G^-(\alpha, \lambda; a) = \{F_j : |\lambda| < |a(F_j)|\}.$$

Разбиение графа называется *ориентированным вправо* (*ориентированным влево*), если любая дуга, соединяющая точку  $F_k \in G^-(\alpha, \lambda; a)$  с точкой  $F_j \in G^+(\alpha, \lambda; a)$ , имеет ориентацию  $(F_k \rightarrow F_j)$  (имеет ориентацию  $(F_j \rightarrow F_k)$ ).

**Теорема 1.** [2] *Оператор  $B - \lambda I$  обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда  $|\lambda| \neq |a(F_k)|$  для всех  $k$  и разбиение (2) графа  $G(\alpha)$  ориентировано вправо (влево).*

Из теоремы 1 следует, что спектр оператора  $B$  разбивается окружностями  $|\lambda| = |a(F_k)|$  на  $N$  колец, часть из которых входит в существенный спектр. При этом в ряде примеров оказывается, что в существенный спектр всегда входит некоторый набор таких колец.

Пусть  $S$  есть подмножество множества неподвижных точек (вершин графа) и

$$m_S = \min\{|a(F_k)| : F_k \in S\}, \quad M_S = \max\{|a(F_k)| : F_k \in S\}.$$

Множество  $S$  будем называть *абсолютно спектральным*, если при любом коэффициенте  $a$  кольцо

$$K(a; S) = \{\lambda : m_S \leq |\lambda| \leq M_S\} \quad (3)$$

принадлежит существенному спектру и является максимальным в следующем смысле – существует коэффициент  $a_1$  такой, что  $a(F_k) = a_1(F_k)$ , если  $F_k \in S$ , и при этом кольцо  $K(a; S)$  является компонентой связности существенного спектра оператора  $a_1 T_\alpha$ , т. е. нет более широкого кольца, принадлежащего существенному спектру.

Объединение колец (3), соответствующих всем абсолютно спектральным множествам, будем называть *абсолютной частью существенного спектра*.

Вопрос заключается в получении описания абсолютно спектральных множеств, использующего только динамику отображения. Сформулируем основной результат в этом направлении.

Последовательность вершин графа  $\{F_{k_1}, F_{k_2}, \dots\}$  называется *ориентированным циклом*, если она периодическая ( $F_{k_j+P} = F_{k_j}$  при некотором  $P > 0$ ) и соседние члены связаны соотношением  $F_{k_i} \rightarrow F_{k_{i+1}}$ .

Будем говорить, что вершина  $F_k$  эквивалентна вершине  $F_j$ , если существует ориентированный цикл, содержащий эти вершины.

*Компонентой графа* будем называть класс эквивалентных вершин.

**Теорема 2.** *Множество вершин графа является абсолютно спектральным тогда и только тогда, когда оно является компонентой графа Смейла.*

**Следствие.** *Абсолютная часть существенного спектра есть объединение колец  $K(a; S_\nu)$ , соответствующих компонентам  $S_\nu$  графа Смейла.*

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневиц, А. Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А. Б. Антоневиц. – Минск : Университетское, 1988. – 232 с.

2. Antonevich, A. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points / A. Antonevich, Ju. Makowska // Complex Analysis and Operator Theory. – 2008. – Vol. 2. – P. 215–240.

УДК 517.956

**А. И. БАСИК<sup>1</sup>, Е. В. ГРИЦУК<sup>2</sup>, О. В. БОЛТРУШКО<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>Беларусь, Брест, БрГТУ

### **ИНДЕКС КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^3$**

В ограниченной односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , гомеоморфной шару, с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$  рассмотрим систему четырех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & -b_2 \\ -b_2 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & b_2 & -a_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & -b_3 \\ -b_3 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_3 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где  $U = (U_1(x), U_2(x), U_3(x), U_4(x))^T$  – неизвестная вектор-функция,  $T$  означает транспонирование,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $a_2, a_3, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ .

Характеристическая матрица системы (1) имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & 0 \\ -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 & 0 & -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 \\ -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 & 0 & \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 \\ 0 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det \mathfrak{A}(\xi) = \left( \xi_1^2 + (a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2 + (b_2\xi_2 + b_3\xi_3)^2 \right)^2,$$

то, как нетрудно видеть, система (1) является эллиптической тогда и только тогда, когда выполняется условие  $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$ , которое в дальнейшем предполагаем выполненным.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в нахождении решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в области  $\Omega$  и непрерывного по Гельдеру на  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , удовлетворяющего на  $\partial\Omega$  граничным условиям

$$\mathfrak{B}(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (2)$$

где  $\mathfrak{B}$  – заданная матрица-функция размера  $2 \times 4$ , а  $f$  – заданная двухкомпонентная вектор-функция, непрерывная по Гельдеру на поверхности  $\partial\Omega$ .

Существование и единственность решения краевой задачи для эллиптической системы при произвольной правой части оказывается достаточно редким явлением. В этом случае рассматривается вопрос о разрешимости задачи с точностью до конечномерного пространства, т. е. вопрос о том, когда решение существует при наложении конечного числа условий на правую часть задачи и при этом решение зависит от конечного числа произвольных постоянных. Классическим примером такой ситуации является задача Неймана для уравнения Лапласа в ограниченной области  $\Omega$ , рассматриваемая в учебной дисциплине «Уравнения математической физики»:

$$\Delta u = 0 \quad (x \in \Omega), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = g(y) \quad (y \in \partial\Omega).$$

Для существования решения задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы для функции  $g$  было выполнено условие

$$\int_{\partial\Omega} g(x) dS(x) = 0,$$

при выполнении этого условия решение определено с точностью до одного постоянного слагаемого.

Для эллиптических систем Я. Б. Лопатинским было получено условие, обеспечивающее разрешимость краевой задачи с точностью до конечномерного пространства [1]. Это условие известно как условие Я. Б. Лопатинского (условие регуляризуемости краевой задачи) и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного опе-

ратора. Применительно к задаче (1), (2), условие регуляризуемости состоит в том, что ранг матрицы

$$\mathfrak{B}(y) \cdot \int_{\gamma} \mathfrak{A}^{-1}(\lambda\nu(y) + \tau(y)) d\lambda \quad (3)$$

равен двум в каждой точке  $y \in \partial\Omega$  и при каждом ненулевом касательном к  $\partial\Omega$  в точке  $y$  векторе  $\tau = \tau(y)$ . Здесь через  $\nu = \nu(y)$  обозначен единичный вектор внутренней нормали к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ , и интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру  $\gamma$ , лежащему в верхней комплексной  $\lambda$ -полуплоскости и охватывающему корень  $\alpha + i\beta$  ( $\beta > 0$ ) уравнения

$$\det \mathfrak{A}(\lambda\nu(y) + \tau(y)) = 0.$$

На поверхности  $\partial\Omega$  рассмотрим векторное поле

$$L(y) = (L_1(y), L_2(y), L_3(y)),$$

где

$$L_1(y) = \Lambda_{14} + \Lambda_{23}, \quad L_2(y) = a_2(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + b_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}),$$

$$L_3(y) = a_3(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + b_3(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}),$$

$\Lambda_{jk}$  – минор матрицы граничного оператора  $\mathfrak{B}(y)$ , составленный из ее  $j$ -го и  $k$ -го столбцов ( $j, k = 1, 2, 3, 4$ ).

**Теорема 1.** [2] *Задача (1), (2) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке  $y \in \partial\Omega$  векторное поле  $L(y)$  не является касательным к поверхности  $\partial\Omega$ .*

Из теоремы 1, например, следует, что в случае постоянной матрицы граничного условия (2) рассматриваемая задача Римана – Гильберта является нерегуляризуемой.

Условие регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта в виде, сформулированном в теореме 1, было ранее получено для системы Моисила – Теодореску [3], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [4], для эллиптических систем ортогонального типа в  $\mathbb{R}^3$  [5].

При выполнении условия регуляризуемости однородная задача Римана – Гильберта (1), (2) имеет конечное число  $n$  линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и

только тогда, когда правая часть (2) удовлетворяет конечному числу  $m$  линейно независимых условий разрешимости. Разность  $n - m$  называется индексом краевой задачи (1), (2).

Отметим также, что метод В. И. Шевченко, примененный им для вычисления индекса регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для голоморфного вектора [3], был с успехом применен к вычислению индекса регуляризуемой задачи для других классов систем [4–6].

**Теорема 2.** [2] *Индекс произвольной регуляризуемой задачи Римана – Гильберта (1), (2) равен минус единице.*

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
2. Басик, А. И. Классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в трехмерном пространстве / А. И. Басик, Е. В. Грицук, О. В. Болтрушко // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2024. – № 2 – С. 100–111.
3. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика: респ. межвед. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
4. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6 – С. 10–15.
5. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в  $\mathbb{R}^3$  / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.
6. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в  $\mathbb{R}^3$  / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16.



УДК 517.977

**М. Н. ГОНЧАРОВА**

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

## **О ВЛИЯНИИ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО ОБЪЕКТА**

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_2 + v_1, \\ \dot{x}_2 = bx_1 + v_2, \end{cases} \quad (1)$$

где управление  $(v_1; v_2)$  является векторной кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из компакта  $V$ . Множество  $V$  назовем областью управления. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта  $V$  обозначим через  $U$ . Множество  $U$  является множеством допустимых управлений.

Будем считать, что выполняется неравенство  $b > 0$ , множество  $V$  является четырехугольником. Вершины четырехугольника  $V$  обозначим через  $C_i, i = \overline{1, 4}$ , обходя контур четырехугольника против часовой стрелки. Координаты вершины  $C_i$  обозначим через  $C_{i1}, C_{i2}$ . Примем, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} C_{11} > 0, C_{12} > 0, C_{21} < 0, C_{22} > C_{12}, C_{31} < C_{21}, \\ C_{32} < 0, C_{41} > 0, C_{42} < C_{32}, C_{41} < C_{11}. \end{aligned} \quad (2)$$

**Замечание 1.** В сделанных предположениях стороны четырехугольника  $V$  не параллельны осям координат и начало координат  $O$  принадлежит множеству  $V$ , но не является его вершиной.

Фазовое ограничение зададим множеством

$$X = \{(x_1; x_2) \in R^2 \mid x_2 \leq d, d > 0\}. \quad (3)$$

Множество всех точек множества (3), в которых объект (1) находится в момент времени  $t$ , в момент времени  $t_1$  попадает в начало координат при помощи некоторого допустимого управления и выполнении фазового ограничения в каждый момент времени из отрезка  $[t; t_1]$ , назовем множеством управляемости в начало координат объекта (1) с ограничением (3).

Обозначим это множество через  $Y(t) = Y(t, t_1)$ . Момент времени  $t_1$  считаем фиксированным. Рассмотрим задачу построения множества управляемости  $Y(t) = Y(t, t_1)$  для произвольных моментов времени  $t$ .

Построим в плоскости переменных  $x_1, x_2$  четырехугольник  $V$ . Проведем из начала координат четыре луча, направление которых совпадает с направлением внешних нормалей к сторонам четырехугольника  $V$ . Луч, перпендикулярный стороне, соединяющей вершины  $C_4$  и  $C_1$ , обозначим через  $l_1$ . Луч, перпендикулярный стороне, соединяющей вершины  $C_i$  и  $C_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , обозначим через  $l_{i+1}$ . Угол между лучами  $l_i$  и  $l_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , обозначим через  $\alpha_i$ . Угол между лучами  $l_1$  и  $l_4$  обозначим через  $\alpha_4$ . И через  $\alpha$  обозначим  $\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ .

В работе [1] построено множество  $\bar{Y}(t, t_1, \{O\}, V, R^2)$ , где через  $\{O\}$  обозначено множество, состоящее из одной точки — начала координат  $O$  для произвольных  $t$ , удовлетворяющих условию  $t_1 - t \leq \frac{\alpha}{b}$ .

Оценивание значений координат точек множества  $\bar{Y}(t, t_1, \{O\}, V, R^2)$  зависит от свойств границы множества  $V$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнено неравенство

$$\operatorname{ctg} b\alpha \geq \frac{C_{21} - C_{31}}{C_{22} - C_{32}}, \quad (4)$$

и  $d \geq d_1$ , где  $d_1 = C_{21} \cos b\alpha + C_{22} \sin b\alpha - C_{21}$ . Тогда при всех  $\tau = t_1 - t \leq \frac{\alpha}{b}$  фазовое ограничение (3) не оказывает влияния на решение задачи.

**Теорема 2.** Пусть неравенство (4) не выполняется и  $d \geq d_2$ , где  $d_2 = C_{21} \cos b\alpha + C_{22} \sin b\alpha - C_{21}$ . Тогда при всех  $\tau \leq \frac{\alpha}{b}$  фазовое ограничение (3) не оказывает влияния на решение задачи.

Легко видеть, что если величина  $\tau$  достаточно мала, то множество  $\bar{Y}(t, t_1, \{O\}, V, R^2)$  полностью находится внутри множества (3). Однако значение длины  $\tau$  интервала движения, при котором фазовое ограничение становится существенным, зависит от характеристик границы множества  $V$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнено неравенство (4) и параметр  $d$  в формуле (3) удовлетворяет неравенству  $d < d_1$ . Тогда длина  $\bar{\tau}$  интервала движения, при котором фазовое ограничение становится существенным, определяется равенством

$$\bar{\tau} = \frac{1}{b} \arccos \frac{C_{21}}{z_2} - \frac{1}{b} \arccos \frac{d + C_{21}}{z_2}, \quad z_2 = \sqrt{C_{21}^2 + C_{22}^2}. \quad (5)$$

Определим величину  $\theta$  равенством

$$\theta = \frac{1}{b} \operatorname{arccctg} \frac{C_{31} - C_{21}}{C_{32} - C_{22}}$$

и величину  $d_3$  равенством

$$d_3 = C_{21} \cos b\theta + C_{22} \sin b\theta - C_{21}.$$

**Теорема 4.** Пусть неравенство (4) не выполняется и параметр  $d$  в формуле (3) удовлетворяет неравенству  $d_3 \leq d < d_2$ . Тогда длина  $\bar{\tau}$  интервала движения, при котором фазовое ограничение становится существенным, определяется равенством

$$\bar{\tau} = \frac{1}{b} \arccos \frac{C_{31}}{z_3} - \frac{1}{b} \arccos \frac{y}{z_3},$$

где

$$z_3 = \sqrt{C_{31}^2 + C_{32}^2}, \quad y = d + C_{21} - \sqrt{(C_{21} - C_{31})^2 + (C_{32} - C_{22})^2}.$$

**Теорема 5.** Пусть неравенство (4) не выполняется и параметр  $d$  в формуле (3) удовлетворяет неравенству  $0 < d < d_3$ . Тогда длина  $\bar{\tau}$  интервала движения, при котором фазовое ограничение становится существенным, определяется равенством (5).

Таким образом, при выполнении условия  $t_1 - t \leq \bar{\tau}$  поставленная задача решена. В этом случае множество управляемости  $Y(t, t_1)$  есть множество  $\bar{Y}(t, t_1, \{O\}, V, R^2)$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке задания 1.2.04.4 Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».*

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончарова, М. Н. О множестве управляемости для одной системы второго порядка с мнимыми собственными значениями / М. Н. Гончарова, Д. Ю. Прошкин, С. П. Самсонов // Ломоносовские чтения : общеуниверситет. науч. конф., Москва, 24 мар. – 4 апр. 2025 г. : тез. докл. – М. : МАКС Пресс, 2025. – С. 187–188.

УДК 517.946

**В. В. ДАЙНЯК**

Беларусь, Минск, БГУ

## О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В данной работе рассмотрена граничная задача типа Дирихле на плоскости, для уравнений четвертого порядка определенного вида с постоянными коэффициентами в главной части. С помощью методов функционального анализа доказана теорема об энергетических неравенствах, а также с помощью операторов осреднения с переменным шагом доказана теорема о существовании и единственности обобщенного решения рассматриваемых граничных задач.

Эти дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции  $u(x)$  переменных  $x = (x_0, x_1)$  запишем в виде:

$$Lu = \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + a \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_0^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + L_2 u = f(x), \quad (1)$$

где

$$L_2 u = a_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + a_1(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + p_0(x) \frac{\partial u}{\partial x_0} + p_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda(x)u.$$

Здесь  $a$  и  $b$  постоянные, коэффициенты полинома  $L_2 u$  измеримы и ограничены.

Обозначим через  $\Omega$  произвольную ограниченную область плоскости переменных  $x$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . Пусть  $n = (n_0, n_1)$  – единичный вектор нормали к поверхности  $\partial\Omega$  и

$$L_0(n) = n_0^4 + a n_0^2 n_1^2 + b n_1^4.$$

В области  $\Omega$  рассмотрим уравнение (1) относительно  $u(x)$ , которая удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$u|_{\partial\Omega^-} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega^-} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \quad (2)$$

где  $\partial\Omega^-$  – часть границы  $\partial\Omega$ , в точках которой  $L_0(n) < 0$ .

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать и сопряженную задачу, т. е.

$$L^*u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + a \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_0^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + L_2^*u = g(x), \quad (3)$$

$$u|_{\partial\Omega^+} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega^+} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad (4)$$

где  $\partial\Omega^+$  – часть границы  $\partial\Omega$ , в точках которой  $L_0(n) > 0$ ,  $L_2^*$  – формально сопряженный к  $L_2$  оператор.

**Условие 1.** Коэффициенты уравнений (1)-(4) удовлетворяют соотношениям: 1)  $b > 0$ , 2)  $4b - a^2 > 0$ .

Пусть  $H_0^s(\Omega)$  ( $\dot{H}^s(\Omega)$ ),  $s = 1, 2, 3, 4$  – подпространства Соболева  $H^s(\Omega)$ , элементы которого удовлетворяют граничным условиям (2) ((4)).

Задачу (1)-(2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = f \quad (5)$$

с областью определения  $D(\mathcal{L}) = H_0^4(\Omega)$ , а задачу (3)-(4) – как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}^*v = g \quad (6)$$

с областью определения  $D(L^*) = \dot{H}^4(\Omega)$ .

Для доказательства разрешимости (5) при любых  $f \in H_0^{-2}$ , строим расширение  $L$  оператора  $\mathcal{L}$  такое, что множество его значений  $R(L)$  совпадает с пространством  $H_0^{-2}$ . Аналогично для оператора  $\mathcal{L}^*$  строим расширение  $L^*$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** При выполнении условия 1 для любых  $u$  и  $v$  из  $H_0^2(\Omega)$ , при достаточно большом  $\lambda(x)$  справедливы неравенства:

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{H_0^{-2}}, \quad \|v\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C^* \|L^*v\|_{H_0^{-2}},$$

где постоянные  $C$  и  $C^*$  положительны и не зависят от функций  $u$  и  $v$ .

**Теорема 2.** При выполнении условий 1 и достаточно большом  $\lambda(x)$  для любого  $f \in H_0^{-2}$  ( $g \in \dot{H}^{-2}$ ) существует и единственно обобщенное решение  $u \in H_0^2(\Omega)$  ( $v \in \dot{H}_0^2(\Omega)$ ) задачи (1)-(2) ((3)-(4)).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2013. – 368 с.
2. Дайняк, В. В. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка / В. В. Дайняк, В. И. Корзюк, А. А. Протьюко // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 3. – С. 116–121.
3. Дайняк, В. В. Некоторые граничные задачи для линейного дифференциального уравнения пятого порядка / В. В. Дайняк, К. В. Латушкин // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXVI : материалы междунар. конф. «Воронежская весенняя математическая школа», Воронеж, 26–30 апр. 2024 г. / Воронеж. гос. ун-т ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж, 2024. – С. 110–112.

УДК 517.9

**Д. Д. ЕЛЕЦ<sup>1</sup>, Т. А. ЯЦУК<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина<sup>2</sup>Беларусь, Брест, БрГТУ**ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

Пусть  $f \in L_2[-1; 1]$ ,  $a > 0$ . Рассмотрим задачу нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным потенциалом

$$u''(x) - a\delta(x)u(x) = f(x) \quad (x \in (-1; 1)) \quad (1)$$

и удовлетворяющего граничным условиям

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (2)$$

В формуле (1)  $\delta(x)$  –  $\delta$ -функция Дирака [1, с. 82].

Основной вопрос, возникающий при изучении уравнений с обобщенными коэффициентами, состоит в определении понятия решения такого уравнения. Одной из первых работ, в которой был придан строгий

математический смысл понятию решения уравнения с дельтообразным коэффициентом, была статья Ф. А. Березина и Л. Д. Фаддеева [2]. В этой работе рассматривался оператор Шредингера с сингулярным потенциалом в трехмерном пространстве.

Заметим, что если  $u(x)$  гладкое решение (1), (2), то для любой основной функции  $\varphi \in \mathcal{D}(-1; 1)$  имеет место равенство [1, с. 101]:

$$\langle \delta(x)u(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x)u(0), \varphi(x) \rangle.$$

А поэтому левая часть (1) запишется как

$$u''(x) - a\delta(x)u(0). \quad (3)$$

Однако, если  $u(0) \neq 0$ , то левая часть (1) не принадлежит  $L_2[-1, 1]$ . Таким образом,  $u(x)$  не может быть гладкой функцией.

Далее для простоты рассуждений будем считать, что  $f \in C[-1; 1]$ . Пусть также  $0 < \varepsilon < 1$ . Рассмотрим семейство уравнений

$$u''(x) - a\delta_\varepsilon(x)u(x) = f(x) \quad (x \in (-1; 1)), \quad (4)$$

где  $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \chi_{(0; \varepsilon)}(x)$  ( $\chi_A(x)$  – характеристическая функция множества  $A$ ). Нетрудно видеть, что  $\delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в пространстве обобщенных функций  $\mathcal{D}'(-1; 1)$ .

На каждом из промежутков  $[-1; 0]$ ,  $(0; \varepsilon)$  и  $[\varepsilon; 1]$  уравнение (4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть

$$u_1 : [-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_2 : (0; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_3 : [\varepsilon; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

есть общие решения (4) на соответствующих промежутках. Отметим, что каждая из функций  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$  зависит от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных найдем из граничных условий:  $u_1(-1) = 0$ ,  $u_3(1) = 0$  и условий сопряжения в точках  $x = 0$  и  $x = \varepsilon$ :  $u_1(-0) = u_2(+0)$ ,  $u_2(\varepsilon - 0) = u_3(\varepsilon + 0)$ ,  $u_1'(-0) = u_2'(+0)$ ,  $u_2'(\varepsilon - 0) = u_3'(\varepsilon + 0)$ . Явные выражения для  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$  не приводим ввиду их громоздкости. Таким образом, функция

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{при } x \in [-1; 0], \\ u_2(x), & \text{при } x \in (0; \varepsilon), \\ u_3(x), & \text{при } x \in [\varepsilon; 1] \end{cases}$$

является непрерывно дифференцируемой на  $[-1; 1]$ , удовлетворяет граничным условиям (2) и уравнению (4) за исключением  $x = 0$  и  $x = \varepsilon$ .

**Теорема.** В каждой точке  $x$  отрезка  $[-1; 1]$  существует предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon(x) =: u(x)$ , где

$$u(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (x-t)f(t) dt + \frac{(x+1)(A + aA + B - C - D)}{2+a}, & x \in [-1; 0), \\ -\int_x^1 (x-t)f(t) dt + \frac{(x-1)(A - B - C - aC + D)}{2+a}, & x \in [0; 1], \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^0 tf(t)dt, \quad B = -\int_{-1}^0 f(t)dt, \quad C = -\int_0^1 tf(t)dt, \quad D = \int_0^1 f(t)dt.$$

Справедливы следующие утверждения

- (i)  $u(x)$  непрерывна на  $[-1; 1]$  и  $u(-1) = u(1) = 0$ ;
- (ii)  $u(x)$  имеет непрерывную производную на промежутках  $[-1; 0)$  и  $(0; 1]$ , существуют  $u'(-0)$  и  $u'(0)$  и выполняется условие

$$u'(0) - u'(-0) = au(0);$$

- (iii)  $u''(x) = f(x)$  при  $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ .

Пусть теперь  $u''_g$  – вторая производная функции  $u$  в смысле теории обобщенных функций. Тогда для любой основной функции  $\varphi \in \mathcal{D}(-1; 1)$  выполняется равенство  $\langle u''_g; \varphi \rangle = \langle u''(x) + (u'(0) - u'(-0))\delta(x); \varphi \rangle$ , которое с учетом утверждений (ii) и (iii) теоремы принимает вид

$$\langle u''_g - au(0)\delta(x); \varphi \rangle = \langle f; \varphi \rangle.$$

Последнее равенство и утверждение (i) теоремы показывают, что  $u(x)$  является решением задачи (1), (2).

**Пример.** Пусть  $f(x) = x^3 - 2x + 1$ . Тогда решением задачи (1), (2) при  $a = 0$  является функция

$$v(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{60}x - \frac{1}{2},$$



а при  $a > 0$  функция

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{4} + \frac{29}{30} - \frac{88+29a}{60+30a}(x+1), & x \in [-1; 0), \\ \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{30} + \frac{32+a}{60+30a}(x-1), & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

На рисунке мы видим, что наличие  $\delta$ -слагаемого в уравнении (1) вызывает излом графика решения в точке  $x = 0$ .

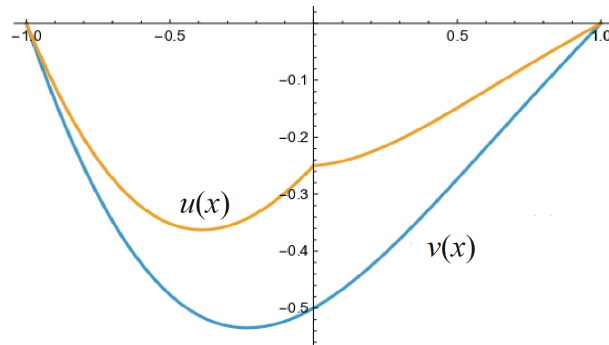


Рисунок – Графики функций  $v(x)$  и  $u(x)$  при  $a = 2$

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Изд. 4-е. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
2. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фадеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 5. – С. 1011–1014.

УДК 519.65

**М. В. ИГНАТЕНКО**

Беларусь, Минск, БГУ

#### **АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ЭРМИТА ОТНОСИТЕЛЬНО ПЯТИКРАТНЫХ УЗЛОВ**

Пусть на  $[a, b]$  заданы различные точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – узлы интерполирования, в которых известны конечные значения интерполируемой функции  $f : [a, b] \rightarrow R$  и значения ее первых четырех производных.

Рассмотрим интерполяционную задачу типа Эрмита с узлами пятой кратности относительно алгебраической системы функций, состоящую в построении многочлена  $P_{5n+4}(x) = \sum_{i=0}^{5n+4} a_i x^i$  степени не выше  $5n + 4$ , удовлетворяющего условиям

$$P_{5n+4}^{(s)}(x_j) = f^{(s)}(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, n; \quad s = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (1).$$

Коэффициенты  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5n + 4$ ) многочлена  $P_{5n+4}(x)$  находятся из системы уравнений (1) единственным образом. Приведем решение этой задачи в явном виде.

**Теорема.** *Для алгебраического многочлена Эрмита с узлами пятой кратности*

$$P_{5n+4}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega^5(x)}{(x - x_k)^5 [\omega'(x_k)]^5} \{ f(x_k) \times \\ \times [1 + C_{1,k}(x - x_k) + C_{2,k}(x - x_k)^2 + C_{3,k}(x - x_k)^3 + C_{4,k}(x - x_k)^4] + \\ + f'(x_k) [(x - x_k) + C_{1,k}(x - x_k)^2 + C_{2,k}(x - x_k)^3 + C_{3,k}(x - x_k)^4] + \\ + f''(x_k) [(x - x_k)^2 + C_{1,k}(x - x_k)^3 + C_{2,k}(x - x_k)^4] / 2 + \\ + f'''(x_k) [(x - x_k)^3 + C_{1,k}(x - x_k)^4] / 6 + f^{(4)}(x_k) (x - x_k)^4 / 24 \},$$

где функции

$$C_{1,k} = -\frac{5\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}, \quad C_{2,k} = -\frac{5\omega'''(x_k)}{6\omega'(x_k)} + \frac{15}{4} \left[ \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right]^2, \\ C_{3,k} = -\frac{35}{8} \left[ \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right]^3 + \frac{5\omega''(x_k)\omega'''(x_k)}{2[\omega'(x_k)]^2} - \frac{5\omega^{(4)}(x_k)}{24\omega'(x_k)}, \\ C_{4,k} = \frac{35}{8} \left[ \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right]^4 - \frac{35[\omega''(x_k)]^2\omega'''(x_k)}{8[\omega'(x_k)]^3} + \frac{5}{12} \left[ \frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right]^2 + \\ + \frac{5\omega''(x_k)\omega^{(4)}(x_k)}{8[\omega'(x_k)]^2} - \frac{\omega^{(5)}(x_k)}{24\omega'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

выполняются условия (1).

Если функция  $f(x)$  имеет конечную производную  $f^{(N+1)}(x)$  на наименьшем отрезке  $[a, b]$ , содержащем узлы  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и точку интерполирования  $y$ , то существует точка  $\xi = \xi(y)$ ,  $a < \xi < b$ , такая, что для погрешности

$$R_{5n+4}(f, y) = f(y) - P_{5n+4}(y)$$

алгебраического многочлена Эрмита с узлами пятой кратности  $P_{5n+4}(x)$  справедливо [1] следующее представление:

$$R_{5n+4}(f, y) = \frac{f^{(5n+5)}(\xi)}{(5n+5)!} \omega^5(y).$$

Ряд интерполяционных операторных формул, представляющих решение задачи Эрмита с узлами произвольной кратности, основанных на тождественных преобразованиях функций, имеется в работе [2]. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографиях [3; 4].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений : учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб. : Изд-во С. Петерб. ун-та, 1998. – 472 с.
2. Янович, Л. А. О взаимосвязи интерполирования операторов и функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 3. – С. 9–16.
3. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск : Беларус. навука, 2016. – 281 с.
4. Янович, Л. А. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск : Беларус. навука, 2020. – 476 с.

УДК 517.9

**М. Г. КОТ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **МАТРИЧНО-ЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Пусть  $F(\mu, \varepsilon)$  есть матрично-значная функция, разлагающаяся в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и обратимая при  $\varepsilon \neq 0$  :

$$F(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{\infty} F_k(\mu) \varepsilon^k,$$

где коэффициенты  $F_k(\mu)$  – матрично-значные функции, аналитические в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  и  $F_{k_0} \neq 0$ .

При исследовании систем уравнений [1] с дельтообразными коэффициентами возникает вопрос о поведении обратных матриц  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В первую очередь это нахождение предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(\mu, \varepsilon)]^{-1} := S(\mu)$$

и получение условий, когда этот предел ненулевой.

Если  $\det F_{k_0}(\mu) \neq 0$ , то в матричном случае разложение  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  имеет аналогичный вид и начинается с  $\frac{1}{\varepsilon^{k_0}} [F_{k_0}(\mu)]^{-1}$ . Если  $\det F_{k_0}(\mu) \equiv 0$ , то задача о разложении обратной матрицы-функции становится более сложной, так как это разложение начинается с члена, содержащего  $\frac{1}{\varepsilon^\nu}$ , где  $\nu$  отлично от  $k_0$ . В связи с этим возникает задача о построении такого разложения и, в частности, нахождении главного члена в нем, т. е. вычислении показателя  $\nu$  и коэффициента при  $\frac{1}{\varepsilon^\nu}$ .

Рассмотрим матрицы-функции, которые появляются при решении систем дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами. Рассматриваются аппроксимации формального дифференциального выражения семейством операторов  $L_\varepsilon$ , зависящих от малого параметра  $\varepsilon$ , и формальному выражению ставится в соответствие оператор  $L_0$  – предел аппроксимирующего семейства в смысле резольвентной сходимости.

В выражение для резольвенты аппроксимирующего оператора  $L_\varepsilon$  входят матрицы-функции  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$ , где  $F(\mu, \varepsilon)$  имеет специальный вид

$$F(\mu, \varepsilon) = R(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}B(\varepsilon\mu).$$

Размерность такой матрицы-функции равна числу уравнений системы; матрица-функция  $R(\varepsilon)$  есть матрица, обратная к матрице  $A(\varepsilon)$ , составленной из коэффициентов уравнения; матрица-функция  $B(\varepsilon\mu)$  определяется способом аппроксимации  $\delta$ -функции; переменная  $\mu$  связана со спектральным параметром  $\lambda$  равенством  $\mu^2 = -\lambda$  и рассматриваемые функции определены при  $\operatorname{Re} \mu > 0$ .

В приложениях к системам уравнений с дельтообразным коэффициентом условия резонанса позволяют найти те коэффициенты, при которых слагаемые, содержащиеся в качестве коэффициента  $\delta$ -функцию, влияют на вид решения.

Отметим, что в случае одного уравнения содержательные результаты имеют место только при бесконечно малых коэффициентах вида

$$a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$$

Тогда скалярная функция  $f(\mu, \varepsilon)$  имеет разложение

$$f(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{a(\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon}b(\varepsilon\mu) = \left[ \frac{1}{a_1} + b_0 \right] \frac{1}{\varepsilon} + \left[ \frac{a_2}{a_1^2} + b_1\mu \right] + \dots$$

и ответ получается просто: условие резонанса есть равенство  $a_1 = -\frac{1}{b_0}$ ; при этом условии

$$S(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f(\mu, \varepsilon)} = \frac{1}{\frac{a_2}{a_1^2} + b_1\mu}.$$

Здесь функция  $S(\mu)$  имеет особенность только в одной точке, откуда следует, что в скалярном случае оператор  $L_0$  имеет только одно собственное значение.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2008. – № 2. – С. 8 – 16.

УДК 517.9

**Е. В. КУЗЬМИНА**

Беларусь, Брест, БрГТУ

**ПОСТРОЕНИЕ ДВУХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ  
ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ  
ИЕРАРХИИ РИККАТИ**

Предметом исследования является уравнение

$$w''' + \gamma^3 w^4 + 6\gamma^2 w^2 w' + 4\gamma w w'' + 3\gamma w'^2 = 0. \quad (1)$$

Это третье уравнение из иерархии уравнений со свойством Пенлеве, порожденной уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0.$$

Указанная иерархия была построена в работе [1]. Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $D_R$  есть преобразование дифференциальных выражений, действующее по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Уравнение (1) получаем при  $n = 3$ . Как показано в [1], уравнению (1) удовлетворяет формальный ряд вида

$$w = \frac{1}{\gamma(z-a)} + c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + c_4(z-a)^3 + c_5(z-a)^4 + \dots, \quad (2)$$

где  $c_1 = h_1$ ,  $c_2 = h_2$ ,  $c_3 = -\frac{3}{2}\gamma h_1 h_2 - \frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3$ ,  $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$ ,  $c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2$ , коэффициенты  $c_j$ ,  $j > 5$ , однозначно определяются через произвольные параметры  $h_1$ ,  $h_2$ . Согласно работе [2], ряд в (2) сходится в области  $|z-a| < \rho$ ,  $\rho = \min \left\{ \frac{1}{|\gamma k_1|}, \frac{1}{|\gamma k_2|} \right\}$ , где

$$k_1 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}\sqrt{-h_1^2 - \frac{2}{\gamma}h_2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}\sqrt{-h_1^2 - \frac{2}{\gamma}h_2},$$

$h_1, h_2$  – произвольные постоянные, а знаком  $\sqrt{\phantom{x}}$  обозначена одна из ветвей многозначной аналитической функции. Найдя сумму ряда в (2), получили решение уравнения (1) – функцию вида

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)} + \frac{k_1}{1 + \gamma k_1(z-a)} + \frac{k_2}{1 + \gamma k_2(z-a)}. \quad (3)$$

Аналитические решения  $w(z)$  уравнения (1) могут иметь три различных полюса первого порядка – точки  $a$ ,  $b = a - \frac{1}{\gamma k_1}$  и  $c = a - \frac{1}{\gamma k_2}$ . Если  $a$ ,  $b$  и  $c$  вещественные, то эти точки делят прямую на четыре части и на вещественной оси решение задачи Коши с начальными условиями в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  однозначно определено только на одной из этих частей, содержащей точку  $x_0$ . Но аналитическая функция  $w(z)$  задает по условию Коши однозначно определенную на всей прямой функцию, которую будем называть *формальным решением задачи Коши*.

Рассмотрим уравнение (1) на прямой, т. е. уравнение вида

$$u'''(x) + \gamma^3 u^4(x) + 6\gamma^2 u^2(x)u'(x) + 4\gamma u(x)u''(x) + 3\gamma u'^2(x) = 0, \quad (4)$$

и задачу Коши для этого уравнения с начальными условиями  $u(x_0) = C_1$ ,  $u'(x_0) = C_2$ ,  $u''(x_0) = C_3$ , где  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ . Зафиксируем формальное решение  $u(x)$ , удовлетворяющее указанным начальным условиям

и имеющее полюсы в точках  $a, b$  и  $c$  на прямой.

Пусть  $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon), C_3(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ ,  $C_1(\varepsilon) \rightarrow C_1, C_2(\varepsilon) \rightarrow C_2, C_3(\varepsilon) \rightarrow C_3$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon), C_3(\varepsilon)$  таковы, что решения  $w_\varepsilon(x)$  задачи Коши для уравнения (1) с условиями  $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon), w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon), w''_\varepsilon(x_0) = C_3(\varepsilon)$  не имеют особенностей на вещественной оси.

**Определение.** Распределение  $W$  будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (4) с условиями  $u(x_0) = C_1, u'(x_0) = C_2, u''(x_0) = C_3$  при заданном способе аппроксимации начальных условий, если  $w_\varepsilon(x)$  сходятся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к  $W$  в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций.

Наличие трех различных полюсов порождает восемь случаев [2], в зависимости от расположения каждого из полюсов выше или ниже вещественной оси. Поэтому существует восемь разных обобщенных решений задачи Коши. Возможны вырожденные случаи. Уравнение (4) имеет только два обобщенных решения, если  $b = \infty$  и  $c = \infty$ .

**Теорема.** Если  $C_2 = -\gamma C_1^2$  и  $C_3 = 2\gamma^2 C_1^3$ , то обобщенными решениями задачи Коши являются распределения

$$W^\pm = \frac{1}{\gamma} P \left( \frac{1}{x-a} \right) \pm i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a,$$

где  $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$ , и только они.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грицук, Е. В. Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве / Е. В. Грицук, Е. В. Кузьмина // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 64–72.

2. Антоневи́ч, А. Б. Существование восьми обобщенных решений задачи Коши для третьего уравнения иерархии Риккати / А. Б. Антоневи́ч, Е. В. Кузьмина // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики, Белорус. гос. ун-т ; сост. Т. С. Бусел. – Минск : Беларус. навука, 2024. – Ч. 1. – С. 64–66.

УДК 517.986.2

**М. М. ЛОГИНОВСКАЯ<sup>1</sup>, И. Л. ЛЮКСЕМБУРГ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Беларусь, Минск, БГУ

<sup>2</sup>Беларусь, Минск, Институт математики НАН Беларуси

### НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДОПУСКАЮЩИХ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

Согласно теории Гельфанда [1], симметричная банахова алгебра  $A$  ограниченных комплекснозначных функций изоморфна алгебре всех непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов  $\mathfrak{M}(A)$  этой алгебры, которое является компактным топологическим пространством. Это пространство обычно интерпретируется как естественная область определения рассматриваемых функций, при этом структура этого пространства отражает возможные типы разрывов этих функций.



В работе рассматриваются замкнутые в равномерной норме симметричные алгебры ограниченных комплекснозначных функций, определенных на линейно упорядоченных множествах и имеющих разрывы только первого рода. Для данного класса алгебр построены в явном виде пространства максимальных идеалов. Показано, что даже для таких алгебр, состоящих из функций, допускающих разрывы простейшего вида, пространства максимальных идеалов оказались компактными пространствами с экзотическими свойствами. В частности, одним из таких пространств является известное пространство «две стрелки» [4; 5]. Оно было впервые введено Александровым и Урысоном в их классической работе [3] и используется как универсальный пример компактного пространства со сложной структурой. Например, оно не метризуемо, но при этом для него выполнено 6 из 7 известных условий метризуемости.

Итак, пусть  $(X, <)$  – упорядоченное множество, компактное в порядковой топологии. В таком множестве существует наименьший элемент  $\widehat{0}$  и наибольший элемент  $\widehat{1}$ . Пусть  $JD(X)$  есть алгебра всех комплекснозначных функций, которые в каждой точке имеют односторонние пределы. Напомним, что пределом  $f$  в точке  $x$  слева называется такое число  $y$ , что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'(\varepsilon) < x : \forall x'' \in (x'; x) |f(x'') - y| < \varepsilon.$$

Далее обозначаем  $y = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f^-(x_0)$ , аналогично вводится предел справа и, соответственно, обозначения  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f^+(x_0)$ . Определение предела слева содержательно, если никакой интервал  $(x'; x)$  не пуст, в противном случае существование этого предела не накладывает никаких ограничений на  $f$ . Если же в упорядоченном пространстве нет сечений типа скачок, то в любой окрестности любой точки, за исключением  $\widehat{0}$  и  $\widehat{1}$ , есть точки как слева, так и справа. Далее мы рассматриваем только упорядоченные пространства без скачков.

Пусть  $L = \{x \in X : \widehat{0} < x < \widehat{1}\}$ , построим

$$\mathfrak{E}_X = \{\widehat{0}, \widehat{0}^+, \widehat{1}^-, \widehat{1}\} \cup L \times \{-1, 0, 1\}$$

и введем на этом множестве порядок по правилам:

- 1) на  $L \times \{-1, 0, 1\}$  вводим лексикографический порядок;
- 2)  $\widehat{0} < \widehat{0}^+ < x < \widehat{1}^- < \widehat{1} \forall x \in L \times \{-1, 0, 1\}$ .

Множество  $\mathfrak{E}_X$  и порядок на нем можно кратко описать на языке

арифметики порядковых типов [2]. В данном случае  $X$  имеет тип  $1 + \lambda + 1$ , где  $\lambda$  – порядковый тип  $L$ , а  $\mathfrak{E}_X$  имеет тип  $2 + 3 \cdot \lambda + 2$ .

Пусть  $x \in X$ ,  $x \neq \widehat{0}, \widehat{1}$ , обозначим  $x^- = x \times \{-1\}$ ,  $x^+ = x \times \{1\}$ ,  $x^0 = x \times \{0\}$ . Также  $L^- = L \times \{-1\} \cup \{\widehat{1}^-\}$ ,  $L^0 = L \times \{-1\} \cup \{\widehat{0}\} \cup \{\widehat{1}\}$ ,  $L^+ = L \times \{1\} \cup \{\widehat{0}^+\}$ . Далее любой элемент  $L^-(L^+)$  обозначаем  $x^-(x^+)$ .

Каждая точка  $x^- \in L^-(x^+ \in L^+)$  имеет ФСО, состоящую из открыто-замкнутых окрестностей, лежащих слева от  $x^-$  (справа от  $x^+$ ), то есть меньше  $x^-$  (больше  $x^+$ ). Действительно:  $U(x^-) = (z^0; x^0) = [z^+; x^-]$ , где  $z < x$  и  $U(x^+) = (x^0; z^0) = [x^+; z^-]$ , где  $z > x$ . Кроме того, всякая точка из  $L^0$  изолирована. Следовательно, построенное пространство  $\mathfrak{E}_X$  нульмерно, а значит и вполне несвязно и содержит всюду плотное дискретное подпространство  $L^0$ . Сформулируем условие непрерывности на  $\mathfrak{E}_X$ :

**Лемма 1.** *Для того, чтобы функция была непрерывна на  $\mathfrak{E}_X$  необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева на  $L^-$  и непрерывна справа на  $L^+$ .*

**Теорема 1.**  $\mathfrak{E}_X$  компактно и гомеоморфно  $\mathfrak{M}(JD(X))$ .

Теорема доказывается с помощью построения изоморфизма  $\varphi$  из  $JD(X)$  в  $C(\mathfrak{E}_X)$ . Построим  $\widehat{f} = \varphi(f)$ :

- 1)  $\widehat{f}(\widehat{0}) = f(\widehat{0})$  и  $\widehat{f}(\widehat{1}) = f(\widehat{1})$ ;
- 2)  $\widehat{f}(x^0) = f(x)$ ,  $\widehat{f}(x^+) = f^+(x)$  и  $\widehat{f}(x^-) = f^-(x)$ .

По построению изоморфизма, множество  $\mathfrak{M}(JD(X))$  состоит из  $M_\tau$ ,  $M_\tau^-$  и  $M_\tau^+$ .  $M_\tau$  состоит из функций обращающихся в нуль в точке  $\tau$ ,  $M_\tau^-(M_\tau^+)$  состоит из функций? предел которых слева (справа) в точке  $\tau$  равен нулю. Поскольку есть взаимнооднозначное соответствие между максимальными идеалами и мультипликативными функционалами,  $M_\tau(f) = f(\tau)$ ,  $M_\tau^-(f) = f^-(\tau)$  и  $M_\tau^+(f) = f^+(\tau)$  – мультипликативные функционалы алгебры  $JD(X)$ .

В случае  $X = [0; 1]$ ,  $\mathfrak{E}_X$  сепарабельно, имеет континуальный вес, не метризуемо, не совершенно нормально, является примером не диадического компакта. Пусть  $T[0; 1]$  подалгебра  $JD[0; 1]$ , состоящая из непрерывных слева и непрерывных в 0 функций. Тогда  $\mathfrak{M}(T[0; 1])$  есть факторпространство  $\mathfrak{E}_X$ , получаемое «склеиванием» идеалов  $M_\tau^-$  и  $M_\tau$ .  $\mathfrak{M}(T[0; 1])$  гомеоморфно пространству «две стрелки» (рисунок).

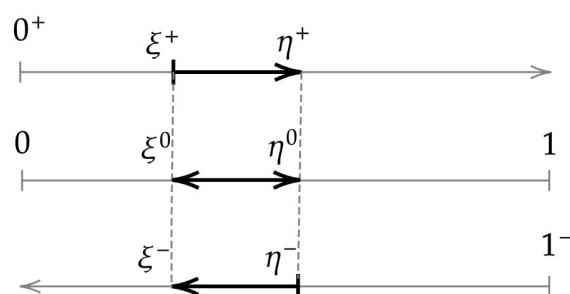


Рисунок –  $\mathfrak{E}_{[0;1]}$  с выделенной окрестностью точки  $(\xi; 1)$

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф25МП-010).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 316 с.
2. Александров, П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров. – М. : Наука, 1977. – 368 с.
3. Александров, П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П. С. Александров, П. С. Урысон. – М. : Наука, 1971. – 144 с.
4. Люксембург, И. Л. Пространства максимальных идеалов алгебр разрывных функций / И. Л. Люксембург // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики, Белорус. гос. ун-т ; сост. Т. С. Бусел. – Минск : Беларус. навука, 2024. – Ч. 1. – С. 68–69.
5. Антоневиц, А. Б. Алгебры разрывных функций и их непрерывное представление / А. Б. Антоневиц, И. Л. Люксембург // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 30 янв. – 4 февр. 2025 г. / Воронеж. гос. ун-т ; Москов. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж : ВГУ, 2025. – С. 55–57.

УДК 517.927.21

**С. А. МАРЗАН**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО**

Пусть  $I_{a+}^{\alpha} f$ ,  $D_{a+}^{\alpha} g$  – правосторонние дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $Re(\alpha) > 0$ ) на конечном отрезке  $[a, b]$  действительной оси [1, § 2.2, 2.4].

Через  $({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x)$  обозначим дробную производную Капуто [2], определяемую формулой

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left( D_{a+}^{\alpha} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right] \right) (x),$$

где  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\alpha) > 0$ ,  $n = [Re(\alpha)] + 1$  при  $\alpha \notin \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , и  $n = \alpha$  при  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Если  $\alpha > 0$ ,  $n - 1 < \alpha \leq n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и  $y \in C^n[a, b]$ , то при  $\alpha \in \mathbb{N}$  производная  ${}^c D_{a+}^{\alpha} y$  совпадает с обычной производной:

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D^n y)(x) \left( n \in \mathbb{N}, D = \frac{d}{dx} \right),$$

а при  $n - 1 < \alpha < n$  оператор  ${}^c D_{a+}^{\alpha}$  представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования Римана – Лиувилля  $I_{a+}^{n-\alpha}$  и оператора дифференцирования  $D^n$ :  $({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x)$ .

В практических приложениях использование дробной производной Капуто дает более естественное решение проблемы начальных условий при решении дифференциальных уравнений нецелых порядков.

Обозначим через  $C_{\gamma}[a, b]$  ( $\gamma \in \mathbb{C}$ ) класс функций  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $(x - a)^{\gamma} g(x) \in C[a, b]$ :

$$C_{\gamma}[a, b] = \{g(x) : \|g\|_{C_{\gamma}} = \|(x - a)^{\gamma} g(x)\|_C < \infty\}, C_0[a, b] = C[a, b].$$

Для  $\gamma \in \mathbb{C}$  ( $0 \leq Re(\gamma) < 1$ ),  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $0 < Re(\alpha) < 1$ ):

$$C_{\gamma}^{\alpha}[a, b] = \{y \in C[a, b] : {}^c D_{a+}^{\alpha} y \in C_{\gamma}[a, b]\},$$

$$C_{\gamma}^{\alpha,1}[a, b] = \{y \in C^1[a, b] : {}^c D_{a+}^{\alpha} y \in C_{\gamma}[a, b]\}.$$

Обозначим через  $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;  $Re(\alpha) > 0$ ) функцию Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто

$$({}^c D_{a+}^{\alpha_s} y_s)(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k(x) + h_s(x), \quad y_s(a) = b_s \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где  $\alpha_s \in \mathbb{C}$  ( $0 < Re(\alpha_s) < 1$ ),  $\lambda_s \in \mathbb{C}$  ( $s = 1, \dots, m$ ).

Пусть

$$\begin{aligned} \overline{C}_{\gamma}^{\overline{\alpha}}[a, b] &= C_{\gamma_1}^{\alpha_1}[a, b] \times C_{\gamma_2}^{\alpha_2}[a, b] \times \dots \times C_{\gamma_m}^{\alpha_m}[a, b], \\ \overline{C}_{\gamma}^{\overline{\alpha},1}[a, b] &= C_{\gamma_1}^{\alpha_1,1}[a, b] \times C_{\gamma_2}^{\alpha_2,1}[a, b] \times \dots \times C_{\gamma_m}^{\alpha_m,1}[a, b]. \end{aligned}$$

Применяя к задаче Коши (1) результаты, полученные в работах [3], [4], можно показать справедливость следующих теорем.

**Теорема 1.** *Если  $h_s \in C_{\gamma_s}[a, b]$ ,  $\gamma_s \in \mathbb{C}$  ( $0 \leq Re(\gamma_s) < 1$ ), то задача Коши (1) имеет в банаховом пространстве  $\overline{C}_{\gamma}^{\overline{\alpha}}[a, b]$  единственное решение*

$$y_s(x) = b_s E_{\alpha_s,1}[\lambda_s(x-a)] + \int_a^x (x-t)^{\alpha_s-1} E_{\alpha_s,\alpha_s}[\lambda_s(x-t)^{\alpha_s}] h_s(t) dt,$$

$s = 1, \dots, m$ .

В частности,  $y_s(x) = b_s E_{\alpha_s,1}[\lambda_s(x-a)^{\alpha_s}]$  – единственное решение задачи Коши

$$({}^c D_{a+}^{\alpha_s} y_s)(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k(x), \quad y_s(a) = b_s \quad (s = 1, \dots, m).$$

**Теорема 2.** *Если  $h_s(x) \in C_{\gamma_s}[a, b]$ ,  $\theta_s \neq 0$ ,  $\gamma_s \in \mathbb{C}$  ( $0 \leq Re(\gamma_s) < 1$ ), то задача Коши*

$$\left( {}^c D_{a+}^{1+i\theta_s} y_s \right)(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k(x) + h_s(x), \quad y_s(a) = b_{1s} \in \mathbb{C}, \quad y'_s(a) = b_{2s} \in \mathbb{C},$$

имеет в  $\overline{C}_{\overline{\gamma}}^{1+i\theta,1}[a, b]$  единственное решение

$$y_s(x) = b_{1s}E_{1+i\theta_s,1}[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}] + b_{2s}E_{1+i\theta_s,2}[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}] + \\ + \int_a^x (x-t)^{i\theta_s} E_{1+i\theta,1+i\theta_s}[\lambda_s(x-t)^{1+i\theta_s}] h_s(t) dt, \quad s = 1, \dots, m.$$

В частности, решение задачи

$$\left({}^c D_{a+}^{1+i\theta_s} y_s\right)(x) = \sum_{s=1}^m \lambda_s y_s(x), \quad y_s(a) = b_{1s} \in \mathbb{C}, \quad y'_s(a) = b_{2s} \in \mathbb{C}$$

имеет вид

$$y_s(x) = b_{1s}E_{1+i\theta_s,1}[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}] + b_{2s}E_{1+i\theta_s,2}[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}],$$

$s = 1, \dots, m.$

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

3. Марзан, С. А. Основные свойства дробных интегралов и производных Римана – Луивилля в весовом пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан, И. В. Мороз // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. ст. Респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2018. – С. 95–97.

4. Марзан, С. А. Существование и единственность решения задачи типа Коши для дифференциального уравнения комплексного порядка в весовом пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 63–71.

УДК 517.983.54

**О. В. МАТЫСИК, И. В. КОВАЛЬЧУК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## ВЫБОР МОМЕНТА ОСТАНОВА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОГО ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В ПОЛУНОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В действительном гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное некорректное уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где  $A : H \rightarrow H$  – положительный, ограниченный, самосопряженный оператор ( $0 \in SpA$ , и, следовательно, рассматриваемая задача неустойчива). Решать данную задачу будем при помощи трехслойного явного итерационного процесса

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, x_0 = x_1 = 0,$$

который при возмущениях ( $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ) в правой части уравнения (1) примет вид:

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (2)$$

Изучим сходимость метода (2) в полунорме гильбертова пространства  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ , где  $x \in H$ , в случае единственного решения уравнения (1) при возмущениях в правой части. При этом число итераций  $n$  нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности  $\delta$ .

**Теорема.** *При условии  $\alpha \in (0, \frac{5}{4\|A\|}]$  метод (2) сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций  $n$  выбрать из условия  $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ . Для метода (2) справедлива оценка погрешности:*

$$\begin{aligned} \|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\| + \\ + 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, n \geq 1. \end{aligned}$$

Для минимизации оценки погрешности метода (2) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2 \cdot 3^{1/4} (e+1)^{1/4} (e+4)^{1/4} e^{-3/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$$

и

$$n_{\text{опт}} = 1 + 3^{-1/2} (\alpha\delta)^{-1} (e+1)^{1/2} (e+4)^{1/2} e^{-3/2} \|x\|.$$

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2) в полунорме достаточно выбирать число итераций  $n = n(\delta)$  так, чтобы  $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Однако  $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-1})$ , т. е.  $n_{\text{опт}}$  относительно  $\delta$  имеет порядок  $\delta^{-1}$ , и такой порядок обеспечивает сходимость (регуляризующие свойства) трехслойного явного итерационного процесса (2).

**Замечание.** Оптимальная оценка погрешности не зависит от  $\alpha$ , но от  $\alpha$  зависит  $n_{\text{опт}}$ . Поэтому для уменьшения  $n_{\text{опт}}$ , т. е. объема вычислительной работы, следует брать  $\alpha$  возможно большим из условия  $\alpha \in (0, \frac{5}{4\|A\|}]$ , и чтобы  $n_{\text{опт}}$  было целым.

УДК 517.983.54

**О. В. МАТЫСИК, И. В. КОСТЕНКОВ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## ПОЛУЧЕНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

В действительном гильбертовом пространстве  $H$  решается операторное уравнение первого рода  $Ax = y_\delta$ , где  $A$  – ограниченный, линейный, самосопряженный оператор. Здесь  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$  и  $0 \in SpA$  (но нуль не является собственным значением  $A$ ), поэтому рассматриваемая задача некорректна (неустойчива). Предположим, что при точной правой части  $y$  существует единственное решение  $x$  операторного уравнения. Для его отыскания применим неявную итерационную процедуру с  $\alpha > 0$ :

$$(E + \alpha A^2) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2) x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (1)$$



Метод (1) является сходящимся, если приближения (1) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения  $Ax = y_\delta$  при подходящем выборе  $n$  и достаточно малых  $\delta$ , т. е. что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$ .

**Теорема.** *Процесс (1) сходится, если выбирать число итераций  $n$  в зависимости от  $\delta$  так, чтобы  $n^{1/2} \delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Если точное решение  $x$  уравнения  $Ax = y_\delta$  истокорпредставимо ( $x = A^s z$ ,  $s > 0$ ), то для метода итераций (1) справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{\frac{s}{2}} (2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}} \|z\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta,$$

*и априорный момент останова*

$$n_{opt} = 2^{-(s+4)/(s+1)} s^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}.$$

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть  $x_{n,\delta}$  – точное значение, получаемое по формуле (1), а  $z_n$  – значение с учетом вычислительной погрешности, т. е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} [(E - \alpha A^2) z_n + 2\alpha A y_\delta] + \alpha \gamma_n, \quad z_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\gamma_n$  – погрешность вычислений. Обозначим  $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$  и вычтем из (2) равенство (1). Имеем

$$\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2) \varepsilon_n + \alpha \gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Поскольку нулевые приближения равны нулю, то  $\gamma_0 = 0$ . По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E + \alpha A^2)^{-(n-1-i)} (E - \alpha A^2)^{n-1-i} \alpha \gamma_i.$$

В силу  $\alpha > 0$  и того, что  $0 \in Sp A$ , справедливо

$$\left\| (E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2) \right\| \leq 1,$$

поэтому  $\|\varepsilon_n\| \leq n\alpha\gamma$ , где  $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$ .

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности неявного метода (1) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \|x - z_n\| &\leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^{s/2} (2n\alpha\epsilon)^{-s/2} \|z\| + \\ &+ 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

УДК 517.983.54

**О. В. МАТЫСИК, С. С. ТКАЧ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **ЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ**

В статье рассматривается некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве  $H$  ограниченным положительным самосопряженным оператором  $A : H \rightarrow H$ . Для решения применим явный метод итераций

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^3 x_n + A^{-1}(E - (E - \alpha A)^3)y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь  $E$  – единичный оператор, а оператор  $A^{-1}$ , фигурирующий в (2), не означает, что для рассматриваемой схемы (2) необходимо его знать. Нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора  $A$ .

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда  $\lambda = 0$  – собственное значение оператора (случай неединственного решения уравнения (1)). Обозначим через  $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$  ядро оператора  $A$ ,  $M(A)$  – ортогональное дополнение ядра  $N(A)$  до  $H$ . Пусть  $P(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $N(A)$ , а  $\Pi(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $M(A)$ . Доказана

**Теорема.** Пусть  $A \geq 0$ ,  $y \in H$ ,  $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$ . Тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения:

a)  $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ ,  $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$

b) последовательность  $x_n$  сходится тогда и только тогда, когда уравнение  $Ax_n = \Pi(A)y$  разрешимо. В последнем случае

$$x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*,$$

где  $x^*$  – минимальное решение уравнения (1).

**Замечание.** В рассматриваемом случае  $x_0 = 0$ , поэтому  $x_n \rightarrow x^*$ , т. е. процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

УДК 004.942:519.218

**П. А. МЕРКУШЕВИЧ, И. Ю. СВЕРБА, Л. П. МАХНИСТ,  
Т. И. КАРИМОВА**

Беларусь, Брест, БрГТУ

## **ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ ГИДРОЛОГИИ**

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии (например, в [1] и [2]):

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \left. \frac{d\theta_1}{d\xi} \right|_{\xi=\infty} = 0, \quad \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) при решении некоторых прикладных задач, интегрировалось различными методами, например, в [3], а в работах [4], [5] исследовалась сходимость решения таких уравнений. В работах [6] и [7] для решения уравнения (1) использовалась система компьютерной алгебры.

Приведем решение этого уравнения, используя степенные ряды.

Введем обозначение  $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$ . Тогда, учитывая, что  $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = \frac{df_1}{d\xi}$ , приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка  $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ , с начальным условием  $f_1(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$ .

Решение последнего уравнения будем искать в виде  $f_1(\xi) = u(\xi)v(\xi)$ . Тогда, учитывая, что  $f_1'(\xi) = u'(\xi)v(\xi) + u(\xi)v'(\xi)$ , получим уравнение

$$u'v + u(v' - \xi v) = -1 \quad (2).$$

Найдем одно из ненулевых решений уравнения  $v' - \xi v = 0$ . Разделяя переменные в уравнении  $\frac{dv}{d\xi} = \xi v$ , решением которого, очевидно, является  $v = 0$ , получим  $\frac{dv}{v} = \xi d\xi$ . Интегрируя последнее уравнение, получим  $\int \frac{dv}{v} = \int \xi d\xi + C_2$ . Откуда  $\ln |v| = \frac{\xi^2}{2} + \ln C_1$  или  $v = \pm C_1 e^{\frac{\xi^2}{2}}$ .

Следовательно,  $v = C e^{\frac{\xi^2}{2}}$  – общее решение дифференциального уравнения  $v' - \xi v = 0$ .

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например,  $v = e^{\frac{\xi^2}{2}}$ , при  $C = 1$ . Подставляя его в уравнение (2), имеем  $u'e^{\frac{\xi^2}{2}} = -1$  или  $u' = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ . Откуда  $u = -\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C$ .

Следовательно,  $f_1(\xi) = u(\xi)v(\xi) = \left(-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$  или  $f_1(\xi) = \left(C - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ .

Заметим, что  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$ . Тогда, учитывая начальное условие  $f_1(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$ , имеем  $f_1(\xi) = \left(\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$  или  $f_1(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ , что можно проверить, используя правило Лопиталья.

Далее решение дифференциального уравнения  $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$  будем искать в виде степенного ряда  $f_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ . Тогда  $f_1'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1}$ . Подставляя  $f_1(\xi)$  и  $f_1'(\xi)$  в уравнение  $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ , получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{n+1} = -1.$$

Введя замены  $n - 1 = k$  и  $n + 1 = m$  в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение  $\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) c_{k+1} \xi^k - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} \xi^m = -1$  или, полагая  $k = n$  и  $m = n$  в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение  $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1) c_{n+1} \xi^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \xi^n = -1$  или уравнение  $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n + 1) c_{n+1} - c_{n-1}) \xi^n = -1$  для любого  $\xi$ . Следовательно,  $(n + 1) c_{n+1} - c_{n-1} = 0$  или  $c_{n+1} = \frac{c_{n-1}}{n+1}$ , если  $n$  – натуральное число, и  $c_1 = -1$ .

При  $n = 2k - 1$  – нечетное число ( $k \in \mathbb{N}$ ), получим  $c_{2k} = \frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{c_0}{(2k)!!}$ , где  $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)$  – двойной факториал четного числа  $2k$ .

При  $n = 2k$  – четное число ( $k \in \mathbb{N}$ ), получим  $c_{2k+1} = \frac{c_{2k-1}}{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!!}$ , где  $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)$  – двойной факториал нечетного числа  $2k+1$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1 \xi + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1 \xi + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \xi^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} \xi^{2k+1} = \\ &= c_0 + c_1 \xi + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} = c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}, \end{aligned}$$

полагая, что  $0!! = 1$ .

Так как  $c_0 = f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  и  $c_1 = -1$ , то

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Так как  $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$ , то

$$\theta_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)} + C.$$

Учитывая начальное условие,  $\theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$ , получаем, что  $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$ , где

$$S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)}$$

или

$$S_1(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{n}{2}\right\}} \frac{(-1)^{n-1} \xi^n}{(n-1)!! n},$$

где  $\{t\}$  – дробная часть числа  $t$  соответственно.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волчек, А. А. О сходимости решения одной малопараметрической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2009. – № 5. – С. 2–5.

2. Волчек, А. А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.

3. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.

4. Волчек, А. А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.

5. Волчек, А. А. О моментах распределения вероятностей модели диффузионного типа в практике гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Математика и ее приложения : межвуз. сб. науч. тр. / Ассоциация математиков вузов северо-запада ; под ред. Д. П. Голоскокова, А. Р. Шкадовой. – СПб, 2011. – Вып. 3. – С. 139–148.

6. Махнист, Л. П. Применение систем компьютерной алгебры для решения модели стохастической гидрологии / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 96–98.

7. Махнист, Л. П. К решению задачи гидрологии с использованием систем компьютерной алгебры / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2022. – С. 17–19.

УДК 519.24

**Е. И. МИРСКАЯ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ  
СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ  
ПЛОТНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ  
ОТ ОКОН ПРОСМОТРА ДАННЫХ**

В спектральном анализе временных рядов одной из проблем является построение оценок спектральных плотностей второго порядка стационарных случайных процессов, так как они дают важную информацию о структуре процесса.

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа временных рядов. Это связано с широким применением анализа временных рядов к анализу данных, которые возникают в физике, технике, теории распознавания образов, экономике. Часто данные являются многомерными. Такая ситуация особенно характерна для экономических данных.

В данной работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности исследована статистика, построенная по методу Уэлча. Предложенная оценка использована для анализа многомерных временных рядов.

В данной работе с помощью метода Уэлча [1] проведен сравнительный анализ дисперсии оценки спектральной плотности в зависимости от окон просмотра данных для временного ряда, представляющего ежемесячные данные по геомагнитной активности (магнитные бури на Земле) с 1984 г. по 2024 г.

Пусть  $X^r(t)$ ,  $t \in Z$  –  $r$ -мерный действительный стационарный в широком смысле случайный процесс. Будем предполагать, что взаимная спектральная плотность  $f_{ab}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$ ,  $a, b = \overline{1, r}$  случайного процесса неизвестна.

В работе исследована сглаженная оценка взаимной спектральной плотности вида

$$\tilde{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{l=1}^T W_{ab} \left( \lambda - \frac{2\pi l}{T} \right) I_{ab}^T \left( \frac{2\pi l}{T} \right), \quad (1)$$

где  $W_{ab}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a, b = \overline{1, r}$  – спектральное окно,  $I_{ab}^T(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$  – расширенная периодограмма процесса  $X^r(t)$ ,  $t \in Z$ , заданная соотношением

$$I_{ab}^T(\lambda) = d_a^N(\lambda) \overline{d_b^N(\lambda)}.$$

Показано, что оценка (1) является асимптотически несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности процесса  $X^r(t)$ ,  $t \in Z$ .

Проведен сравнительный анализ дисперсии оценки взаимной спектральной плотности, заданной соотношением (1), для различных окон просмотра данных. Уменьшение дисперсии оценок достигается за счет выбора функции окна просмотра данных.

Показано, что наименьшей дисперсией обладает оценка, построенная с использованием прямоугольного окна просмотра данных.

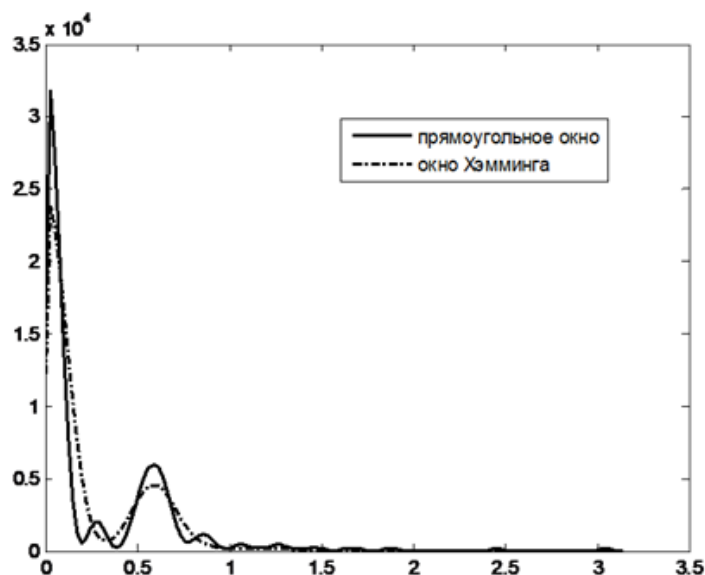


Рисунок – Графики оценки спектральной плотности, построенные для временного ряда с использованием окна Хэмминга и прямоугольного окна

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms / P. D. Welch // Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Audio and Electroacoustics. – 1967. – Vol. AU-15, № 2. – P. 70–73.



УДК 519.24

**Е. И. МИРСКАЯ, И. Д. БОРЕЙКО**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВЫХ ДВУХ МОМЕНТОВ  
ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ,  
ПОСТРОЕННОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ОКНА ХЭММИНГА**

Одной из задач спектрального анализа временных рядов является построение состоятельных в среднеквадратическом смысле оценок спектральной плотности и исследование их статистических свойств.

В данной работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности стационарного случайного процесса исследована оценка, построенная по методу Уэлча [1] с использованием окна просмотра данных Хэмминга.

Рассмотрим  $X^r(t)$ ,  $t \in Z$ ,  $r$ -мерный стационарный в широком смысле случайный процесс с  $MX^r(t) = 0$ ,  $t \in Z$ , и неизвестной взаимной спектральной плотностью  $f_{ab}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ . Предположим, что число наблюдений  $T = S(N - M) + M$ , где  $S$  – число пересекающихся интервалов разбиения длины  $N$ ,  $N$  и  $M$  являются целыми числами,  $0 \leq M < N$ , ( $S$  не зависит от  $T$ ).

В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности процесса в работе исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}^T(\lambda) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S I_{ab}^{s(N-M)}(\lambda), \quad (1)$$

$\lambda \in \Pi$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ , где расширенная периодограмма задана выражением

$$I_{ab}^{s(N-M)}(\lambda) = d_a^{s(N-M)}(\lambda) \overline{d_b^{s(N-M)}(\lambda)},$$

а модифицированное конечное преобразование Фурье наблюдений  $d_a^{s(N-M)}(\lambda) =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi N}} \sum_{(s-1)(N-M)}^{(s-1)(N-M)+M-1} \left( 1 + \cos \frac{\pi(t - (s-1)(N-M))}{T} \right) X_a(t) e^{-it\lambda}.$$

В работе вычислены первые два момента построенной оценки. Доказано, что при некоторых ограничениях на взаимную спектральную плотность процесса  $X^r(t)$ ,  $t \in Z$ , оценка взаимной спектральной плотности, заданная соотношением (1), является асимптотической несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms / P. D. Welch // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. – 1967. – Vol. AU-15, № 2. – P. 70–73.

УДК 519.642.2

**И. М. МИЩУК<sup>1</sup>, Ю. М. ВУВУНИКЯН<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Рассмотрим нахождения решения интегро-дифференциального уравнения вида:

$$u'(t) = \sin(u(t)) + \int_0^t (t-s)u^2(s) ds. \quad (1)$$

Компьютерное моделирование данного уравнения методом конечных разностей позволяет не только получить численное решение, но и глубже понять, как ведёт себя функция на заданном отрезке. В основе метода лежит итерационный алгоритм, представляющий собой поэтапный процесс приближения к искомому значению.

Для запуска этого алгоритма требуется задать интервал  $[a; b]$ , шаг  $h$ , а также точность  $\varepsilon$ . Далее по специальной рекуррентной формуле, выведенной из исходного уравнения путем аппроксимации интеграла и производной, строится цепочка приближённых значений. Итерации продолжаются до тех пор, пока результат не достигнет заранее заданной точности, гарантируя тем самым надёжность и точность решения.

Аппроксимация производной по разностной формуле:

$$u'(t_k) = \frac{u_k - u_{k-1}}{h}. \quad (2)$$

Аппроксимация интеграла с использованием решения методом прямоугольников:

$$\int_0^{t_k} (t_k - s)u^2(s) ds \approx h^2 \sum_{j=0}^k (k - j)u_j^2. \quad (3)$$

Применив аппроксимации (2) и (3) в (1) получим следующую рекуррентную формулу:

$$u_k = u_{k-1} + h \sin(u_k) + h^3 \sum_{j=0}^k (k - j)u_j^2. \quad (4)$$

На рисунке представлены численные решения уравнения, полученные на интервале  $[0, 2]$  с шагом  $h = \{0,5; 0,1; 0,05\}$  и заданной точностью  $\varepsilon$ .

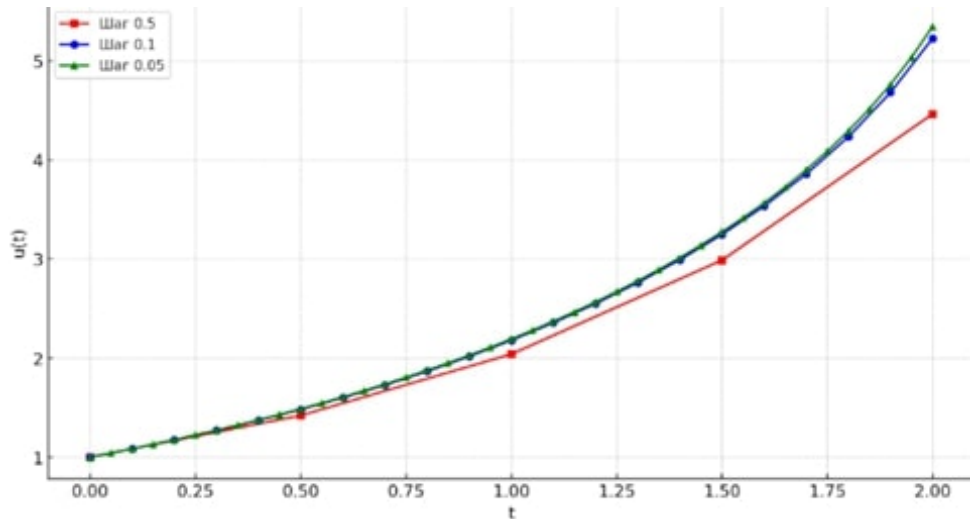


Рисунок – Численное решение интегро-дифференциального уравнения методом итераций

Как видно, с уменьшением шага точность решения увеличивается. Результаты численного эксперимента показывают, что предложенный метод обеспечивает высокую точность в нахождении решения рассматриваемого уравнения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев, О. Е. Современные численные методы решения интегродифференциальных уравнений, возникающих в приложениях / О. Е. Кудрявцев. – М. : Вуз. кн., 2010. – 141 с.
2. Самсонов, А. Численные методы и программирование / А. Самсонов. – М.: Наука, 2019. – 640 с.

УДК 517.925

**Э. В. МУСАФИРОВ**

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

**О ТРЕХМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМАХ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ СО СКРЫТЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ**

**Введение.** Согласно [1], «аттрактор называется скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся». В частности, у системы, не имеющей состояний равновесия или имеющей только устойчивые состояния равновесия, аттрактор является скрытым.

Вещественная автономная двумерная система имеет замкнутую траекторию только если у нее существует хотя бы одно состояние равновесия [2, с. 124]. В. И. Булгаков привел пример трехмерной системы [3], которая, в отличие от двумерных систем, не обладает указанным свойством:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xz + ay, \\ \dot{y} &= 2yz - ax, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ \dot{z} &= z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$  – параметры системы. В этой системе при  $-2 < b < 0$  имеется предельный цикл, но отсутствуют состояния равновесия (в этом случае предельный цикл является скрытым аттрактором и система демонстрирует скрытые колебания).

**Основной результат.** С помощью теории отражающей функции Мироненко (ОФМ) [4, 5] и подхода, изложенного в [6–9], получено множество неавтономных систем, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко и обладающих скрытыми колебаниями. В частности, доказано следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $\alpha_i = \alpha_i(t) (i = \overline{1, 5})$  – произвольные скалярные непрерывные нечетные функции, тогда:

1.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2xz + ay)(1 + \alpha_1) + 2xz\alpha_2 + y\alpha_3, \\ \dot{y} &= (2yz - ax)(1 + \alpha_1) + 2yz\alpha_2 - x\alpha_3, \\ \dot{z} &= (z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2); \end{aligned} \quad (2)$$

2. при  $a = \pm 2, b = 0$  ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2(xz \pm y)(1 + \alpha_1) + 2xz\alpha_2 + y\alpha_3 \pm 2(xy \pm z)\alpha_4 \mp \\ &\quad \mp (1 + x^2 - y^2 - z^2)\alpha_5, \\ \dot{y} &= 2(yz \mp x)(1 + \alpha_1) + 2yz\alpha_2 - x\alpha_3 \pm (1 - x^2 + y^2 - z^2)\alpha_4 \mp \\ &\quad \mp 2(xy \mp z)\alpha_5, \\ \dot{z} &= (1 - x^2 - y^2 + z^2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2) \pm 2(yz \mp x)\alpha_4 \mp 2(xz \pm y)\alpha_5; \end{aligned}$$

3. при  $a = b = 0$  ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xz(1 + \alpha_1(t)) + 2xy\alpha_2(t) - (1 - x^2 + y^2 + z^2)\alpha_3(t) + y\alpha_4(t), \\ \dot{y} &= 2yz(1 + \alpha_1(t)) - (1 + x^2 - y^2 + z^2)\alpha_2(t) + 2xy\alpha_3(t) - x\alpha_4(t), \\ \dot{z} &= (1 - x^2 - y^2 + z^2)(1 + \alpha_1(t)) + 2yz\alpha_2(t) + 2xz\alpha_3(t). \end{aligned}$$

Для полученных возмущенных неавтономных систем изучена устойчивость по Ляпунову стационарных решений, доказано существование предельного цикла и периодических решений, а также изучен характер их устойчивости по Ляпунову. Показано, что возмущенная неавтономная система (2), как и исходная автономная система (1), при определенных значениях параметров проявляет скрытые колебания (имеет предельный цикл, но не имеет стационарных решений) (таблица 1).

Таблица 1 – Характер устойчивости предельного цикла (ПЦ)  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  и равновесных решений

$$P \left( 0, 0, -\frac{1}{2} \left( b + \sqrt{b^2 - 4} \right) \right), Q \left( 0, 0, -\frac{1}{2} \left( b - \sqrt{b^2 - 4} \right) \right)$$

системы (2) в случае, когда  $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) > -1 \forall t \geq 0$

$b$	Равновесные решения	ПЦ
$(-\infty, -2)$	$P$ и $Q$ неустойчивы	устойчив
$-2$	$P = Q = (0, 0, 1)$ устойчиво	устойчив
$(-2, 0)$	отсутствуют	устойчив
$0$	отсутствуют	—
$(0, 2)$	отсутствуют	неустойчив
$2$	$P = Q = (0, 0, -1)$ неустойчиво	неустойчив
$(2, +\infty)$	$P$ асимптотически устойчиво, $Q$ неустойчиво	неустойчив

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф25КИ-087.*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов, Н. В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления / Н. В. Кузнецов // Известия РАН. Теория и Системы управления. – 2020. – № 5 – С. 5–27.

2. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1990. – 488 с.

3. Булгаков, В. И. О фазовом портрете автономной системы третьего порядка / В. И. Булгаков // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 10 – С. 1821–1822.

4. Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель : ГГУ, 2004. – 196 с.

5. Мироненко, В. В. Возмущения дифференциальных систем, не изменяющие временных симметрий / В. В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10 – С. 1325–1332.

6. Мусафиров, Э. В. Нестационарные дифференциальные системы, эквивалентные системе Лотки–Вольтерра с логистической поправкой / Э. В. Мусафиров // Наука Красноярья. – 2012. – № 1 – С. 97–104.

7. Мусафиров, Э. В. Допустимые возмущения модели Костицына «хищник-жертва» / Э. В. Мусафиров // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – № 7-2 – С. 248–252.

8. Мусафиров, Э. В. Допустимые возмущения системы Лэнгфорда / Э. В. Мусафиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 – С. 47–51.

9. Мусафиров, Э. В. Допустимые возмущения обобщенной системы Носе – Гувера в одном случае / Э. В. Мусафиров // Ползуновский альманах. – 2020. – № 1 – С. 221–222.

УДК 519.7

**А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА**

Россия, Санкт-Петербург, СПб ФИЦ РАН

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ТРАНСФОРМАЦИЙ ГИБРИДНОЙ СТРУКТУРОЙ УРАВНЕНИЙ**

Статья рассматривает проблематику моделирования эволюционных процессов в противоборствующем сообществе организмов и адаптации одной из компонент биофизической системы. Инвазионные процессы в биосистемах при вселении видов с высоким репродуктивным параметром в новый ареал запускают многообразные нелинейные процессы и некоторые из инвазионных вторжений развиваются стремительно в форме вспышки из одного пика.

В статье опишем формирование моделирующих структур с включенной логикой, задающей условия переопределения системы уравнений на основе отслеживания изменяющихся эволюционных характеристик и трансформирующихся параметров. Гибридная модель из набора выбираемых по заданным условиям переопределяемых функций активаций и демпфирования колебаний имитирует последствия событийной эволюции возбудителя. На основе алгоритмической реализации структуры переходов между режимами поведения в серии имитационных сценариев развития эпидемических волн в регионах в зависимости от факторов иммунизации и оценки действенности антиэпидемических мер. Получены

сценарии развития эпидемической ситуации при смене доминирующих штаммов коронавируса в пяти регионах.

Предложим модели с вероятностной компонентой при развитии ситуации инвазионного процесса в биосистеме с адаптивным сопротивлением. Представим несколько аспектов запаздывания. Частный случай инвазии с неопределенно запаздывающим ответом – это иммунный ответ на коронавирус, который может быть или сильным или медленно возникающим по целому ряду не полностью детерминированных факторов. Мы включим в модель возмущенного равномерно распределенной на  $[0, 1]$   $\sigma$  репродуктивного запаздывания  $x(t - \tau \times \sigma)$  как способ разнообразить варианты поведения траектории, но не расширяя структуру. Вопрос определения связи величины  $\tau$  с непосредственной популяционной характеристикой открыт.  $\tau$  – это агрегированная характеристика процессов и сложенная из разных явлений.

Модификации моделей с запаздыванием представляют значимость для исследования редких сценариев популяционной динамики, которые относим к типу экстремальных [1]. В предложенной нами модели получен вариант разрушения колебаний без необходимости дальнейшего увеличения  $r$ ,  $H = 1/3K$ :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N(t - \tau \times \sigma)}{\mathcal{K}} \right) (H - N(t - \gamma)), \gamma < \tau. \quad (1)$$

Модель была основана на нашей идее, что для механизмов контроля имеет значение переход  $N(t - \gamma)$  через предкритический порог  $H$ . Величина  $H$  трактовалась как мягкое пороговое состояние «преднасыщения» среды, когда при  $N(t) \rightarrow H + \epsilon$  популяция вселенца уже начинает разрушительно воздействовать на среду [2]. В сценарии на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонение  $[H - N(t - \gamma)]$ , притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается опасными симптомами. Модель описала вычислительный сценарий с выбросом траектории из окрестности цикла. После образования колебаний при превышении значения в момент  $\max N_*(t_{max}; r\tau\gamma)$  предельного для экосистемы уровня траектория далее  $N(t) \rightarrow \infty$  с остановкой расчетов. В модели релаксационный цикл оказывается переходным режимом существова-



ния, а образование неограниченной траектории оценено нами как катастрофическая динамика.

Используем в новой форме модели вместо квадратичной зависимости логарифмическую форму регуляции. В таком варианте уравнения с внешним воздействием биотической среды дополнение модели фактором противодействия с отдельным запаздыванием изменит качественный характер решения:

$$\frac{dN}{dt} = r \ln \left( \frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau)} \right) - \mathcal{Q}N(t - \nu), \quad (2)$$

Определим такое запаздывание адаптационным  $\nu$  и будем отличать его от феноменологического регуляционного  $\tau$  из уравнений Хатчинсона или Николсона.

Для  $f(N) = rN \ln(K/N)$  ордината точки перегиба  $N_p$  на кривой решения  $\dot{N} = f(N)$  лежит ниже  $K/2$ , так как  $f'(N_p) = 0$ ,  $N_p = K/e$ . В данной модификации мы используем обозначение  $\mathcal{K}$ , так как достижение уровня может быть кратковременным при больших  $r$ . В вычислительном сценарии наблюдается гибель популяции агрессивного вселенца после двух максимумов осцилляций. При уменьшении  $r$  траектория демонстрирует [2] обычные гармонические колебания  $N_*(t; \tau r)$ .

Усовершенствуем (1) с включением нелинейности

$$F(N) = -\mathcal{Q}N^k(t - \nu), \quad \tau \geq \nu,$$

что обосновано ситуацией, когда текущее воздействие может определяться предшествующим состоянием популяции.

Применение модели возможно для анализа эпидемических волн COVID. Рассмотрим пульсирующий эпидемический процесс, который свойственен быстро мутирующему коронавирусу. 12 волн заболеваемости образовалось в ходе эпидемии в Бельгии. В 2024 г. активность линии JN.1–KP.3 нарушила тренд затухания. При росте числа переболевших формируется популяционный иммунитет, но случайные мутации с неслучайным отбором ведут к образованию ветвей эволюции конкурирующих штаммов вируса. Момент активации нового штамма вероятно вариативен  $[\tau_1, \tau_1 + \Delta]$ . С учетом стохастического возмущения  $\tau_1$  случайной величиной  $\gamma$  в диапазоне  $\gamma(\omega) \in [1, 2]$  опишем с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием  $(t - \tau_1\gamma)$  волн

эпидемии при смене доминирующего штамма:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = R_2 Y(t) \exp(-\varsigma Y(t - \gamma\tau) - \varepsilon \sqrt{(J - N(t - \tau))^2}), \\ \frac{dN}{dt} = R_1 N(t) \ln \left( \frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - Y(t))^2} - \varphi Y(t), \\ \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \end{cases} \quad (3)$$

В системе (3) учтен эффект борьбы штаммов при эволюции на уклонение от связывания с антителами. При  $Y(0) < J < \mathcal{K}$   $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$  происходит смена характеристик осцилляционного режима. Положение экстремумов колебаний  $N(t) \rightarrow N_*(t)$ ,  $\max N_*(t) < J$ ,  $\min N_*(t)$  зависит от возмущения запаздывания.

*Исследование выполнено в рамках бюджетной темы СПб ФИЦ РАН (руководитель А. С. Гейда).*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Переварюха, А. Ю. Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели / А. Ю. Переварюха // Нелинейный мир. – 2012. – Т. 10, № 4. – С. 255–262.

2. Переварюха, А. Ю. Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций / А. Ю. Переварюха // Нелинейный мир. – 2009. – Т. 10, № 4. – С. 925–932.

УДК 517.53

**И. И. СОРОКИН**

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

#### **О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРЕМ ЕДИНСТВЕННОСТИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

В комплексном и гармоническом анализе важную роль играет представление функций, принадлежащих тому или иному классу на заданном множестве, в виде простых дробей с фиксированными полюсами. В данной работе рассмотрены некоторые случаи таких представлений, доказательство которых основано в том числе на использовании теоремы единственности в соответствующем классе.

Пусть  $\mathbb{C}$  – комплексная плоскость,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  – единичный круг на комплексной плоскости,  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  – единичная окружность;  $H(D)$  – множество всех аналитических функций в  $D$ .

Предположим, что  $E$  – некоторое замкнутое множество на единичной окружности  $T$  и обозначим  $e_{\zeta,k}(z)$  множество всех простых дробей вида

$$e_{\zeta,k}(z) = \frac{1}{(1 - \zeta z)^k}, \quad z \in D, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \zeta \in E.$$

Положим также

$$M(r, f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Символом  $X_\alpha$  обозначим пространство всех аналитических в  $D$  функций, для которых

$$X_\alpha = \left\{ f \in H(D), \quad M(r, f) e^{-\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} 0, \quad \alpha > 0 \right\},$$

$$\|f\|_{X_\alpha} = \sup_{0 \leq r < 1} \left\{ M(r, f) e^{-\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \right\}. \quad (1)$$

Основной результат работы – получить полное описание тех замкнутых множеств  $E$  на окружности  $T$ , для которых система функций

$$Y(E) = \{e_{\zeta,k}\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \zeta \in E \quad (2)$$

составляет всюду плотное множество в пространстве  $X_\alpha$  и соответственно в  $A_\alpha^p(D)$ , где

$$A_\alpha^p = \left\{ f \in H(D), \quad M(r, f) e^{-\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} 0 \right\} =$$

$$= \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{A_\alpha^p(D)} = \left( \int_D |f(z)|^p \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\right) dm_2(z) < +\infty \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Известно, что при  $1 \leq p < +\infty$   $A_\alpha^p(D)$  является нормированным пространством, а при  $0 < p < 1$  – метрическим пространством относительно соответствующей метрики. Вышеуказанные пространства введены и исследовались в работах [1], [2].

Сформулируем основные результаты работы в виде следующих двух теорем.

**Теорема 1.** Пусть  $E$  – замкнутое множество на единичной окружности  $T$ ,  $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$  – дополнительные интервалы множества  $E^* = \{\varphi \in [-\pi, \pi] : e^{i\varphi} \in E\}$ .

Тогда, если

$$\sum_{k=1}^{+\infty} l_k^{\frac{1}{1+\alpha}} = +\infty, \quad (3)$$

то

$$\overline{Y(E)} = X_\alpha,$$

где замыкание берется в топологии пространства  $X_\alpha$ .

В случае пространства  $A_\alpha^p(D)$  справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $0 < p < +\infty$ ,  $E$  – множество из теоремы 1,  $Y(E)$  определяется равенством (2). Тогда если дополнительные интервалы множества  $E$  удовлетворяют условию (3), то

$$\overline{Y(E)} = A_\alpha^p(D)$$

при всех  $0 < p < +\infty$ ,  $0 < \alpha < +\infty$ , где замыкание  $Y(E)$  берется в топологии пространства  $A_\alpha^p(D)$ .

Доказательство теоремы 2 основано на следующих вспомогательных результатах.

**Лемма 1.** Пусть  $\Phi$  – линейный непрерывный функционал на  $X_\alpha$ ,

$$e_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \zeta z}, \quad z, \zeta \in D.$$

Предположим, что  $g(\zeta) = \Phi(e_\zeta)$ . Тогда  $g \in H(D)$ , причем

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(\delta_k) \zeta^k,$$

где  $\delta_k(\zeta) = \zeta^k$ ,  $\zeta \in D$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\Phi$  – линейный непрерывный функционал на  $X_\alpha$ ,  $e_\zeta$ ,  $g$  – функции, определенные в лемме 1. Тогда

$$\left| g^{(n)}(\zeta) \right| \leq A^n n^{n(1+\frac{1}{\alpha})}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где  $A$  – некоторое положительное число, зависящее только от  $\Phi$ .

**Лемма 3.** Пусть  $g$  – функция, определенная в лемме 1,  $E$  – некоторое замкнутое множество на  $T$ . Тогда если  $g^{(k)}(\zeta) = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\zeta \in E$ , и при этом дополнительные интервалы  $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$  множества  $E^* = \{\varphi \in [-\pi, \pi] : e^{i\varphi} \in E\}$  удовлетворяют условию (3), то функция  $g$  равна нулю тождественно, т. е.  $g(z) \equiv 0$ ,  $z \in D$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\Phi$  – линейный непрерывный функционал на  $X_\alpha$ ,  $e_\zeta$ ,  $g$  – функции, определенные в лемме 1. Тогда для произвольной  $f \in X_\alpha$  справедливо следующее представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(\rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Djrbashian, A. E. Topics in the theory of spaces / A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan // Leipzig: Teubner-Texte zur Math. – 1988. – Vol. 105. – 200 p.
2. Шамоян, Ф. А. Введение в теорию весовых  $Lp$ -классов мероморфных функций / Ф. А. Шамоян. – Брянск : РИО БГУ, 2009. – 180 с.

УДК 517.977

**О. Б. ЦЕХАН**

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

#### ОБ ОПЕРАТОРЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пусть  $\mu$  – малый параметр,  $\mu \in (0, \mu^0]$ ,  $\mu^0 \ll 1$ ,  $p \triangleq \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования,  $h > 0$  – запаздывание,  $e^{-ph}$  – оператор запаздывания:  $e^{-ph}z(t) = z(t-h)$ ,  $PC([a, b]; \mathbb{R}^k)$  ( $C, \overline{PC}$ ) – линейное пространство

кусочно-непрерывных (непрерывных, ограниченных кусочно-непрерывных) функций, отображающих интервал  $[a, b]$  в  $k$ -мерное действительное пространство  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathcal{R}[[\mu]][\lambda]$  – кольцо полиномов от переменной  $\lambda$  с коэффициентами из кольца формальных степенных рядов по  $\mu$  над полем  $\mathcal{R}$ . Для любых  $r, s \in \mathbb{N}$  обозначим  $\mathcal{A}_T^{r \times s}(\mu, e^{-ph})$  класс  $r \times s$ -матричных операторов  $\mathbf{A}$  с элементами из  $C(T; \mathbb{R})[[\mu]][e^{-ph}]$ , действующих из  $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \triangleq \text{diag}\{E_{n_1}, \mu^{-1}E_{n_2}\}$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $M\mathcal{A}_T^{r \times s}(\mu, e^{-ph})$  – класс операторов вида  $M \cdot \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_T^{r \times s}(\mu, e^{-ph})$ .

Пусть  $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$ ,  $A_{ij}(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1$ ,  $A_m(t)$ ,  $m = 3, 4$ , – непрерывные на  $T$  матричные функции подходящих размеров,  $z' = (x', y')$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ . Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему (СВС) с запаздыванием [1]:

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) z(t), t \in T. \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_\mu \triangleq \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) = M \cdot \mathbf{A}(t, e^{-ph}) \in M\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph}), n = n_1 + n_2, \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph}).$$

В качестве пространства состояний системы (1) рассмотрим пространство  $(PC[t-h, t]; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ .

Известны сложности исследования СВС из-за их жесткости, а также возможной высокой размерности. Чтобы снизить размерность и избежать жесткости, в [2] предложена двухэтапная процедура разделения временной шкалы двухтемповой СВС. Композиция преобразований двух этапов порождает оператор  $K$  специального вида [3] из группы преобразований Ляпунова [4]. Применение преобразования  $K$  к оператору СВС приводит к его блочной диагонализации, что соответствует расщеплению СВС на разделенные по темпам системы меньшей размерности, чем исходная, при этом, в отличие от исходной, эти подсистемы регулярным образом зависят от малого параметра. Таким образом,  $K$  является оператором регуляризирующего расщепляющего преобразования.

Однако применение преобразования  $K$  [2; 3] к оператору  $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})$  (2) не приводит к его блочной диагонализации, что обусловлено зависимостью  $\mathbf{A}_\mu$  от оператора запаздывания (нелокальным действием). Для систем с запаздыванием естественно рассматривать класс преобразований с запаздыванием [5]. Рассмотрим группу  $\mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph}) \subset \mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$

непрерывно дифференцируемых на  $T$  невырожденных для каждого  $t \in T$  операторов  $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph})$ , каждый из которых задает оператор преобразования элементов  $\mathbf{A}^\mu \in M\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$  по правилу:

$$\mathbf{G} * \mathbf{A}^\mu = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}^\mu \mathbf{G} - \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{G}}.$$

В общем случае  $\mathbf{G} * \mathbf{A}^\mu \notin M\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ . Чтобы корректно определить действие операторов из  $\mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph})$  на  $\mathbf{A}_\mu$  (2), погрузим класс  $\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$  в класс  $\mathcal{A}^{n \times n}(\mu, e^{-ph}) : (PC(-\infty, t]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  матричных операторов с элементами из  $PC((-\infty; t_1], \mathbb{R})[[\mu]][[e^{-ph}]]$ . Класс операторов вида  $M \cdot \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ , обозначим  $M\mathcal{A}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ .

Рассмотрим группу  $\mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph})$  непрерывно дифференцируемых на  $T$  невырожденных для каждого  $t \in T$  операторов из класса  $\mathcal{A}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ . В статье доказывается, что в общем случае для оператора  $\mathbf{A}_\mu$  (2) не существует блочно-диагонализирующего преобразования в группе  $\mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph})$ , но при некоторых условиях на  $A_{ij}(t)$ ,  $i = 1, 2, j = 0, 1$ ,  $A_m(t)$ ,  $m = 3, 4$ , такое преобразование  $\mathbf{K}$  существует в группе  $\mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph}) \supset \mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph})$ . Оператор преобразования  $\mathbf{K}$  может быть представлен в виде асимптотического ряда по  $\mu$ . Соответствующая расщепленная СВСЗ, алгебраически и асимптотически эквивалентная исходной системе с оператором  $\mathbf{A}_\mu$ , является системой с бесконечным запаздыванием специального вида. Обосновано асимптотическое приближение оператора  $\mathbf{K} * \mathbf{A}_\mu \in M\mathcal{A}^{n \times n}$  расщепленной СВС блочно-диагональным оператором из  $M\mathcal{A}_T^{n \times n}$ , что соответствует расщеплению СВСЗ на не зависящие от параметра  $\mu$  подсистемы с конечным запаздыванием.

**Теорема.** Пусть  $\forall t \in T : \operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -a < 0$ ;  $\|A_4(t)\| \leq b$ ;  $\|\dot{A}_4(t)\| \leq c$ ; элементы  $A_{ij}(t)$ ,  $i = 1, 2, j = 0, 1$ ,  $A_i(t)$ ,  $i = 3, 4$ , определены, ограничены и непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на  $(-\infty, t_1]$ . Тогда для достаточно малых  $\mu \in (0, \mu^0]$  существует преобразование Ляпунова с унимодулярным оператором  $\mathbf{K} \in \mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph})$  вида

$$\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{K}_{12} \\ -\mathbf{K}_{21} & E_{n_2} - \mu \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{12} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{K}_{ij} \in \mathcal{A}^{n_i \times n_j}(\mu, e^{-ph})$ ,  $i, j = 1, 2$ , – операторы, удовлетворяющие специальным операторным уравнениям Риккати, которое преобразует

$\mathbf{A}_\mu \in \mathcal{MA}^{n \times n}$  в блочно-диагональный оператор:

$$\mathbf{K} * \mathbf{A}_\mu = M \cdot \text{diag} \{ \mathbf{A}_\xi, \mathbf{A}_\eta \} \in \mathcal{MA}^{n \times n},$$

$\mathbf{A}_\xi \in \mathcal{A}^{n_1 \times n_1}$ ,  $\mathbf{A}_\eta \in \mathcal{A}^{n_2 \times n_2}$ . Если при этом элементы  $A_{ij}(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1$ ,  $A_m(t)$ ,  $m = 3, 4$ , достаточно гладкие на  $(-\infty, t_1]$ , то асимптотическое (по  $\mu$ ) приближение для  $\mathbf{K}$  можно найти в виде оператора с конечным запаздыванием.

Получены итерационные схемы для нахождения оператора расщепляющего преобразования  $\mathbf{K}$  и матриц  $\mathbf{A}_\xi$ ,  $\mathbf{A}_\eta$  преобразованных систем, описано действие асимптотических приближений оператора  $\mathbf{K}$  на СВСЗ.

Результаты можно применять для развития [1] при получении асимптотических аппроксимаций любого порядка решения СВСЗ, при построении асимптотических (по  $\mu$ ) регуляторов и наблюдателей таких систем.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», 1.2.04.*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цехан, О. Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием / О. Б. Цехан // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2024. – Т. 14, № 1. – С. 37–47.
2. Kokotovic, P. V. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly. – New York : Academic Press, 1999. – 386 p.
3. Chang, K. Singular perturbations of a general boundary value problem / K. Chang // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1972. – Vol. 3, No 3. – P. 520–526.
4. Mazanik, S. A. Lyapunov transformations of linear differential systems / S. A. Mazanik. – Minsk : BSU, 2008. – 175 p.
5. Marchenko, V. M. Realization of dynamical systems in scales of systems with aftereffect: I. Realizability / V. M. Marchenko, J. J. Loiseau // Differential Equation. – 2006. – Vol. 42. – P. 1587–1595.



УДК 517.954

**A. I. BASIK, D. A. BASIK**

Belarus, Brest, Brest State A. S. Pushkin University

**IRREGULARIZABILITY OF THE RIEMANN – HILBERT  
BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE  
BIHARMONIC SYSTEM IN  $\mathbb{R}^3$**

Let  $\Omega$  be a simply connected bounded, homeomorphic to a ball, domain in  $\mathbb{R}^3$  with a sufficiently smooth boundary  $\partial\Omega$ . We consider in  $\Omega$  the system of four first-order differential equations of the form

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

where  $U = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))^T$  is a column vector of the real-valued functions,  $T$  is for transpose and  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

We note that the system (1) is not a three-dimensional analog of the Cauchy – Riemann system [1]. However, it is elliptic and each component of an arbitrary continuously differentiable solution of the system (1) satisfies the biharmonic equation [2] in  $\mathbb{R}^3$ . Such systems are classified to the systems of the biharmonic type [3].

We consider the Riemann – Hilbert boundary value problem of finding a solution of the system (1), satisfying the boundary conditions

$$u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad (u_2\nu_1 + u_3\nu_2 + u_4\nu_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (2)$$

where  $\nu(y) = (\nu_1(y), \nu_2(y), \nu_3(y))$  is the unit field of internal normals on the surface  $\partial\Omega$ ,  $f$  is the given Hölder continuous on the surface  $\partial\Omega$  the two-component vector-function.

**Theorem.** [4] *The Riemann-Hilbert problem for system (1) and boundary condition (2) is not regularisable.*

To prove the theorem, it is shown that at the point of the surface  $\partial\Omega$ , in which the internal normal is parallel to the axis  $Ox_1$ , rank of the Lopatinskiy matrix [5] of the problem (1), (2) is not maximal.

*The results were obtained with the financial support of the Ministry of Education (as part of the research work with state registration number 20240574).*

## REFERENCES

1. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Доклады НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 5. – С. 30–34.
2. Basik, D. A. On the one biharmonic type elliptic system in  $\mathbb{R}^3$  / D. A. Basik, R. N. Kozinets, A. I. Basik // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 25-27 апр. 2024 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2024. – С. 91–92.
3. Басик, А. И. Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в  $\mathbb{R}^4$  / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Д. В. Галуц // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 40–44.
4. Басик, А. И. О краевой задаче Римана – Гильберта для одной системы четырех уравнений бигармонического типа в  $\mathbb{R}^3$  / А. И. Басик, Д. А. Басик, Р. Н. Козинец // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2025. – № 1. – С. 90–97.
5. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

### СЕКЦИЯ 3

## ФИЗИКА И МЕТОДИКА ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

УДК 373.3/.5 : 53

**И. В. АВДУЛОВА**

Россия, Курск, ОБПОУ КАТК

### ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ФИЗИКЕ

Необходимость оперативно реагировать на перемены, происходящие в повседневной жизни, способность самостоятельно искать, анализировать и эффективно использовать нужную информацию приобретает особую значимость в наше время и занимает лидирующую позицию среди требований к подготовке обучающихся по всему миру.

Реализовать эти требования можно путем целенаправленного развития всех типов функциональной грамотности. Сам термин «функциональная грамотность» пришел из социологии и психологии труда, когда стали изучать, почему многие работники с хорошим образованием оказываются неспособны выполнять рабочие обязанности должным образом. Оказалось, что причина кроется не в недостатке квалификации, а в низком уровне именно функциональной грамотности – способности гибко применять знания в условиях изменяющейся среды.

Наиболее влиятельным источником популяризации функциональной грамотности считается Организация Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры (ЮНЕСКО), предложившая концепцию функциональной грамотности в рамках программы ЮНЕСКО «Образование для всех» (Education for All). Сегодня концепция получила признание на международном уровне и входит в число важных показателей оценки уровня подготовки молодежи и взрослого населения.

Функциональная грамотность подразумевает умение эффективно решать практические задачи, возникающие в повседневной жизни и профессиональной деятельности, опираясь на имеющиеся знания.

Главная задача современного учебного заведения заключается не столько в передаче большого объема информации студентами, сколько

ко в формировании у них способности осознанно применять полученные знания в реальных жизненных обстоятельствах.

Перед каждым педагогом стоят следующие важные задачи: обеспечить эффективность учебного процесса, создать благоприятные условия для самостоятельного познания, применять проектные методики, групповые и коллективные работы на занятиях, а также интеграция информационно-коммуникационных технологий и электронного образовательного контента.

Разберем категории функциональной грамотности подробнее.

- Грамотность чтения – это умение читать и глубоко воспринимать учебный текст, выделять необходимую информацию, толковать прочитанное и применять полученные сведения для решения учебных и бытовых, а также будущих профессиональных задач. Чтение служит фундаментом всей функциональной грамотности.

- Математическая грамотность – это способность правильно ставить задачи, пользоваться математическими методами и инструментами в разных жизненных ситуациях, делать обоснованные выводы и давать объяснения различным явлениям природы и общественной жизни.

- Финансовая грамотность – это владение финансовыми понятиями и умениями оценивать финансовые риски, принимать рациональные решения в денежных вопросах, направленные на укрепление личного благосостояния и экономического роста общества.

- Компетентность в креативном мышлении проявляется способностью вырабатывать оригинальные идеи, качественно оценивать их потенциал и реализовывать творческие замыслы, формирующие эффективные и новаторские решения.

- Глобальные компетенции подразумевают умение объективно рассматривать международные и межкультурные вопросы, учитывая разнообразие мнений и культурных различий, и вести конструктивный диалог с представителями других народов, уважительно относясь к правам и достоинствам каждого.

- И наконец, естественно-научная грамотность характеризует способность гражданина активно включаться в общественные обсуждения и принятие решений, касающихся естественных наук и технологий, требующих владения компетенциями, такими как научное обоснование

явлений, интерпретация результатов исследований и аргументация позиций на основе полученных доказательств.

Особое место в обучении физике занимают физические эксперименты, играющие ведущую роль в формировании функциональной грамотности. Лабораторные, демонстрационные, фронтальные и домашние эксперименты активизируют познавательные и мыслительные процессы студентов, развивая у них внимательность, образное мышление и умение делать выводы на основании наблюдений. Особенно это касается работ, напрямую имеющих взаимосвязь с их будущей профессией. Эксперимент при этом никогда не проводится изолированно, а всегда сочетается с устными методами преподавания (лекциями, объяснениями, беседами) и визуализационными средствами (рисунками, таблицами, мультимедийными пособиями).

Примеры заданий для формирования функциональной грамотности:

**1. Расчет потребления электроэнергии.** Представьте, что ваша семья планирует установить солнечные батареи на крышу вашего дома. Ваша задача – рассчитать потребление электроэнергии вашей семьей за месяц и сделать вывод, выгодна ли установка солнечных батарей с учетом текущих тарифов на электроэнергию.

*Исходные данные.* Стоимость одного киловатта электроэнергии составляет 5 рублей. Среднесуточное потребление электроэнергии семьей: освещение – 10 Вт/ч, холодильник – 50 Вт/ч, телевизор – 30 Вт/ч, компьютер – 100 Вт/ч. Время работы каждого прибора в сутки.

*Задания:*

1. Какова сумма ежемесячного расхода семьи на электричество?
2. Что влияет на выгодность установки солнечных панелей?
3. Какой дополнительный экономический эффект принесёт вам такая инвестиция?

**2. Выбор режима сварки.** Необходимо подобрать режим аргоновой сварки алюминиевых деталей толщиной 5 мм. Используя справочные таблицы и рекомендации производителя электродов, рассчитайте силу тока и диаметр электрода.

*Параметры:* Материал изделия: алюминий марки АД31. Диаметр присадочной проволоки: 1,6 мм. Толщина свариваемого металла: 5 мм.

*Задание:*

1. Определить рекомендованную величину сварочного тока и рекомендуемый диаметр электрода.

**3. Анализ аварийной ситуации.** Проанализируйте реальное ДТП и определите причины происшествия с точки зрения законов физики. Допустим, автомобиль движется по скользкой зимней дороге и теряет контроль над управлением.

*Материалы:* Фотовидеофиксация инцидента, схема участка дороги, технические характеристики автомобиля.

*Задания:*

1. Какая физика лежит в основе потери управляемости автомобилем?
2. Могла ли погода повлиять на происшествие?
3. Какие меры предосторожности помогли бы избежать подобного исхода?

Таким образом, физическая дисциплина помогает развивать функциональные навыки, готовит студентов к успешной адаптации в динамичном мире и стимулирует интеллектуальное развитие.

Значительную роль в повышении функциональной грамотности играет правильное использование разнообразных индивидуальных домашних заданий. Важно помнить, что разнообразие заданий не является самоцелью, оно выступает инструментом для достижения основной цели – развития функциональной грамотности. Примерами таких заданий являются:

- 1) создание рекламы физического закона, понятия или явления;
- 2) составление задачи по заданной теме (желательно с профессиональной направленностью);
- 3) разработка тематического кроссворда;
- 4) написание рассказов, стихов или поэм;
- 5) проведение исследования зависимостей;
- 6) улучшение конструкции лабораторного оборудования (весов, мензурок, реостатов и др.).

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что развитие функциональной грамотности крайне важно, так как оно помогает студентам применять полученные знания для решения междисциплинарных и профессиональных задач, продолжения учебы и успешной адаптации в обществе. Активные формы обучения создают необходимые условия

для приобретения студентами способностей к самостоятельному мышлению, анализу, отбору нужной информации, ориентированию в незнакомых ситуациях и поиску методов решения конкретных задач в реальной и профессиональной жизни.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория и практика оценивания читательской грамотности как компонента функциональной грамотности / Ю. Н. Гостева, М. И. Кузнецова, Л. А. Рябина [и др.] // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2019. – № 4 (61). – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/teoriya-i-praktika-otsenivaniya-chitatelskoj-gramotnosti-kak-komponenta-funktsionalnoy-gramotnosti> (дата обращения: 23.04.2025).

2. Каюмова, Г. Ш. Функциональная грамотность / Г. Ш. Каюмова // Педагогический опыт : [сайт]. – URL: <https://www.pedopyt.ru/categories/16/articles/5203> (дата обращения: 23.04.2025).

3. Муштавинская, И. В. Технология развития критического мышления на уроке и в системе подготовки учителя : учеб.-метод. пособие / И. В. Муштавинская. – СПб : КАРО, 2018. – 144 с. // Лань : электрон. библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/164180> (дата обращения: 23.04.2025).

УДК 553.3.001.57:622.012.3.001.2

**Ю. П. АШАЕВ**

Беларусь, Брест, БрГТУ

### **АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ОКОНТУРИВАНИЕ РУДНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ**

Оконтуривание рудных тел полезных ископаемых является наиболее ответственной операцией. Основное влияние на оконтуривание тел полезных ископаемых имеет взаимное пространственное распределение полезных ископаемых и вмещающих пород на участках их контакта.

Суть оконтуривания тел полезных ископаемых заключается в проведении двух последовательных операций:

- установления опорных точек по данным геологоразведочного опробования;
- проведения через опорные точки линий контура.

Основой для оконтуривания являются данные отдельных геологоразведочных выработок, для которых по данным опробования выделяются контуры рудных пропластков (пересечений), характеризующие мощность и сорт рудного тела, содержание полезных и вредных компонентов на участках пересечения рудного тела геологоразведочной выработкой. Основным и принципиальным отличием разработанных автором методик и алгоритмов является пространственное объемное оконтуривание.

Рассмотрим некоторые классические способы построения контуров в двумерной области (на планах и разрезах) и далее рассмотрим математические методы их реализации при автоматизированных расчетах на основе математической модели месторождения.

На рисунке 1 схематично показано построение нулевого контура и формирование контуров рудной залежи. Возможность изменения (варьирования) параметров кондиций позволяет оперативно получать различные варианты оконтуривания, анализировать целесообразность применения различных технологий оконтуривания, а также оперативно уточнять контуры рудных тел в процессе ввода в модель новых геологических данных эксплуатационной разведки, полученных в процессе доразведки и эксплуатации месторождения.

При выборе математического аппарата сделано допущение – распределение моделируемого параметра на начальный момент наблюдения имеет потенциальную природу и может рассматриваться как потенциальное поле. Такая постановка задачи делает возможным произведение интерполяции геологических данных на основе аппроксимации функции вида  $U = U(x, y, z)$ , проходящей через точки наблюдения, уравнением Лапласа, вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

с граничными условиями, удовлетворяющими условиям Дирихле.



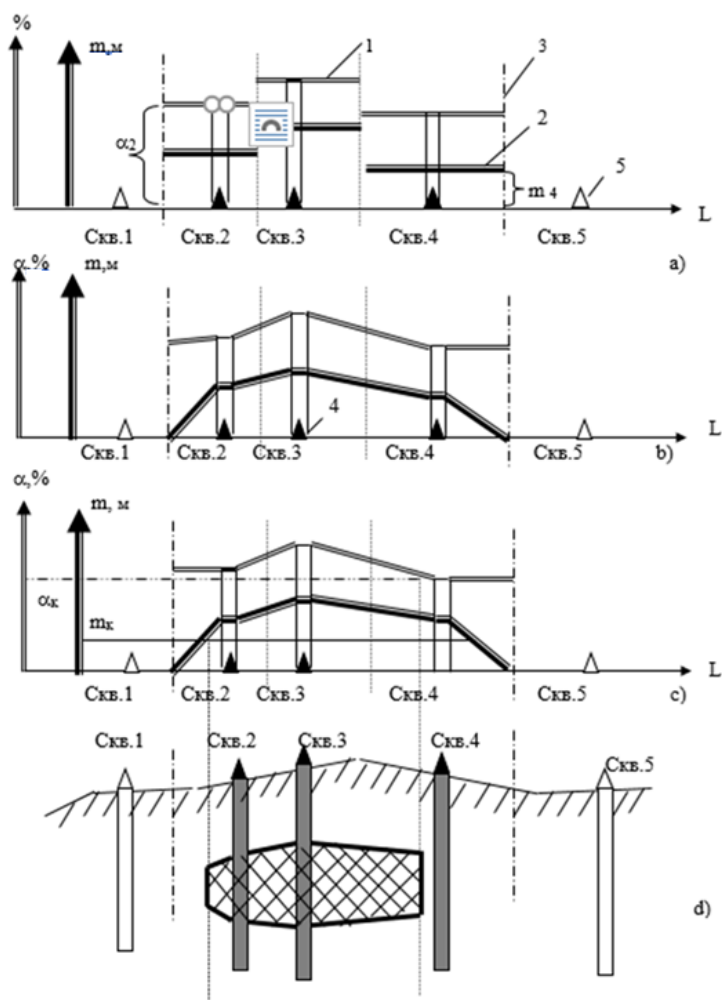


Рисунок 1 – Схема к построению промышленного контура и выделению рудного тела по данным кондиционных ограничений ( $m_k, \alpha_k$ )

На рисунке 1 : а) результаты распространения геологических данных по методу ближайшего района; б) результаты интерполяции значений горно-геологических параметров; в) формирование промышленного контура; г) графическая интерпретация результатов моделирования; 1 – содержание полезного компонента; 2 – значение мощности; 3 – нулевой контур; 4 – рудные выработки; 5 – безрудные выработки.

При практической реализации предложенного метода для математического моделирования геологических объектов с использованием ЭВМ возникают серьезные проблемы, связанные с затратами времени на интерполяцию и обеспечением необходимой точности. Для реальных геологических объектов размерность области моделирования может достигать от нескольких десятков или сотен тысяч до нескольких десятков

или сотен миллионов дискретных точек. Причем каждая дискретная точка может нести в себе информацию о совокупности параметров. При таких размерностях даже в случае применения современных супер-ПЭВМ временные затраты на интерполяцию могут быть весьма значительными.

В результате исследований разработана методика, позволившая значительно сократить количество итераций, а соответственно, и временные затраты ПЭВМ при условии обеспечения необходимой точности интерполяции. Суть методики сводится к использованию классического метода близости из вычислительной геометрии в его интерпретации для дискретной сети узловых точек в сочетании с итерационным процессом по методу Либмана с применением метода сеток. Причем итерационный процесс разбивается на два этапа, Первоначально производится заполнение всей области значениями из точек наблюдения по методу близости, а затем осуществляется процесс интерполяции.

В результате проведенных исследований были получены зависимости значений критериальных оценок (среднеквадратичной ошибки, точности интерполяции, абсолютной ошибки) от количества итераций. Некоторые сравнительные результаты исследований приведены на рисунке 2.

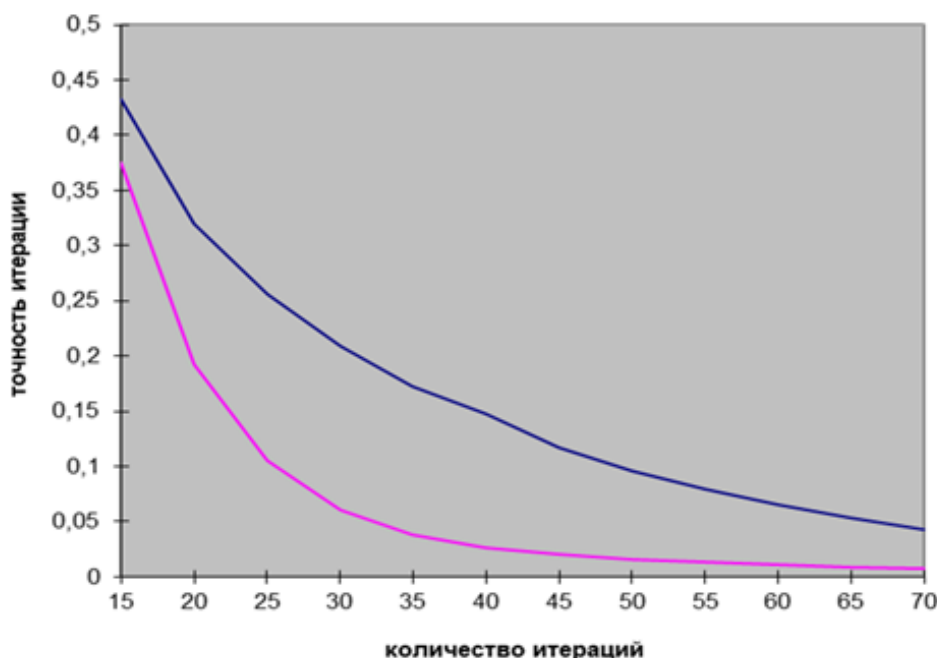


Рисунок 2 – График зависимости точности вычислений от количества итераций при традиционном и предлагаемом методе

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

- предложенный метод интерполяции можно эффективно использовать для моделирования линейных, плоских и объемных объектов;
- применение разработанного метода интерполяции позволяет значительно, в десятки и сотни раз сократить время, необходимое для проведения интерполяции при моделировании. Причем временные соотношения тем значительнее, чем ниже плотность информационных узлов и значительнее изменчивость исходных значений моделируемых параметров.

Практическая апробация разработанной методики доказала эффективность ее применения для моделирования горно-геологических объектов в условиях штокверковых и пластовых месторождений твердых полезных ископаемых.

В связи с тем, что уравнения в частных производных довольно широко используются для решения задач механики, экологии, гидрогеологии, океанологии и т. д., использование предложенного подхода значительно упрощает решение задач в данных областях.

УДК 378.147:51

**В. А. БОРСУК, Н. Н. СЕНДЕР**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Решение физической задачи – творческий процесс, поэтому универсального алгоритма решения не существует. Можно дать лишь самые общие рекомендации. Часто решение удобно начинать «с конца», т. е. с определения физического закона, в формулу которого входит искомая величина. Умение решать задачи приходит постепенно по мере накопления опыта. Решить задачу по физике можно лишь тогда, когда усвоена теория, относящаяся к данной теме.

Начинать надо с простых задач и затем переходить к более сложным. Для продуктивной работы предлагаем придерживаться определенного алгоритмического предписания.

1. Внимательно прочесть условия задачи, мысленно представляя ситуацию, описанную в ней.

2. Кратко записать условия задачи, в том числе то, что задано и то, что необходимо найти. При этом постараться максимально формализовать их математически, то есть литературные выражения выразить через конкретные физические величины, например, выражение «гладкая поверхность» соответствует записи « $\mu = 0$ » или « $F_{тр} = 0$ ». А выражение «до полной остановки» соответствует записи « $v_k = 0$ ». Иногда в задаче необходимо узнать, как изменилась какая-либо величина. Например, спрашивается «Как изменилась скорость?», что соответствует записи « $\frac{v_2}{v_1} - ?$ » или « $v_2 - v_1 - ?$ » и т. д.

3. Перевести значения всех физических величин в СИ. Иногда нет необходимости выражать все данные в одной и той же системе, например, если в формуле какая-либо величина входит в числитель и знаменатель, необходимо только, чтобы единицы были одинаковые.

4. Сделать рисунок, чертеж, схему. На рисунке показать все векторные величины (скорости, ускорения, силы, импульсы и т. д.). Если в задаче описано движение или процесс, то на рисунке надо показать по крайней мере два состояния системы: начальное и конечное. Можно показать и промежуточное состояние. Причем лишь одно положение показывается сплошной линией. Остальные положения показываются либо пунктирно, либо тонкой линией.

5. Выяснить, какими физическими законами можно описать данную задачу. Это значит, надо определить, какие связи имеются между физическими величинами. Если в закон входят векторные величины, то надо записать уравнение, выражающее закон в векторной форме.

6. Выбрать направления координатных осей и записать векторные соотношения в проекциях на оси координат в виде скалярных уравнений.

7. Оценить количество неизвестных физических величин, вошедших в уравнения и составить столько же уравнений, которые образуют систему уравнений. Решить полученную систему уравнений и выразить искомую величину в общем виде, то есть в буквенном виде.

8. Проверить правильность решения с помощью обозначений единиц физических величин – это так называемая проверка на размерность. Для этого следует проверить, совпадают ли размерности левой и правой частей формулы. Если размерности не совпадают, значит, в ходе решения

задачи была допущена ошибка. Правда, совпадение размерностей еще не означает, что задача решена правильно.

9. Подставить в общее решение числовые значения физических величин и произвести вычисления, при этом точность ответа не должна превышать точности, с которой даны исходные величины.

10. Оценить реальность полученного результата и записать ответ в единицах СИ или в тех единицах, которые заданы в условии задачи.

11. По мере возможности проверить, есть ли другие способы решения данной задачи.

Рассмотрим алгоритм решения физической задачи на примере.

**Задача.** Две автомашины движутся по двум взаимно перпендикулярным и прямолинейным дорогам по направлению к перекрестку с постоянными скоростями  $v_1 = 50$  км/ч и  $v_2 = 100$  км/ч. В начальный момент времени первая машина находилась на расстоянии  $s_1 = 100$  км от перекрестка, а вторая – на расстоянии  $s_2 = 50$  км (рисунок 1). Через какое время расстояние между машинами будет минимальным?

◀ Путь, который каждой из машин остается пройти до перекрестка через некоторый промежуток времени  $t$ , составит (рисунок 1):

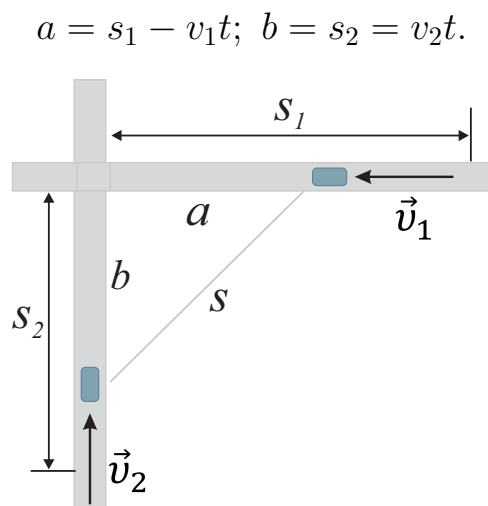


Рисунок 1 – Схема движения автомобилей

Расстояние между машинами представляет собой гипотенузу треугольника, которая является функцией времени и определяется теоремой Пифагора:

$$s(t) = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(s_1 - v_1 t)^2 + (s_2 - v_2 t)^2}.$$

По характеру задачи видно, что сначала машины сближаются, а затем удалятся друг от друга. Таким образом, в силу непрерывности  $s(t)$  будет наблюдаться лишь одно экстремальное значение, в нашем случае минимальное. Для определения времени  $t_{min}$  соответствующего минимуму функции  $s(t)$  (в нашем случае оно будет и наименьшим) возьмем первую производную по времени и приравняем ее к нулю:

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{(s_1 - v_1 t)v_1 + (s_2 - v_2 t)v_2}{\sqrt{(s_1 - v_1 t)^2 + (s_2 - v_2 t)^2}}.$$

Отношение равно нулю только тогда, когда равен нулю числитель, т. е.:

$$(s_1 - v_1 t_{min})v_1 + (s_2 - v_2 t_{min})v_2 = 0,$$

отсюда

$$t_{min} = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (1)$$

Определим единицу измерения расчетной формулы, причем нет необходимости переводить единицы измерения в систему СИ, а достаточно их выразить в одинаковых единицах:  $[t] = \left[ \frac{\kappa_{\text{М}} \cdot \kappa_{\text{М}}/\text{ч}}{(\kappa_{\text{М}}/\text{ч})^2} \right] = \text{ч}$ .

Подставив числовые значения в формулу (1), получим:  $t_{min} = 0,8 \text{ ч}$ . ►

УДК 537.311.33+620.17:669.76

**А. В. ДЕМИДЧИК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ И ПОДВИЖНОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА ДЛЯ ФОЛЬГ СПЛАВА $\text{Vi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , ЛЕГИРОВАННОГО ИНДИЕМ**

Известно, что в сплаве висмут – сурьма концентрации электронов и дырок совпадают, а подвижность электронов  $\mu$  превышает подвижность дырок  $\nu$  [1; 2]. Для определения указанных параметров носителей

заряда использовалась двухзонная изотропная модель, согласно которой удельное сопротивление, магнетосопротивление и коэффициент Холла могут быть выражены следующим образом:

$$\rho = \frac{1}{ne(\mu + \nu)}, \quad \beta = B^2\mu\nu,$$

$$R = \frac{1}{ne} \cdot \frac{\nu - \mu}{\nu + \mu}.$$

Из указанных формул можно выразить параметры носителей тока:

$$n = \frac{1}{\rho e} \cdot \left\{ \frac{R^2}{\rho^2} + \frac{4\beta}{B^2} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left[ -\frac{R}{\rho} + \left\{ \frac{R^2}{\rho^2} + \frac{4\beta}{B^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{\rho} + \left\{ \frac{R^2}{\rho^2} + \frac{4\beta}{B^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right].$$

Расчеты носителей заряда позволяют, в частности, сделать вывод о различных механизмах рассеяния при низких температурах и температурах, близких к комнатной, а также объяснить знак коэффициента Холла и дифференциальной термо-ЭДС [3].

Экспериментальные температурные зависимости удельного сопротивления, магнетосопротивления и коэффициента Холла, необходимые в последующем при проведении расчетов, представлены на рисунках 1–3. Удельное сопротивление фольг тройного сплава несколько больше значения для бинарного сплава и монотонно уменьшается во всем исследуемом температурном интервале [4; 5]. Магнетосопротивление тройных сплавов на порядок меньше, чем у бинарных сплавов, и незначительно уменьшается с увеличением температуры, в то время как для бинарных сплавов оно уменьшалось монотонно [6]. Коэффициент Холла положителен в области низких температур, выше температуры 130 К принимает отрицательные значения (для бинарных сплавов он отрицателен во всем температурном интервале 77...300 К) [7].

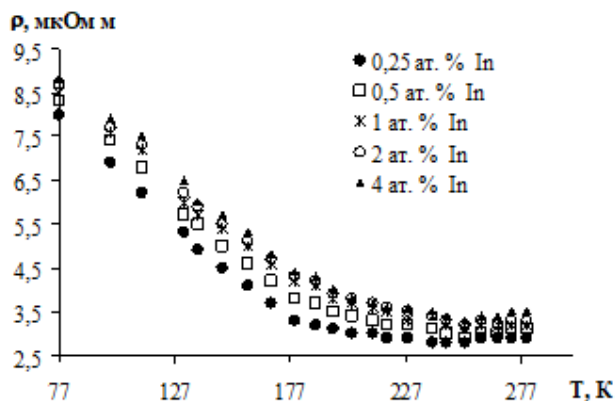


Рисунок 1 – Температурная зависимость удельного электросопротивления сплава на основе  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , легированного In

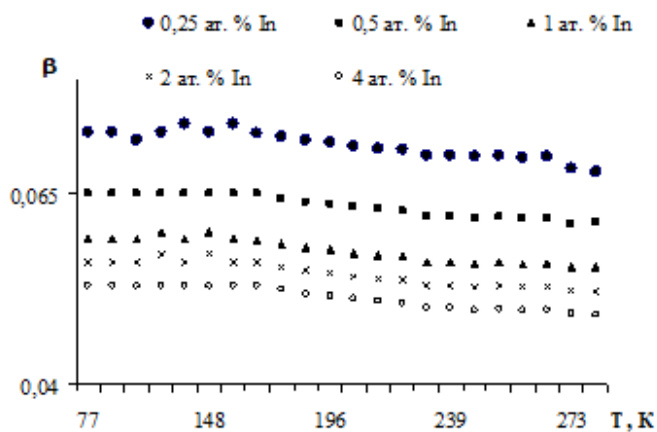


Рисунок 2 – Температурная зависимость магнетосопротивления сплава на основе  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , легированного In

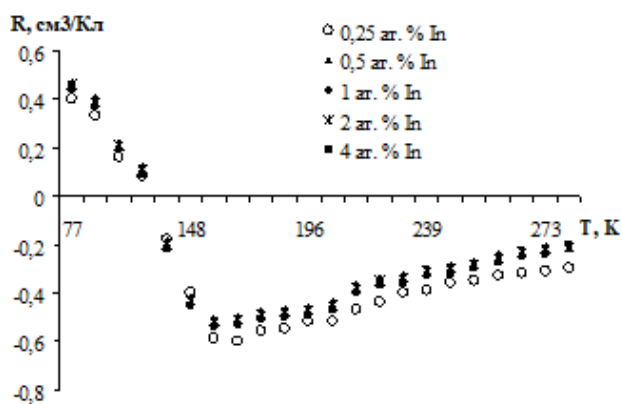


Рисунок 3 – Температурная зависимость коэффициента Холла сплава на основе  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , легированного In



Таблица – Расчетные значения концентрации и подвижности носителей заряда бинарных и тройных сплавов на основе  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$

Состав, ат. % In	Температура, К	Концентрация, $10^{23} \text{ м}^{-3}$	Подвижность дырок, $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	Подвижность электронов, $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$
0,00	77	1,04	2,93	6,74
	280	11,08	0,91	1,51
0,25	77	2,89	1,38	1,33
	280	8,26	1,25	1,36
0,50	77	2,95	1,30	1,25
	280	8,15	1,20	1,27
1,00	77	3,03	1,24	1,19
	280	8,30	1,15	1,21
2,00	77	3,04	1,19	1,18
	280	8,29	1,15	1,14
4,00	77	3,08	1,18	1,13
	280	8,06	1,08	1,14

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Явления переноса в висмуте и его сплавах / Д. В. Гицу, И. М. Голбан, В. Г. Канцер [и др.]. – Кишинев : Штиинца, 1983. – 238 с.
2. Левицкий, Ю. Т. Высокотемпературные исследования электрических и гальваномагнитных свойств сплавов висмут – сурьма / Ю. Т. Левицкий, Г. А. Иванов // Физика металлов и металловедение. – 1969. – Т. 28, № 5. – С. 804–812.
3. Демидчик, А. В. Использование двухзонной изотропной модели для расчета параметров носителей тока в быстрозатвердевшем сплаве  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  / А. В. Демидчик // Научные и методические аспекты преподавания физико-математических дисциплин в высшей школе : сб. материалов регион. науч.-метод. семинара, посвящ. 100-летию со дня рождения М. Г. Маркевича, Брест, 13–14 мая 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. В. С. Секержицкого. – Брест : БрГУ, 2021. – С. 11–13.
4. Демидчик, А. В. Влияние легирования сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  элементами III и IV группы периодической системы на удельное сопротивление /

А. В. Демидчик // Менделеевские чтения – 2022 : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф. по химии и хим. образованию с междунар. участием, Брест, 25 февр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Е. Г. Артемук. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 30–32.

5. Демидчик, А. В. Температурная зависимость удельного сопротивления фольг сплава  $Vi_{0,89}Sb_{0,11}$ , легированного In и Ga / А. В. Демидчик // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 190–192.

6. Демидчик, А. В. Влияние легирования сплава  $Vi_{0,89}Sb_{0,11}$  индием и германием на магнетосопротивление и дифференциальную термо-эдс / А. В. Демидчик // Менделеевские чтения – 2023 : электрон. сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф. по химии и хим. образованию, Брест, 23 февр. 2023 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол.: Э. А. Тур, Е. Г. Артемук (отв. ред.), Н. С. Ступень. – Брест : БрГУ, 2023. – С. 67–70. – URL: <http://rep.brsu.by/handle/123456789/8679> (дата обращения: 13.03.2025).

7. Демидчик, А. В. Влияние легирования сплава  $Vi_{0,89}Sb_{0,11}$  галлием и индием на коэффициент Холла / А. В. Демидчик // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 25–27 апр. 2024 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2024. – С. 96–97.

УДК 539.171.016

**П. Б. КАЦ, А. М. КУЗЬМИЧ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **СРЕДНЯЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ДЛЯ БОРНОВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МОТТОВСКОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПОЗИТРОНОВ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОТ КАЛИЯ ДО КСЕНОНА**

В работе [1] были вычислены средние по углам и энергиям относительные погрешности  $\langle ER \rangle$  трех борновских приближений моттовско-

го сечения рассеяния позитронов для первых 18 элементов периодической системы химических элементов. Как и для рассеяния электронов [2] погрешности уменьшались с ростом номера борновского приближения от первого до третьего.

$$ER(E_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{36} [R(E_i, \theta_k) - R^{EXACT}(E_i, \theta_k)]^2}{\sum_{k=1}^{36} [R^{EXACT}(E_i, \theta_k)]^2}}, \quad (1)$$

$$\langle ER \rangle = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} ER(E_i). \quad (2)$$

Рассматривались углы рассеяния от 5 до 180 градусов и энергии позитронов от 5 кэВ до 10 МэВ.

$R^{EXACT}$  – нормированное моттовское сечение рассеяния, вычисленное по точным формулам Мотта [3].  $R$  – соответствующее сечение в борновском приближении [3–5].

Погрешности борновских приближений для позитронов (таблица) оказываются меньше, чем для электронов. Например, для  $Z = 54$  погрешности второго и третьего борновских приближений составляют 22 % и 10,1 % соответственно. Средняя погрешность первого борновского приближения для электронов уже для  $Z = 29$  достигает 16 %.

Таблица – Среднее арифметическое значение относительной ошибки

Z, %	19	20	21	22	23	24
$\langle ER \rangle_B$	6.25	6.50	6.75	7.00	7.23	7.46
$\langle ER \rangle_{MF}$	2.20	2.42	2.65	2.88	3.13	3.38
$\langle ER \rangle_{JWM}$	0.551	0.637	0.730	0.832	0.942	1.06
Z, %	25	26	27	28	29	30
$\langle ER \rangle_B$	7.69	7.91	8.12	8.33	8.53	8.72
$\langle ER \rangle_{MF}$	3.64	3.90	4.18	4.46	4.74	5.04
$\langle ER \rangle_{JWM}$	1.19	1.33	1.47	1.63	1.79	1.97
Z, %	31	32	33	34	35	36
$\langle ER \rangle_B$	8.91	9.10	9.28	9.45	9.62	9.79
$\langle ER \rangle_{MF}$	5.34	5.65	5.96	6.28	6.61	6.94
$\langle ER \rangle_{JWM}$	2.15	2.34	2.55	2.77	3.00	3.24

Продолжение таблицы

Z, %	37	38	39	40	41	42
$\langle ER \rangle_B$	9.95	10.10	10.25	10.40	10.54	10.67
$\langle ER \rangle_{MF}$	7.27	7.61	7.96	8.31	8.67	9.03
$\langle ER \rangle_{JWM}$	3.48	3.74	4.02	4.30	4.59	4.90

Z, %	43	44	45	46	47	48
$\langle ER \rangle_B$	10.81	10.93	11.06	11.18	11.29	11.41
$\langle ER \rangle_{MF}$	9.40	9.77	10.14	10.52	10.91	11.29
$\langle ER \rangle_{JWM}$	5.22	5.55	5.89	6.24	6.61	6.99

Z, %	49	50	51	52	53	54
$\langle ER \rangle_B$	11.51	11.62	11.72	11.82	11.91	12.00
$\langle ER \rangle_{MF}$	11.68	12.08	12.48	12.88	13.28	13.69
$\langle ER \rangle_{JWM}$	7.38	7.78	8.20	8.63	9.07	9.52

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калишук, Д. И. Разные варианты расчета средней погрешности борновских приближений моттовского сечения рассеяния для позитронов для элементов от водорода до аргона / Д. И. Калишук // Физика и астрономия : научный и методический аспекты : сб. материалов регион. науч.-практ. конф., Брест, 22 мар. 2023 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. В. Демидчика. – Брест : БрГУ, 2023. – С. 19–21.

2. Архуттик, А. В. О точности борновских приближений моттовского сечения рассеяния / А. В. Архуттик, П. Б. Кац // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2022. – № 2. – С. 5–28.

3. Mott, N. F. The Polarization of Electrons by Double Scattering / N. F. Mott // Proceedings of the Royal Society A. – 1932. – Vol. 135. – P. 429–458.

4. McKinley, W. A. The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei / A. William, Jr. McKinley, H. Feshbach // Physical Review. – 1948. – Vol. 74, № 12. – P. 1759–1763.

5. Johnson, W. R. Coulomb Scattering of Polarized Electrons / W. R. Johnson, T. A. Weber, C. J. Mullin // Physical Review. – 1961. – Vol. 121, № 4. – P. 933–939.

УДК 378:001.891

**О. А. КОТЛОВСКИЙ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ ФИЗИКЕ**

Стремительный процесс развития и внедрения современных цифровых образовательных технологий создает возможности для повышения качества обучения физике как в университете, так и в средней школе. Сегодня цифровизация образования в целом – это необратимый процесс изменения содержания физического образования и методов обучения физике, в частности.

Одним из направлений цифровизации физического образования является внедрение в учебный процесс электронных средств обучения, представляющих из себя современные цифровые учебно-методические комплексы, включающие в свою структуру следующие компоненты:

- цифровые теоретические обучающие средства, сообщающие в интерактивной форме необходимые знания по физике;
- цифровые практические обучающие средства, предназначенные для формирования умений и навыков, организации самостоятельной работы обучающихся (электронные физические задачи);
- цифровые контролирующие средства, предназначенные для контроля уровня усвоения учебного материала (электронные тесты);
- цифровые демонстрационные средства, обеспечивающие визуализацию изучаемых физических объектов, явлений, классических физических экспериментов;
- цифровые моделирующие средства, предназначенные для создания цифровой модели физического объекта, явления, опыта, с целью его изучения, создания цифровых лабораторных работ;
- цифровые учебно-игровые средства, предназначенные для организации внешкольной учебной работы по физике (домашний физический эксперимент, виртуальные экскурсии, компьютерные игры с физическим содержанием);
- цифровые справочные средства, предоставляющие возможность поиска и получения дополнительной необходимой обучающемуся информации по физике.



```

public static void main(String[] args)
Scanner scanner = new Scanner(System.in);
System.out.print("Введите количество переменных (или уравнений): ");
int n = scanner.nextInt();
double[][] coefficients = new double[n][n];
double[] constants = new double[n];
System.out.println("Введите коэффициенты системы уравнений:");
for (int i = 0; i < n; i++)
System.out.print("Уравнение "+ (i + 1) + ": ");
for (int j = 0; j < n; j++)
coefficients[i][j] = scanner.nextDouble();
System.out.print("Свободный член: ");
constants[i] = scanner.nextDouble();
double[] solution = solve(coefficients, constants);
if (solution != null)
System.out.println("Решение:");
for (int i = 0; i < solution.length; i++)
System.out.printf("x
else
System.out.println("Система уравнений не имеет единственного решения или имеет
бесконечно множество решений.");
public static double[] solve(double[][] coefficients, double[] constants)
int n = coefficients.length;
double determinant = determinant(coefficients);
if (determinant == 0)
return null; // Система не имеет единственного решения
double[] solution = new double[n];
for (int i = 0; i < n; i++)
double[][] temp = new double[n][n];
for (int j = 0; j < n; j++)
for (int k = 0; k < n; k++)
temp[j][k] = coefficients[j][k];
temp[j][i] = constants[j]; // Заменяем i-ую колонку на
свободные члены
solution[i] = determinant(temp) / determinant; // Решение для
переменной  $x_i$ 
return solution;
private static double determinant(double[][] matrix)
int n = matrix.length;
double det = 0;
if (n == 1)
return matrix[0][0];
if (n == 2)
return matrix[0][0] * matrix[1][1] - matrix[0][1] *
matrix[1][0];

```

```

for (int i = 0; i < n; i++)
double[][] subMatrix = new double[n - 1][n - 1];
for (int j = 1; j < n; j++)
for (int k = 0; k < n; k++)
if (k < i)
subMatrix[j - 1][k] = matrix[j][k];
else if (k > i)
subMatrix[j - 1][k - 1] = matrix[j][k];
det += Math.pow(-1, i) * matrix[0][i] * determinant(subMatrix);
return det;

```

Метод Крамера находит свое применение не только в математике, но и в физике, в частности, для решения систем уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Рассмотрим один из таких примеров (рисунок):

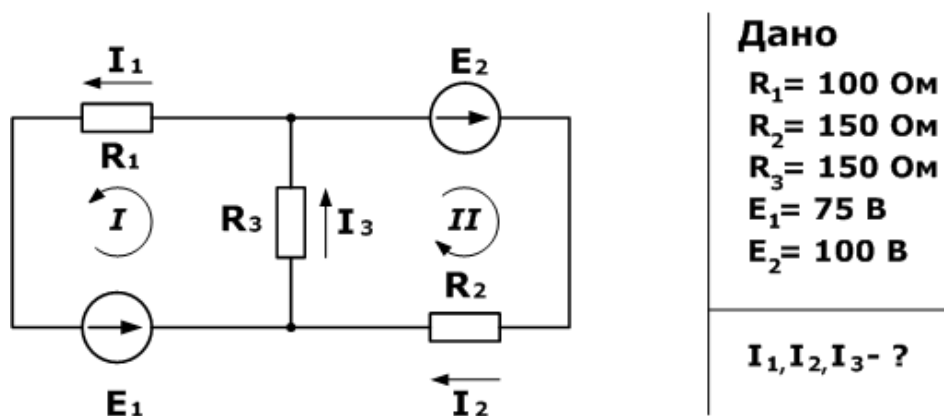


Рисунок – Условие задачи

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_1, \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ 100I_1 + 0I_2 + 150I_3 = 75, \\ 0I_1 + 150I_2 + 150I_3 = 100. \end{cases}$$

Внесем эти данные в программу. На выходе получим решение системы:  $I_1 = 0,143$ ;  $I_2 = 0,262$ ;  $I_3 = 0,405$ .



УДК 378.147:51

**И. Н. МЕЛЬНИКОВА<sup>1</sup>, И. А. МЕЛЬНИКОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>Беларусь, Брест, БрГТУ

## **ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ В ФИЗИКЕ**

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук, а также при решении прикладных физических задач требуется знание математики на достаточно высоком уровне. Поэтому при изучении математических предметов у физиков необходимо рассматривать математические понятия в тесной связи с физическими понятиями. Изучение дифференциальных уравнений и их систем на примерах физических задач преследует цель более глубокого усвоения этих понятий.

Физико-математические факультеты университетов уделяют большое внимание изучению дифференциальных уравнений, требующих формального их решения, а также решению технических и прикладных задач, приводящих к составлению дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения играют значительную роль в приложениях математики к техническим наукам. С помощью данных уравнений многие прикладные процессы описываются полнее. Они помогают решать многие вопросы общетехнических, а также специальных прикладных дисциплин: физики, теоретической механики, сопротивления материалов, гидравлики, теории машин и механизмов, химии, технологии производств, биологии, т. к. дифференциальные уравнения часто возникают в процессе решения данных вопросов.

Многочисленные и разнообразные технические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений требуют глубокого знания разных физических и математических законов.

При помощи задач инженерно-технического характера появляется возможность овладеть методами решения дифференциальных уравнений. Упомянутые выше задачи облегчают изучение ряда важнейших дисциплин, которые являются основой образования специалиста любой отрасли.

В нашей статье показаны результаты изучения дифференциальных уравнений на примерах физических задач. Мы нашли формулу критических скоростей тонкого вращающегося вала длиной  $l$  с радиусом поперечного сечения вала  $a$ , весом  $P$  и модулем упругости материала  $E$ .

УДК 372.853+530.121

**В. А. ПЛЕТЮХОВ, А. М. КУЗЬМИЧ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **О ВВЕДЕНИИ ПОНЯТИЯ ИМПУЛЬСА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ**

В ньютоновской механике импульс частицы определяется как произведение некоторой инвариантной величины, называемой массой, на скорость частицы:

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (1)$$

Определенный таким способом импульс сохраняется при соударениях (взаимодействиях) частиц малой энергии. Однако опыт показывает, что этот импульс не сохраняется при столкновении (взаимодействии) с большими энергиями. Таким образом, при переходе от классической механики к специальной теории относительности встает выбор – отказаться либо от ньютоновского определения импульса, либо от закона сохранения импульса. А поскольку закон сохранения импульса в физике весьма существенен, то выбор делается в его пользу.

Обычно импульс в СТО вводится следующим способом. Требование релятивистской инвариантности уравнения движения материальной точки приводит к виду этого уравнения [1]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}. \quad (2)$$

Если обозначить

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3)$$

то получаем уравнение движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (4)$$

внешне сходное с классическим уравнением движения, в котором  $\vec{p}$  имеет вид (1). На основании указанного сходства и определяют величину  $\vec{p}$  (3) как релятивистский импульс.

Очевидно, что такой способ введения импульса в СТО является формальным, т. е. не связан напрямую с законом сохранения импульса. Мы в настоящей статье хотим предложить способ определения импульса как сохраняющейся векторной величины.

Поскольку импульс – величина векторная, следует прежде всего выяснить направление этого вектора для данной частицы и уже затем найти зависимость его модуля от ее скорости. В инерциальной системе отсчета (далее – ИСО) пространство изотропно. Если так, то единственным выделенным направлением, связанным с движением частицы, является направление, в котором происходит это движение. Все остальные направления будут равноправными, и ни одно из них нельзя будет предпочесть другому. Остается единственная возможность – вектор импульса частицы совпадает по направлению с ее скоростью.

На следующем этапе рассуждений определим абсолютную величину (модуль) этого вектора. Возьмем в качестве сталкивающихся объектов два одинаковых шара  $A$  и  $B$  и предположим, что между ними происходит упругое скользящее (нецентральное) соударение. Всегда можно найти ИСО, в которой скорости шаров до столкновения равны по модулю и противоположны по направлению. В этой системе отсчета полный импульс шаров равен нулю. После столкновения по закону сохранения импульса шары опять-таки должны двигаться во взаимно противоположных направлениях с равными скоростями. В результате эффект соударения сводится в рассматриваемой ИСО к простому повороту векторов скорости обеих частиц. Очевидно, что в этой ИСО можно выбрать

направления осей  $X$  и  $Y$  таким образом, что  $x$ -компоненты скоростей обеих частиц не изменятся при столкновении, тогда как их  $y$ -компоненты просто меняют знак.

Нас интересует анализ  $y$ -компоненты полного импульса и ее сохранение. Для этого удобно рассмотреть столкновение в системе отсчета, в которой один шар ( $B$ ) движется только в направлении оси  $y$  (лабораторная ИСО). Мы можем подобрать такое столкновение, при котором частица-мишень (шар  $B$ ) обладает сколь угодно малой скоростью как до, так и после соударения. Импульс частицы-мишени рассчитывается по ньютоновской формуле (1). Исходя из этого, легко определить изменение импульса медленной частицы в процессе соударения, что позволит найти изменение импульса и сам импульс быстрой частицы (шар  $A$ ).

Переданный импульс составляет меньшую и известную сторону треугольника импульсов (рисунок 1). Две другие (равные) стороны этого треугольника являются большими и неизвестны нам. Но мы знаем, чему равны как длинные, так и короткие стороны подобного треугольника – треугольника перемещений (рисунок 2). Из пропорциональности соответствующих сторон при учете связи между собственным и лабораторным временем

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5)$$

получаем выражение для импульса быстро движущейся частицы

$$p_y = m \frac{dy}{d\tau}, \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}, \quad (6)$$

равносильное формуле (3).

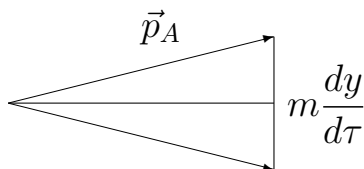


Рисунок 1

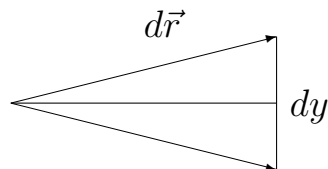


Рисунок 2

В данном примере величина  $m$  – это масса в классическом понимании, т. е. не зависит от скорости. Все различие между релятивист-

ской формулой для импульса и соответствующей ньютоновской формулой сводится к различию между собственным и лабораторным временем, а не к различию массы при этих двух описаниях природы. Этот факт сейчас получает все более широкое признание [2; 3].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Угаров, В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Физматгиз, 1977. – 384 с.
2. Плетюхов, В. А. Второй закон Ньютона и релятивистская масса / В. А. Плетюхов // Физика. – 2018. – Т. 2. – С. 18–21.
3. Тейлор, Э. Ф. Физика пространства-времени / Э. Ф. Тейлор, Дж. А. Уилер. – М. : Мир, 1971. – 320 с.

УДК 378.147:51

**Н. Н. СЕНДЕР, Я. В. СИМОНЧИК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

#### **РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Решение и анализ физических задач позволяют понять и запомнить основные законы и формулы физики, создают представление об их характерных особенностях и границах применения. Задачи развивают навык использования общих законов материального мира для решения конкретных вопросов, имеющих практическое и познавательное значение. Умение решать задачи – лучший критерий оценки глубины изучения программного материала и его усвоения. В основу каждой физической задачи положено то или иное частное проявление одного или нескольких фундаментальных законов природы и их следствий. Исходя из этого, прежде чем приступать к решению физических задач из какого-либо раздела курса физики, следует тщательно проработать теорию вопроса и внимательно разобрать иллюстрирующие ее примеры. Без твердого знания теории нельзя рассчитывать на успешное решение и анализ даже сравнительно простых задач, не говоря уже о более сложных.

В процессе решения физической задачи можно выделить три этапа: **физический, математический и анализ решения.**

**Физический этап** начинается с ознакомления с условием задачи и уяснения физических закономерностей, лежащих в ее основе. Ознакомившись с условием задачи, не следует заострять внимание на искомой величине и тем более пытаться сразу ее найти. Необходимо помнить, что ближайшая цель решения состоит в том, чтобы свести задачу от физической к математической, записав ее условие при помощи формул.

Чтобы хорошо понять условие задачи, необходимо сделать схематический чертеж, поясняющий ее сущность, и на чертеже, хотя бы условно, указать все величины, характеризующие данное явление. Если при этом окажется, что для полного описания процесса надо использовать величины, не фигурирующие в условии задачи, их нужно ввести в решение самим, так как в большинстве случаев без них невозможно найти связь между искомыми и заданными величинами. Следует твердо помнить, что почти во всех случаях чертеж сильно упрощает и поиск, и само решение (впрочем, этот пункт нередко опускается). После этого приступают к анализу физических процессов, происходящих в ситуации, описанной в условии, к выявлению тех законов, которым подчиняются эти процессы. Заканчивается физический этап составлением уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление с количественной стороны. Применение известных законов и формул физики для математической записи условий задачи представляет основную трудность при решении почти всех задач по физике. Сделав такую запись, мы получаем одно или несколько уравнений, в которых неизвестным служит искомая величина, и физический этап переходит в математический.

**Математический этап** начинается решением системы уравнений и заканчивается получением числового ответа. Безусловно, математический этап является не менее важным, чем этап физический. Необходимо подчеркнуть, что он не является второстепенным. Если при решении системы уравнений, переводе единиц или арифметическом расчете совершена ошибка, решение задачи в целом окажется неверным. С точки зрения практики задача решена правильно только в том случае, если получен ее верный общий и числовой ответ. Неправильно считать математический этап второстепенным еще и потому, что после него должен следовать анализ решения. Последний этап вообще нельзя провести, если

не получен общий и числовой ответ задачи. Таким образом, для окончательного решения задачи по физике **физический** и **математический** этапы являются в равной степени необходимыми.

После получения решения в общем виде и числового ответа следует **этап анализа решения**. На этом этапе выясняют, как и от каких физических величин зависит найденная величина, при каких условиях эта зависимость осуществляется и т. д. При анализе числового ответа исследуют:

- размерность полученной величины;
- соответствие полученного числового ответа физически возможным значениям искомой величины, если нет такого соответствия, то этот ответ явно неверен;
- при получении многозначного ответа соответствие полученных ответов условиям задачи.

Рассмотрим решения физической задачи на примере.

**Задача.** Ось колеса (рисунок) радиусом  $R = 0,5$  м движется поступательно со скоростью  $v_0 = 1$  м/с. Радиус колеса вращается с частотой  $v_{\text{вр}} = 1$  об/с. Составить уравнение движения точки  $A$  обода и определить, как меняется модуль ее скорости со временем. Определить, как движется колесо относительно дороги: скользит или пробуксовывает.

◀ Любая точка обода, например точка  $B$  (рисунок) участвует в двух движениях – поступательном со скоростью  $v_0$  и вращательном со скоростью  $\vec{v}_{\text{вр}}$ , тогда скорость точки равна

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{вр}}. \quad (1)$$

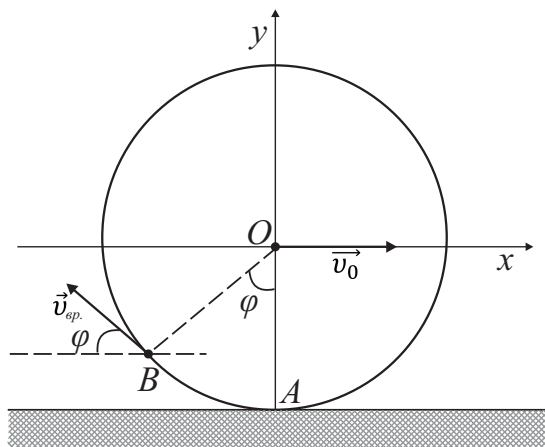


Рисунок – Схема движения колеса

Положение точки  $B$  в момент времени  $t$  определяется углом

$$\varphi = \omega t = 2\pi vt,$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $v_{\text{вп}} = \omega R$ , тогда в проекциях на выбранные оси  $Ox$  и  $Oy$  выражение (1) имеет вид:

$$Ox : v_x = v_0 - v_{\text{вп}} \cos \varphi = v_0 - \omega R \cos \omega t, \quad (2)$$

$$Oy : v_y = v_{\text{вп}} \sin \varphi = \omega R \sin \omega t. \quad (3)$$

Модуль скорости  $v$  равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2 - 2v_0\omega R \cos \omega t}.$$

По определению  $dx = v_x dt$  и  $dy = v_y dt$ , проинтегрировав эти выражения, определим значения координат  $x$  и  $y$  в произвольный момент времени  $t$  и учитывая, что точка  $A$  в момент времени  $t = 0$ , имеет координаты  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ :

$$x = \int_0^t (v_0 - \omega R \cos \omega t) dt = v_0 t - R \sin \omega t,$$

$$y = \int_0^t \omega R \sin \omega t dt = 2R \sin^2(\omega t/2). \quad (4)$$

Точка  $A$  будет соприкасаться с поверхностью дороги в моменты времени при которых  $y = 0$ . Из уравнения (4), следует:

$$\sin^2(\omega t/2) = 0 \text{ или } t = \frac{2\pi n}{\omega} = \frac{n}{v},$$

где  $n \in \mathbb{N}$ . В эти моменты времени, согласно выражениям (2) и (3) скорости соответственно равны:

$$v_x = v_0 - \omega R = v_0 - 2\pi v R = -5,28 \text{ м/с}, \quad v_y = 0.$$

Поскольку  $v_x < 0$ , то колесо буксует. ►



УДК 37.016:521.93

**А. И. СЕРЫЙ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**О РАЗЛИЧИЯХ МЕЖДУ КАЛЕНДАРНЫМ,  
ТРОПИЧЕСКИМ И ЗВЕЗДНЫМ ГОДАМИ**

В курсе астрономии при изучении тем «Календарь» и «Движение Земли вокруг Солнца» требуется сравнение разных типов года. В таблице, составленной на основе сведений из [1, с. 19, 31] и дополняющей таблицы из [2, с. 60; 3, с. 67], дана сравнительная характеристика среднего календарного (далее – СКГ) и тропического (далее – ТГ) годов, а также ТГ и звездного года (далее – ЗГ).

Таблица – Сравнение некоторых типов года

Годы	СКГ и ТГ	ТГ и ЗГ
Разница	26 секунд (СКГ длиннее)	20 минут 24 секунды (ЗГ длиннее)
Накопление разницы	1 сутки за 3300 лет (приблизительно)	1 полный оборот небесной сферы за 26 тысяч лет (приблизительно)
Почему календарь привязан к ТГ	Повседневная жизнь связана со сменой времен года (что, в свою очередь, связано с моментами, когда склонение Солнца равно нулю), а не с постоянным целым числом суток или полным оборотом Земли вокруг Солнца (относительно «неподвижных» далеких звезд)	
Корректи- рующие меры	Подбор правильной закономерности для високосных лет (ранее – юлианская, позднее – григорианская).	Пересчет значений экваториальных координат квазинеподвижных звезд с учетом изменяющегося положения точки весеннего равноденствия

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Клищенко, А. П. Астрономия : учеб. пособие / А. П. Клищенко, В. И. Шупляк. – М. : Новое знание, 2004. – 224 с.

2. Серый, А. И. О некоторых разновидностях года / А. И. Серый // Актуальные вопросы подготовки будущих учителей физики и астрономии : материалы регион. науч.-практ. семинара, Брест, 17–18 нояб. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. В. Демидчика. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 60.

3. Серый, А. И. О разновидностях года и месяца в астрономии / А. И. Серый // Актуальные вопросы подготовки будущих учителей физики и астрономии : материалы региональн. науч.-практ. семинара, Брест, 17–18 нояб. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. В. Демидчика. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 67.

УДК 37.016:(533.723+536.95)

**А. И. СЕРЫЙ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## О РАЗНОВИДНОСТЯХ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

При изучении темы «Броуновское движение» (далее – БрД) в школьном и вузовском курсах физики уделяется внимание преимущественно поступательной разновидности этого движения. Существует, однако, и вращательное БрД. В связи с этим представляет интерес сравнительная характеристика двух разновидностей БрД, представленная ниже в таблицах, составленных на основе сведений из [1, с. 229–230; 2, с. 206–212].

Публикация дополняет статьи с участием автора, посвященные использованию блок-схем и сравнительных таблиц в процессе преподавания молекулярной физики, термодинамики и статистической физики [3, с. 40–42; 4, с. 91; 5, с. 15–18].

Таблица 1 – Разновидности БрД (количественные соотношения)

	Поступательное БрД	Вращательное БрД
Основная характеристика	$\overline{\Delta x^2}$ – средний квадрат проекции смещения частицы на координатную ось	$\overline{\Delta \varphi^2}$ – среднеквадратичное угловое смещение частицы
Зависимость от времени $\tau$	$\overline{\Delta x^2} = 2D\tau, D = \frac{kT}{6\pi\eta a}$	а) $\overline{\Delta \varphi^2} = 2D_r\tau, D_r = \frac{kT}{8\pi\eta a^3}$ ; б) $\overline{\Delta \varphi^2} = kT/f$

## Продолжение таблицы 1

Обозначения	$k$ – постоянная Больцмана, $T$ – абсолютная температура, $\eta$ – динамическая вязкость среды, $a$ – радиус сферической частицы, $f$ – модуль кручения кварцевой нити зеркала	
Формулы подтверждены	в опытах Ж. Перрена и Т. Сведберга	в опытах Ж. Перрена

Таблица 2 – Разновидности БрД (определения, экспериментальные наблюдения, области применения)

	Поступательное БрД	Вращательное БрД
Под влиянием ударов молекул окружающей среды	частица, взвешенная в жидкости или газе, совершает сложное беспорядочное зигзагообразное движение	а) частица совершает беспорядочное вращение; б) зеркальце хаотически колеблется около положения равновесия
Примеры экспериментальных наблюдений	Впервые – Р. Броун в 1827 г. (наблюдения в микроскоп цветочной пыльцы, взвешенной в воде)	а) Перрен; б) Каплер в 1932 г.
Сложность наблюдений	Поступательное БрД наблюдать проще, чем вращательное БрД со сферическими частицами, и сложнее, чем вращательное БрД с зеркальцем	
Область применения	1. <i>Фундаментальное значение</i> : обоснование статистической природы второго начала термодинамики и границ его применимости. 2. <i>Прикладное значение</i> : а) физическая химия дисперсных систем, кинетическая теория коагуляции растворов; б) теория равновесия дисперсных систем в поле тяготения или в поле центробежной силы	<i>Метрология</i> : когда вращательное БрД подвижных частей измерительного прибора сравнимо со смещением, вызванным измеряемым эффектом, достигается предел точности прибора

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия : в 5 т. / гл. ред. А. М. Прохоров ; редкол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1988. – 1998. – Т. 1 : Ааронова – Бома эффект – Длинные линии. – 1988. – 704 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – Т. 2 : Термодинамика и молекулярная физика. – 544 с.
3. Секержицкий, В. С. Место адиабатических процессов среди других типов термодинамических процессов / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Современные научные проблемы и вопросы преподавания теоретической и математической физики, физики конденсированных сред и астрономии : сб. материалов VIII Респ. науч.-практ. конф., Брест, 21 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. В. Демидчика. – Брест : БрГУ, 2021. – С. 40–42.
4. Серый, А. И. Сравнительная характеристика функций состояния и процесса в термодинамике / А. И. Серый // Актуальные вопросы подготовки будущих учителей физики и астрономии : материалы регион. науч.-практ. семинара, Брест, 17–18 нояб. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. В. Демидчика. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 91.
5. Серый, А. И. Об изучении темы «Основы молекулярно-кинетической теории» в курсе физики / А. И. Серый // Актуальные вопросы науки – 2024 : сб. ст. VI Междунар. науч.-практ. конф., Пенза, 10 дек. 2024 г. – Пенза : Наука и Просвещение, 2024. – С. 15–18.

УДК 37.016:(535.36+537.2)

**А. И. СЕРЫЙ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **ФИЗИЧЕСКИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЙ ОБЪЕМ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ И ОПТИКЕ**

Физически бесконечно малый объем (далее – ФБМО) – величина, вводимая, в частности, в электростатике и оптике, где ее смысл имеет свои отличительные особенности. В связи с этим представляет интерес

сравнительная характеристика смыслового содержания ФБМО в двух указанных разделах физики, представленная ниже в таблице, составленной на основе сведений из [1, с. 50; 2, с. 602]. Публикация дополняет [3, с. 17–19; 4, с. 170–174].

Таблица – ФБМО в электростатике и оптике

	Электростатика	Оптика (рассеяние света в газах)
Линейные размеры ФБМО	Намного больше линейных размеров атомов и молекул	
	Намного меньше линейных размеров заряженного макроскопического объекта	Намного меньше длины волны рассеиваемого света
Область применения	Для сглаживания микроскопических и учета макроскопических неоднородностей в пространственном распределении заряда	Для учета макроскопических неоднородностей показателя преломления без выхода за рамки геометрической оптики

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – Т. 3 : Электричество. – 688 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1980. – Т. 4 : Оптика. – 752 с.
3. Серый, А. И. К методике изучения темы «физически бесконечно малый объем» в курсе электродинамики / А. И. Серый // Наука и образование : сохраняя прошлое, создаем будущее : сб. ст. XXXVII Междунар. науч.-практ. конф., Пенза, 5 сент. 2022 г. – Пенза : Наука и Просвещение, 2022. – С. 17–19.
4. Серый, А. И. О методике преподавания оптики в вузовском курсе физики / А. И. Серый, З. Н. Серая // Наука – практике : сб. материалов I Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 15 мая 2020 г. : в 2 ч. / Баранович. гос. ун-т ; редкол.: В. В. Климук [и др.]. – Барановичи : БарГУ, 2020. – Ч. 1. – С. 170–174.

**СЕКЦИЯ 4**  
**ИННОВАЦИОННЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ**  
**ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ**

УДК 378.147

**Т. Г. АЛЕЙНИКОВА<sup>1</sup>, А. И. ШЕРБАФ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Беларусь, Витебск, ВГУ имени П. М. Машерова

<sup>2</sup>Беларусь, Минск, БГПУ имени Максима Танка

**ВНЕДРЕНИЕ ИННОВАЦИОННЫХ ПОДХОДОВ**  
**В УЧЕБНУЮ ДИСЦИПЛИНУ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ**  
**МЕТОДЫ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»**

Трансформация современных образовательных практик, связанная с развитием технологий Индустрии 4.0 требует продуманной интеграции в формирование и развитие базовых компетенций и прикладных навыков студентов. Использование облачных платформ предоставляет доступ к мощным вычислительным ресурсам и инструментам без необходимости в дорогом оборудовании. Облачные ресурсы можно использовать для реализации классических алгоритмов, а затем применять искусственный интеллект для анализа полученных результатов.

Рассмотрим один из подходов к реализации современных инновационных решений в учебной дисциплине «Вычислительные методы и компьютерное моделирование», предназначенной для студентов специальности «Физико-математическое образование». В ходе изучения этой дисциплины студенты овладевают вычислительными методами решения задач, возникающих в результате компьютерного моделирования и имеющих широкий спектр приложений.

На лабораторных занятиях для формирования навыков практической реализации изучаемых алгоритмов используются табличный процессор MS Excel, математический пакет Maple и язык программирования Phyton [1]. Знание различных способов реализации методов и алгоритмов дает студентам возможность сопоставлять и осознанно выбирать инструменты решения в зависимости от конкретной задачи. Выбор языка программирования Phyton позволяет включить в учебный процесс современные программные средства и технологии, такие как машинное обучение и облачные вычисления.

В качестве инструмента для выполнения лабораторных заданий студентам предлагается Google Colab [2] – облачная среда, в которой можно выполнять код на языке Python непосредственно в браузере без необходимости установки каких-либо библиотек или программного обеспечения, что позволяет сконцентрироваться на решении задачи, а не на настройке окружения. Colab предоставляет доступ к мощным процессорам, что значительно ускоряет решение вычислительных задач с большими объемами данных. Интеграция с другими сервисами Google позволяет сохранять результаты работы на облачном диске, а также предоставляет возможность совместного проведения исследования для нескольких пользователей в реальном времени.

В качестве примера приведем сравнение классических (полиномиальных) и современных (нейросетевых) методов аппроксимации функции. В блокноте Colab сначала выполним импорт необходимых библиотек (numpy, matplotlib, sklearn). Затем подготовим тестовые данные, сгенерируем на основе синуса зашумленную функцию:

```
x = np.linspace(-5, 5, 100).reshape(-1,1)
y = np.sin(x) + 0.1*np.random.randn(100,1)
```

Выполним полиномиальную аппроксимацию пятой степени:

```
poly_model = make_pipeline(
    PolynomialFeatures(degree=5),
    LinearRegression() )
poly_model.fit(x, y)
```

Построим нейросетевую модель на 20 нейронах с гиперболическим тангенсом:

```
nn_model = MLPRegressor(
    hidden_layer_sizes=(20,20),
    activation='tanh',
    max_iter=1000)
nn_model.fit(x, y.ravel())
```

Визуализируем результаты:

```
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.scatter(x, y, label='Initial_data')
plt.plot(x, poly_model.predict(x), 'r--', label='Polynomial_of_the_5th_degree')
plt.plot(x, nn_model.predict(x), 'g-', label='Neural_network')
plt.legend()
plt.xlabel('x'), plt.ylabel('y')
```

На рисунке показаны графики функций, которые аппроксимированы с помощью полиномов и нейросетью. У студентов появляется воз-

можно обсудить результаты различных приближений, способы улучшения моделей, область их применения и т. д. Проводя вычислительные эксперименты, можно убедиться, что для задач с небольшими данными (<1000) предпочтительны полиномы, а для сильно зашумленных зависимостей лучший результат дает нейросеть.

Изучаемая студентами тема «Приближение функций» играет важную роль в искусственном интеллекте, особенно в области машинного обучения и нейронных сетей. Алгоритмы машинного обучения основаны на аппроксимации функций для создания моделей, которые могут предсказывать результаты на основе входных данных. Нейронные сети можно рассматривать как сложные функции, которые аппроксимируют данные. Это позволяет моделям обобщать информацию из обучающего набора данных на новые, что критично для успешного применения искусственного интеллекта.

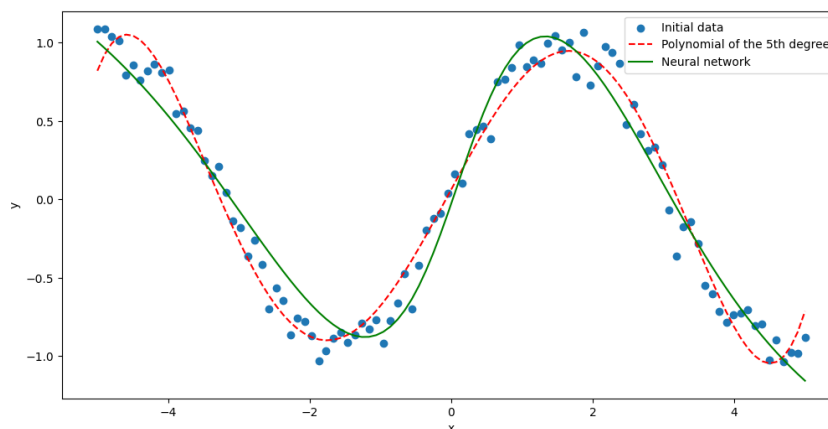


Рисунок – Сравнение методов аппроксимации

Интеграция инструментов искусственного интеллекта, облачных технологий и классических подходов в преподавание вычислительных методов способна существенно повысить качество образования и подготовку студентов к актуальным профессиональным задачам.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алейникова, Т. Г. Вычислительные методы : практикум / Т. Г. Алейникова, А. И. Шербаф. – Витебск : ВГУ им. П. М. Машерова, 2020. – 98 с.
2. Google Colab. – URL: <https://colab.research.google.com/> (дата обращения: 13.03.2025).



УДК 378.14

**А. Р. АЛХУТОВА, Н. Н. СЕНДЕР**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Аналитическая геометрия является важной областью математики, которая помогает учащимся понять геометрические объекты и их свойства через алгебраические методы. В данной статье рассмотрим ключевые аспекты изучения аналитической геометрии, включая систему задач, межпредметные связи и методические рекомендации по преподаванию.

### **Система задач и упражнений**

Изучение аналитической геометрии предполагает использование разнообразных типов задач, которые помогают учащимся развивать навыки работы с геометрическими объектами на координатной плоскости. Выделим основные типы задач.

#### **1. Построение графиков функций:**

- линейные функции;
- квадратичные функции;
- показательные функции;
- тригонометрические функции.

#### **2. Нахождение уравнений прямых и плоскостей:**

- прямая по двум точкам;
- прямая по угловому коэффициенту и точке;
- плоскость по трем точкам;
- плоскость по нормальному вектору и точке.

#### **3. Нахождение расстояний и углов:**

- расстояние между двумя точками;
- угол наклона прямой к оси абсцисс;
- угол между двумя прямыми;
- угол между прямой и плоскостью.

#### **4. Пересечение графиков:**

- точки пересечения двух графиков функций;
- определение количества точек пересечения;
- решение систем уравнений для нахождения точек пересечения.

### 5. Построение геометрических фигур:

- треугольник по трем сторонам;
- окружность по радиусу и центру;
- параллелограмм по сторонам и углу.

Каждый тип задач направлен на развитие конкретных навыков учащихся и углубление их понимания материала. Важно разнообразить задачи, чтобы обеспечить полноценное усвоение и успешное применение знаний.

### **Уровни сложности задач**

Уровни сложности задач варьируются в зависимости от стадии обучения.

– Начальная школа (5–6 классы): задачи на построение графиков линейных функций и нахождение расстояния между двумя точками.

– Средняя школа (7–8 классы): задачи на построение графиков квадратичных и показательных функций, нахождение уравнений прямых и плоскостей.

– Старшая школа (10–11 классы): задачи на построение графиков тригонометрических функций и нахождение уравнений кривых второго порядка.

Постепенное усложнение задач способствует совершенствованию навыков и подготовке к решению более сложных математических задач.

### **Межпредметные связи**

Аналитическая геометрия тесно связана с другими предметами, такими как алгебра и физика. Например, использование алгебраических методов позволяет решать геометрические задачи, а в физике аналитическая геометрия помогает моделировать движение тел и анализировать электромагнитные поля.

В заключение следует сказать, что аналитическая геометрия играет ключевую роль в математическом образовании. Правильное применение методик преподавания и разнообразие задач способствуют глубокому пониманию материала и развитию аналитического мышления у учащихся.

### **Методические рекомендации по преподаванию**

При преподавании аналитической геометрии важно тщательно планировать уроки. Рекомендуется:

- 1) определение целей и задач: четко сформулированные цели помогают учащимся понять, что они должны усвоить;

2) структурирование урока: разделение на вводную часть, основную часть и заключение обеспечивает логичность и последовательность;

3) использование интерактивных методов обучения: групповые задания и обсуждения повышают активность учащихся;

4) визуальные средства: диаграммы, графики и анимации помогают лучше усвоить материал;

5) проверка понимания: краткие тесты и самопроверка позволяют оценить уровень усвоения материала.

УДК 512.624, 519.682

**А. М. АНТОНЮК, А. А. ТРОФИМУК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **ПОЛИГРАММНЫЙ ШИФР ХИЛЛА**

Шифр Хилла представляет собой полиграммный метод шифрования, основанный на применении линейной алгебры над конечными полями. Разработанный Лестером Хиллом в 1929 году, данный алгоритм относится к классу блочных шифров и демонстрирует устойчивость к частотному криптоанализу при корректном выборе параметров. В работе рассматриваются математические основы шифра, процедуры шифрования и дешифрования, а также осуществлена его реализация.

#### **Описание шифра Хилла**

В шифре Хилла [1] текст предварительно преобразуют в цифровую форму и разбивают на последовательности (блоки) по  $n$  последовательных цифр. Такие последовательности называются  $n$ -граммами. Выбирают обратимую по модулю  $m$  ( $n \times n$ )-матрицу  $A = (a_{ij})$ , где  $m$  – число букв в алфавите. Выбирают случайный  $n$ -вектор  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ , после чего  $n$ -грамма открытого текста  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  заменяется  $n$ -граммой шифрованного текста  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  по формуле:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}A + \mathbf{f} \pmod{m}. \quad (1)$$

Расшифрование проводится по правилу:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y} - \mathbf{f})A^{-1} \pmod{m}. \quad (2)$$

### Соответствие букв и их положения в алфавите

Для английского алфавита ( $m = 26$ ) соответствие букв и чисел следующее:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

### Пример шифрования

Преобразуем английский алфавит в числовую форму ( $m = 26$ ) следующим образом:  $A \rightarrow 0$ ,  $B \rightarrow 1$ ,  $C \rightarrow 2$ , ...,  $Z \rightarrow 25$ . Выберем для примера  $n = 2$ . Запишем слово «STUDENTS». Каждой букве поставим в соответствие её номер в алфавите:

$$S = 18, T = 19, U = 20, D = 3, E = 4, N = 13, T = 19, S = 18$$

Выберем квадратную матрицу шифрования  $A$  в виде:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица обратима по mod 26, так как её определитель равен 1 и взаимно прост с  $m = 26$ . Обратная матрица равна:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\mathbf{f}$  – нулевой вектор. Тогда из (1) следует:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}A \pmod{m} = (18, 19) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \pmod{26} = (25, 10).$$

Выполняем это действие до последней пары букв:

$$(20, 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \pmod{26} = (11, 8),$$

$$(4, 13) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \pmod{26} = (3, 20),$$

$$(19, 18) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \pmod{26} = (0, 11).$$

Результатом является: (25, 10), (11, 8), (3, 20), (0, 11). Сопоставим числа с буквами по таблице:

25 = Z, 10 = K, 11 = L, 8 = I, 3 = D, 20 = U, 0 = A, 11 = L.

Итог: ZKLIDUAL – зашифрованная строка.

### Пример расшифрования

Чтобы расшифровать строку ZKLIDUAL, нужно использовать формулу (2). Используя алгоритм, приведенный выше, мы получим:

$$(18, 19) (20, 3) (4, 13) (19, 18) = \text{STUDENTS}.$$

### Реализация

Разработано консольное приложение, выполняющее шифрование и расшифрование по алгоритму Хилла. Программа обрабатывает следующие ошибки:

- 1) ввод не целых чисел в матрицу;
- 2) отсутствие обратной матрицы.

На рисунках 1 и 2 показаны примеры работы программы, включая обработку ошибочного ввода. При возникновении ошибок программа запрашивает повторный ввод корректных данных.

```
Введите текст для шифрования: students
Введите элементы матрицы 2x2 (4 числа через пробел): 1 1 0 3 4
Ошибка ввода! Пожалуйста, введите 4 целых числа.
Введите элементы матрицы 2x2 (4 числа через пробел): 1 1 1 1
Ошибка: Определитель матрицы (0) не имеет обратного по модулю 26.
Попробуйте другую матрицу.
```

Рисунок 1 – Пример работы программы

```
Введите текст для шифрования: students
Введите элементы матрицы 2x2 (4 числа через пробел): 4 5 3 4

Обработанный текст: STUDENTS
Ключевая матрица:
[4 5]
[3 4]

Зашифрованный текст: ZKLIDUAL
Расшифрованный текст: STUDENTS
```

Рисунок 2 – Пример ошибочного ввода данных

Шифр Хилла представляет особую ценность в учебном процессе как наглядный пример соединения теоретических основ линейной алгебры с практическими задачами криптографии. Этот алгоритм демонстрирует применение матричных операций, модульной арифметики и теории обратимости матриц в реальных вычислительных системах, что делает его исключительно полезным для обучения фундаментальным концепциям алгебры, теории чисел и программирования.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Криптографические методы защиты информации: учеб. пособие / С. М. Владимиров, Э. М. Габидулин, А. И. Колыбельников, А. С. Кшевецкий. – М. : МФТИ, 2016. – 265 с.

УДК 371.31

**А. М. АСТРАХАНЦЕВА, Е. В. ПАНТЕЛЕЕВА**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

#### **МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОДГОТОВКИ К ЦЭ/ЦТ ПО МАТЕМАТИКЕ С АКЦЕНТОМ НА ПРОИЗВОДНУЮ**

Подготовка учащихся к централизованному экзамену (ЦЭ) и централизованному тестированию (ЦТ) по математике представляет собой сложный и многогранный процесс, который требует от педагога не только глубоких предметных знаний, но и владения современными методиками обучения. В структуре экзаменационных заданий особое место занимает тема производной.

Анализ результатов централизованного тестирования показывает, что задания по теме производной традиционно вызывают затруднения. Трудности, с которыми сталкиваются учащиеся, могут быть следующими: недостаточное понимание смысла производной, особенно скорости изменения функции или углового коэффициента касательной; ошибки при применении правил дифференцирования, в частности при работе с составными, дробными и тригонометрическими функциями; затруднения при исследовании функций: нахождение интервалов возрастания и убывания, точек экстремума и построение графиков.

В связи с этим возрастает необходимость целенаправленной и методически обоснованной подготовки учащихся по данной теме. Эффективной становится стратегия, основанная на поэтапном освоении материала: от базовых понятий и вычислений к исследованию функций и решению задач повышенной сложности, в том числе с параметрами.

Для успешной подготовки важно постепенно переходить от простых задач к более сложным. Важным элементом подготовки является не только вычисление производных, но и анализ поведения функции, исследование ее свойств.

Важным инструментом в подготовке являются современные онлайн-платформы, такие как OnlineTestPad, которые позволяют не только тестировать знания учащихся, но и анализировать ошибки, что способствует более глубокому усвоению материала. Платформа предлагает следующие возможности: автоматическую проверку ответов; предоставление разборов ошибок; индивидуальные задания, основанные на уровне подготовки учащегося; моделирование различных вариантов контрольных работ.

Особое внимание в заданиях ЦТ по теме «производная» уделяется следующим видам задач: нахождение производной различных функций (в том числе составных, дробных, логарифмических, тригонометрических); построение уравнения касательной к графику функции; определение тангенса угла наклона касательной; исследование функции на возрастание и убывание; нахождение точек экстремума с использованием первой и второй производных; задачи с параметром, влияющим на поведение функции.

Для систематизации подготовки были разработаны интерактивные тренажеры в OnlineTestPad, охватывающие как базовый, так и повышенный уровни сложности. Платформа предлагает следующие тесты: «Производная: базовые действия», «Геометрический смысл производной», «Экстремумы и графики функций», «Исследование функций с параметрами».

Для закрепления знаний учащихся можно использовать платформу GeoGebra, которая позволяет не только строить графики функций, но и в режиме реального времени наблюдать, как изменения в аналитическом выражении влияют на поведение графика. Это дает учащимся воз-

можно наглядно увидеть взаимосвязь между функцией и ее производной: касательные к графику, точки экстремума, интервалы возрастания и убывания, точки перегиба и область выпуклости.

Особенно важно, что GeoGebra делает абстрактные математические понятия, такие как геометрический смысл производной, угловой коэффициент касательной, скорость изменения функции, наглядными и интуитивно понятными. Работа с визуальными моделями способствует развитию образного мышления, улучшает понимание сложных тем и помогает устранить распространенные ошибки, возникающие при решении задач исключительно «в уме» или на бумаге.

Таким образом, эффективная подготовка учащихся к централизованному экзамену (ЦЭ) и централизованному тестированию (ЦТ) по теме «производная» должна строиться на комплексном подходе, сочетающем глубокое понимание теоретического материала, систематическую практику решения задач различного уровня сложности и широкое применение современных цифровых образовательных ресурсов.

Не менее важной составляющей подготовки является регулярная практика решения задач. Особое внимание следует уделять многообразию формулировок и контекстов заданий, которые могут встретиться в ЦТ. Учащимся необходимо не просто решать задачи, но и уметь анализировать полученные результаты, делать выводы, обосновывать выбор метода решения.

Использование таких платформ, как Online Test Pad и GeoGebra, не только облегчает организацию учебного процесса, но и способствует формированию у учащихся навыков самооценки, самоконтроля и самостоятельной работы – качеств, особенно значимых в условиях высоких требований к итоговой аттестации.

В итоге интеграция теории, практики и цифровых технологий позволяет создать целостную методику подготовки, направленную на развитие математического мышления, повышение уверенности учащихся в собственных силах и достижение устойчивых результатов на централизованных экзаменах и тестированиях.



УДК 553.3.001.57:622.012.3.001.2

**Ю. П. АШАЕВ**

Беларусь, Брест, БрГТУ

## **СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ КАК ОСНОВА ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ТЕСТИРОВАНИЯ**

Тестирование для контроля знаний существует уже не один десяток лет. Оно все глубже проникает в систему начального и среднего образования в школах, гимназиях и лицеях. Особенно актуальным тестирование становится в среде абитуриентов в период вступительной кампании в вузы. В системе высшего образования тестирование также занимает значительное место. Причем, если в первых двух случаях преобладает опрос на бумажных носителях, то в вузах делается упор на компьютерные системы автоматизированного тестирования.

Профессорско-преподавательский состав вузов по-разному относится к тестированию. Одни считают это новаторским направлением, другие воспринимают его резко отрицательно. В какой-то мере это связано со спецификой учебной дисциплины. Но зачастую причины кроются в недостатках используемых материалов тестирования и эффективности этой процедуры вообще.

Оценить качество тестовых материалов и выработать какие-то сравнительные оценки сложно. Во-первых, структура тестовых заданий отличается, а во-вторых, в разных государствах применяются различные формы тестирования. На тему качества тестов было немало публикаций в прессе [1]. В качестве косвенного, но видимо немаловажного подтверждения одной из представленных выше точек зрения по поводу качества тестового материала была реакция Министерства высшего образования и науки Республики Казахстан (МОН РК) в виде «Требований к содержанию тестовых заданий». Эти требования регламентируют качество подготовки материалов тестирования. В частности, при подготовке материалов к тестированию предлагается использовать следующие формы тестовых заданий:

– закрытые тестовые задания – относятся к заданиям, на которые даются готовые ответы на выбор, из них один правильный, остальные – правдоподобные, но неправильные;

– полузакрытые тестовые задания – задания, в которых нужно выбрать несколько правильных ответов из числа предложенных;

– открытые тестовые задания – задания, в которых готовые ответы с выбором не даются. Испытуемый должен сам дописать ответ, который свидетельствует о наличии или отсутствии требуемых знаний.

Однако сейчас в распоряжении МОН РК нет эффективной системы автоматизированного тестирования, с помощью которой было бы возможно в процессе сдачи тестов учащимися реализовать все три заявленные в документе формы тестов. В таблице представлена структура тестов, в различных странах [2].

Как видно из таблицы, в четырех странах экзамены состоят только из заданий с выбором одного правильного ответа. К сожалению, даже названия самих форм тестовых заданий на международном уровне пока не отрегулированы, поэтому их сопоставление весьма затруднительно. Структура экзаменов и число предметов, по которым проводятся экзамены, отличается по странам. В Южной Корее, например, выпускники сдают всего один экзамен – College Scholastic Ability Test. «С его помощью оценивается не общеобразовательная подготовка, а способности и умения для продолжения образования. Тест состоит из четырех частей: вербальный тест, математика, исследования в области естественных и социальных наук, английский как иностранный язык» [2]. «Во Франции набор экзаменов определяется направлением лица, но один экзамен по французской литературе обязателен для всех». В Беларуси два экзамена являются обязательными (математика и один из государственных языков), третий – по выбору.

Методика, позволяющая решить часть обозначенных проблем, представлена в работе [3]. Используя математический аппарат, можно по ответам студентов на вопросы тестов выявить фактическую сложность заданий, фактический уровень компетенций студентов, определить примерный список «проблемных» и «бесполезных» вопросов и наметить план мероприятий по улучшению тестовых заданий. Методика базируется на теории измерений латентных переменных. Используя математический аппарат, можно по ответам студентов на вопросы тестов выявить фактическую сложность заданий, фактический уровень компетенций студентов, определить примерный список «проблемных» и «бесполезных» вопросов и наметить план мероприятий по улучшению тестовых заданий.

вых заданий. Методика, разработана Георгом Рашем (George Rasch) и его последователями [4; 5] и применяется во многих исследованиях [6 – 9]. Но идея методики, несмотря на используемый математический подход, все же базируется на анализе ответов и тем самым в целом зависит от уровня подготовки и уровня знаний тестируемой аудитории.

Таблица – Структура тестов, мировой опыт (А – закрытые, В – с кратким ответом, С – с развернутым ответом)

Страна	Типы заданий			С какой целью проводится экзамен
	А	В	С	
Англия	+	+	+	GCSE – для получения аттестата о среднем образовании. A-levels – получение Общего свидетельства об образовании продвинутого уровня и одновременно вступительные в вуз
Беларусь	+	+	+	ЦТ – одновременно выпускной и вступительный экзамен
Бразилия	+	+	+	Есть выпускной экзамен и вступительные (но выпускной тоже учитывается)
Казахстан	+	–	–	ЕНТ – одновременно выпускной и вступительный экзамен
Кыргызстан	+	–	–	Одновременно выпускной и вступительный (есть еще дополнительные вступительные)
Китай	+	+	+	Одновременно выпускной и вступительный
США	+	+	+	SAT как вступительный
Турция	+	–	–	OSS – выпускной, YFS – вступительный экзамен
Франция	–	–	+	Сертификация и поступление в университеты
Южная Корея	+	–	–	Вступительный в вузы

Большое внимание разработанной системы тестирования отводится организации и ведению базы данных тестовых заданий. Основой базы данных является группировка вопросов по темам и разделам в соответствии с программой учебной дисциплины. Причем чем шире и разностороннее охвачены все разделы дисциплины, чем больше тестовых заданий по разделам, тем выше надежность разработанного компьютерного теста. Общее количество тестовых заданий практически не ограничено, но наиболее оптимально иметь по дисциплине 500–1000 тестовых заданий, сгруппированных в 25–50 разделов. Для создания тестовых заданий рекомендуется привлечь группу высококвалифицированных преподавателей в данной области. Каждому преподавателю рекомендуется разработать тестовые задания и ответы к ним по указанному разделу учеб-

ной дисциплины. Дополнительно каждое тестовое задание оценивается коэффициентом сложности. На втором этапе тестовые задания вкруговую рецензируются каждым преподавателем созданной группы авторов. Причем при рецензировании не указывается авторство тестовых вопросов. Несмотря на то, что данная процедура имеет некоторые отрицательные психологические аспекты, с точки зрения повышения качества тестовых заданий она крайне эффективна.

Привыкание к тесту устраняется многовариантностью тестов, которая достигается:

- избыточным количеством разработанных тестовых заданий;
- программной генерацией варианта теста из имеющихся в базе данных тестовых заданий;
- возможностью включения согласно заданному шаблону требуемого количества заданий из раздела;
- изменением последовательности ответов в тестовых заданиях.

Универсальность тестов обеспечивается возможностью их использования на различных уровнях изучения учебной дисциплины, что достигается созданием специального шаблона тестирования, определяющего конкретные разделы и количество вопросов из каждого раздела. Созданная таким образом база данных тестовых заданий дает возможность его использования на различных этапах учебного процесса:

- для комплексной проверки на этапе сдачи экзаменов и зачетов;
- на практических занятиях при изучении темы;
- для самоконтроля знаний;
- при защите лабораторной или курсовой работы после её выполнения и оформления;
- на этапе текущего контроля или после изучения темы или раздела дисциплины.

Все результаты автоматизированного тестирования сохраняются с целью последующей обработки этих данных, расчета обобщенных статистических показателей и выдачи соответствующих рекомендаций по улучшению учебного процесса.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лавриненко, П. В. Проблемы внедрения системы тестирования в высшей школе / П. В. Лавриненко // Молодой ученый. – 2015. – № 23 (103). – С. 975–978.

2. Ахмадова, Г. Ф. Зарубежный опыт организации экзаменов с высокими ставками в Норвегии / Г. Ф. Ахмадова // Nsportal.ru : общеобразов. соц. сеть. – URL: <https://nsportal.ru/vuz/pedagogicheskie-nauki/library/2019/02/20/zarubezhnyy-opyt-organizatsii-ekzamenov-s-vysokimi> (дата обращения: 01.04.2025).

3. Гедранович, В. В. Методика оценки качества тестовых заданий / В. В. Гедранович, А. Б. Гедранович // Инновационные образовательные технологии. – 2011. – № 2. – С. 20–25.

4. Rasch, G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests / G. Rasch. – Chicago : University of Chicago Press, 1980. – 228 p.

5. Wright, B. D. Measurement essentials. 2nd edition / B. D. Wright, M. H. Stone. – Wilmington : Wide Range, INC. 1999. – 221 p.

6. Маслак, А. А. Измерение уровня развития инфраструктуры сферы образования в субъектах РФ / А. А. Маслак, С. А. Поздняков, А. А. Данилов // Высшее образование в России. – 2008. – № 2. – С. 102–108.

7. Маслак, А. А. Измерение латентных переменных в образовании / А. А. Маслак, Т. С. Анисимова // Экономика и образование сегодня. – 2007. – № 13. – С. 85–88.

8. Гедранович, А. Б. Измерение качества образовательных услуг вузов с помощью латентных переменных / А. Б. Гедранович // Управление в социальных и экономических системах : материалы XIX междунар. науч.-практ. конф., Минск, 18 мая 2010 г. – Минск : Изд-во МИУ. – 2010. – С. 271–272.

9. Гедранович, В. В. Квалиметрический инструментарий в управлении учебно-познавательной деятельностью студентов / В. В. Гедранович // Инновационные образовательные технологии. – 2005. – № 1. – С. 58–65.

УДК 371:517.0

**А. И. БАСИК, М. Г. КОТ, А. А. ТРОФИМУК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ  
БрГУ ИМЕНИ А. С. ПУШКИНА**

В апреле 2025 года состоялась I Межуниверситетская олимпиада по математике, организованная совместно УО «Брестский государствен-

ный университет имени А. С. Пушкина» (далее – БрГУ имени А. С. Пушкина) и ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского» (далее – БГУ имени академика И. Г. Петровского). Олимпиада проводилась в два этапа.

На первом этапе разработку заданий и проверку работ осуществляли преподаватели БГУ имени академика И. Г. Петровского. Второй тур проходил на базе БрГУ имени А. С. Пушкина, где методическое обеспечение и оценку работ выполняли местные преподаватели.

Во втором этапе приняли участие 25 студентов физико-математического факультета БрГУ имени А. С. Пушкина и 10 представителей БГУ имени академика И. Г. Петровского. По итогам второго тура среди брестских студентов лучшие результаты показали:

– диплом I степени – Довбыш Б. Г. (2 курс, специальность «Прикладная математика»);

– диплом II степени – Костенков И. В. (3 курс, специальность «Прикладная математика»);

– диплом III степени – Крень И. Н. (1 курс, специальность «Прикладная математика»).

В настоящей публикации представлены условия задач второго тура олимпиады и их подробные решения.

**Задача 1.** Решите уравнение  $|1944z + 1| = 2025iz$  относительно комплексного числа  $z$ .

*Решение.* Пусть  $z = a + bi$ . Тогда

$$|1944a + 1944bi + 1| = 2025ai - 2025b.$$

Т. к.  $|1944a + 1944bi + 1|$  – действительное число, то  $a = 0$ . Поэтому

$$|1944bi + 1| = -2025b.$$

Тогда

$$\sqrt{(1944)^2 b^2 + 1} = -2025b \Leftrightarrow \begin{cases} ((2025)^2 - (1944)^2)b^2 = 1, \\ b < 0. \end{cases}$$

Откуда  $b = -\frac{1}{567}$ .

**Ответ:**  $z = -\frac{1}{567}i$ .

**Задача 2.** Во множестве из 2025 элементов выбраны несколько подмножеств так, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент и никакие три из них не имеют общих элементов. Каково наибольшее возможное число таких подмножеств?

*Решение.* Обозначим количество подмножеств через  $k$ . По условию, каждые два подмножества имеют ровно один общий элемент, и никакие три подмножества не имеют общих элементов. Это означает, что для каждого элемента из множества подмножеств существует ровно два подмножества, которые его содержат.

Рассмотрим граф, в котором вершины соответствуют подмножествам, а ребра соединяют две вершины, если соответствующие подмножества имеют общий элемент. По условию задачи, каждая пара подмножеств соединена ровно одним ребром. Таким образом, у графа каждая вершина имеет степень 2.

Поскольку каждый элемент может быть общим для двух подмножеств, то общее количество пар подмножеств равно

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

С другой стороны, общее количество таких элементов не может превышать 2025, т. е.

$$\frac{k(k-1)}{2} \leq 2025.$$

Из полученного неравенства несложно найти, что максимальное целое значение  $k$  равно 64.

**Ответ:** 64.

**Задача 3.** Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  – точки пересечения эллипса  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$  и параболы  $y = x^2 + 2x$ . Доказать, что около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность, найти ее центр и радиус.

*Решение.* Убедиться в существовании четырех точек пересечения нетрудно с помощью теоремы Коши о промежуточном значении непрерывной функции.

Пусть  $(x, y)$  – координаты одной из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Тогда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \\ y = x^2 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y - 2x, \\ y^2 = 1 + \frac{2x}{9} - \frac{y}{9}. \end{cases}$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = y - 2x + 1 + \frac{2x}{9} - \frac{y}{9} \Leftrightarrow \left(x + \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}.$$

Полученное равенство означает, что точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на окружности с центром в точке  $\left(-\frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$  и радиуса  $\frac{\sqrt{161}}{9}$ .

Что и требовалось доказать. ■

**Задача 4.** Вычислите  $A^{2025} - C_{2025}^2(A - E)^2$ , где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  и

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & a \\ -a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Пусть

$$B := A - E = \begin{bmatrix} 0 & -a & a \\ -a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & -a^2 \\ 0 & a^2 & -a^2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Т. к.  $BE = EB = B$ , то, согласно формуле бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} A^{2025} &= (E + B)^{2025} = E^{2025} + C_{2025}^1 E^{2024} B + C_{2025}^2 E^{2023} B^2 + \\ &+ C_{2025}^3 E^{2022} B^3 + \dots + C_{2025}^{2024} E B^{2024} + B^{2025} = \\ &= E + 2025B + C_{2025}^2 B^2. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$A^{2025} - C_{2025}^2(A - E)^2 = E + 2025B = \begin{bmatrix} 1 & -2025a & 2025a \\ -2025a & 1 & 0 \\ -2025a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Ответ:**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2025a & 2025a \\ -2025a & 1 & 0 \\ -2025a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



**Задача 5.** Преобразование Лежандра выпуклой функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  определяется формулой

$$f^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{xt - f(t)\}.$$

Найти преобразование Лежандра функции  $f(t) = e^t$ .

*Решение.* При каждом  $x \in \mathbb{R}$  рассмотрим функцию  $g_x(t) := xt - e^t$ , при этом  $(g_x)'(t) = x - e^t$ .

Заметим, что при  $x > 0$  функция  $g_x(t)$  имеет одну стационарную точку  $t_0 = \ln x$ ,  $(g_x)'(t) > 0$  на интервале  $(-\infty; \ln x)$  и  $(g_x)'(t) < 0$  на интервале  $(\ln x; +\infty)$ . Поэтому

$$f^*(x) = g_x(t_0) = x \ln x - x.$$

При  $x \leq 0$  для всех  $t \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство  $(g_x)'(t) < 0$ . Следовательно, при каждом  $x \leq 0$  функция  $g_x(t)$  убывает на всей числовой прямой. Тогда

$$f^*(0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-e^t\} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-e^t) = 0$$

и при  $x < 0$

$$f^*(0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{xt - e^t\} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (xt - e^t) = +\infty.$$

**Ответ:**

$$f^*(x) = \begin{cases} x \ln x - x, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ +\infty, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

**Задача 6.** Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$  и числовые последовательности  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  заданы рекуррентно

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n \geq 1).$$

Доказать, что последовательности  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  и  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  являются монотонными и сходятся к одному пределу.

*Решение.* Заметим, что в силу неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом при каждом  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = b_n$$

(здесь считается, что  $a_0 = a$  и  $b_0 = b$ ).

Поскольку при каждом  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0,$$

то последовательность  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  является невозрастающей. Очевидно, что  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  ограничена снизу нулем. Согласно критерию Вейерштрасса сходимости монотонной последовательности, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: A$ .

Последовательность  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  является неубывающей, ибо

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})\sqrt{b_n} \geq 0,$$

ограничена сверху числом  $a_1$  и, следовательно, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: B$ .

Осталось показать, что  $A = B$ . Имеем

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{A + B}{2}.$$

Из последней цепочки равенств и следует требуемое. ■

**Задача 7.** Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что  $f(0) = f(1)$  и  $f'(0) = 15\sqrt{3}$ . Найдите

$$\min \int_0^1 (f''(x))^2 dx.$$

*Решение.* Применяя формулы Ньютона – Лейбница и интегрирования по частям, получим

$$0 = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \left[ \begin{array}{ll} u = f'(t) & du = f''(t) dt \\ dv = dt & v = t - 1 \end{array} \right] =$$

$$= 15\sqrt{3} - \int_0^1 (t-1)f''(t) dt,$$

т. е.

$$\int_0^1 (t-1)f''(t) dt = 15\sqrt{3}.$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, получим оценку снизу требуемого интеграла:

$$675 = (15\sqrt{3})^2 \leq \int_0^1 (t-1)^2 dt \cdot \int_0^1 (f''(t))^2 dt = \frac{1}{3} \int_0^1 (f''(t))^2 dt.$$

Таким образом, мы доказали, что если функция  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию задачи, то выполняется неравенство

$$\int_0^1 (f''(t))^2 dt \geq 2025.$$

Знак равенства в неравенстве Коши – Буняковского достигается в том и только том случае, если существует  $a \in \mathbb{R}$  такое, что

$$f''(t) \equiv a(t-1) \text{ при } t \in [0; 1].$$

Интегрируя, найдем

$$f'(t) = \frac{at^2}{2} - at + C_1, \quad f(t) = \frac{at^3}{6} - \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2,$$

где  $C_1, C_2$  – действительные постоянные. Осталось заметить, что при  $a = 45\sqrt{3}$ ,  $C_1 = 15\sqrt{3}$  и любом  $C_2$  построенная функция удовлетворяет условию задачи и

$$\int_0^1 (f''(t))^2 dt = \frac{a^2(t-1)^3}{3} \Big|_0^1 = 2025.$$

**Ответ:** 2025.

УДК 372.851

**Н. И. БЛАШУК, Е. В. ЗУБЕЙ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ**

В современном мире, где технологии стремительно развиваются, образовательный процесс не может оставаться в стороне от инноваций. Особенно это касается точных наук, где абстрактные понятия требуют наглядного представления для эффективного усвоения знаний. Внедрение информационных технологий в образовательный процесс является необходимым шагом для повышения качества обучения и формирования у обучающихся глубокого понимания математических концепций. Одним из наиболее эффективных инструментов для достижения этих целей является *GeoGebra* – мощная платформа для динамической математики, объединяющая в себе геометрию, алгебру, статистику и графику.

*GeoGebra* предоставляет уникальную возможность визуализировать математические концепции и активно взаимодействовать с ними. Динамические модели, создаваемые с помощью этой платформы, позволяют обучающимся исследовать геометрические объекты и их свойства в интерактивной среде. Это взаимодействие способствует более глубокому пониманию материала, так как обучающиеся могут изменять размеры и расположение различных геометрических объектов, таких как точки, линии, углы, треугольники и окружности. Таким образом, они получают возможность наглядно наблюдать за изменениями свойств объектов, что значительно улучшает процесс обучения.

Одним из важных аспектов использования динамических моделей в *GeoGebra* является возможность исследования свойств геометрических фигур. Например, при создании модели треугольника обучающиеся могут использовать инструмент «Ползунок» для изменения углов и сторон, что позволяет им наблюдать за изменениями площади и периметра треугольника. Это активное исследование способствует формированию у обучающихся аналитического мышления и навыков критического анализа.

*GeoGebra* также предоставляет возможности для визуального демонстраирования доказательств теорем. Создание моделей, иллюстрирующих

теорему Пифагора или свойства параллельных прямых, позволяет обучающимся экспериментировать с этими концепциями и самостоятельно удостовериться в их истинности. Такой подход не только укрепляет знания, но и развивает у обучающихся умение применять теоретические знания на практике.

В дополнение к двумерной геометрии, динамические модели в *GeoGebra* также находят широкое применение в стереометрии. Обучающиеся могут создавать трехмерные модели геометрических фигур, таких как кубы, сферы и пирамиды, а также исследовать их свойства. Например, изменение радиуса сферы или длины ребра куба позволяет визуализировать изменения объема и площади поверхности этих фигур. Динамические модели сечений 3D-объектов позволяют учащимся исследовать, как плоскости пересекают фигуры, что помогает лучше понять их геометрические свойства и взаимосвязи. Это способствует развитию пространственного мышления и критического подхода к изучению стереометрии.

Создание интерактивных заданий с использованием *GeoGebra* позволяет обучающимся самостоятельно исследовать как планиметрию, так и стереометрию. Задачи по построению фигур с заданными свойствами способствуют активному вовлечению обучающихся в учебный процесс.

Динамические модели могут быть использованы также для решения практических задач. Например, обучающиеся могут создавать модели для расчета площади участка земли или объема трехмерного объекта, что позволяет им видеть, как меняются результаты при изменении параметров. Этот практический аспект обучения помогает обучающимся осознать значимость геометрии в реальной жизни, что непосредственно влияет на повышение мотивации к изучению учебного предмета.

Кроме положительного влияния на восприятие материала учащимися, использование динамических моделей предоставляет преимущества и для преподавателей. Приложение *GeoGebra* помогает индивидуализировать обучение, учителя могут создавать задания с различными уровнями сложности, адаптируя их под потребности каждого ученика. Также учителя могут заранее подготовить динамические модели к уроку, что позволяет оптимизировать процесс обучения. Например, при обучении решению задач на построение можно использовать инструмент «Шаги построения», который позволяет демонстрировать последовательность

действий в подходящем для учащихся темпе. Также можно предоставить доступ к данным построениям, чтобы учащиеся могли повторно просмотреть последовательность построения.

Таким образом, внедрение динамических моделей в образовательный процесс с использованием *GeoGebra* открывает новые горизонты для преподавания математики. Современные технологии не только упрощают работу преподавателя, но и делают обучение более увлекательным и эффективным для учащихся. Методический подход к использованию *GeoGebra* позволяет интегрировать различные математические дисциплины, развивая у обучающихся критическое мышление и аналитические навыки. В результате использование динамических моделей становится неотъемлемой частью современного образовательного процесса.

УДК 378.14:004

**Н. И. БЛАШУК, Л. Н. САВЧУК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ**

В настоящее время искусственный интеллект (ИИ) – самая быстро развивающаяся и перспективная технология, которая проникает практически во все сферы деятельности человека, включая образование. Возможности ИИ способствуют улучшению организации образовательного процесса и заставляют переосмыслить подходы к обучению исходя из современных реалий.

В нашей республике также работают над созданием методик преподавания школьных предметов с использованием ИИ. По словам министра образования Республики Беларусь, эта работа проводится вместе с Парком высоких технологий и уже создан пилотный обучающий блок для учителей информатики, а к сентябрю 2025 года планируется утвердить правила использования ИИ как учителями, так и школьниками [1].

Выделим основные аспекты образовательного процесса, где возможно применение ИИ.

- В первую очередь, ИИ берет на себя автоматизацию рутинных задач, которые отнимают много времени у преподавателей, например, проверка домашних заданий и тестов. Традиционные методы проверки домашних заданий и тестов часто требуют значительных временных затрат со стороны преподавателей. В свою очередь ИИ может быстро и точно оценивать правильность выполнения работы, выявляя ошибки и недочеты.

- ИИ может предоставлять обратную связь в реальном времени. Школьники, пишущие код на интерактивных платформах, получают мгновенные подсказки и рекомендации по улучшению своих решений. Это создает более динамичную образовательную среду, где можно учиться на своих ошибках и экспериментировать с новыми подходами.

- ИИ может стать проводником в обучении учащихся. Каждый ученик уникален, и его темп обучения может значительно отличаться от других. ИИ способен адаптировать учебный материал в зависимости от уровня знаний и потребностей каждого. Такой подход делает обучение более эффективным, так как повышается мотивация и учащиеся могут учиться в своем собственном темпе [2].

При обучении информатике, например, можно использовать следующие платформы:

*Khan Academy*. Платформа предлагает бесплатные образовательные ресурсы по различным предметам. Она использует адаптивные технологии, чтобы подстраивать обучение под уровень знаний ученика, предоставляя персонализированные рекомендации и задания.

*Knewton Alta* – адаптивная образовательная платформа, которая использует ИИ для создания персонализированных учебных планов на основе анализа данных о прогрессе студентов.

*Kahoot!* – игровая платформа для создания викторин, опросов и обсуждений. С недавним внедрением ИИ, *Kahoot!* может анализировать ответы учащихся и предоставлять учителям отчеты о понимании материала. Учителя могут создавать интерактивные викторины по различным темам курса информатики и видеть, какие вопросы вызвали трудности у учащихся, что позволяет адаптировать дальнейшее обучение.

Внедрение ИИ в образовательный процесс открывает множество возможностей, однако сопряжено с рядом значительных вызовов, таких как обеспечение безопасности и конфиденциальности данных учащихся, что требует тщательной проработки мер защиты.

Кроме того, необходимо учитывать уникальные особенности разнообразных образовательных систем и адаптировать технологии к их требованиям. Ключевую роль в успешной интеграции ИИ играют квалифицированные преподаватели, которые должны быть готовы к новым методам обучения и обладать необходимыми знаниями и ресурсами. Наконец, важно помнить о ценности человеческого взаимодействия в образовательном процессе, поскольку именно оно способствует развитию критического мышления и эмоционального интеллекта у учеников.

Таким образом, для достижения гармоничного и эффективного обучения необходимо найти баланс между инновациями и традиционными подходами, чтобы ИИ стал надежным союзником в образовании, а не заменой человеческому общению и взаимодействию.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минобр к сентябрю утвердит правила использования ИИ в школах. – URL: <https://sputnik.by/20250321/minobr-k-sentyabryu-utverdit-pravila-ispolzovaniya-ii-v-shkolakh-1094684891.html> (дата обращения: 01.04.2025).

2. Галагузова, Ю. Н. Искусственный интеллект на уроках информатики: вызовы и реальность / Ю. Н. Галагузова, И. Н. Перекальский // Педагогическое образование в России. – 2024. – № 4. – С. 112–118.

УДК 517.31

**К. В. ВАСИЛЕВСКИЙ, И. С. КОЗЛОВСКАЯ**

Беларусь, Минск, БГУ

#### **ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В КУРСЕ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

Основная задача при преподавании курса «Уравнения математической физики» состоит в том, чтобы научить студента применять на практике методы решения задач, возникающих в прикладных вопросах.



С этой целью для курса «Уравнения математической физики» создан электронный учебно-методический комплекс на основе мультимедийных технологий. Комплекс включает учебные, научные и методические материалы, методику изучения дисциплины средствами информационно-коммуникационных технологий и обеспечивает условия для осуществления эффективной учебной деятельности.

Важную роль сыграл образовательный портал. На образовательном портале на базе, организованной в БГУ LMS Moodle, созданный курс «Уравнения математической физики» содержит общий блок, блок для чтения лекций и блок для ведения лабораторных занятий. Каждый блок прежде всего несет информативный характер, представляя данные о преподавателе и различных методах взаимосвязи со студентами, ссылки на программы и необходимую литературу, различные базы данных, а также позволяет сделать текущие объявления. Широко использованы коммуникационные возможности системы, такие как чат, форум, позволяющие осуществлять коммуникацию между преподавателем и студентами как по вопросам курса, так и по организационным вопросам. Во время экзаменационной сессии в полном объеме использовался такой элемент курса, как тестирование. Кроме того, для проведения лабораторных и контрольных работ эффективным также является инструмент «задание», позволяющий в том числе контролировать сроки выполнения заданий студентами.

Для более глубокого понимания студентами изучаемых ими классических математических тем используются современные средства компьютерной математики. Лабораторные занятия проводятся с использованием математического пакета Wolfram Mathematica, который позволяет студентам для скорейшего усвоения теоретического материала использовать его графические возможности. Кроме того, предоставляется возможность эффективно проиллюстрировать решение одномерных уравнений и систем уравнений в частных производных, а имеющийся специализированный инструментарий позволяет решать двумерные задачи математической физики в режиме графического интерфейса. Инструментарий пакета Wolfram Mathematica включает в себя готовые средства решения задач диффузии, теплопроводности, электростатики, строительной механики и других областей математической физики. В частности пакет Wolfram Mathematica используется для решения урав-

нений в частных производных методом характеристик и анимации полученного решения с помощью функций **Plot**, **Animate** и **Manipulate** при различных значениях параметров; для решения задач Коши и Гурса для уравнений в частных производных второго порядка и визуализации решения с помощью функции **Plot3D**; для визуализации процесса распространения тепла в стержне в зависимости от различных внешних условий; для построения эквипотенциальных поверхностей электромагнитных полей.

В качестве примера рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения колебаний прямоугольной мембраны (рисунок 1).

$$u_{tt} = \Delta u, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad t > 0;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=2} = 0; \quad u|_{t=0} = \frac{xy(1-x)(1-y)}{5}, \quad u_t|_t = xy.$$

```

In[1]:= weqn = D[u[x, y, t], {t, 2}] == Laplacian[u[x, y, t], {x, y}];
In[2]:= ic = {u[x, y, 0] == (x - x^2)(y - y^2)/5, Derivative[0, 0, 1][u][x, y, 0] == xy};
In[3]:= bc = {u[x, 0, t] == 0, u[0, y, t] == 0, u[1, y, t] == 0, u[x, 2, t] == 0};

```

Рисунок 1 – Условие задачи

Исходное уравнение записываем с помощью функции **Laplacian**, а начальное условие на производную по времени – с помощью функции **Derivative**. Далее, с помощью функции **DSolve** строим решение нашей задачи (рисунок 2).

```

In[4]:= sol = FullSimplify[u[x, y, t] /. DSolve[{weqn, ic, bc}, u, {x, y, t}][[1],
K[1] ∈ Integers && K[1] ≥ 1 && K[3] ∈ Integers && K[3] ≥ 1] /. {K[1] → n, K[3] → m}; sol // TraditionalForm
Out[4]//TraditionalForm=

```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin\left(\frac{\pi m y}{2}\right) \sin(\pi n x) \left( \frac{20 \pi^3 m^2 n^2 (-1)^{m+n} \sin\left(\frac{1}{2} \pi t \sqrt{m^2 + 4 n^2}\right)}{\sqrt{m^2 + 4 n^2}} - 4((-1)^m (\pi^2 m^2 - 4) + 4)((-1)^n - 1) \cos\left(\frac{1}{2} \pi t \sqrt{m^2 + 4 n^2}\right) \right)}{5 \pi^6 m^3 n^3}$$

Рисунок 2 – Решение задачи

Для визуализации решения нам потребуется активировать решение. С этой целью с помощью функций **Activate** и **TruncateSum** извлекаем три слагаемых и получаем активированное решение (рисунок 3).

```

In[5]:= h[x_, y_, t_] := Evaluate[Activate[TruncateSum[sol, 3]]]; h[x, y, t] // TraditionalForm

```

Рисунок 3 – Активация решения

И, наконец, с помощью функций **Plot3D** и **Animate** визуализируем решение и строим его анимацию по времени (рисунок 4).

```
In[6]:= Animate[Plot3D[h[x, y, t], {x, 0, 1}, {y, 0, 2}, PlotRange -> Automatic, Axes -> True,
  Boxed -> False, Mesh -> False, AxesStyle -> Arrowheads[0.05],
  LabelStyle -> Directive[Blue, 14, Italic, Bold], PerformanceGoal -> "Quality",
  {t, 0, 8}, SaveDefinitions -> True, DefaultDuration -> 12]
```

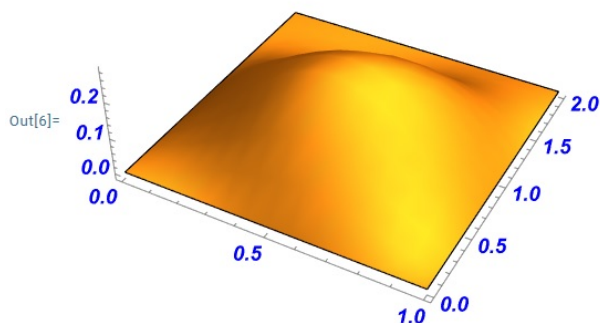


Рисунок 4 – Визуализация решения

Таким образом, включение реальных прикладных задач в курс «Уравнения математической физики» и использование технических и программных средств позволило с одной стороны разнообразить формы и методы обучения, способствующие прежде всего заинтересованности студентов в успешном освоении курса и высокому качеству получаемых знаний, с другой стороны, стимулировать студентов к проведению научных исследований, созданию инновационных проектов.

УДК 004.42

**Д. В. ГРИЦУК**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ С МАРШРУТАМИ И СКРЫТЫМИ МЕСТАМИ ГОРОДА БРЕСТА**

Современный туризм невозможен без достоверной информации и различных средств коммуникации. Ни одно путешествие не обойдется без справочных материалов, которые играют особую роль для неорганизованных групп, т. е. для самостоятельных туристов.

Самодеятельный туризм, или «свободный туризм», подразумевает поездки с частичным или полным отказом от услуг туристических фирм. Путешественник самостоятельно выбирает свой маршрут, заботится о приобретении билетов, о бронировании гостиниц, а также об организации питания и экскурсий. Такой вид туризма является чрезвычайно широким понятием, поскольку он может предполагать, как динамичное следование к цели путешествия, так и статичное пребывание, например, на курорте.

В последние годы этот вариант организации и осуществления путешествий, т. е. самодеятельный туризм, становится все более популярным и превращается в заметное социально-экономическое явление. В связи с этим актуальным является вопрос о качественном и своевременном информационно-технологическом обеспечении данной категории туристов. Мы же акцент делаем на город Брест.

Брест – город с богатой историей, уникальной архитектурой и множеством малоизвестных достопримечательностей. Чтобы помочь туристам и местным жителям исследовать город, возникла идея разработать веб-приложение с интерактивными маршрутами и скрытыми местами.

Рассмотрим ключевые моменты. Разрабатываемое приложение включает в себя перечень туристических объектов с возможностью фильтрации по категориям, готовые маршруты (исторический, культурный, необычные места), скрытые локации (дворы, граффити, малоизвестные памятники), описание мест с фото и историей. Планируется добавить функцию, позволяющую просмотреть выбранную локацию на архивных фотографиях.

Техническая реализация проекта предполагает интеграцию с Google Maps API, а также облачное хранение мультимедийного контента. Дизайн выполнен в минималистичном стиле с адаптацией под мобильные устройства (рисунок). Перспективы развития включают создание мобильного приложения.

Такое приложение поможет открыть Брест с новой стороны, объединив классические и малоизвестные места. Планируется внедрение готового проекта для популяризации туризма в Бресте. Функциональность приложения может быть расширена в соответствии с потребностями и пожеланиями пользователей, что позволит приложению оставаться актуальным и востребованным на рынке.

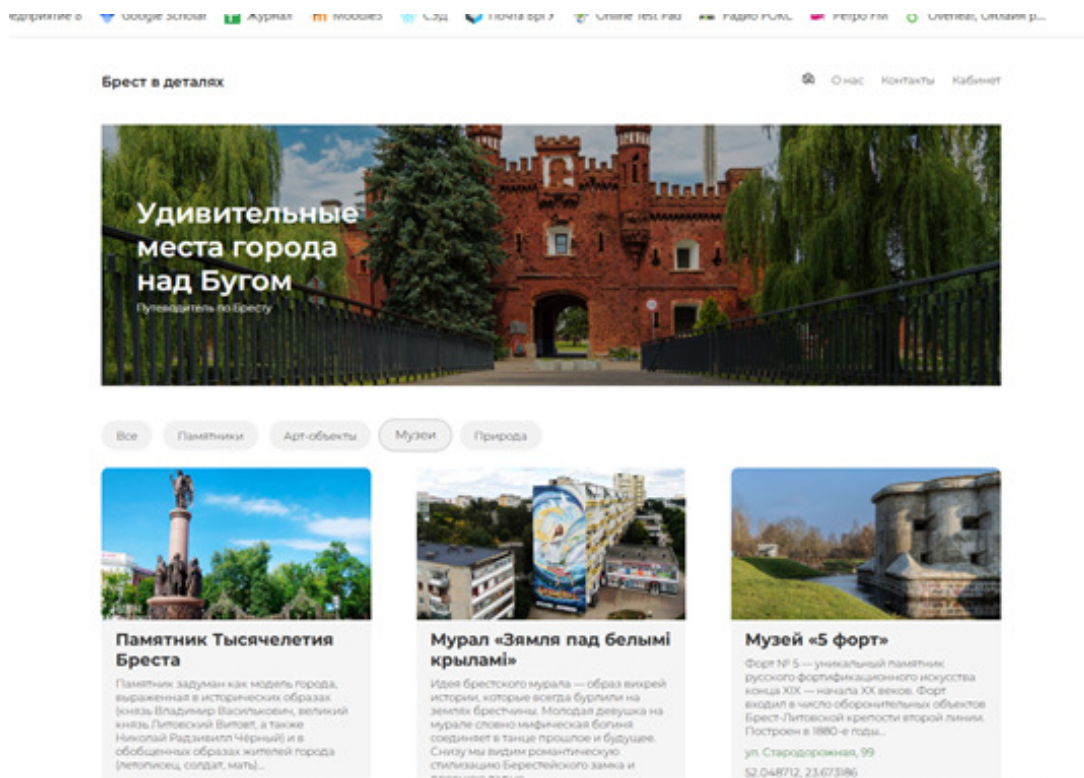


Рисунок – Сайт «Удивительные места города над Бугом»

УДК 371:517.0

**М. А. КАЛАВУР**

Беларусь, Брэст, БрДУ имя А. С. Пушкіна

## **ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ РАЎНАННІ НА ФАКУЛЬТАТЫВАХ У СЯРЭДНЯЙ ШКОЛЕ**

З паняццем другой вытворнай школьнікі часткова знаёміліся пры вывучэнні прымянення вытворнай у фізіцы. Паўторнае вяртанне да гэтага пытання звязана ў асноўным з вывучэннем гарманічных ваганняў.

Паняцце другой вытворнай замацоўваецца шляхам самастойнага разбору рашэнняў прыкладаў на знаходжанне вытворных другога парадку для трыганаметрычных функцый. Абагульніўшы рашэнні такіх прыкладаў, карысна заўважыць, што:

$$\begin{aligned}\sin'' x &= (\sin' x)' = (\cos x)' = -\sin x, \\ \cos'' x &= (\cos' x)' = (-\sin x)' = -\cos x.\end{aligned}$$

Другая вытворная як ад сінуса, так і ад косінуса ёсць тая ж самая функцыя, толькі ўзятая з процілеглым знакам, г. зн. абедзве функцыі пры ўсіх значэннях аргумента  $x$  задавальняюць суадносінам:

$$f''(x) = -f(x).$$

Гэта спецыфічная ўласцівасць сінуса і косінуса.

Матэрыял аб дыферэнцыяльным раўнанні гарманічных ваганняў можна выкласці ў выглядзе лекцыі, у ходзе якой звярнуць увагу на наступнае.

У алгебры для знаходжання невядомых велічынь складваюць раўнанне, якое звязвае невядомую велічыню з данымі. Рашаючы раўнанне, знаходзяць значэнні шуканай велічыні. Аналагічна гэтаму ў матэматычным аналізе для знаходжання невядомай функцыі па дадзеных яе ўласцівасцях таксама складваюць раўнанне, якое звязвае невядомую функцыю і велічыні, якія задаюць яе ўласцівасці. Так як уласцівасці функцыі выражаюцца праз яе вытворныя таго ці іншага парадку, то прыходзяць да суадносін, якія звязваюць невядомую функцыю і яе вытворныя. Гэтыя суадносіны называюцца дыферэнцыяльным раўнаннем. Рашаючы яго, знаходзяць шуканую функцыю.

Такім чынам, апарат вытворнай дазваляе даследаваць уласцівасці зададзенай функцыі (вызначыць прамежкі яе нарастання і спадання, пункты максімуму і мінімуму, напрамак увогнутасці і выпукласці крывой на пэўным лікавым прамежку і г. д.), а апарат дыферэнцыяльных раўнанняў дазваляе рашаць адваротную задачу знаходзіць функцыю па зададзеных уласцівасцях.

Па сваіх практычных дадатках дыферэнцыяльныя раўнанні маюць вельмі вялікую значнасць у жыцці, паколькі, рашаючы іх, г. зн. знаходзячы невядомую функцыю па яе ўласцівасцях, устанаўліваем закон, па якім ажыццяўляецца той ці іншы працэс (вытворчы, фізічны, хімічны, біялагічны і г. д.). Кожны вытворчы працэс мае сваю спецыфічную праблематыку, таму, натуральна, і апісваецца сваімі дыферэнцыяльнымі раўнаннямі.

Не існуе якіх-небудзь агульных правіл для складвання дыферэнцыяльных раўнанняў па ўмове канкрэтнай задачы. Важна, каб выконвалася наступнае патрабаванне: умова задачы павінна быць такой, каб можна было скласці суадносіны, якія звязваюць пераменную, функцыю гэтай пераменнай і яе вытворныя.

Знаёмячы вучняў з гарманічнымі ваганьнямі, указваем, што калі ўдарыць па камертоне, то чуваць заўсёды гук аднаго тону незалежна ад сілы ўдару. Аналагічна, націскаючы на адну і тую ж клавішу піяніна, чуюм гукі адной і той жа вышыні незалежна ад сілы націску. Гэтыя і шматлікія падобныя ім з’явы можна зразумець, разглядаючы цела, якое вагаецца, па аналогіі з ваганнем пругкай спружыны. Справа ў тым, што дыферэнцыяльныя раўнанні, якія апісваюць ваганні камертона, струны піяніна і г. д., набліжана супадаюць з раўнаннем руху пругкай спружыны, г. зн. з раўнаннем  $f''(t) = -\omega^2 f(t)$ , дзе аргумент  $t$  выражае час вагання,  $f(t)$  – велічыню зруху ад першапачатковага становішча.

Пры разглядзе формулы перыяду гарманічнага вагання  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  звяртаем увагу школьнікаў на такі дзіўны факт. У гэтую формулу ўваходзіць лік  $\pi$  – гэта ўказвае на сувязь гарманічнага вагання і вярчальнага руху па акружнасці. Калі пункт рухаецца па акружнасці так, што велічыня яго хуткасці пастаянная, то кожная праекцыя гэтага пункта на восі дэкартавай сістэмы каардынат выконвае гарманічныя ваганні. Гэта настаўнік можа паказаць школьнікам наглядна з дапамогай трыганаметра.

Доказ таго, што сума двух гарманічных ваганняў аднолькавай частаты з’яўляецца гарманічным ваганнем той жа частаты, заснавана на ўласцівасці рашэнняў дыферэнцыяльнага раўнання  $f''(t) = -\omega^2 f(t)$ : сума  $f_1 + f_2$  двух рашэнняў  $f_1$  і  $f_2$  гэтага раўнання таксама з’яўляецца яго рашэннем.

Усе рашэнні дыферэнцыяльнага раўнання  $f''(t) = -\omega^2 f(t)$  выражаюцца функцыямі выгляду  $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , дзе  $A$  і  $\varphi$  – адвольныя канстанты. Такім чынам, у агульнае рашэнне дыферэнцыяльных раўнанняў любога гарманічнага вагання ўваходзяць дзве адвольныя пастаянныя  $A$  і  $\varphi$ . Таму для знаходжання прыватнага рашэння (г. зн. рашэння канкрэтнай задачы) неабходна задаць пачатковыя ўмовы: у пачатковы момант задаць значэнне функцыі і яе вытворнай. Напрыканцы адзначаем, што пры выкладанні пытання “Паняцце аб дыферэнцыяльным раўнанні. Гарманічныя ваганні” не трэба абцяжарваць школьнікаў разглядам шматлікіх тэхнічных фактаў, якія звязаны з гарманічнымі вагальнымі рухамі. Не трэба з імі вымалёўваць шматлікія графікі трыганаметрычных функцый для гэтых выпадкаў. Важна дабіцца прынцыповага разумення пытання. Пабудову графікаў гарманічных ваганняў

можна выконваць на аснове даследавання функцыі па стандартнай схеме. Атрыманыя матэматычныя веды па гэтай тэме ў значнай ступені аблегчаць разуменне шматлікіх раздзелаў фізікі, біялогіі, хіміі.

Разгледзім прыклады практыкаванняў на дыферэнцыяльныя раўнанні (далей – ДР).

**Прыклад 1.** Знайдзіце рашэнне ДР

$$f''(t) = \frac{1}{16}f(t),$$

якое адказвае наступным пачатковым умовам:  $f(0) = 4$ ,  $f'(0) = \sqrt{3}$ .

*Рашэнне.* Рашэнне дадзенага ДР гарманічнага вагання ў агульным выглядзе можа быць запісана так:  $f(t) = A \cos(\frac{1}{4}t + \varphi)$ . Знайдзем  $f'(t)$ :

$$f'(t) = -A \sin\left(\frac{1}{4}t + \varphi\right) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{A}{4} \sin\left(\frac{1}{4}t + \varphi\right),$$

тады, згодна з дадзенымі пачатковымі умовамі, маем:

$$\begin{aligned} f(0) &= A \cos \varphi, & A \cos \varphi &= 4; \\ f'(0) &= -\frac{A}{4} \sin \varphi, & -\frac{A}{4} \sin \varphi &= \sqrt{3}, & A \sin \varphi &= -4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Атрымаем сістэму раўнанняў:

$$\begin{cases} A \cos \varphi = 4, \\ A \sin \varphi = -4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Адкуль знаходзім  $A$  і  $\varphi$ :

$$\frac{A \cos \varphi}{A \sin \varphi} = \frac{4}{-4\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}, \quad A \cos \frac{2\pi}{3} = 4, \quad A = -8.$$

Рашэннем дадзенага ДР будзе функцыя  $f(t) = -8 \cos(\frac{1}{4}t + \frac{2\pi}{3})$ . Пасля прымянення формул прывядзення прымае выгляд

$$f(t) = 8 \sin\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{6}\right).$$



УДК 372.85(035.3)

**Н. И. КОВАЛЕВИЧ**

Беларусь, Брест, БОИРО

## **ПЛАНИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ**

Решение математических задач различными методами способствует:

- актуализации определённых предметных знаний;
- формированию положительной внутренней мотивации учащихся;
- формированию умения учащихся составлять, на основе опорных, более сложные задачи;
- пополнению банка действенных приемов в работе над математической задачей;
- формированию синтетическо-аналитического стиля мышления обучаемых;
- системному усвоению учащимися предметного содержания;
- организации самоконтроля за процессом работы над задачей;
- реализации принципа наглядности в обучении (в контексте излагаемого – иллюстрируются методы решения планиметрических задач: алгебраический, тригонометрический, геометрический, комбинированный) и др.

Поиск различных способов – само по себе занятие увлекательное и познавательное, формирующее мотивационную основу усвоения содержания школьного курса математики.

Общепринятой классификации методов решения планиметрических задач не существует, но обозначенная нами выше с практической точки зрения удобна.

При использовании алгебраического метода составляются уравнения или системы уравнений, содержащие заданные и искомые величины. Интерпретация полученных решений уравнений, систем уравнений приводит к желаемому результату. При использовании тригонометрического метода в качестве опорных элементов выбираются углы, используются тригонометрические формулы и т. п., что в конечном итоге позволяет получить желаемый результат.

При решении задач геометрическим методом требуемые утверждения выводятся посредством логических рассуждений из ряда теоретиче-

ских положений. К геометрическим методам обычно относят метод геометрических преобразований: выполняются поворот, центральная и осевая симметрии, гомотетия, инверсия, параллельный перенос и др.; при использовании методов этой группы часто используются дополнительные построения: построение описанной, вписанной окружностей треугольника, четырехугольника, проведение через заданную точку прямой, параллельной (перпендикулярной) данной прямой и т. д.

При использовании комбинированного подхода ряд этапов решения реализуется геометрически, а ряд – алгебраически.

В процессе решения планиметрических задач различными способами формируется широкий спектр истинных суждений, способствующих осознанному, глубокому, прочному, обобщенному, системному усвоению математического содержания. Например, доказать, что две прямые параллельны между собой, можно, установив, что обе прямые перпендикулярны к третьей прямой; каждая из них порознь параллельна третьей прямой и т. д.; для того, чтобы все вершины четырехугольника  $ABCD$  располагались на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из равенств:

$$1) \angle B + \angle D = 180^\circ;$$

$$2) \angle ABD = \angle ACD;$$

3)  $FA \cdot FC = FB \cdot FD$ , где  $F$  – точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ ;

4)  $NA \cdot NB = ND \cdot NC$ , где  $N$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ; катет прямоугольного треугольника равен сумме радиуса вписанной окружности и радиуса внеписанной окружности, касающейся этого катета; площадь треугольника выражается формулой  $S = (p - a)r_a$ , где  $r_a$  – радиус внеписанной окружности, касающейся стороны, равной  $a$ ,  $p$  – полупериметр треугольника и т. д.

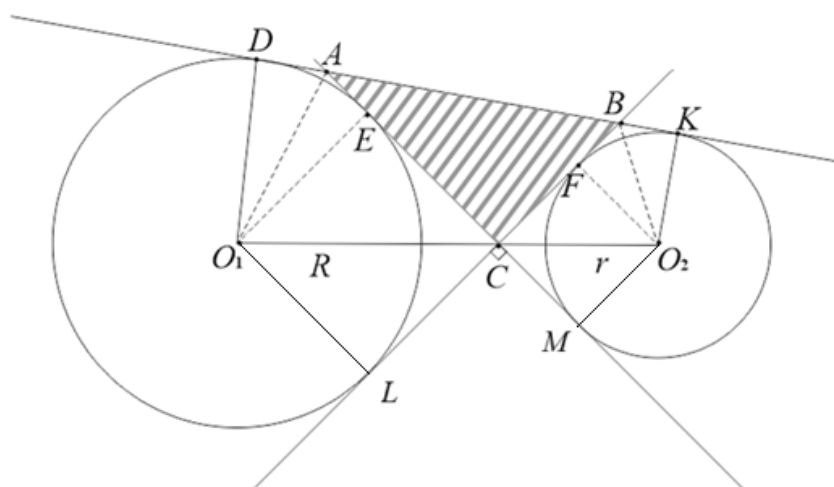
Приведем три способа (алгебраический, тригонометрический и геометрический) решения одной задачи.

**Задача.** Даны две непересекающиеся окружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  радиусов  $R$  и  $r$  соответственно. Их общие внутренние касательные  $ME$  и  $LF$  взаимно перпендикулярны (рисунок). Найти площадь треугольника  $ABC$ , образованного этими касательными и общей внешней касательной  $DK$  окружностей.

*Решение.* Обозначим через  $S$  искомую площадь  $\triangle ABC$ .

*I способ.* Пусть  $AD = x$ ,  $BK = y$ . Тогда  $AE = x$  и  $FB = y$  – как отрезки касательных прямых, проведенные из одной точки к одной окружности. По условию,  $\angle ACB = 90^\circ$ .

Заметим, что  $\angle O_1EC = O_1LC = 90^\circ$  как углы между касательной и радиусом, проведенным в точку касания. Тогда  $O_1ECL$  является прямоугольником. Поскольку  $O_1E = O_1L = R$ , то  $O_1ECL$  – квадрат со стороной  $R$ . Аналогично доказывается, что четырехугольник  $O_2FCM$  – квадрат со стороной  $r$ .



Рисунок

$MA = AK$  и  $LB = BD$  как отрезки касательных прямых, проведенных из одной точки к одной окружности. Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + R + r = AB + y, \\ y + R + r = AB + x. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим, что

$$x - y = y - x \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Следовательно,  $AB = R + r$ .

Согласно теореме Пифагора для  $\triangle ABC$ , будем иметь

$$\begin{aligned} AB^2 = AC^2 + BC^2 &\Leftrightarrow (R + r)^2 = (x + R)^2 + (x + r)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + x(R + r) = Rr. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$S = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{(x+R)(x+r)}{2} = \frac{x^2 + x(R+r) + Rr}{2} = Rr.$$

*II способ.* Обозначим  $\angle DO_1E = \alpha$ . Тогда

$$\angle DAE = 180^\circ - \alpha, \quad \angle CAB = \alpha, \quad \angle ABC = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle FBK = 90^\circ + \alpha, \quad \angle FO_2K = 90^\circ - \alpha.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{(R+AE)(r+BF)}{2} = \frac{(R+R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})(r+r \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}))}{2} = \\ &= \frac{Rr}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{Rr}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) = Rr. \end{aligned}$$

*III способ.* Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  и  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ . Т. к. окружность с центром в точке  $O_1$  и радиуса  $R$  является вневписанной для  $\triangle ABC$ , касающаяся стороны  $AC$ , то  $S = (p-b)R$ . Аналогично получим, что  $S = (p-a)r$ .

Пользуясь равенством  $a^2 + b^2 = c^2$ , найдем, что

$$\begin{aligned} R &= \frac{S}{p-b} = \frac{ab}{a+c-b} = p + \frac{ab}{a+c-b} - \frac{a+b+c}{2} = \\ &= p + \frac{2ab - (a+c)^2 + b^2}{2(a+c-b)} = p + \frac{2ab - 2ac - 2a^2}{2(a+c-b)} = p - a, \end{aligned}$$

т. е.  $R = p - a$ . Отсюда следует, что

$$S = r(p - a) = Rr.$$

**Ответ:**  $Rr$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров, А. И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8–11 классы : пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / А. И. Азаров, В. В. Казаков, Ю. Д. Чурбанов. – Минск : Аверсэв, 2005. – 336 с.

УДК 378

**В. С. КОРНИЛОВ**

Россия, Москва, МГПУ

**РАЗВИТИЕ У СТУДЕНТОВ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ  
ОБУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТНЫХ ЗНАНИЙ НА ЗАНЯТИЯХ  
ПО ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ  
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Успешная вузовская подготовка будущих специалистов прикладной математики обеспечивается не только привлечением студентов начиная с младших курсов к научной деятельности (научно-исследовательские практики, выполнение курсовых и выпускных квалификационных работ, научные семинары, конференции и др.), преподаванием базовых физико-математических дисциплин, но и преподаванием курсов по выбору. Посещая такие курсы по выбору, студенты знакомятся с современными достижениями мировой науки в области прикладной математики.

Одними из таких курсов по выбору, содержащихся в учебных планах подготовки будущих специалистов прикладной математики, являются курсы по выбору, посвященные теории и практике обратных задач для дифференциальных уравнений (далее – ОЗ) – одному из научных направлений прикладной математики, которое активно, вот уже на протяжении последних 60 лет, развивается в многочисленных работах отечественных и зарубежных авторов [1; 2; 3; 4; 5; 6]. Такие курсы по выбору преподаются в российских вузах для студентов физико-математических профилей подготовки уже более полувека, являются межпредметными дисциплинами [2].

Студенты на курсах по выбору по ОЗ закрепляют и развивают свои знания по прикладной и вычислительной математике, физике, в других предметных областях, таких, например, как философия. Студенты развивают свое мировоззрение, приобретают умения смотреть на ОЗ как на математические модели, описывающие процессы и объекты. Поясним вышесказанное.

*Развитие знаний по прикладной математике.* Студенты знакомятся с математическими учебными постановками ОЗ и учатся применять

методы математической физики для их решения (методы Грина, Даламбера, Кирхгофа, операторных уравнений, Пуассона, свертки, Соболева, Фурье, характеристик и др.), закрепляют знания и пополняют новыми знания по целому ряду дисциплин прикладной математики, среди которых можно отметить математический анализ, функциональный анализ, алгебру, интегральные уравнения и др. Например, решая обратную задачу в обобщенной постановке, студенты знакомятся с методом выделения сингулярной части у обобщенного решения соответствующей прямой задачи. Или, например, сконструировав систему уравнений, эквивалентную исходной, и представив его в виде операторного уравнения, студенты осваивают принцип сжатых отображений, позволяющий исследовать вопросы существования и единственности решения такого операторного уравнения.

*Развитие знаний по вычислительной математике.* Не секрет, что у многих ОЗ затруднительно найти точное решение. Одна из причин – их нелинейность. Поэтому неудивительно стремление специалистов по ОЗ на всем протяжении развития теории обратных задач разрабатывать приближенные методы их решения. Сегодня теория обратных задач обладает внушительным списком таких приближенных методов (оптимизационные, градиентные, вариационные, обращения разностных схем и др.). И с такими методами решения ОЗ студенты могут познакомиться на соответствующих курсах по выбору, приобрести умения и навыки их использования при решении ОЗ. Например, если тема курса по выбору посвящена конечно-разностным методам решения ОЗ, то преподаватель должен стремиться научить студентов привлекать математические методы (вариационно-разностные, интегро-интерполяционные и др.), позволяющие построить разностные схемы (явные, явно-неявные, неявные), обладающую нужным свойствам.

*Развитие физических знаний.* Прикладная направленность преподавания ОЗ позволяет преподавателю донести до сведений студентов физический смысл изучаемых прикладных задач с последующим анализом физических законов. Например, при рассмотрении темы курса по выбору, посвященной обратным задачам для системы уравнений Максвелла, важно обратить внимание студентов на то, что, например, значение электрической проводимости земной среды может менять тип дифференциального уравнения. В частности, в предположении большой прово-

димости земной среды из системы уравнений Максвелла можно получить ОЗ для параболических уравнений, но предположение наличия нулевой проводимости приводит уже к ОЗ для гиперболических уравнений. Или, например, знакомясь на курсах по выбору с ОЗ электродинамики, студенты осмысливают, например, распространение электромагнитных волн в земной среде, развивая знания о волновых процессах как форме движения материи.

*Развитие знаний о философских понятиях.* Рассматривая математические постановки ОЗ, преподавателю целесообразно обращать внимание студентов на философский смысл ОЗ – по известным следствиям определяются неизвестные причины, порождающие эти следствия. При рассмотрении, например, темы курса по выбору, посвященной коэффициентным ОЗ, студентам разъясняется, что неизвестными причинами являются коэффициенты уравнений, а следствия – функционалы от решения ОЗ. Взгляд на ОЗ и понимание причинно-следственных связей с философской точки зрения дает возможность студентам представить новую информацию, полученную с помощью решения ОЗ связанных с философскими вопросами естествознания.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватульян, А. О. Коэффициентные обратные задачи термомеханики : монография / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров. – Ростов н/Д : ЮФУ, 2022. – 178 с.
2. Корнилов, В. С. Теория и методика обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений : монография / В. С. Корнилов. – М. : ОнтоПринт, 2017. – 500 с.
3. Обратные задачи колебательной спектроскопии : монография / И. В. Кочкиков, Г. М. Курамшина, Ю. А. Пентин, А. Г. Ягола. – М. : КУРС, 2022. – 336 с.
4. Романов, В. Г. Устойчивость в обратных задачах : монография / В. Г. Романов. – М. : Науч. мир, 2005. – 295 с.
5. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : ЛКИ, 2020. – 480 с.
6. Hintz, P. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds / P. Hintz, G. Uhlmann, J. Zhai // International Mathematics Research Notices. – 2022. – Vol. 17. – P. 13181–13211.

УДК 378.147:51

**Е. А. КРАГЕЛЬ**

Беларусь, Брест, БрГТУ

## **ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СЛУШАТЕЛЕЙ-ИНОСТРАНЦЕВ НА ПОДГОТОВИТЕЛЬНОМ ОТДЕЛЕНИИ**

Экспорт образовательных услуг является одним из приобретённых направлений обучения в системе образования Республики Беларусь. Обучение иностранных граждан имеет ряд ключевых аспектов: экономическая выгода; международное признание, репутация, создание имиджа страны; культурный обмен; инновационное развитие; создание долгосрочных партнерств. Согласно статистическим данным [1], в настоящее время в учреждениях высшего образования Республике Беларусь обучаются 18 838 иностранных граждан из 87 стран мира.

Обучение иностранных граждан является достаточно сложным и трудоемким процессом. Трудности, с которыми сталкиваются как иностранные граждане, так и преподаватели, обусловлены рядом факторов, основными среди которых являются языковой барьер, низкий уровень подготовки по общетеоретическим дисциплинам (в том числе и по математике), культурные и религиозные различия.

Учитывая современные тенденции глобализации образования и необходимость адаптации учебных материалов под разные культурные и языковые особенности, использование информационных технологий при обучении математике иностранных граждан играет важную роль. Рассмотрим основные направления эффективного применения информационных технологий при обучении математике иностранных граждан.

### **Онлайн-курсы и платформы**

Многие университеты и образовательные организации предлагают онлайн-курсы математики для слушателей-иностранцев из разных стран. Примеры платформ: Kahoot!, Coursera, edX, Stepik, OpenEdu. Мы предлагаем в условиях смешанного обучения использовать систему электронно-образовательного ресурса на базе Moodle (abiturientu.bstu.by). Online курс «Математика» включает словари (представленные на нескольких языках), лекции (в pdf-формате), математические подкасты, интерак-



тивные задания, обучающие тесты, тесты на входе и на выходе, адаптированные под различные уровни подготовки учащихся [2].

### **Интерактивные программы**

Электронные учебники предоставляют возможность использовать мультимедийные элементы: анимации, графики, аудиообъяснения, которые помогают иностранным студентам лучше понимать материал даже при недостаточном знании языка. Например:

- Geogebra – программа для визуального изучения геометрии и алгебры, а также изучения «математического» русского языка [3].
- Mathematica, Maple, Matlab – мощные математические среды для выполнения сложных вычислений и моделирования.

### **Системы виртуальных репетиторов и тьюторов**

Для иностранных слушателей, которым сложно изучать математику на «неродном» языке, целесообразно использовать в обучении искусственный интеллект. Например, такие виртуальные помощники, как Photomath, Wolfram Alpha, Mathway, могут решать уравнения, преобразовывать выражения, давать пошаговые объяснения. Данные калькуляторы позволяют осуществлять самопроверку.

### **Игровые методы обучения (геймификация)**

Геймифицированные приложения и игры мотивируют слушателей-иностранцев к изучению математики через увлекательные задания, награды и достижения. Примером таких проектов являются DragonBox – серия игр, помогающих освоить основы алгебры через головоломки; Prodigy Math Game – образовательная игра, интегрированная с учебной программой.

### **Автоматизированные системы тестирования и обратной связи**

Тестирование помогает оценить уровень знаний студента, а также оперативно выявить пробелы в знаниях. Современные платформы могут автоматически анализировать результаты тестов и предлагать персонализированный учебный план. Примеры:

- Moodle – система управления обучением, включающая инструменты для проведения тестов и анализа результатов.
- Kahoot – платформа для создания викторин и игровых тестов.

### **Облачные решения и совместная работа**

Использование таких облачных сервисов, как Яндекс Телемост, Google Meet, Moodle, Google Classroom, Microsoft Teams позволяет

организовывать коллективную работу над проектами, проводить вебинары и обсуждения, обмениваться материалами и взаимодействовать в режиме реального времени. При проведении индивидуальных и групповых занятий можно использовать онлайн-доски (например, Miro).

### **Мультимедиаресурсы**

При проведении практических занятий на подготовительном отделении целесообразно использовать наглядность, что возможно реализовать, используя презентации Microsoft Powerpoint [4].

Реализация инфографики и системы интегрированных заданий по математике осуществляется средствами конструктора H5P, который легко встраивается в Moodle [5].

Математические подкасты, лекции и анимация помогают слушателям-иностранцам визуально воспринимать математический материал, особенно когда речь идет о концепциях, трудных для понимания на слух (например, математические подкасты из YouTube, Khan Academy). Применение современных информационных технологий существенно расширяет возможности преподавателей и студентов в изучении математики. Вышеперечисленные инструменты помогают сделать процесс обучения более гибким, доступным и эффективным.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Статистический ежегодник 2024 // Национальный статистический комитет Республики Беларусь (Белстат). – 2009. – URL: [https://www.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/publications/izdania/public\\_compilation/index\\_135040/](https://www.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/publications/izdania/public_compilation/index_135040/) (дата обращения: 31.03.2025).

2. Крагель, Е. А. On-line курс «Математика» как основной блок дистанционного обучения математике абитуриентов-иностранцев / Е. А. Крагель // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания : материалы междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ им. А. А. Кулешова, Могилев, 20–22 февр. 2013 г. / Могилев. гос. ун-т им. А. А. Кулешова ; редкол.: Т. Ю. Герасимова [и др.]. – Могилев, 2013. – С. 257–259.

3. Крагель, Е. А. GeoGebra как средство обучения слушателей-иностранцев на подготовительном отделении математической терминологии на русском языке // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 20 окт.

2023 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Д. В. Грицука. – Брест : БрГУ, 2023. – С. 51–53.

4. Крагель, Е. А. Презентации Microsoft Powerpoint при обучении математике слушателей-иностранцев на подготовительном отделении / Е. А. Крагель // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам : материалы XIV междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 29 мар. 2022 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т им. И. П. Шамякина ; редкол.: И. Н. Ковальчук [и др.]. – Мозырь, 2022. – С. 40–43.

5. Крагель, Е. А. Использование конструктора H5P при обучении слушателей-иностранцев математике на подготовительном отделении / Е. А. Крагель // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспект : сб. материалов респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2021. – С. 77–79.

УДК 371:517.0

**А. В. КРУК, Н. А. КАЛЛАУР**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕГРАТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

Интеграция в образовании – это процесс усвоения учениками всей совокупности знаний в их развитии, овладение общенаучным мировоззрением, формирующимся на знаниях всех предметов в их взаимосвязи.

Проблема интеграции является актуальной на современном этапе развития образования. Термин «интеграция» (от лат. *integration* – ‘восстановление, восполнение целого’) в толковом словаре трактуется как «объединение в целое каких-либо частей».

При реализации принципа интеграции в обучении обогащается содержание каждого из видов деятельности учащегося, усложняются способы его действий, более успешно вырабатываются оценочные суждения,

усиливаются коммуникативные связи в процессе применения учащими-ся знаний. «Взаимосвязь всех видов деятельности, включенных в учебный процесс, должна содействовать не только приобретению знаний, но и воспитанию, развитию многих необходимых качеств учащихся» [1].

Результатом интегрированного обучения являются различные аспекты. Например, у многих учащихся повышается уровень знаний, появляется интерес к предмету, формируется устойчивая мотивация [2].

Выделяют два вида интеграции: вертикальную и горизонтальную. Суть вертикальной интеграции – объединить в одном предмете материал, тематически повторяющийся в разные годы обучения на разном уровне сложности. В то время как горизонтальная интеграция связывает между собой различные учебные предметы.

Рассмотрим применение технологии интегративного обучения в процессе изучения школьной математики. Изучение математики как науки в школе должно строиться не только на основе формирования у учащихся определенных математических знаний, но и должно показывать применение данных знаний для решения практических задач. Межпредметные связи на уроках математики можно реализовать посредством решения задач с физическим, химическим, географическим и другим содержанием. Такие задачи помогут учащимся понять важность полученных знаний.

Изучение темы «Масштаб» предполагает интеграцию математики с географией. Взаимодействие с географией используется и в теме «Диаграммы». В теме «Пропорции» задачи на растворы дают возможность прикоснуться к такому еще незнакомому для шестиклассников предмету, как химия. Очень хорошо сочетаются физика и математика при изучении темы «Графики функций». С помощью графиков демонстрируется зависимость двух физических величин: скорость и расстояние, время и температура, масса и объем и т. д. Примеры можно приводить бесконечно.

Математика и физика являются одними из самых сложных школьных предметов. Наблюдения показывают, что сложности в каком-либо вопросе из курса физики часто связаны с непониманием зависимостей, сложностями в составлении и решении математических уравнений, неумением проводить преобразования и геометрические построения. Также

и в математике: некоторые задачи с точки зрения физики, знание и правильное применение физического материала позволяет эффективнее их решать. Например, при изучении законов движения можно использовать уравнения для расчета скорости, времени и расстояния.

Рассмотрим несколько примеров интеграции математики и физики по теме «Физический смысл производной».

**1.** В тонком неоднородном стержне длиной 30 см его масса (в г) распределена по закону  $m = 2l^2 + 7l$ , где  $l$  – длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность в точке: *a*) отстоящей от начала стержня на 3 см; *b*) в конце стержня.

*Решение.*

$$a) \rho(l) = m'(l) = 4l + 7, \quad \rho(3) = 19 \text{ г/см.} \quad b) \rho(30) = 127 \text{ г/см.}$$

*Ответ:* 19 г/см; 127 г/см.

**2.** Точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = 5t^2 + 3t - 12$ , где  $x(t)$  – перемещение в сантиметрах,  $t$  – время в секундах. В какой момент времени скорость точки будет равна 33 см/с?

*Решение.*

$$v(t) = x'(t) = 10t + 3; \quad 10t + 3 = 33; \quad 10t = 30; \quad t = 3.$$

*Ответ:* 3 с.

**3.** Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента  $t = 0$ , задается формулой  $q = 3t^2 + 2t + 2$ . Найдите силу тока в момент времени  $t = 5$ .

*Решение.*

$$I(t) = q'(t) = 6t + 2, \quad I(5) = 32 \text{ А.}$$

*Ответ:* 32 А.

Использование интеграции на уроках математики представляет собой важный и эффективный подход к обучению, который значительно обогащает образовательный процесс и способствует более глубокому усвоению знаний. Интеграция позволяет создать целостную картину мира, в которой математика не воспринимается как изолированная дисциплина, а рассматривается в контексте других предметов и реальных жизненных ситуаций.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилюк, А. Я. Теория интеграции образования / А. Я. Данилюк ; Рост. гос. пед. ун-т. – Ростов н/Д : РГПУ, 2000. – 439 с.
2. Методический семинар «Формирование познавательной учебной деятельности на уроках математики с применением технологии интегрированного обучения». – URL: <https://nsportal.ru/shkola/materialy-k-attestatsii/library/2020/05/06/metodicheskij-seminar-formirovanie-poznavatelnoy> (дата обращения: 13.03.2025).

УДК 378.14

**В. В. КУГАЧ, Н. Н. СЕНДЕР**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕЧЕНИЙ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ**

Организация и проведение уроков, ориентированных на построение сечений многогранников, имеют особое значение, так как являются фундаментальной основой для решения задач на построение сечений, нахождение их площадей и периметров, углов между сечениями и плоскостями, расстояний между плоскостями сечений и другими элементами.

Метод сечений играет ключевую роль в образовательном процессе, особенно в преподавании геометрии. Уроки, ориентированные на построение сечений многогранников, являются основой для решения задач, связанных с нахождением площадей, периметров, углов между сечениями и плоскостями, а также расстояний между плоскостями. Основной целью таких уроков является освоение учащимися методов построения сечений, что достигается через планирование личностных, предметных и метапредметных результатов.

Личностные результаты включают в себя:

- умение распознавать логически некорректные высказывания;
- развитие критического мышления;
- готовность к сотрудничеству и взаимопомощи;
- способность к самообразованию.

Предметные результаты:

- понимание аксиоматического построения математических теорий;
- владение информационно-коммуникационными технологиями для решения задач;
- умение применять методы доказательства и алгоритмы;
- проведение доказательных рассуждений в ходе выполнения учебных заданий.

Метапредметные результаты:

- самостоятельное определение плана действий и целей;
- корректировка и контроль своей деятельности;
- поиск методов решения практических задач;
- владение языковыми средствами.

Эти результаты могут корректироваться в зависимости от целей обучения и темы занятия.

На уроках геометрии применяются различные методы продуктивного обучения, такие как метод учебного познания, метод сравнения, эвристические вопросы и другие [1]. Эти методы способствуют формированию представлений о сечении и развитию навыков его построения. К таким методам продуктивного обучения также относятся:

- метод учебного познания;
- метод сравнения;
- метод эвристических вопросов;
- метод исследования;
- метод конструирования предписаний;
- методы организации учения;
- метод ученического целеполагания;
- метод ученического планирования;
- метод взаимного обучения;
- метод нормотворчества;
- метод рецензий;
- метод контроля, рефлексии и самооценки [1].

Форма организации учебной деятельности также может быть различной, например: фронтальная, индивидуальная или групповая работа. Чаще всего учителем применяется фронтальная работа при организации внимания учащихся, объяснения им новой информации и проработки задания по алгоритму в совместной деятельности со всем классным

коллективом. Групповая работа чаще всего используется для отработки алгоритма метода сечения, проработки заданий по алгоритму или заданному образцу. Индивидуальная работа применяется в том случае, когда учащиеся успешно усвоили тему и способны к индивидуальной работе [2].

Реализация данных методов на уроках по формированию и развитию умения работать с методом сечения позволяет успешно формировать представление о сечении, его возможностях, а также способствует развитию умения строить сечения, определять их площадь и периметр и выполнять другие учебные задачи. Данные методы могут быть использованы как единолично, так и комбинированно.

Организация и проведение уроков, ориентированных на построение сечений многогранников, имеют особое значение, так как они являются фундаментальной основой для решения задач на построение сечений, нахождения их площадей и периметров, углов между сечениями и плоскостями, расстояний между плоскостями сечений и другими элементами.

Метод сечений является важным инструментом в обучении геометрии, способствующим развитию пространственного мышления и навыков работы с геометрическими фигурами. Эффективная организация уроков, использование разнообразных методов и задач, а также систематическое применение разработанных комплексов заданий позволяют достигать высоких результатов в обучении.

Таким образом, последовательная работа при построении сечений с использованием различных методов позволяет развивать умения работать с данными методами и устранять недостатки ранее полученных учебно-познавательных знаний по данным темам.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуторский, А. В. Современная дидактика / А. В. Хуторский. – М. : Юрайт, 2023. – 406 с.
2. Семушина, Л. Г. Содержание и технологии обучения в средних специальных учебных заведениях / Л. Г. Семушина, Н. Г. Ярошенко. – М. : Мастерство, 2001. – 272 с.



УДК 378.14

**А. Н. СЕНДЕР, Н. Н. СЕНДЕР**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

## **УПРАВЛЯЕМАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ КАК ОДНО ИЗ УСЛОВИЙ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТА**

Перед современной высшей школой стоят следующие проблемы. Во-первых, важно уменьшить время и трудозатраты преподавателя и студента по подготовке к традиционным лекционным, семинарским, практическим и другим занятиям. Во-вторых, надо тем не менее обеспечить качество образования. В-третьих, очень важно вписаться в международное образовательное пространство.

Решение этих задач невозможно без повышения роли управляемой самостоятельной работы студентов (УСРС), усиления ответственности преподавателя за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание их творческой активности и инициативы, стремления к пополнению и обновлению знаний, к творческому использованию их на практике, в сферах будущей профессиональной деятельности [1]. Студента следует рассматривать как активный субъект учебного процесса, а не как пассивный объект обучения и включать его в активную учебную деятельность, «учить учиться», оказывать ему помощь в приобретении знаний.

В вузе основной формой организации обучения является лекция, представляющая собой устное изложение преподавателем учебного материала, сопровождаемое при необходимости демонстрацией иллюстративных материалов и записями на доске. На лекции за сравнительно короткое время можно дать объемный материал, а благодаря системности его подачи создать целостное представление об изучаемом объекте.

Однако у преподавателя и студента возникают некоторые трудности:

1) лектору, излагающему теоретический материал на высоком научном и методическом уровне, трудно обеспечить активное внимание всех студентов на протяжении всего лекционного занятия;

2) студент, еще вчерашний школьник, сталкивается с данной формой изложения учебного материала впервые, что приводит к его быстрой

утомляемости на лекционном занятии при прослушивании монологической речи преподавателя;

3) неосвоенная техника конспектирования не позволяет обучаемому отражать в своих конспектах необходимый для усвоения материал;

4) новизна в подаче учебного материала, несформировавшиеся умения его конспектирования отвлекают студента от осмысления содержания лекции.

Применение информационно-компьютерных технологий в обучении предоставляет вариант решения одной из актуальных проблем преподавания математических дисциплин в университете – невозможности в отведенные учебным планом часы лекций изложить темы дисциплины в достаточно полном объеме, с обоснованиями основных выводов. При этом начальная подготовка большинства студентов требует существенной компенсации, поэтому часто наблюдается невозможность восприятия аудиторией многих вопросов математических дисциплин с общепринятой в математике строгостью.

С целью повышения качества профессиональной подготовки студентов, активизации их работы на учебных занятиях, организации УСРС и подготовки конкурентоспособного саморазвивающегося педагога нами разработаны учебно-методические комплексы (УМК) по математике и на их базе электронные учебно-методические комплексы (ЭУМК), включающие в себя типовую учебную программу, конспекты лекций, планы практических занятий с решенными типовыми примерами, с подбором задач для самостоятельного решения, контрольные вопросы по теории, индивидуальные задания, вопросы и задания, выносимые на экзамен. Имеющаяся в ЭУМК система гиперссылок позволяет быстро найти нужный материал. ЭУМК содержат тесты как по теории, так и по решению практических примеров.

Итак, наличие учебно-методического комплекса позволяет педагогу:

- сократить объем конспектирования лекционного материала,
- использовать интерактивные методы обучения,
- увеличить скорость подачи материала,
- стимулировать активность и самостоятельность студентов,
- создать условия для профессионального развития и саморазвития студентов,
- взять на себя роль организатора среды обучения, консультанта.

Творчество в педагогической деятельности проявляется по-разному: в нестандартном подходе к решению проблем, в эффективном применении имеющегося опыта в новых условиях, в умении видеть множество вариантов решения одной и той же проблемы, в умении трансформировать теоретические положения в конкретные педагогические действия и т. д.

В подготовке специалиста, владеющего данными умениями, большую роль играет самостоятельная работа студентов, которая сегодня стала важным компонентом педагогического процесса. Роль самостоятельной работы в развитии творческих способностей возросла и в связи с тем, что она интегрирует разные виды индивидуальной и групповой учебной деятельности во время аудиторных и внеаудиторных занятий, под руководством преподавателя или без непосредственного его участия. А это важно еще и потому, что особенностью педагогического творчества является то, что оно всегда выступает как сотворчество.

Главную роль в организации самостоятельной работы студентов играет их умение работать с книгой. К сожалению, сегодня преподаватели высшей школы столкнулись с двумя проблемами. С одной стороны, у многих первокурсников слабо сформированы навыки самостоятельной работы с книгой (культура чтения, культура краткой и рациональной записи, приемы поиска дополнительной информации), а с другой – свободный доступ к сети Интернет (получение любой информации) у ряда студентов формирует нежелание работать с книгой. Познавательная же деятельность студента в вузе требует сформированности умений не только грамотно устно и письменно излагать свои мысли, но и слушать и одновременно мысленно обрабатывать услышанное, выделяя основные положения лекции, прочитанного источника. Таким образом, перед преподавателями встала задача – помочь студентам овладеть технологией учебной деятельности в высшей школе, сформировать у них методологические знания, умение анализировать, сравнивать, обобщать полученную информацию и т. д.

Невысокий уровень методологических знаний студентов, как показывает повседневная практика, проявляется в неумении установить связи между явлениями и процессами, образующими одну систему; найти причинно-следственные отношения; осознать глубокие сущностные основания, по которым он делает то или иное умозаключение; сформулировать соответствующее обобщение, результат сравнения [2].

Совместная деятельность преподавателя и студентов способствует тому, что и те и другие постоянно находятся в курсе достижений педагогической науки, ориентируются на новые идеи в современном человекознании, используют в своей деятельности диагностический подход, анализируют ее, аргументируют предложенные выводы. Все это способствует формированию творческих способностей студентов.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобанов, А. П. Управляемая самостоятельная работа студентов в контексте инновационных технологий / А. П. Лобанов, Н. В. Дроздова. – Минск : 2005. – 107 с.
2. Сендер, А. Н. История и методология начального курса математики / А. Н. Сендер. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2003. – 155 с.

УДК 378.147:004

**В. Б. ТАРАНЧУК**

Беларусь, Минск, БГУ

#### **ТЕХНИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗРАБОТКИ И ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО КОНТЕНТА**

В статье обсуждаются методические и технические решения, вопросы интеграции средств LMS Moodle и системы Wolfram *Mathematica* при создании и сопровождении адаптивного интеллектуального контента, умной информационно-образовательной среды, применяемой при преподавании дисциплин компьютерного моделирования, когнитивной графики, интеллектуального анализа данных.

В статье будут детализированы новые апробированные методические, алгоритмические и технические решения, приемы адаптации компьютерных средств, методы и инструменты наполнения и редактирования интерактивных интеллектуальных образовательных ресурсов. Примерами будут проиллюстрированы варианты применения предлагаемого подхода создания умной образовательной среды, при очно-виртуальном преподавании в БГУ таких дисциплин, как когнитивная визуализация (для специальности «Прикладная математика»), компьютерный

анализ и визуализация (для специальности «Прикладная информатика»), технологии интерактивной визуализации (для специальности «Информатика») на факультете прикладной математики и информатики и компьютерные системы и визуализация данных (для специальности «Механика и математическое моделирование») на механико-математическом факультете.

**Методические вопросы, особенности организации занятий.** Использование электронных образовательных ресурсов стало нормой на всех этапах и для всех видов обучения. Программное обеспечение интеллектуальных образовательных технологий предоставляет разные эффективные инструменты создания и сопровождения контента, многие из которых с дружественным интерфейсом, но сейчас этого уже недостаточно. Нужны инструменты интеллектуальной адаптации, которые давали бы желающим возможности маневра, свободного выбора индивидуальной траектории обучения, причем (что принципиально важно), при минимальном вмешательстве преподавателя. Знаковые позиции технологии реализованы при преподавании упомянутых выше дисциплин. Базовые элементы технологии (вопросы развития и адаптации интерактивной технологии обучения типа eLearning в среде дистанционного обучения Moodle; варианты расширения базовых функциональных возможностей Moodle путем включения дополнительных сервисов, интерактивных ресурсов формата вычисляемых документов CDF), как они технически реализуются пояснено в [1–5].

**Несколько обязательных позиций регламента проведения занятий, применения, настройки, адаптации интеллектуальных средств обучения.** Лекции и лабораторные занятия проводятся один раз в неделю в компьютерном классе. Лабораторные занятия проводятся согласно расписанию сразу за лекционными. Все занятия поддерживаются системой электронного обучения (далее – СЭО) Moodle. В каждом конкретном ресурсе СЭО «Курс» в первом блоке «Общее» размещены элементы: «Объявления», форум «Вопросы и ответы по заданиям лекций, тестов», страница «О дисциплине». Далее размещаются блоки «К лекции, практике N (дд.мм)», причем с сортировкой «Новый вверху», предыдущие блоки визуализируются в режиме «Свернуть». Содержание таких блоков поясняется отдельно. Фактически все студенты работают

на личных компьютерах, доступ к Сети – университетский или от своих провайдеров (предпочтения у большинства именно такие).

В течение всего времени изучения курса для оценки текущих достижений действует рейтинговая система, каждый студент имеет индивидуальный рейтинг, который отслеживается в стандартном модуле СЭО и размещаемом на странице элемента «Форум» Moodle в XLS документе – доступная всем обучаемым сводная таблица рейтингов, которая обновляется не реже одного раза в неделю. В сводной таблице по итогам каждой пары занятий (лекция и лабораторная) отражаются баллы:

- призовые за правильные ответы на блиц-вопросы на лекциях (3–4 вопроса/задания на каждой лекции, 3–5 баллов за правильный ответ);
- штрафные (–3 балла) за каждый не отправленный на лекции ответ (пропуск лекции, в случае уважительных причин такие обнуляются);
- призовые (30–80 баллов) за правильно выполненные эвристические задания (не обязательные, «избранные задачи для избранных»), выкладываются и подлежат сдаче на проверку в период 2–3 дня до очередного занятия, проверяются преподавателем;
- по итогам тестов (в каждом – 12–14 заданий, большинство – функциональное программирование; в каждом курсе 15 тестов; все задания проверяются и оцениваются автоматически; 40 минут на выполнение);
- призовые за инициативные предложения уточнений материалов лекций и тестовых вопросов/заданий (если таковые «по делу» и опубликованы студентами на форуме, повторы игнорируются);
- итоговый показатель накопленного индекса успешности.

**Заключение.** Целью доклада является обсуждение инструментов подготовки интеллектуального контента, его распространения и использования без ограничений в любых сетях коммуникаций и на любых устройствах; контента, создаваемого и сопровождаемого на основе предложенной методики интеграции средств системы *Mathematica*, формата вычисляемых документов, в том числе в среде Moodle.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таранчук, В. Б. Возможности и средства Wolfram Mathematica для разработки интеллектуальных обучающих систем / В. Б. Таранчук // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. – 2015. – Т. 33, № 1 (198). – С. 102–110.

2. Taranchuk, V. B. Development of interactive teaching materials for computer mechanics. / V. B. Taranchuk, M. A. Zhuravkov // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. – 2016. – № 3. – С. 97–107.

3. Таранчук, В. Б. Примеры создания и использования интеллектуальных учебных материалов / В. Б. Таранчук // Проблемы повышения эффективности образовательного процесса на базе информационных технологий : сб. материалов XII Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 25 апр. 2019 г. / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники ; редкол. : Ю. Е. Кулешов [и др.]. – Минск : БГУИР, 2019. – С. 175–180.

4. Таранчук, В. Б. Практические аспекты разработки, сопровождения, использования интеллектуальных информационно-образовательных ресурсов / В. Б. Таранчук // Информатизация образования и методика электронного обучения : материалы III Междунар. науч. конф., Красноярск, 24–27 сент. 2019 г. : в 2 ч. / Сиб. федер. ун-т ; под общ. ред. М. В. Носкова. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2019. – Ч. 1. – С. 116–121.

5. Таранчук, В. Б. Методические и технические аспекты разработки адаптивных интеллектуальных обучающих систем / В. Б. Таранчук // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании : материалы VII Междунар. науч. конф., Красноярск, 19–22 сент. 2023 г. / Краснояр. гос. пед. ун-т ; под общ. ред. М. В. Носкова. – Красноярск : Краснояр. гос. пед. ун-т, 2023. – С. 1361–1365.

УДК 004.021

**С. Н. ТКАЧ**

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**СПОСОБЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕХАНИЗМА**

**«ЛЮБЫЕ КОМПОНЕНТНЫЕ БЛОКИ»**

**В APP INVENTOR**

В последнее время в учреждениях образования стали популярны визуализированные языки программирования (Scratch, APP Inventor и проч.) для изучения технологий программирования. С их помощью

удается в легкой игровой форме развивать логическое и алгоритмическое мышление обучающихся. При этом визуализированные языки содержат многие понятия классического программирования. Онлайн-платформа APP Inventor позволяет создавать приложения для телефонов или планшетов, используя визуальные блоки и другие инструменты визуализированных языков.

При написании приложений на визуальных языках программирования возникает необходимость создания однотипного кода для нескольких одинакового типа компонентов. Например, на сцене располагается девять кнопок *Кнопка1* – *Кнопка9*. При щелчке на каждой кнопке ее цвет должен стать красным. Конечно, можно создать один обработчик события *Кнопка1.Щелчок* (рисунок 1), а затем продублировать его 8 раз, изменяя входящие в него ссылки *Кнопка1* на ссылки на другие *Кнопки*.

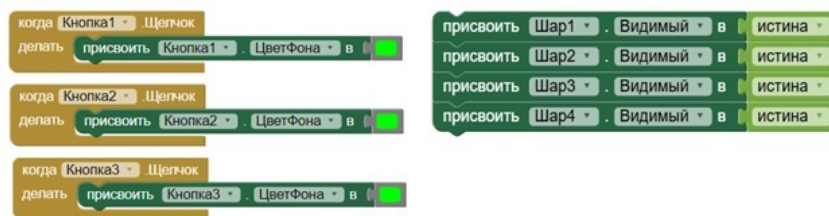


Рисунок 1 – Примеры однотипных блоков программного кода для одинаковых компонентов

Однако в APP Inventor использован механизм «Любые компонентные блоки», реализующий принцип «Не повторяйся». Эти блоки позволяют обратиться к компонентам не по имени, а по признаку отношения их к одному классу (например, ко всем кнопкам сразу) или вхождения их в один список.

Вместо того, чтобы создавать много повторяющегося кода, можно использовать специальные блоки, называемые блоками «Любой компонент». Чтобы получить доступ к блокам *Любого компонента*, нужно в режиме *Блоки* нажать на кнопку «+» слева от названия «Любой компонент», затем выбрать компонент, например, *ДругаяКнопка*.

В раскрывшемся списке можно получить доступ к компонентам одного и того же класса (кнопки, акселерометры, изображения), а также к любым блокам этих компонентов, реализующим свойства, методы, события компонентов. Каждому из трех основных типов блоков компонентов, т. е. событиям, методам и свойствам, соответствуют блоки из раз-



дела «Любой компонент». Рассмотрим несколько способов применения механизма «Любые компонентные блоки».

1. Применение одного программного кода одновременно ко всем компонентам определенного класса, располагающимся на сцене.

Пусть, например, при изменении выбора *Флажка1* все кнопки, расположенные на сцене, должны стать зеленого цвета. В этом случае в обработчике события *Флажок1.Изменено* вместо обращения к каждой из кнопок по отдельности можно воспользоваться блоком «Для каждого элемента в списке» из *Управления* (рисунок 2).

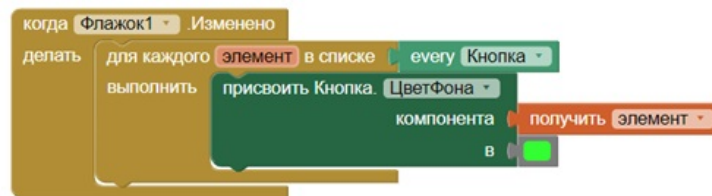


Рисунок 2 – Использование механизма «Любые компонентные блоки» для всех кнопок на сцене одновременно

Вместо ссылки на список в блок «Для каждого элемента в списке» в этом случае помещается ссылка на любую кнопку «every Кнопка». Блок «every Кнопка» находится в перечне блоков «Любой компонент» – «ДругаяКнопка». Параметр «элемент» внутри блока «Для каждого элемента в списке» является ссылкой на *Кнопку*, с которой сейчас работает блок, то есть в результате на каждую кнопку на сцене.

В результате применения блока «Для каждого элемента в списке» с параметром «every Кнопка» программный код после слова «выполнить» будет применен одновременно ко всем компонентам одного вида (например, кнопкам), расположенным на сцене.

2. Применение одного программного кода к любому компоненту определенного класса, расположенному на сцене.

Такой метод опирается на использование обработчиков событий компонента. Создается один обработчик события, например, щелчок по кнопке, где в качестве ссылки на компонент указывается не конкретный компонент *Кнопка1*, а общее название компонентов данного класса *Кнопка* (рисунок 3).

Программный код, прописанный в обработчике события, срабатывает не одновременно для всех компонентов одного класса, а только тогда,

когда наступает соответствующее событие. Таким образом программный код не применяется одновременно для всех компонентов.



Рисунок 3 – Использование механизма «Любые компонентные блоки» для тех кнопок на сцене, для которых наступило событие *Щелчок*

3. Применение одного программного кода к компонентам определенного класса, перечисленным в *Списке*.

В случае, если программный код должен быть применен лишь к некоторым компонентам определенного класса на сцене, такие компоненты необходимо перечислить в списке (рисунок 4). В приведенном на рисунке 4 примере список создается как глобальная переменная *НекоторыеКнопки*. Элементами списка являются блоки-ссылки на соответствующие компоненты.

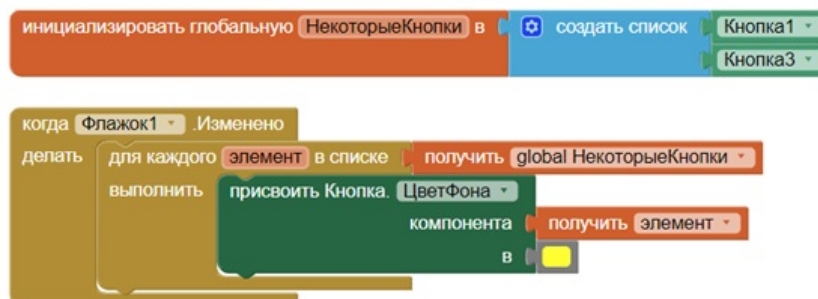


Рисунок 4 – Использование механизма «Любые компонентные блоки» для тех кнопок на сцене, которые перечислены в списке

Каждый исполняемый блок компонента состоит из трех частей: изменяемый компонент, часть компонента, которой манипулируют, и вход. Вместо того, чтобы привязывать блок к определенному компоненту, они позволяют сделать код более общим, предоставляя любой компонент одного и того же типа в качестве входа. Это позволяет, например, создать список кнопок *НекоторыеКнопки* и изменить *ЦветФона* только определенным кнопкам одновременно с помощью цикла «Для каждого элемента в списке» (рисунок 4).

Таким образом, в APP Inventor механизм «Любые компонентные блоки» реализует инкапсуляцию логики в некоторой конструкции программирования. Такая конструкция заменяет дублированный код для нескольких компонентов, что является эффективным по многим параметрам, в том числе и при необходимости внесения изменения в код программы.

УДК 004.4:519.17

**Л. А. ЯРМОЛИК, В. А. ШЕЙНА, А. И. ЖУК,  
Е. Н. ЗАЩУК**

Беларусь, Брест, БрГТУ

## **ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ В СИСТЕМЕ WOLFRAM MATHEMATICA**

Целью настоящей работы является практическая реализация теории графов в одной из универсальных математических систем Wolfram Mathematica. Рассматриваются способы представления и задания графов, встроенные функции для работы с графами и их тестирования, способы нахождения кратчайшего пути [1]. Приведены рекомендации по использованию Mathematica при обучении теории графов [2, 3].

Визуально граф может быть представлен в виде конечного множества вершин, которые могут быть изображены точкой, и конечного множества их парных связей – линий, соединяющих соответствующие вершины (ребра). В пакете предусмотрены встроенные функции Graph и RandomGraph, которые позволяют изменять цвет, форму и размер вершин, цвет и стиль линии ребер, указывать вес ребер и отображать его на графе [2].

Например, на рисунке 1 сформирован следующий граф из шести вершин, при наведении курсора на который появляется информационное табло, которое позволяет без непосредственного введения встроенных функций вывести информацию о графе на экран. Например, проверить, является ли граф связным или гамильтоновым, содержит ли петли и циклы, вывести степени входа и выхода вершин и список ребер, матрицу смежности и инцидентности и др.

Out[\*]=

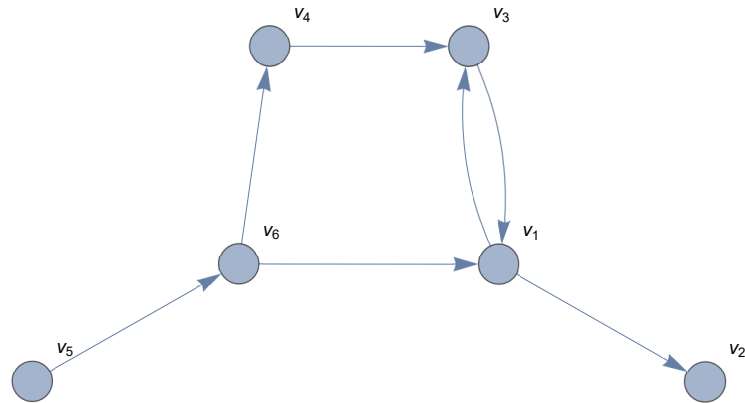


Рисунок 1 – Сгенерированный граф из шести вершин

Рассмотрим задачу о Кенигсбергских мостах: имеются четыре части суши и семь мостов. Необходимо обойти все части суши, пройдя по каждому мосту ровно один раз, и вернуться в исходную точку. Для решения построим граф кенигсбергских мостов с помощью матрицы смежности, используя функцию `AdjacencyGraph`. На языке графов задача формулируется следующим образом: существует ли в графе простой цикл, содержащий все ребра графа (эйлеров цикл)? Для ответа на этот вопрос воспользуемся встроенной функцией `FindEulerianCycle`.

```

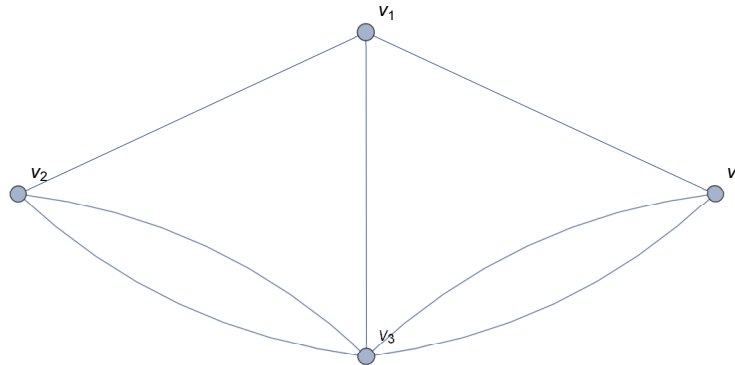
G1=AdjacencyGraph[0, 1, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 2, 0, VertexLabels
-> Table[i -> Subscript[v, i], i, 4]]
FindEulerianCycle[G1]

```

На рисунке 2 показан пример графа, который не является эйлеровым. Следовательно, нельзя обойти все части суши, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

Рассмотрим следующую прикладную задачу. Пусть вершины графа – населенные пункты, а связывающие их грунтовые дороги – его ребра, расстояния между населенными пунктами – вес соответствующего ребра. Требуется спланировать наиболее экономичную сеть дорог с твердым покрытием, заменяющих часть грунтовых дорог и связывающую все населенные пункты. Решение этой задачи сводится к построению минимального остовного дерева. Для поиска минимального остовного дерева в системе `Mathematica` воспользуемся функцией `FindSpanningTree` и выделим его в исходном графе, используя функцию `HighlightGraph`, и найдем длину полученной дорожной сети.

Out[\*]=



Out[\*]=

{ }

Рисунок 2 – Граф, сформированный по заданной матрице смежности

На рисунке 3 построен минимальный путь по ребрам с указанными весами и найдена его длина, равная 13.

Out[\*]=

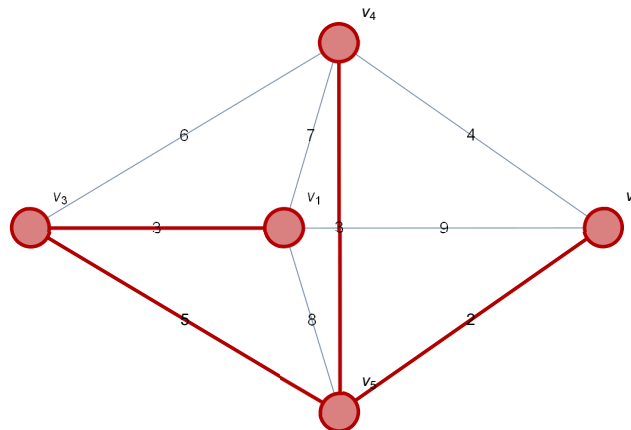


Рисунок 3 – Построение минимального остовного дерева

Следует отметить, что при использовании встроенной функции FindSpanningTree метод поиска выбирается автоматически и зависит от типа и вида графа; если необходимо выбрать метод поиска вручную, можно использовать следующую опцию:

FindSpanningTree[g,Method?"Prim"("Kruskal MinimumCostArborescence)] и задать нужный алгоритм. При решении некоторых прикладных задач существует необходимость найти максимальное остовное дерево, в этом случае также применяется встроенная функция FindSpanningTree, только перед ее применением вес каждого ребра умножается на -1. Построим для того же графа, что и на рисунке 3, максимальное остовное дерево (рисунок 4).

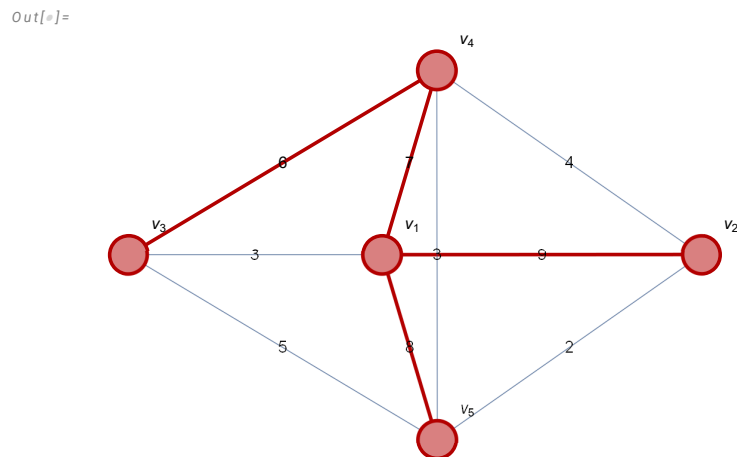


Рисунок 4 – Построение максимального остовного дерева

В ходе проведения исследования были изучены основные встроенные функции в рассматриваемом пакете Mathematica для работы с графами и решены некоторые классические задачи элементов теории графов. В перспективе на основании проведенного исследования можно составить методическую разработку для проведения со студентами лабораторных работ по соответствующей дисциплине, что обеспечит более углубленное и осознанное ее понимание.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 390 с.
2. Wolfram Demonstrations Project. – URL: <https://demonstrations.wolfram.com> (дата обращения: 05.04.2025).
3. Зацук, Е. Н. Использование методов компьютерной алгебры в лекциях «Предел числовой последовательности и функции» / Е. Н. Зацук, А. И. Жук, Л. П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2023. – № 1 (130). – С. 125–128.

## СОДЕРЖАНИЕ

## ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

<b>Бажанова Е. Н.</b> Строение $\sigma_\Omega$ -расслоенного класса Фиттинга $t$ -групп . . . . .	3
<b>Волков В. М., Дун Ц.</b> Спектральный метод Чебышева для 2d-задач конвекции – диффузии . . . . .	6
<b>Горбачев В. И., Трошина Н. В.</b> Содержание общего математического образования в системе дисциплинарных онтологий . . . . .	9
<b>Маслова Н. В.</b> Об арифметических характеристиках конечных групп . . . . .	13
<b>Махина Н. М.</b> Некоторые геометрические свойства границы области на комплексной плоскости . . . . .	15
<b>Мурашко В. И.</b> Перспективы развития вычислительной теории классов конечных групп . . . . .	18
<b>Плетюхов В. А., Семенюк О. А.</b> Тензорная масса и анизотропный характер инертных свойств релятивистских тел . . .	22
<b>Сендер А. Н., Сендер Н. Н.</b> Некоторые аспекты подготовки специалиста в университете . . . . .	27
<b>Сорокина М. М.</b> О группах с обобщенно субнормальными подгруппами . . . . .	30
<b>Сохор И. Л.</b> Конечные группы с модулярными $CP$ -подгруппами	31
<b>Цехан О. Б.</b> О декомпозиционном подходе к анализу структурных свойств и управлению сингулярно возмущенными системами с запаздыванием . . . . .	33
<b>Red'kov V. M., Ivashkevich A. V., Bury A. V., Kuzmich A. M., Ovsyuk E. M.</b> Spin 1 particle with anomalous magnetic moment and polarisability in presence of uniform magnetic and electric fields . . . . .	40

**СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ИХ  
СОВРЕМЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

<b>Зубей Е. В.</b> Разрешимость конечной группы с $OS$ -проперестановочными силовскими подгруппами . . . . .	42
--	----

<b>Купцова Я. А., Мурашко В. И.</b> Вычисление небипримарного графа конечной группы . . . . .	43
<b>Ленденкова С. И.</b> О корадикале группы, факторизуемой слабо $tcc$ -перестановочными подгруппами . . . . .	45
<b>Нестеров А. С., Сорокина М. М.</b> О минимальных $\sigma_\omega$ -канонических формациях конечных групп . . . . .	47
<b>Новикова Д. Г., Сорокина М. М.</b> Свойства класса групп, определяемого $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторами . . . . .	50
<b>Павлушко П. А., Трофимук А. А.</b> Об одном обобщении $tcc$ -подгрупп . . . . .	52
<b>Трофимук А. А.</b> Конечные группы с заданными системами условно полунормальных подгрупп . . . . .	54

## СЕКЦИЯ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

<b>Антоневич А. Б., Борбут В. А.</b> Абсолютная часть существенного спектра оператора взвешенного сдвига . . . . .	58
<b>Басик А. И., Грицук Е. В., Болтрушко О. В.</b> Индекс краевой задачи Римана – Гильберта для некоторых эллиптических систем в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	61
<b>Гончарова М. Н.</b> О влиянии фазового ограничения на построение множества управляемости одного объекта . . . . .	65
<b>Дайняк В. В.</b> О разрешимости смешанных задач для некоторых дифференциальных уравнений четвертого порядка . . . . .	68
<b>Елец Д. Д., Яцук Т. А.</b> Построение решения уравнения второго порядка с сингулярным потенциалом . . . . .	70
<b>Игнатенко М. В.</b> Алгебраическая интерполяционная задача Эрмита относительно пятикратных узлов . . . . .	73
<b>Кот М. Г.</b> Матрично-значные функции двух переменных . . . . .	76
<b>Кузьмина Е. В.</b> Построение двух обобщенных решений задачи Коши для третьего уравнения иерархии Риккати . . . . .	78
<b>Логиновская М. М., Люксембург И. Л.</b> Непрерывное представление функций допускающих разрывы первого рода . . . . .	80
<b>Марзан С. А.</b> Задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто . . . . .	84



<b>Матысик О. В., Ковальчук И. В.</b> Выбор момента останова для трехслойного явного итерационного процесса в полунорме гильбертова пространства . . . . .	87
<b>Матысик О. В., Костенков И. В.</b> Получение априорных оценок погрешности для итерационной процедуры решения неустойчивых задач . . . . .	88
<b>Матысик О. В., Ткач С. С.</b> Явный итерационный метод регуляризации некорректных задач в случае неединственного решения . . . . .	90
<b>Меркушевич П. А., Сверба И. Ю., Махнист Л. П., Каримова Т. И.</b> Применение степенных рядов для решения одной из задач гидрологии . . . . .	91
<b>Мирская Е. И.</b> Сравнительный анализ дисперсии сглаженной оценки спектральной плотности в зависимости от окон просмотра данных . . . . .	95
<b>Мирская Е. И., Борейко И. Д.</b> Исследование первых двух моментов оценки взаимной спектральной плотности, построенной с использованием окна Хэмминга . . . . .	97
<b>Мищук И. М., Вувуникян Ю. М.</b> Компьютерное моделирование решения интегро-дифференциальных уравнений методом конечных разностей . . . . .	98
<b>Мусафиров Э. В.</b> О трехмерных квадратичных системах обыкновенных дифференциальных уравнений со скрытыми колебаниями . . . . .	100
<b>Переварюха А. Ю.</b> Моделирование эффектов трансформаций гибридной структурой уравнений . . . . .	103
<b>Сорокин И. И.</b> О некоторых приложениях теорем единственности в весовых пространствах аналитических функций . . . . .	106
<b>Цехан О. Б.</b> Об операторе декомпозиции сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием . . . . .	109
<b>Basik A. I., Basik D. A.</b> Irregularizability of the Riemann – Hilbert boundary value problem for one biharmonic system in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	113

### СЕКЦИЯ 3

#### ФИЗИКА И МЕТОДИКА ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

<b>Авдулова И. В.</b> Формирование функциональной грамотности на занятиях по физике . . . . .	115
<b>Ашаев Ю. П.</b> Автоматизированное оконтуривание рудных залежей полезных ископаемых при математическом моделировании месторождений . . . . .	119
<b>Борсук В. А., Сендер Н. Н.</b> Алгоритмизация решения физических задач на занятиях по математическому анализу . . . . .	123
<b>Демидчик А. В.</b> Расчет концентрации и подвижности носителей заряда для фольг сплава $Bi_{0,89}Sb_{0,11}$ , легированного индием . . . . .	126
<b>Кац П. Б., Кузьмич А. М.</b> Средняя относительная погрешность для борновских приближений моттовского сечения рассеяния для позитронов для элементов от калия до ксенона . . . . .	130
<b>Котловский О. А.</b> Применение цифровых образовательных технологий в обучении физике . . . . .	133
<b>Кузьмич А. М., Остапук П. В., Лукашук А. О.</b> Создание и использование в физике (на примере законов Кирхгофа) компьютерного кода метода Крамера . . . . .	134
<b>Мельникова И. Н., Мельников И. А.</b> Приложения теории дифференциальных уравнений и их систем в физике . . . . .	137
<b>Плетюхов В. А., Кузьмич А. М.</b> О введении понятия импульса в релятивистской механике . . . . .	138
<b>Сендер Н. Н., Симончик Я. В.</b> Решение и анализ физических задач на занятиях по математическому анализу . . . . .	141
<b>Серый А. И.</b> О различиях между календарным, тропическим и звездным годами . . . . .	145
<b>Серый А. И.</b> О разновидностях броуновского движения . . . . .	146
<b>Серый А. И.</b> Физически бесконечно малый объем в электростатике и оптике . . . . .	148

## СЕКЦИЯ 4. ИННОВАЦИОННЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

<b>Алейникова Т. Г., Шербаф А. И.</b> Внедрение инновационных подходов в учебную дисциплину «Вычислительные методы и компьютерное моделирование» . . . . .	150
<b>Алхутова А. Р., Сендер Н. Н.</b> Практические аспекты изучения аналитической геометрии . . . . .	153
<b>Антонюк А. М., Трофимук А. А.</b> Полиграммный шифр Хилла . . . . .	155
<b>Астраханцева А. М., Пантелеева Е. В.</b> Методические аспекты подготовки к ЦЭ/ЦТ по математике с акцентом на производную .	158
<b>Ашаев Ю. П.</b> Совершенствование тестовых заданий как основа повышения эффективности автоматизированного тестирования . .	161
<b>Басик А. И., Кот М. Г., Трофимук А. А.</b> Студенческая олимпиада по математике БрГУ имени А. С. Пушкина . . . . .	165
<b>Блашук Н. И., Зубей Е. В.</b> Динамические модели в GeoGebra при изучении геометрии . . . . .	172
<b>Блашук Н. И., Савчук Л. Н.</b> Некоторые аспекты применения искусственного интеллекта в образовательном процессе . . . . .	174
<b>Василевский К. В., Козловская И. С.</b> Применение современных информационных технологий в курсе «Уравнения математической физики» . . . . .	176
<b>Грицук Д. В.</b> Разработка веб-приложения с маршрутами и скрытыми местами города Бреста . . . . .	179
<b>Калавур М. А.</b> Дыферэнцыяльныя раўнанні на факультатывах у сярэдняй школе . . . . .	181
<b>Ковалевич Н. И.</b> Планиметрическая задача: различные способы решения . . . . .	185
<b>Корнилов В. С.</b> Развитие у студентов физико-математических профилей обучения предметных знаний на занятиях по обратным задачам для дифференциальных уравнений . . . . .	189
<b>Крагель Е. А.</b> Информационные технологии в обучении математике слушателей-иностранцев на подготовительном отделении . . . . .	192

<b>Крук А. В., Каллаур Н. А.</b> Методика использования технологии интегративного обучения при изучении математики в средней школе . . . . .	195
<b>Кугач В. В., Сендер Н. Н.</b> Практическое применение метода сечений в образовательном процессе . . . . .	198
<b>Сендер А. Н., Сендер Н. Н.</b> Управляемая самостоятельная работа студентов как одно из условий подготовки специалиста . . .	201
<b>Таранчук В. Б.</b> Технические аспекты разработки и применения интеллектуального контента . . . . .	204
<b>Ткач С. Н.</b> Способы применения механизма «любые компонентные блоки» в АРР Inventor . . . . .	207
<b>Ярмолик Л. А., Шеина В. А., Жук А. И., Защук Е. Н.</b> Особенности изучения теории графов в системе Wolfram Mathematica . . . . .	211

*Научное издание*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И НОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В МАТЕМАТИКЕ

Сборник материалов конференции

Подписано в печать 25.09.2025. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.  
Гарнитура Computer Modern. Ризография. Усл. печ. л. 12,90. Уч.-изд. л. 10,89.

Тираж 50 экз. Заказ № 348.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования

«Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий

№ 1/55 от 14.10.2013.

Ул. Мицкевича, 28, 224016, Брест.