ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№4 (61) 2024

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (61) 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

ТЕХНИКА

ИНФОРМАТИКА

ОБЗОРЫ

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:
– технические;
– физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).
Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.
Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 11.12.24. Формат 60×84 $1/8$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 10,33. Тираж 17 экз. Заказ № 620.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 4 (61) 2024

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS

TECHNICS

INFORMATION SCIENCE

REVIEWS

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

– Technics;

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40
EDN: UESTUB

НЕРЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В $\mathbb{R}^4$

А.И. Басик[1], **Е.В. Грицук**[2], **Д.В. Галуц**[1]

[1]*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*
[2]*Брестский государственный технический университет*

IRREGULARIZABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE BIHARMONIC SYSTEM IN $\mathbb{R}^4$

A.I. Basik[1], **E.V. Gricuk**[2], **D.V. Haluts**[1]

[1]*Brest State A.S. Pushkin University*
[2]*Brest State Technical University*

Аннотация. Линейную однородную систему p дифференциальных уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^d$ назовем бигармонической, если каждая компонента произвольного ее непрерывно дифференцируемого решения удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0,$ где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$. В настоящей статье приводится пример бигармонической системы в $\mathbb{R}^4$, не являющейся ни четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, ни эллиптической псевдосимметрической системой. Для этой системы рассматривается задача Дирихле в произвольной ограниченной области с достаточно гладкой границей. Доказывается, что в некоторой точке границы ранг матрицы Лопатинского задачи Дирихле не является максимальным. Также показывается, что в этой точке предельная задача для рассматриваемой задачи Дирихле не является однозначно разрешимой.

Ключевые слова: *эллиптическая система*, *задача Дирихле*, *регуляризуемая краевая задача*, *условие Лопатинского*.

Для цитирования: *Басик*, *А.И.* Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Д.В. Галуц // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 40–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40. – EDN: UESTUB

Abstract. A linear homogeneous system of p first order differential equations in $\mathbb{R}^d$ is called biharmonic if each component of its arbitrary continuously differentiable solution satisfies the equation $\Delta^2 u = 0,$ where Δ is the Laplace operator in $\mathbb{R}^d$. In this article we give an example of a biharmonic system in $\mathbb{R}^4$, which is neither a four-dimensional analogue of the Cauchy – Riemann system nor an elliptic pseudo-symmetric system. For this system we consider the Dirichlet problem in an arbitrary bounded region with a sufficiently smooth boundary. It is proved that at some point of the boundary the rank of the Lopatinski matrix of the Dirichlet problem is not maximal. It is also shown that at this point the limit problem for the considered Dirichlet problem is not uniquely solvable.

Keywords: *elliptic system*, *Dirichlet problem*, *regularizable boundary value problem*, *Lopatinski condition.*

For citation: *Basik*, *A.I.* Irregularizability of the Dirichlet problem for one biharmonic system in $\mathbb{R}^4$ / A.I. Basik, E.V. Gricuk, D.V. Haluts // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 40–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40 (in Russian). – EDN: UESTUB

Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \qquad (0.1)$$

где $A_j \quad (j = 1,2,3,4)$ – заданные действительные квадратные матрицы четвертого порядка, $U = (u_1(x),...,u_4(x))^T$ – искомая четырехкомпонентная вектор-функция, $x = (x_1,...,x_4) \in \mathbb{R}^4$, T означает транспонирование.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ – ограниченная область, границей которой является достаточно гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим краевую задачу отыскания решения $U(x)$ системы (0.1) в области Ω, удовлетворяющего граничным условиям

$$\mathfrak{B}\left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right)\Bigg|_{\Omega \ni x \to y} = f(y) \quad (y \in \partial\Omega). \qquad (0.2)$$

Здесь $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ – заданный двухкомпонентный вектор-столбец; $\mathfrak{B}$ – матричный, размера $2{\times}4$, граничный оператор, состоящий из скалярных линейных операторов, «полиномиальных относительно нормали» к $\partial\Omega$ [1].

Как показали исследования ряда ученых, граничный оператор для эллиптической системы нельзя задавать произвольно. Он должен в некотором смысле дополнять свойства решений системы. Для эллиптических систем дифференциальных уравнений условие дополнительности граничных условий было получено Я.Б. Лопатинским [2]; его принято называть условием регуляризуемости краевой задачи, а задачу, для которой это условие выполнено, регуляризуемой. Известно [1], [3], что регуляризуемость краевой задачи является необходимым и достаточным условием нетеровости оператора, отвечающего этой задаче и действующего в определенных банаховых пространствах.

В свое время был неожиданным тот факт, что для системы Фьютера (системы простейшей структуры в $\mathbb{R}^4$ по терминологии М.З. Соломяка) любые граничные условия не могут образовывать вместе с системой регуляризуемую краевую задачу [4].

В.С. Виноградов выделил в пространстве $\mathbb{R}^4$ класс эллиптических псевдосимметрических систем четырех уравнений первого порядка [5]. Для (0.1) это означает, что $A_1 = E$ – единичная, а $A_j = -A_j^T$ при $j = 2,3,4$ – кососимметрические матрицы четвертого порядка. В работе [5] показывается, что, в случае когда (0.2) есть оператор умножения на постоянную матрицу размера 2×4 (задача Римана – Гильберта), однородная краевая задача (0.1), (0.2) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Позже было доказано отсутствие внутренних регуляризумых краевых задач для эллиптических псевдосимметрических систем [6].

В статье [7] определяется понятие многомерного аналога системы Коши – Римана. Применительно к рассматриваемому случаю, система (0.1) называется четырехмерным аналогом системы Коши – Римана (кратко ЧКР-системой), если каждая компонента произвольного непрерывно дифференцируемого ее решения удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbb{R}^4$. Необходимыми и достаточными условиями принадлежности системы (0.1) ЧКР типу является невырожденность матриц A_j $(j = 1,\dots,4)$ и выполнение матричных равенств

$$A_k^{-1}A_j + A_j^{-1}A_k = 0 \quad (k, j = 1,\dots,4, k \neq j). \quad (0.3)$$

А.Т. Усс показал отсутствие для ЧКР-систем регуляризуемых внутренних краевых задач [7].

Отметим, что в трехмерном пространстве для системы Моисила – Теодореску [8], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [9], для систем ортогонального типа [10] существуют регуляризуемые внутренние краевые задачи.

В настоящей статье приводится пример эллиптической системы (0.1), которая не является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана [7], не принадлежит классу эллиптических псевдосимметрических систем [5], однако каждое непрерывно дифференцируемое ее решение является бигармонической функцией. Для этой системы в настоящей работе исследуется регуляризуемость задачи Дирихле.

1 Пример бигармонической системы в $\mathbb{R}^4$

Здесь и всюду ниже, если не оговорено противное, считаем, что $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Характеристическая матрица системы (0.1) с матричными коэффициентами (1.1) имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \sum_{j=1}^{4} A_j \xi_j =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_4 & \xi_3 + \xi_4 & \xi_2 \\ \xi_3 - \xi_4 & \xi_1 - \xi_2 & -2\xi_2 & 2\xi_4 \\ -\xi_3 & \xi_2 & \xi_1 + \xi_2 & \xi_3 - \xi_4 \\ -\xi_2 & -\xi_3 & -\xi_3 + \xi_4 & \xi_1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

и при этом для всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$\det \mathfrak{A}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^2 \neq 0.$$

Последнее означает, что рассматриваемая система (0.1), (1.1) является эллиптической.

Очевидно, что (0.1) не является псевдосимметрической системой в $\mathbb{R}^4$. Поскольку

$$A_2^{-1}A_3 + A_3^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

(т. е. нарушаются равенства (0.3)), то система (0.1) не является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 1.1.** *Каждая компонента* $u_k(x)$ $(k = 1,\dots,4)$ *произвольного непрерывно дифференцируемого решения* $U(x)$ *системы* (0.1) *является бигармонической функцией.*

Доказательство. Пусть $U : \Omega \to \mathbb{R}^4$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, удовлетворяющая системе (0.1). Поскольку рассматриваемая система является эллиптической, то каждая компонента $u_k(x)$ $(k=1,...,4)$ вектора $U(x)$ является бесконечно дифференцируемой в области Ω функцией [11, с. 141]. Применяя к нулевой вектор-функции $\sum\limits_{j=1}^{4} A_j \dfrac{\partial U(x)}{\partial x_j}$ оператор $\sum\limits_{k=1}^{4} A_k^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, получим

$$\begin{gathered}\Delta u_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_4} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \\ - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0, \\ \Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0, \\ \Delta u_3 + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0, \quad \Delta u_4 \equiv 0,\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^4$. Тогда

– из четвертого равенства (1.3) следует, что $\Delta^2 u_4 = 0$ в области Ω;

– из третьего равенства (1.3) с учетом четвертого:

$$\Delta^2 u_3 = -\frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_4} = 0;$$

– из второго равенства (1.3) с учетом четвертого:

$$\Delta^2 u_2 = \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_4} = 0;$$

– из первого равенства (1.3) с учетом второго и третьего:

$$\begin{gathered}\Delta^2 u_1 = -\frac{\partial^2 \Delta u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_2}{\partial x_2 \partial x_4} - \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \\ + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_2 \partial x_4} = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4}\left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4}\left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) = 0.\end{gathered}$$

Таким образом, каждая из функций $u_k(x)$ $(k=1,2,3,4)$ удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0$ в области Ω, т. е. является бигармонической в Ω функцией. □

2 Задача Дирихле для рассматриваемой системы

В теории аналитических функций под задачей Дирихле понимают задачу отыскания голоморфной в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функции $u+iv$ по известной на границе этой области ее действительной (или мнимой) части

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \ \ (v|_{\partial\Omega} = \varphi).$$

Если функция φ непрерывна по Гельдеру на границе области $\partial\Omega$, то существует единственная гармоническая в Ω функция, принимающая заданные граничные значения. Сопряженная к ней гармоническая функция определяется из системы Коши – Римана с точностью до произвольной действительной постоянной. Из приведенных рассуждений также следует, что произвольно задавать значения аналитической функции на границе области нельзя, ибо действительная часть функции восстанавливается по мнимой части функции с точностью до произвольной постоянной и наоборот. Таким образом, задача восстановления аналитической функции по известной на границе области «половине» ее значений (действительной или мнимой части) является регуляризуемой.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ ограниченная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. По аналогии с двумерным случаем под задачей Дирихле для системы (0.1) будем понимать задачу отыскания непрерывно дифференцируемого решения системы (0.1) в области Ω и непрерывного по Гельдеру в замыкании этой области, удовлетворяющего граничным условиям вида

$$u_3|_{\partial\Omega} = f_1(x), \quad u_4|_{\partial\Omega} = f_2(x) \quad (x \in \partial\Omega), \tag{2.1}$$

где $f_1, f_2 : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции (два граничных условия – «половина» значений вектор-функции $U(x)$).

***Теорема* 2.1.** *Задача Дирихле для системы* (0.1), (1.1) *не является регуляризуемой*.

Доказательство. Напомним, что задача (0.1), (2.1) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Лопатинского. Оно представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора (2.1) и для рассматриваемой задачи состоит в том, что ранг матрицы

$$L(y,\tau) = \int\limits_{\gamma} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}^{-1}(\lambda \nu(y) + \tau) d\lambda \tag{2.2}$$

является максимальным в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе τ. В формуле (2.2) через $\nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, матрица граничного оператора (2.1) имеет вид

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и интегрирование ведется по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости и охватывающему находящиеся там корни уравнения

$$\det \mathfrak{A}(\lambda\nu(y) + \tau) = 0. \tag{2.3}$$

Покажем, что в той точке $\tilde{y}$ границы $\partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль параллельна оси Ox_1, условие Я.Б. Лопатинского задачи (0.1), (2.1) не выполняется. В этом случае $\nu(\tilde{y}) = (1,0,0,0)$, $\tau = (0,\tau_1,\tau_2,\tau_3)$, уравнение (2.3) принимает вид $(\lambda^2 + |\tau|^2)^2 = 0$, где $|\tau|^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 \neq 0$. Пусть контур γ охватывает точку $i|\tau|$. Тогда, применяя основную теорему о вычетах, получим

$$L(\tilde{y},\tau) = \int_\gamma \frac{1}{(\lambda^2 + |\tau|^2)^2} \begin{pmatrix} \lambda^2\tau_2 - \lambda\tau_1\tau_2 + \tau_2|\tau|^2 + \tau_1^2\tau_3 & -\lambda^2\tau_1 - \lambda\tau_2^2 - \tau_1|\tau|^2 + \tau_1\tau_2\tau_3 & \lambda^3 - \lambda^2\tau_1 + \lambda(\tau_1^2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3^2) - \tau_1|\tau|^2 + \tau_1\tau_2\tau_3 - \tau_1\tau_3^2 & -\lambda^2(\tau_2 - \tau_3) + \lambda\tau_1\tau_3 + \tau_3|\tau|^2 \\ \tau_1(\lambda^2 + |\tau^2|) & \tau_2(\lambda^2 + |\tau|^2) & (\tau_2 - \tau_3)(\lambda^2 + |\tau|^2) & \lambda(\lambda^2 + |\tau|^2) \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= 2\pi i \begin{pmatrix} -\dfrac{i\left(2\tau_2|\tau|^2 + \tau_1^2\tau_3\right)}{4|\tau|^3} & \dfrac{i\left(2\tau_1|\tau|^2 - \tau_1\tau_2\tau_3\right)}{4|\tau|^3} & \dfrac{2|\tau|^3 + i(2\tau_1|\tau|^2 + \tau_1\tau_3^2 - \tau_1\tau_2\tau_3)}{4|\tau|^3} & \dfrac{i\left(\tau_2 - 2\tau_3\right)}{4|\tau|^2} \\ -\dfrac{i\tau_1}{2|\tau|} & -\dfrac{i\tau_2}{2|\tau|} & -\dfrac{i\left(\tau_2 - \tau_3\right)}{2|\tau|} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Осталось заметить, что при $\tau = (0,0,0,1)$ матрица Лопатинского задачи Дирихле в точке $\tilde{y}$ принимает вид

$$L(\tilde{y},\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi i & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & \pi i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rank} L(\tilde{y},\tau) = 1 < 2$. □

Доказанная теорема означает [1], что оператор, отвечающий задаче Дирихле для системы (0.1), не является нетеровским в определенных банаховых пространствах, т. е. имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро.

3 Другое доказательство теоремы 2.1

Рассмотрим другое доказательство теоремы 2.1. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $\tilde{y}$ совпадает с началом координат. Задаче (0.1), (2.1) соответствует так называемая предельная задача [12] для исходной системы (0.1) в полупространстве $x_1 > 0$ и граничного условия (2.1), заданного на гиперплоскости $x_1 = 0$ (по терминологии И.М. Гельфанда [12], мы рассматриваем краевую задачу под микроскопом в окрестности точки $\tilde{y}$ со все бóльшим и бóльшим увеличением). Сделав в предельной задаче преобразование Фурье по переменным x_2, x_3 и x_4 получим

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial x_1}(x_1,\xi') = -i(A_2\xi_2 + A_3\xi_3 + A_4\xi_4)\hat{U}(x_1,\xi') \tag{3.1}$$

$$(x_1 > 0),$$

$$\hat{u}_3|_{x_1=0} = h_1,\ \hat{u}_4|_{x_1=0} = h_2, \tag{3.2}$$

где $\xi' = (\xi_2,\xi_3,\xi_4)$, $\hat{U}(x_1,\xi')$ – преобразование Фурье $U(x)$:

$$\hat{U}(x_1,\xi') = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4)} U(x)\,dx_2dx_3dx_4.$$

Эквивалентная формулировка условия регуляризуемости краевой задачи (0.1), (2.1) в точке $\tilde{y}$ состоит в том, что при каждом ненулевом векторе ξ' в пространстве устойчивых решений $\mathfrak{M}_+$ системы уравнений (3.1) (т. е. стремящихся к нулю при $x_1 \to +\infty$) задача (3.1), (3.2) однозначно разрешима [12], [13].

Рассмотрим (3.1), (3.2) при $\xi' = (0,0,1)$ (сравнить с вектором τ из доказательства теоремы 2). В этом случае $-iA_4$ есть матрица системы (3.1), имеющая двукратные собственные значения -1 и 1. Тогда множество устойчивых решений системы (3.1) задается формулой

$$\hat{U}(x_1,\xi') = (C_1v_1 + C_2(v_1x_1 + v_2))e^{-x_1}, \tag{3.3}$$

где $v_1 = (i,1,0,0)^T$ – собственный вектор матрицы $-iA_4$, отвечающий собственному значению -1; $v_2 = (0,-3,2,2i)^T$ – вектор, присоединенный к вектору v_1; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Осталось заметить, что при любом C_1 и $C_2 = 0$ функция $\hat{U}(x_1,\xi')$, заданная формулой (3.3), является устойчивым решением однородной задачи (3.1), (3.2) при $\xi' = (0,0,1)$. Таким образом, условие однозначной разрешимости (3.1), (3.2) в $\mathfrak{M}_+$ нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агранович*, *М.С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

2. *Лопатинский*, *Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Украинский математический журнал. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.

3. *Волевич*, *Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л.Р. Волевич // Математический сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 373–416.

4. *Соломяк*, *М.З.* О линейных эллиптических системах первого порядка / М.З. Соломяк // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.

5. *Виноградов*, *В.С.* Граничная задача для псевдосимметрических систем / В.С. Виноградов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.

6. *Басик*, *А.И.* О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, А.Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

7. *Усс*, *А.Т.* Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.

8. *Шевченко*, *В.И.* Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Республиканский межведомственный сборник «Математическая физика». – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

9. *Усс*, *А.Т.* Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

10. *Басик*, *А.И.* Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.А. Грицук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – DOI: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16.

11. *Хермандер*, *Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – Москва: Мир, 1965. – 379 с.

12. *Гельфанд*, *И.М.* Об эллиптических уравнениях / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

13. *Агранович*, *М.С.* Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области / М.С. Агранович, А.С. Дынин // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 511–514.

Поступила в редакцию 22.04.2024.

Информация об авторах

Басик Александр Иванович – к.ф.-м.н., доцент
Грицук Евгений Васильевич – к.ф.-м.н., доцент
Галуц Дмитрий Владимирович – студент

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).