УДК 371.315

А.А. Безносюк

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

В статье рассматривается использование математической модели при анализе процесса усвоения знаний студентами в высшей школе. Математическими уравнениями описаны процессы накопления и забывания знаний при традиционной системе обучения, представлено графическое сравнение объемов традиционных и инновационных знаний в зависимости от времени, оптимальные стратегии достижения максимального объема знаний.

Введение

В свете инновационных процессов переход всякой науки из эмпирического уровня на теоретический резко ускоряет темпы ее развития. Теоретические построения освещают путь дальнейшим исследованиям, делают их осознанными, целенаправленными. Но чаще всего переход на теоретический уровень ограничивается недостаточной разработанностью методов правильного вывода следствий из постулатов, положенных в основу создаваемой теории.

Теория оправдывает свое существование лишь в том случае, если дает возможность из небольшого числа утверждений, которые берутся как постулаты, получать в результате умозаключений объяснения уже известных экспериментальных фактов и явлений, а также прогнозировать существование новых. Правильное прогнозирование новых фактов и явлений дает возможность отдать предпочтение одной из альтернативных теорий, если они расходятся в выводах относительно некоторого вопроса. Если же эксперимент не подтверждает выводов теории, то подлежат пересмотру ее постулаты. При таком подходе предполагается, что сам процесс получения следствий из первоначальных положений безупречный. Безусловно, в реальной научной практике встречаются ошибки и в самом ходе логических умозаключений. Но таких ошибок тем меньше, чем лучше разработан научный аппарат получения правильных выводов из исходных посылок [1, с. 263]. Эффективным методом познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления выступает математическое моделирование.

Математическая модель – это приближённое описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Известно, что математика дает возможность не только количественно уточнить результат, который интуитивно предполагается, но и получить совсем неожиданные выводы, прийти к которым, используя только качественные методы, практически невозможно.

Гуманитарные науки, которые в меньшей мере пользуются математикой, имеют много локальных теорий (описываюих небольшой круг явлений), каждая из которых содержит сравнительно много постулатов, причем часто не очень четко определенных. Высокую достоверность в научном исследовании обеспечивают математические методы. Именно математика позволяет формальным способом получать следствия, очень отдаленные от исходных посылок. Использование математических методов при анализе тех или иных явлений – это своеобразное подключение к предыдущему опыту всего человечества [2, с. 17]. При рассмотрении процесса усвоения знаний математическая модель накопления знаний представляет собой систему уравнений и концепций, используемых для описания и прогнозирования данного феномена.

Рассмотрим сначала частичную модель, которая описывает процессы накопления и забывания знаний из определенного учебного предмета по технологии обучения, которую назовем «традиционной». Пусть, для простоты, знания, умения и навыки из некоторого учебного предмета (далее – просто знания) усваиваются студентом с постоянной скоростью $\mathbf{V_0}$. Пусть уже накопленные знания распадаются (забываются) со скоростью, пропорциональной их объему $\boldsymbol{X}$. Коэффициент пропорциональности будем считать постоянным. Он, как и скорость усвоения, зависит от индивидуальных особенностей студента и от специфики учебного материала. Его удобно выбрать в виде $\mathbf{1/\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – характерное время забывания.

Тогда процесс изменения объема нагроможденных знаний описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dX}{dt} = V_0 - \frac{X}{\tau}. \tag{1}$$

Теперь попробуем отразить в модели особенности, которые присущи инновационным технологиям обучения. Для этого введем величину $\mathbf{Y}$ – объем «инновационных» знаний студента, владение которыми повышает эффективность его работы. Будем считать, что скорость прироста знаний из определенного учебного предмета, получаемых самостоятельно, пропорциональна объёму «инновационных» знаний. Коэффициент пропорциональности $\boldsymbol{f}$ будем считать также постоянным, где $\boldsymbol{f}$ – частота усвоения «инновационных» знаний [3, с. 46; 4, с. 138].

Пусть суммарная скорость формирования «традиционных» знаний и «инновационных» знаний остается такой, что равняется $\mathbf{V_0}$. Разнообразные технологии обучения могут отличаться одна от другой соотношением усилий преподавателя и студента, которые тратятся на формирование «инновационных» знаний и «традиционных» знаний. В нашей модели это соотношение описывается коэффициентом $\boldsymbol{k}$ таким образом, что скорость формирования «инновационных» знаний будет равна $\boldsymbol{k}\,\mathbf{V_0}$, а «традиционных» знаний – $\mathbf{(1-\boldsymbol{k})V_0}$.

Как указано выше, интенсивность забывания «традиционных» знаний, полученных в процессе обучения, характеризуется коэффициентом $\mathbf{1/\tau}$, забывание же «инновационных» знаний не происходит (например, в силу того, что студент постоянно пользуется ими как инструментом самообучения).

Совокупность описанных процессов изменения объемов нагроможденных «инновационных» и «традиционных» знаний описывается дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dY}{dt} = kV_0,$$

$$\frac{dX}{dt} = (1-k)V_0 + fY - \frac{X}{\tau}. \tag{2}$$

Пусть начальные условия, для определенности, такие:

$$X(0) = 0,\ Y(0) = 0. \tag{3}$$

Если коэффициент $\boldsymbol{k}$, который определяет частицу усилий преподавателя, направленных на формирование «инновационных» знаний, не изменяется во времени, то система обычных дифференциальных уравнений (2) при начальных условиях (3) легко решается аналитически:

$$Y(t) = kV_0 t, \quad X(t) = V_0\tau\left[kft + (kft - 1 + k)\left(e^{-ft} - 1\right)\right]. \tag{4}$$

Графики зависимостей $X(t)$ для разных k представлены на рисунке 1.

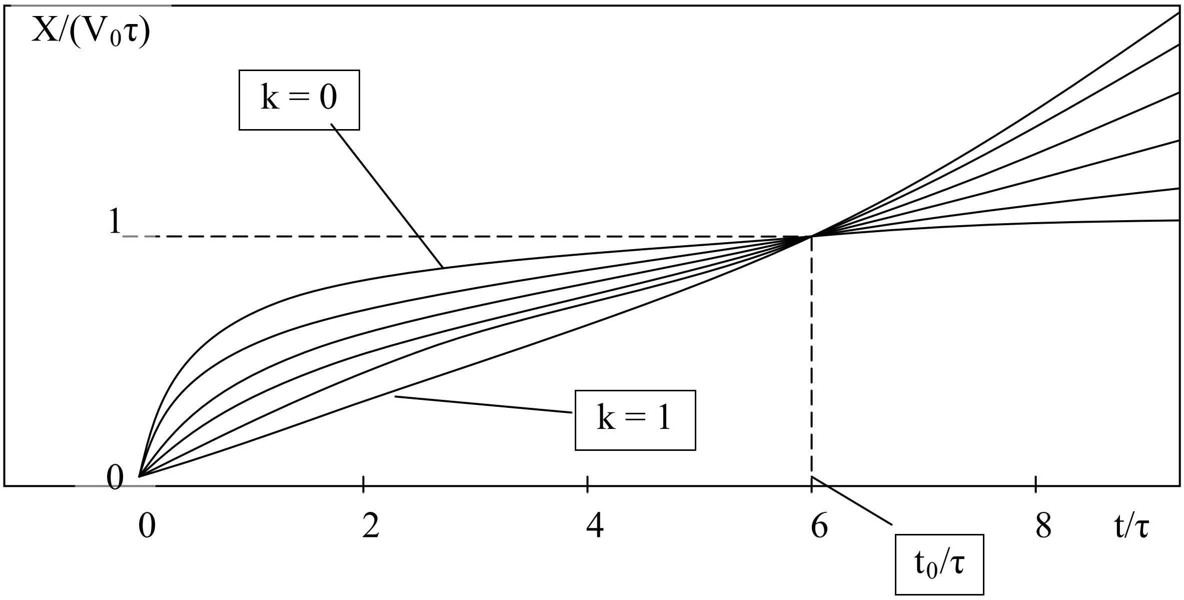

Рисунок 1 – Зависимость объема «традиционных» знаний от времени для технологий, которые различаются частицей усилий, направленных на формирование «инновационных» знаний

Модель традиционного обучения, в котором не учитывается влияние «инновационных» знаний, отвечает условию $k = 0$. В этом случае $X(t)\big|_{k=0} = V_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

График такой зависимости направляется к горизонтальной асимптоте $X(\infty) = V_0\tau$. Таким образом, объем знаний из определенного предмета при традиционной технологии обучения, ориентированной на бездумное запоминание материала, выходит на насыщение: новые знания поступают, а старые с той же скоростью забываются [3, с. 47–48; 4, с. 140–141].

В том случае, когда в процессе обучения происходит формирование «инновационных» знаний ($k > 0$), асимптота графика зависимости $X(t)$ становится уже не горизонтальной, а наклонной. В этом можно убедиться с помощью (4): если учесть, что $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$ при $t \to \infty$, то выйдет выражение для линейной функции, график которой и является преклонной асимптотой.

Интересно проследить судьбу студента после завершения формального образования. В нашей модели это отвечает исчезновению «подкачки» «традиционными» знаниями и «инновационных» знаний «извне», что выражается в том, что после некоторого момента времени $t_з$, скорость V_0 будет равна нулю. Тогда уравнения (2) приобретут следующий вид:

$$\frac{dY}{dt} = 0\,,\ \frac{dX}{dt} = fY - \frac{X}{\tau}\,.$$

Из графика (рисунок 2) видно, что после завершения образования объем знаний выходит на горизонтальную асимптоту, однако постоянные значения $X(\infty)$ разные. Чем большая при обучении частица усилий, которые идут на формирование «инновационных» знаний, тем больший предельный объем «традиционных» знаний. И если у выпускника «инновационные» знания отсутствуют вообще ($k = 0$), то после окончания обучения происходит неминуемое забывание нагроможденных «традиционных» знаний, которое приводит к практически полному их исчезновению. И наоборот, при достаточном объеме «инновационных» знаний знания выпускника после окончания официального обучения могут даже увеличиваться. Как здесь не вспомнить выражение М. Лауе: «Образование есть то, что остается после того, как все изученное забыто».

Сразу после окончания официального обучения скорость прироста «традиционных» знаний скачкообразно уменьшается на величину $V_0(1 - k)$. И лишь при $k = 1$ (формировались только «инновационные» знания) график будет без излома.

Итак, если возникает требование максимизировать объем знаний в отдаленной перспективе после окончания обучения, то оптимальным значением ***k*** будет 1 (что отвечает формированию только «инновационных» знаний). Конечно, здесь предполагается, что студент заинтересован в знаниях из определенного предмета и получает их, пользуясь уже сформированными «инновационными» знаниями.

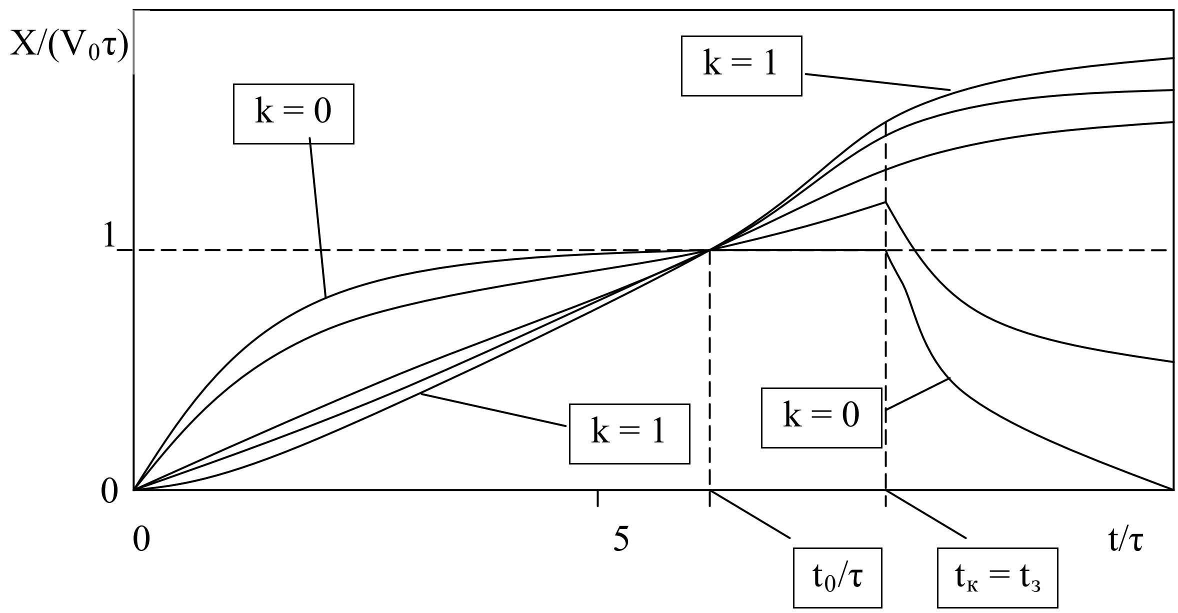

Рисунок 2 – Случай адекватного прогноза успеваемости профессиональной деятельности

Естественным является вопрос о том, как изменятся результаты задачи о максимизации $X(t_к)$, если снять ограничения на постоянство во времени параметра k. Другими словами, как выбрать функцию $k(t)$, чтобы обеспечить максимальный объем знаний на момент контроля?

Эта задача представляется заметно более сложной и напоминает задачу вариационного исчисления. Первый вопрос, который напрашивается: вытекает ли из условия $0 \le k(t) \le 1$ вывод о том, что график $X(t)$ будет всегда расположен между графиками, которые отвечают предельным значениям параметра k, т.е. графиками $X(t)\big|_{k=0}$ и $X(t)\big|_{k=1}$. Интерес к этому вопросу связан с тем, что утвердительный ответ на него означал бы, что ответ в общей задаче относительно максимизации $X(t_к)$ был бы абсолютно таким же, как и в частном случае, когда параметр k не изменяется во время обучения. Но ответ на поставленный вопрос отрицательный. Мы в этом убедились, подставив разные *k(t),* что удовлетворяют указанному условию, в компьютерную программу, которая вычисляет значение *X(t)* и строит соответствующие графики.

Таким образом, задача не сводится к предыдущей и требует отдельного решения. Применение математических методов дает такую стратегию максимизации $X(t_к)$:

$$k(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_к - \Delta T, \\ 0, & t_к - \Delta T < t \le t_к, \end{cases} \tag{5}$$

где $\Delta T = \tau \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{f\tau}\right)$.

Конечно, предполагается, что $t_к - \Delta T > 0$, в противоположном случае $k = 0$.

Другими словами, если $t_к - \Delta T \le 0$, то побеждает традиционная технология «накачки» предметными знаниями $(k = 0)$. Если же к моменту контроля больше времени, чем ΔT, то надо сначала формировать «инновационные» знания ($k = 1$), а когда к моменту контроля останется ΔT, следует переключиться на режим «традиционного» обучения. Интересно, что величина ΔT не зависит от $t_к$. Для наглядности графики *X(t)* при оптимальных стратегиях для двух значений $t_к$ представлены на рисунке 3.

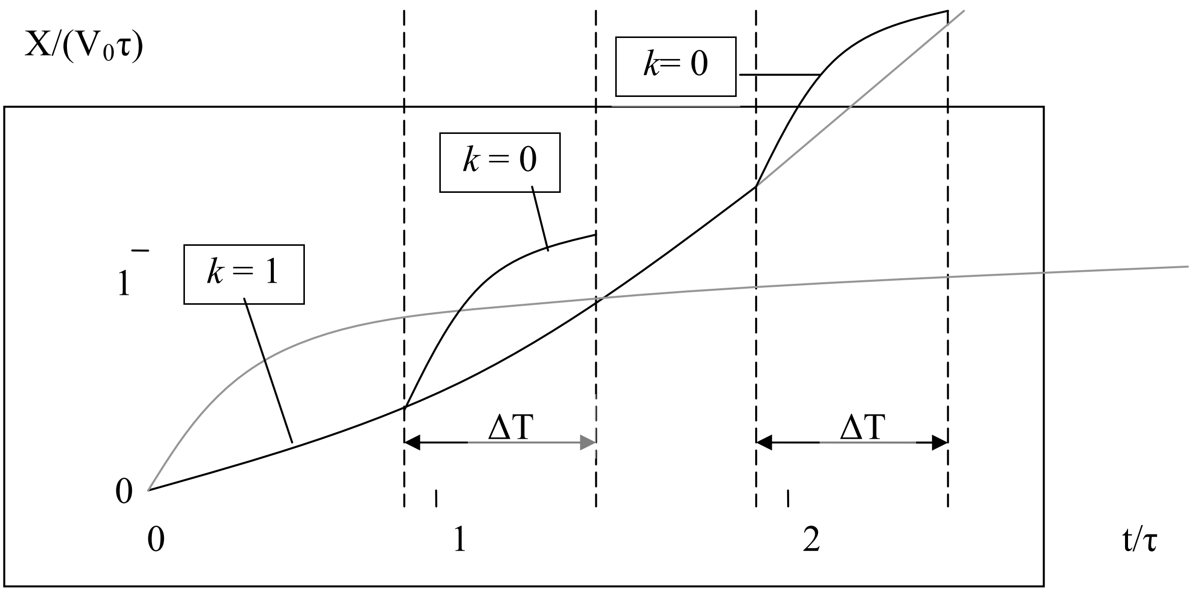

Рисунок 3 – Оптимальные стратегии достижения максимального объема знаний на момент контроля при непрерывном образовании (для двух значений $t_к$)

Заключение

Экспериментальные исследования, проведенные нами в вузах Украины, свидетельствуют о том, что инновационная технология в обучении может давать лучшие результаты в уровне знаний, который измеряется тестами, уже через два года. Еще через два года преимущества инновационной технологии становятся всецело очевидными, что количественно представлено в ранее опубликованных материалах [1, с. 272; 2, с. 23; 3, с. 51; 4, с. 142].

Ныне можно с сожалением констатировать, что, несмотря на естественные достижения образования, которые обеспечивает новая социополитическая система на Украине, в массовом измерении образование стало менее качественным, а подавляющее большинство выпускников высших учебных заведений (особенно вновь созданных) не конкурентоспособны на европейском рынке труда. Это обязывает меньше говорить о собственных достижениях образовательной практики, а все больше анализировать мировые и европейские тенденции реформирования образования и, соответственно этому, напряженно и последовательно совершенствовать нашу профессиональную сферу деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безносюк, О.О. Інноваційні та традиційні технології навчання: математична модель / О.О. Безносюк // Зб. наук. праць Кременецького обл. гуманітарно-пед. ін-ту ім. Тараса Шевченка. – Вип. 2. – Серія «Педагогічні науки». – Кременець, 2007. – С. 263–272.

2. Безносюк, О.О. Математична модель накопичення знань та її фінансова аналогия / О.О. Безносюк // Економічний вісник університету. Зб. наук. праць учених та аспірантів. Вип. 9. – Переяслав-Хмельницький, 2009. – С. 17–23.

3. Безносюк, А.А. Непрерывное образование: математическая модель / О.О. Безносюк // Образование через всю жизнь: непрерывное образование для устойчивого развития : труды международного сотрудничества в области непрерывного образования для устойчивого развития. Т. 5 / под науч. ред. Н.А. Лобанова и В.Н. Скворцова; сост. Н.А. Лобанов. – СПб. : Alter Ego, 2007. – С. 46–51.

4. Beznosyuk, O.O. Continuous education: mathematical model / O.O. Beznosyuk // Lifelong learning: continuous education tor sustainable development: proceedings of international cooperation. Vol. 6. Leningrad State University n. a. A.S. Pushkin [et al.]; [сотр.: N.A. Lobanov]; under scientific editorship of N.A. Lobanov, V.N. Skvortsov. – Saint-Petersburg : Alter Ego, 2008. – P. 138–142.

Beznosyuk O.O. **Mathematical Model of Knowledge Store**

The use of mathematical model for the analysis of knowledge mastering process is considered in the article. The mathematical equations are used to describe the process of knowledge accumulation and forgetting at the traditional system of training at high learning establishments. The graphic comparison of traditional and innovative knowledge volumes are presented depending on time. The optimum strategy of achievement of the maximum volume of knowledge is presented as well.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 18.03.2010