Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
Кафедра фундаментальной математики

Е. В. Зубей, О. В. Матысик, А. А. Трофимук

# Линейная алгебра

*Электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности
6-05-0533-09 «Прикладная математика»
физико-математического факультета*

Брест
БрГУ им. А.С.Пушкина
2024

**Авторы-составитель:**

**Зубей Екатерина Владимировна** — доцент кафедры фундаментальной математики БрГУ имени А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук, доцент

**Матысик Олег Викторович** — доцент кафедры прикладной математики и информатики БрГУ имени А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук, доцент

**Трофимук Александр Александрович** — заведующий кафедрой фундаментальной математики БрГУ имени А.С. Пушкина, доктор физико-математических наук, доцент

**Редактор:**

**Ткач Светлана Николаевна** — старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики БрГУ имени А.С. Пушкина

**Рецензенты:**

**Грицук Дмитрий Владимирович** — заведующий кафедрой прикладной математики и информатики БрГУ имени А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук, доцент

**Кафедра математики и информатики Брестского государственного технического университета**

ЭУМК написан в соответствии с действующей учебной программой по дисциплине «Линейная алгебра» и ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и экзамену.

Предназначено для студентов специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика» физико-математического факультета.

URL: http://rep.brsu.by:80/handle/123456789/10166

## СОДЕРЖАНИЕ

# Предисловие

Настоящий ЭУМК предназначен для студентов специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика» физико-математического факультета. Учебная программа, на которой базируется комплекс, составлена в соответствии с образовательным стандартом высшего образования по специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика» ОСВО 6-05-0533-09-2023; учебными планами учреждения высшего образования по специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика», рег. №ФМ-6-004-23/уч., №ФМ-6-005-23/уч. утвержденных 23.02.2023.

Комплекс содержит вспомогательный раздел, который включает в себя примерный тематический план и список литературы. В курсе лекций излагается теоретический материал, содержащий вопросы, связанные с понятием матрицы и определителя, их свойствами и действиями над ними, с векторными пространствами и линейными операторами, многочленами, билинейными и квадратичными формами, а так же с методами решений СЛУ. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами решения задач. В практикуме студентам предложено большое количество индивидуальных задач с приведенными типовыми примерами их решения. Раздел «Контроль знаний» содержит список вопросов к экзамену и итоговый тест.

ЭУМК ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и экзамену.

Авторы

# ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

| № | Название раздела, темы | ЛК | ПР |
|---|---|---|---|
| 1 | **Матрицы и определители.** | **8** | **8** |
| 1.1 | Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами и их свойства. | 2 | 2 |
| 1.2 | Определитель квадратной матрицы, основные свойства определителей. | 2 | 2 |
| 1.3 | Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема Лапласа. | 2 | 2 |
| 1.4 | Обратная матрица. Способы нахождения обратной матрицы. | 2 | 2 |
| 2 | **Системы линейных уравнений.** | **6** | **6** |
| 2.1 | СЛУ, её решение, следствие. Равносильные СЛУ и элементарные преобразования СЛУ. | 2 | 2 |
| 2.2 | Матричные уравнения. Запись и решение СЛУ в матричной форме. | 2 | 2 |
| 2.3 | Теорема Крамера. | 2 | 2 |
| 3 | **Введение в теорию векторных пространств** | **18** | **18** |
| 3.1 | Определение и примеры векторных пространств. Арифметическое пространство. Простейшие свойства векторных пространств. | 2 | 2 |
| 3.2 | Линейная зависимость и независимость системы векторов. | 2 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3.3 | Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования системы векторов. Базис системы векторов. Ранг системы векторов. | 2 | 2 |
| 3.4 | Понятие матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Ранг матрицы. | 2 | 2 |
| 3.5 | Теорема Гаусса и следствия из неё. Теорема Кронекера-Капели, следствие. Метод Гаусса решения СЛУ. | 2 | 2 |
| 3.6 | Базис и размерность векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств. | 2 | 2 |
| 3.7 | Координатная строка (столбец) вектора в данном базисе пространства. Связь между координатными столбцами вектора в различных базисах пространства. Связь между различными базисами пространства. Матриц перехода к новому базису. | 2 | 2 |
| 3.8 | Подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Линейная оболочка. | 2 | 2 |
| 3.9 | Пространство решений однородной СЛУ. Фундаментальная система решений. | 2 | 2 |
| 4 | **Евклидовы пространства** | **4** | **4** |
| 4.1 | Скалярное умножение. Ортонормированные система векторов и базис системы векторов. | 2 | 2 |
| 4.2 | Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства. Изоморфизм евклидовых пространств. | 2 | 2 |
| 5 | **Многочлены.** | **16** | **16** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.1 | Основные понятия. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Кольцо многочленов над полем. | 2 | 2 |
| 5.2 | Теорема о делении с остатком. НОД. НОК. Алгоритм Евклида. | 2 | 2 |
| 5.3 | Неприводимые многочлены над полем P. | 2 | 2 |
| 5.4 | Разложение многочлена по $(x-a)$ в произведение нормированных неприводимых множителей и его единственность. | 2 | 2 |
| 5.5 | Корни многочлена. Кратные корни многочлена. | 2 | 2 |
| 5.6 | Алгебраическая замкнутость поля $C$. Разложение многочлена над $C$. Основная теорема алгебры. Формулы Виета. | 2 | 2 |
| 5.7 | Сопряжённость мнимых корней. Разложение многочлена над полем $R$. | 2 | 2 |
| 5.8 | Неприводимость многочленов над Q. Критерий Эйзенштейна. | 2 | 2 |
| 6 | **Линейные операторы** | **6** | **6** |
| 6.1 | Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. | 2 | 2 |
| 6.2 | Матрица линейного оператора. Связь между матрицами линейного оператора относительно разных базисов. Подобие матриц. | 2 | 2 |
| 6.3 | Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Характеристическая матрица и характеристический многочлен. | 2 | 2 |
| 7 | **Билинейные и квадратичные формы** | **8** | **8** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7.1 | Линейная форма. Билинейная форма. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису. | 2 | 2 |
| 7.2 | Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду ортогональным преобразованием. | 2 | 2 |
| 7.3 | Метод Якоби. Знакоопределенность квадратичных форм. Критерий Сильвестра. | 2 | 2 |
| 7.4 | Определитель Грама. Закон инерции. | 2 | 2 |
| 8 | **Линейное преобразования евклидовых и унитарных пространств.** | **4** | **2** |
| 8.1 | Связь между линейными преобразованиями и билинейными формами в евклидовом пространстве. Сопряженные линейные преобразования. | 2 | |
| 8.2 | Самосопряженные, унитарные и нормальные линейные преобразования. | 2 | 2 |
| | **Контрольная работа.** | | **2** |


Начало
Содержание
Страница 12 из 360
Назад
На весь экран
Закрыть

# ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$a \equiv b(\mathrm{mod}\ p)$ — число $a$ сравнимо с числом $b$ по модулю $p$;

$n \vdots m$ — $n$ делится на $m$;

$n \mid m$ — число $n$ делит число $m$;

$n \nmid m$ — число $n$ не делит число $m$;

$p^a \top n$ — $p^a$ делит $n$, но $p^{a+1}$ не делит $n$.

*Множества*

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;

$m\mathbb{Z}$ — множество кратных $m$ целых чисел;

$\mathbb{Z}_m$ — множество вычетов по модулю $m$;

$\mathbb{U}_m$ — мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_m$;

$\mathbb{Z}[i]$ — кольцо гауссовых чисел.

*Функции*

$|\, a \,|$ — порядок элемента $a$;

$n!$ — факториал числа $n$;

НОД$(a, b)$ — наибольший общий делитель чисел $a$ и $b$;

НОК$(a, b)$ — наименьшее общее кратное чисел $a$ и $b$;

$[x]$ — целая часть числа $x$;

$\{x\}$ — дробная часть числа $x$;

$N(z)$ — норма гауссова числа;

$\overline{z}$ — сопряженное к комплексному числу $z$;

$\overline{a}$ — класс вычетов, содержащий число $a$;

$\theta(a \mod m)$ — порядок (показатель) числа $a$ по модулю $m$;

$\mathrm{ind}_a b$ — индекс числа $b$ по модулю $p$ и первообразному корню (основанию) $a$;

$\left(\dfrac{a}{p}\right)$ — символ Лежандра;

$\varphi(n)$ — Функция Эйлера числа $n$.

$\tau(n)$ — число натуральных делителей числа $n$;

$\sigma(n)$ — сумма натуральных делителей числа $n$.

# РАЗДЕЛ 1
# Матрицы и определители

## 1.1 Действия над матрицами и их свойства

**Определение 1.1.1.** Таблица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, где $a_{ik} \in \mathbb{P}$ называется **прямоугольной матрицей размера** $m \times n$ **над полем** $\mathbb{P}$. В качестве поля $\mathbb{P}$ могут рассматриваться числовые поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Число $a_{ik}$ называется **элементом матрицы** $A$. Индекс $i$ элемента $a_{ik}$ указывает на номер строки, а индекс $k$ – на номер столбца.
Матрицу $A$ можно кратко записывать так: $[a_{ik}]$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, $[a_{ik}]_{m \times n}$ или $A_{m \times n}$.

**Пример 1.1.1.** Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

1) Какой размер матрицы $A$?
2) Найдите элементы $a_{12}, a_{23}, a_{33}$.
Ответ: $A_{2\times 3}$; $a_{12} = 4, a_{23} = 7$, $a_{33} =$ не определен.

**Определение 1.1.2.** Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно $n$, то матрицу $A$ называют **квадратной матрицей порядка** $n$.

**Пример 1.1.2.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ – квадратная матрица 2-го порядка,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ – квадратная матрица 3-го порядка.

**Определение 1.1.3.** **Нулевой матрицей** называется матрица, у которой все ее элементы равны нулю.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ – нулевые матрицы

**Определение 1.1.4.** Квадратная матрица порядка $n$ вида (1.1.1) называется **единичной** и обозначается через $E_n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad (1.1.1)$$

В линейной алгебре, **главной диагональю (иногда основной диагональю)** квадратной матрицы порядка $n$ называется набор элементов $a_{ii}$, где $i = \overline{1, ..., n}$, **побочной диагональю** — набор элементов $a_{i,n-i+1}$, где $i = \overline{1, ..., n}$. Главная диагональ квадратной матрицы — диагональ, которая проходит через верхний левый и нижний правый углы матрицы.

**Определение 1.1.5.** Квадратная матрица, элементы вне главной диагонали которой равны нулю, называется **диагональной**. Диагональная матрица, элементы главной диагонали которой равны, называется **скалярной**. Очевидно, что частным случаем скалярной матрицы является единичная.

**Определение 1.1.6.** Матрица размера $m \times n$, строками которой являются столбцы данной матрицы $A_{n\times m}$ называется **транспонированной** к $A$ и обозначается $A^T$.

**Пример 1.1.3.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$

Элементы $a_{ij}$ и $b_{ij}$ матриц $A$ и $B$, соответственно, стоящие в них на одинаковых местах, в дальнейшем будем называть **соответствующими**.

**Определение 1.1.7.** Две матрицы $A$ и $B$ называют **равными** и пишут $A = B$, если их размеры равны и равны соответствующие элементы.

*Кафедра*
*ФМ*
Начало
Содержание
Назад
На весь экран
Закрыть

**Пример 1.1.4.** Для матриц
$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x^2 - x + 3 & 3 \end{bmatrix}$ укажите значения неизвестной $x$, при которых они равны.

Матрицы $A$ и $B$ имеют одинаковый размер $2 \times 2$. По определению равенства матриц, матрицы $A$ и $B$ равны, если $x^2 - x + 3 = 3$. Очевидно, что $x = 0$ и $x = 1$.

**Пример 1.1.5.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Очевидно, что $A \neq B$.

**Определение 1.1.8.** **Ступенчатой** называется матрица $[a_{ij}]_{m \times n}$, обладающая следующими двумя свойствами:

1. Если $i$-ая строка нулевая, то $(i+1)$-ая строка также нулевая.

2. Если первые ненулевые элементы $i$-ой и $(i+1)$-ой строк располагаются в столбцах с номерами $k$ и $l$, то $k < l$.

**Замечание 1.1.1.** Обратим внимание на то, что в определении ступенчатой матрицы не требуется, чтобы она была квадратной.

**Пример 1.1.6.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – ступенчатые матрицы.

$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&2&6\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&0\end{bmatrix}$ – не являются ступенчатыми матрицами.

## Действия над матрицами

**Определение 1.1.9.** Пусть $A = [a_{ik}]_{m\times n}$, $B = [b_{ik}]_{m\times n}$. **Суммой матриц** $A$ **и** $B$ называется матрица $S = [s_{ik}]_{m\times n}$ и пишут $S = A + B$ такая, что

$$s_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le k \le n).$$

Таким образом, чтобы сложить две матрицы одинакового размера нужно сложить их соответствующие элементы.

**Замечание 1.1.2.** Обратим внимание на то, что сумма двух матриц $A$ и $B$ определена тогда и только тогда, когда размеры матриц $A$ и $B$ равны.

**Пример 1.1.7.** $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$.

**Определение 1.1.10.** Матрица $-A = [-a_{ik}]_{m\times n}$ называется **противоположной** к матрице $A = [a_{ik}]_{m\times n}$.

**Определение 1.1.11.** **Произведением матрицы** $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ **на скаляр** $\alpha \in \mathbb{P}$ называется матрица $\alpha A = [\alpha a_{ik}]_{m\times n}$. Таким образом, чтобы умножить любую матрицу на скаляр нужно каждый элемент матрицы умножить на этот скаляр.

**Замечание 1.1.3.** Обратим внимание на то, что противоположная матрица $-A$ к матрице $A$ равна произведению матрицы $A$ на скаляр $-1 \in \mathbb{P}$, т.е $-A = (-1)A$.

**Пример 1.1.8.** Пусть
$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$. Найдите $3A$.
Воспользуемся определением произведения матрицы на скаляр:
$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 6 & 9 & -15 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

**Определение 1.1.12.** Пусть $A = [a_{ik}]_{m\times n}$, $B = [b_{kj}]_{n\times s}$. **Произведением матриц** $A$ **и** $B$ называется матрица $P = [p_{ij}]_{m\times s}$ и пишут $P = AB$ такая, что

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le s).$$

Таким образом, чтобы найти элемент $p_{ij}$ произведения $P$ двух матриц $A$ и $B$ нужно найти сумму произведений элементов $i$-ой строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j$-ого столбца матрицы $B$.

**Замечание 1.1.4.** Обратим внимание на то, что произведение двух матриц $A$ и $B$ определено тогда и только тогда, когда <u>число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$</u>. Такие матрицы в дальнейшем будем называть **согласованными**.

**Пример 1.1.9.** Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

. Найдите $AB$.

Матрицы $A$ и $B$ согласованные. Поэтому воспользуемся определением произведения матриц: $AB =$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-3)1 + 3\cdot 1 + (-1)1 & 1\cdot 1 + (-3)2 + 3\cdot 1 + (-1)(-2) \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + (-5)1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-5)1 + 1(-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Замечание 1.1.1.** Если $A$ и $B$ квадратные матрицы $n$-ого порядка, то оба произведения $AB$ и $BA$ определены и являются матрицами $n$-ого порядка. Если $AB = BA$, то матрицы $A$ и $B$ называются **перестановочными или коммутативными. Довольно часто, вообще говоря,** $AB \neq BA$. Поэтому умножение матриц не коммутативно, т. е. существуют матрицы $A$ и $B$, что $AB \neq BA$.

Например, матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для этих матриц $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1(-1) + 0(-2) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 2(-1) + 3(-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 13 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Свойства сложения матриц
(при условии, что указанные операции имеют смысл)

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения).
2. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).
3. Если $[0]$ — нулевая матрица, то $A + [0] = A$.
4. Для любой матрицы $A$ существует противоположная $-A$ такая, что $A + (-A) = 0$.
5. $(\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{P}$

6. $\alpha(A_1 + A_2) = \alpha A_1 + \alpha A_2$.

7. $\alpha_1(\alpha_2 A) = (\alpha_1\alpha_2)A$.

8. $1A = A, 1 \in \mathbb{P}$

## Свойства умножения матриц (при условии, что указанные операции имеют смысл)

1. $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность умножения).

2. $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

3. $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.

## Свойства транспонирования матриц

1. $(A^T)^T = A$.

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \alpha \in \mathbb{P}$

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

## 1.2 Определитель квадратной матрицы, основные свойства определителей

Напомним сначала понятие перестановки из $n$ элементов. Рассмотрим конечное множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, состоящее из первых $n$ натуральных чисел.

**Определение 1.2.1.** Упорядоченное множество, содержащее $n$ различных элементов из множества $A$, называется **перестановкой** из $n$ элементов (чисел).

**Пример 1.2.1.** Пусть $n = 3$, $A = \{1, 2, 3\}$. Тогда упорядоченные множества (1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) являются перестановками из 3-х элементов. Их общее число равно 6.

**Утверждение 1.2.1.** Число перестановок из $n$ элементов равно $n$!

**Определение 1.2.2.** Взаимооднозначное отображение множества $A$ на себя называется **подстановкой** $n$-ой степени.

Всякую подстановку $\varphi$ $n$-ой степени удобно записывать в виде таблицы $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$.

Если элементы первой строки подстановки записаны в порядке возрастания, то говорят о **канонической форме** подстановки. Любые две подстановки отличаются вторыми строками, которые являются перестановками из $n$ чисел.

$$S_3 = \left\{ \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Значит, всего существует $n!$ подстановок $n$-ой степени. Обозначим множество всех подстановок $n$-ой степени через $S_n$.

Подстановка $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется **тождественной подстановкой** и также принадлежит множеству $S_n$. Подстановки $\varphi_1$ и $\varphi_2$ можно перемножить по правилу композиции отображений:

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(k) = \varphi_1(\varphi_2(k)), k = \overline{1, n}.$$

**Пример 1.2.2.** Пусть $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$.

Из правила композиции отображений следует:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В частности, $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \neq \varphi_2 \cdot \varphi_1$, то есть умножение подстановок некоммутативно.

**Теорема 1.2.1.** Множество $S_n$ является мультипликативной группой.

*Доказательство.* 1. Умножение двух подстановок определено на $S_n$, т. е. $\forall\ \varphi, f \in S_n \quad \varphi \cdot f \in S_n$;

2. Умножение подстановок ассоциативно, поскольку умножение подстановок рассматривается как композиция отображений;

3. Существует в $S_n$ единичный элемент. Им является тождественная подстановка $\varepsilon \in S_n$, поскольку $\forall\ \varphi \in S_n\ \varepsilon \cdot \varphi = \varphi \cdot \varepsilon = \varphi$ ;

4. Каждая подстановка обладает обратной подстановкой. Правило нахождения обратной подстановки иллюстрирует пример 1.2.3. Действительно $\forall \varphi \in S_n\ \exists\ \varphi^{-1} \in S_n \quad \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \varepsilon$.

□

**Пример 1.2.3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Четность и знак подстановки

Пусть дана произвольная подстановка $\varphi$ $n$-ой степени в канонической форме. Будем говорить, что элементы $i$ и $k$ $(i < k)$ первой строки образуют **инверсию**, если $\varphi(i) > \varphi(k)$, то есть если больший элемент первой строки имеет меньший образ.

**Пример 1.2.4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ — нет инверсий.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — 3 инверсии.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ — 1 инверсия.

**Определение 1.2.3.** Если в подстановке содержится четное число инверсий, то такая подстановка называется **четной**, в противном случае — **нечетной**.

**Определение 1.2.4.** Знак подстановки:

$$\operatorname{sgn}\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \text{ – четная подстановка;} \\ -1, & \text{если } \varphi \text{ – нечетная подстановка.} \end{cases}$$

**Пример 1.2.5.** Найдите знаки подстановок второй и третьей степени.

$$S_2 = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\operatorname{sgn} f_2 = -1$ ( одна инверсия)
$\operatorname{sgn} f_1 = 1$ ( нет инверсий)

$$S_3 = \left\{ \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\operatorname{sgn} \varphi_1 = 1$ (нет инверсий)
$\operatorname{sgn} \varphi_2 = -1$ (1 инверсия)
$\operatorname{sgn} \varphi_3 = -1$ (3 инверсии)
$\operatorname{sgn} \varphi_4 = -1$ (1 инверсия)
$\operatorname{sgn} \varphi_5 = 1$ (2 инверсии)
$\operatorname{sgn} \varphi_6 = 1$ (2 инверсии).

Правило. Чтобы подсчитать число инверсий данной подстановки нужно: подсчитать число $k_1$ элементов, которые стоят во второй строке впереди 1, затем зачеркнуть 1; найти число $k_2$ элементов, которые стоят во второй строке впереди 2, затем зачеркнуть 2 и т.д. Тогда число инверсий равно $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

Перестановка двух элементов второй строки подстановки называется **транспозицией**.

**Теорема 1.2.2.** 1. Четность подстановки изменяется на противоположную при транспозиции элементов подстановки.

2. Если к подстановке применить четное число транспозиций, то получится подстановка того же класса четности.

Рассмотрим квадратную матрицу $A$ $n$-ого порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Составим произведение $n$-элементов матрицы $A$, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца: $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$. Заметим, что этому произведению соответствует единственная подстановка $n$-ой степени $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. И наоборот. Всякой подстановке $\varphi$ $n$-ой степени соответствует единственное произведение $n$ элементов матрицы $A$, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} \Rightarrow a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)}\dots a_{n\varphi(n)}.$$

Значит всего существует $n!$ произведений $n$ элементов матрицы $A$ взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

**Определение 1.2.5. Определителем (детерминантом)** матрицы $A$ $n$-го порядка называется сумма $n!$ произведений $n$ элементов матрицы $A$ взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем каждое произведение умножается на $\operatorname{sgn}\varphi$, где $\varphi$ – подстановка соответствующего произведения и обозначается $|A|$ или $\det A$.

$$|A| = \sum_{\varphi\in S_n} \operatorname{sgn}\varphi \cdot a_{1_{\varphi(1)}} \cdot a_{2_{\varphi(2)}} \cdot \dots \cdot a_{n_{\varphi(n)}}.$$

**Пример 1.2.6.** Найдите определители второй и третьей степени.

$$S_2 = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\varphi_1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \operatorname{sgn}\varphi_2 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$S_3 = \left\{ \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\varphi_1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \operatorname{sgn}\varphi_2 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + \operatorname{sgn}\varphi_3 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} +$$

$$+ \operatorname{sgn}\varphi_4 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + \operatorname{sgn}\varphi_5 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + \operatorname{sgn}\varphi_6 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Графический способ.

Правило треугольника или правило Саррюса (см.рис 1.1)

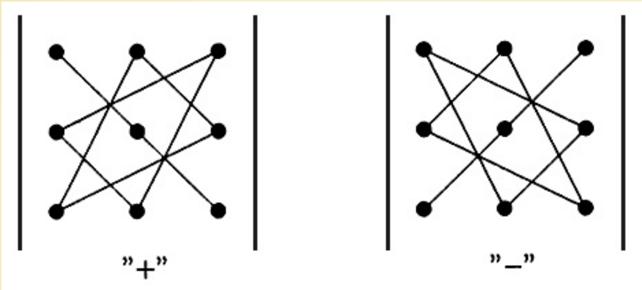


Рис. 1.1: при $n = 3$

**Пример 1.2.7.** По правилу треугольника найдите определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot1 + 1\cdot2\cdot2 + (-1)\cdot0\cdot(-1) - (-1\cdot4\cdot2 + 3\cdot0\cdot2 + 1\cdot(-1)\cdot1) =$$
$$= 12 + 4 - (-8 - 1) = 25.$$

**Определение 1.2.6.** Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы по одну сторону главной диагонали равны нулю.

**Утверждение 1.2.2.** Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов этой главной диагонали.

Основные свойства определителей.

1. Определитель не меняется:

а) при транспонировании матрицы, то есть $|A| = |A^T|$;

б) если к какой-нибудь строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на произвольное число.

2. Если $|A| \neq 0$, то матрица $A$ обратима, в противном случае нет.

3. Если строка или столбец матрицы $A$ нулевые, либо если две строки или два столбца пропорциональны, то определитель такой матрицы равен 0.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

5. $\alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, то есть чтобы умножить определитель на число нужно какую-нибудь строку или столбец умножить на это число.(Общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя).

6. Если каждый элемент $i$-ой строки матрицы $A$ равен сумме $m$ слагаемых $(m > 1)$, то определитель матрицы $A$ равен сумме $m$ определителей, причем элементы $i$-ой строки первого определителя – это первые слагаемые, элементы $i$-ой строки второго определителя – это вторые слагаемые и т. д.

7. $|AB| = |A| \cdot |B|$. Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению их определителей.

8. Пусть $A$ произвольная квадратная матрица. Определим ее степень

с натуральным показателем.

$A^1 = A$;

$A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$;

$A^0 = E_n$;

$A^{-1}$ – обратная матрица;

$A^{-k} = (A^{-1})^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$;

$|A^k| = |A|^k$.

*Доказательство.* п.1(a).

Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

По определению:

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)} \qquad (1.2.1)$$

$$\det A^T = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \cdot a_{\varphi(1)1} a_{\varphi(2)2} \dots a_{\varphi(n)n} \qquad (1.2.2)$$

Очевидно,что все произведения $a_{\varphi(1)1}a_{\varphi(2)2}\dots a_{\varphi(n)n}$ остаются в разных столбцах и строках, значит $a_{\varphi(1)1}a_{\varphi(2)2}\dots a_{\varphi(n)n}$ являются членами определителя 1.2.1.

Подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ имеют одинаковую четность. Поэтому $\det A = \det A^T$. □

*Доказательство.* п.3

Если матрица имеет нулевую строку, то каждое из произведений $a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)}\dots a_{n\varphi(n)}$ будет иметь нулевой множитель. Значит, $\det A = 0$. □

Пусть даны две квадратные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ & \dots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

порядков $n$ и $m$ соответственно над полем $\mathbb{P}$. Введем матрицу

$$X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} & \dots & a_{1n+m} \\ & \dots & & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} & \dots & a_{nn+m} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ & \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что

$$C = \begin{bmatrix} a_{1n+1} & \dots & a_{1n+m} \\ & \dots & \\ a_{nn+1} & \dots & a_{nn+m} \end{bmatrix}$$

будет $n \times m$-матрицей, а $X$ является $(n+m) \times (n+m)$-матрицей. Аналогично строятся матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

**Теорема 1.2.3.** Для построенных матриц справедливы равенства:

$$1)\ \det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \det A \det B;$$

$$2)\ \det \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{nm} \det A \det B.$$

**Пример 1.2.8.** Вычислите определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & -b & 0 \\ 0 & c & 0 & c \\ d & d & -d & -d \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Переставив 2-й и 3-й столбцы, получим матрицу

$$B = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ b & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & c \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix}.$$

Так как $\det A = -\det B$, а

$$\det B = \det \begin{bmatrix} a & a \\ b & -b \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} c & c \\ d & -d \end{bmatrix}$$

по теореме 1.2.3, то $\det A = -4abcd$. □

## 1.3 Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема Лапласа

Пусть дана матрица размера $m \times n$. Выберем в ней произвольно $s$ строк и $s$ столбцов, причем каждая строка и каждый столбец могут быть выбраны только один раз ($1 \leq s \leq \min(m, n)$, где $\min(m, n)$ — меньшее из чисел $m$ и $n$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют матрицу порядка $s$. Определитель этой матрицы называется **минором порядка $s$ данной матрицы**.

Для квадратной матрицы наряду с понятием минора вводится понятие дополнительного к нему минора. Пусть дана квадратная матрица порядка $n$ и ее минор $M$ порядка $s$. **Минором $M'$, дополнительным к минору $M$,** называется определитель матрицы, оставшейся после вычеркивания тех $s$ строк и $s$ столбцов данной матрицы, которые входят в минор $M$. Очевидно, что дополнительным к минору $M'$ будет минор $M$.

Алгебраическим дополнением минора называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^{\alpha}$, где $\alpha$ — сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в рассматриваемый минор.

Каждый элемент $a_{ij}$ матрицы $n$-ого порядка является минором 1-ого порядка. Дополнительный минор является определителем порядка $n-1$. Поэтому приходим к следующему определению.

**Определение 1.3.1.** **Минором** элемента $a_{ij}$ матрицы $A$ порядка $n$ называется определитель $n-1$ порядка, полученный из матрицы $A$ вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-ого столбца. Обозначается через $M_{ij}$.

**Определение 1.3.2.** **Алгебраическим дополнением** элемента $a_{ij}$ матрицы $A$ называется произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ и обозначается через $A_{ij}$.

**Пример 1.3.1.** Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ — минор элемента $a_{23}$,

$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{23}$.

**Утверждение 1.3.1.** 1) Определитель $n$-ого порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения: $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + \dots + a_{ij} \cdot A_{ij} + \dots + +a_{in} \cdot A_{in}$ (разложение по строке) $= a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (разложение по столбцу). Это утверждение сводит нахождение определителя $n$-ого порядка к вычислению определителей $n-1$ порядка. При этом предварительно, используя свойства определителя, можно аннулировать элементы какой-либо строки (столбца) за исключением одного элемента.

**Пример 1.3.2.** Вычислите определитель:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 2 & -14 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \end{vmatrix} = (1) \cdot (-1)^{1+1} M_{11} =$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & 2 & -14 \\ -2 & 3 & -10 \\ -5 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 134.$$

2) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) квад-

ратной матрицы $n$-ого порядка на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, то есть

$$a_{k1} \cdot A_{i1} + a_{k2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{in} = 0, \; k \neq i,$$

$$a_{1l} \cdot A_{1j} + a_{2l} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nl} \cdot A_{nj} = 0, \; l \neq j.$$

Утверждение 1.3.1 (1) является частным случаем более общей теоремы — теоремы Лапласа, которая представлена ниже.

3) (**Теорема Лапласа**) Определитель порядка $n$ равен сумме произведений всевозможных миноров $k$-го порядка ($k < n$), которые можно составить из произвольного выбранных $k$ строк (столбцов), на алгебраические дополнения этих миноров.

## 1.4 Обратимая матрица. Способы нахождения обратной матрицы

**Определение 1.4.1.** Квадратная матрица $A$ порядка $n$ называется **обратимой**, если существует матрица $B$ такая, что $AB = BA = E_n$. В этом случае матрица $B$ называется **обратной** к матрице $A$ и ее можно обозначить $A^{-1}$.

Из определения следует, что обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы. Однако, не всякая квадратная матрица имеет обратную.

**Определение 1.4.2.** **Невырожденной матрицей** называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля.

**Определение 1.4.3.** Матрицей, союзной или присоединенной к матрице $A$, называется матрица
$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$, где $A_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ данной матрицы $A$.

Обратим внимание на то, что в матрице $C$ алгебраические дополнения у элементам $i$-й строки матрицы $A$ расположены в $i$-м столбце.

**Теорема 1.4.1.** *1. Если $A$ — квадратная матрица порядка $n$, а $C$ — союзная к ней матрица, то*

$$AC = CA = |A| \cdot E_n.$$

*2. Для того чтобы матрица $A$ была обратима необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ была невырожденной.*

*3. Если матрица обратима, то существует единственная обратная к ней матрица.*

*4. Если $A$ и $B$ – обратимые матрицы одного порядка, то $AB$ обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

**Определение 1.4.4.** **Элементарными преобразованиями строк матрицы** называются преобразования следующих трёх типов:

1) прибавление к одной строке другой, умноженной на число;
2) перестановка двух строк местами;
3) умножение одной строки на число, отличное от нуля.

Способ нахождения обратной матрицы для обратимой матрицы $A$ $n$-го порядка.

I. **При помощи элементарных преобразований.**

1) К матрице $A$ приписываем справа единичную матрицу $n$-го порядка, то есть составляем матрицу $[A|E]$.

2) Элементарными преобразованиями строк матрицы $[A|E]$ на месте матрицы $A$ получаем единичную матрицу $E$, тогда на месте единичной матрицы получится $A^{-1}$.

**Пример 1.4.1.** Вычислите обратную матрицу для матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу $[A|E]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3.$$

$A^{-1}A = E_3$.

**Теорема 1.4.2.** Всякую матрицу путем элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

**Пример 1.4.2.** С помощью элементарных преобразований приведите к ступенчатому виду матрицу: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Умножим первую строку матрицы $A$ на 2 и сложим со второй. Затем первую строку умножим на 3 и сложим с третьей. В итоге получим:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 11 & -11 \end{bmatrix}$$

Теперь вторую строку умножим на (-5) и сложим с третьей, умноженной на 3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

II. (**При помощи алгебраических дополнений**)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

# РАЗДЕЛ 2
# Системы линейных уравнений

## 2.1 Системы линейных уравнений (СЛУ). Ее решение и следствие. Равносильные СЛУ и элементарные преобразования СЛУ

**Определение 2.1.1.** **Системой $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными** над полем $\mathbb{P}$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \quad \text{где } a_{ij}, b_i \in \mathbb{P}. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Числа $a_{ij}$ называют **коэффициентами** системы (2.1.1), а $b_i$ — **свободными членами** системы.

**Определение 2.1.2.** **Решением системы** (2.1.1) называют совокупность $c_1, \dots, c_n$ элементов из $\mathbb{P}$, которые после подстановки вместо $x_1, \dots, x_n$ превращают каждое уравнение системы в верное равенство.

**Определение 2.1.3.** Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, а система, не имеющая ни одного решения, — **несовместной**.

**Замечание 2.1.1.** Система (2.1.1) может состоять из одного уравнения.

Значение неизвестных $x_i$ будем искать в поле $\mathbb{P}$.

Сформулируем второй вариант определения решения системы линейных уравнений.

**Определение 2.1.4.** **Решением системы** (2.1.1) называется $n$-мерный вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{P}^n$, при подстановке которого в каждое уравнение системы (2.1.1) вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, получаются верные равенства.

**Определение 2.1.5.** Совместная система называется **определенной (неопределенной)**, если она имеет единственное решение (имеет бесконечное множество решений).

**Определение 2.1.6.** Система линейных уравнений, все свободные члены которой равны нулю, называются **однородной системой линейных уравнений**, в противном случае — неоднородной.

Заметим, что всякая однородная система совместна (имеет нулевое решение). Решить систему линейных уравнений — это значит исследовать совместна она или несовместна, а в случае совместности установить количество решений и найти их.

Рассмотрим систему $s$ линейных уравнений над полем $\mathbb{P}$ с $n$ неизвестными $x_1, \ldots, x_n$:

$$b_{i_1}x_1 + b_{i_2}x_2 + \cdots + b_{i_n}x_n = c_i, i = \overline{1, s} \tag{2.1.2}$$

**Определение 2.1.7.** Система (2.1.2) называется **следствием системы** (2.1.1), если каждое решение системы (2.1.1) является решением системы (2.1.2) или система (2.1.1) несовместна.

Запись (2.1.1) $\rightarrow$ (2.1.2) говорит о том, что система (2.1.2) есть следствие системы (2.1.1).

**Замечание 2.1.2.** 1. Система (2.1.2) является следствием системы (2.1.1) тогда и только тогда, когда множество всех решений системы (2.1.1) является подмножеством множества всех решений системы (2.1.2).

2. Всякая подсистема любой СЛУ является следствием этой системы.

**Определение 2.1.8.** Линейное уравнение $(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_m a_{m1})x_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_m a_{mn})x_n = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m$, полученное сложением уравнений системы, умноженных на $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{P}$, называется **линейной комбинацией уравнений системы** (2.2.3).

**Определение 2.1.9.** Две системы линейных уравнений с одними и теми же неизвестными над одним и тем же полем называются **равносильными**, если каждое из них является следствием другого.

**Замечание 2.1.3.** Две системы линейных уравнений равносильны тогда и только тогда, когда множество их решений совпадает.

**Определение 2.1.10.** **Элементарными преобразованиями** системы линейных уравнений называются преобразования следующих трёх типов:

1) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число;
2) перестановка двух уравнений;
3) умножение одного уравнения на число, отличное от нуля.

Очевидно, что всякое элементарное преобразование системы линейных уравнений приводит к соответствующему элементарному преобразованию ее матрицы коэффициентов.

**Теорема 2.1.1.** Если одна система линейных уравнений получена из другой в результате элементарных преобразований, то эти две системы равносильны.

## 2.2 Матричные уравнения. Запись и решение системы линейных уравнений в матричной форме

Напомним определение 2.1.1, в котором под системой $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными над полем $\mathbb{P}$ понимают систему вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
\tag{2.2.3}
$$

где $a_{ij}, b_i \in \mathbb{P}$, $a_{ij}$ — коэффициенты системы, $b_i$ — свободные члены.

Из коэффициентов при неизвестных в системе (2.2.3) составим матрицу размера $m \times n$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.
$$

Матрицу $A$ называют **матрицей системы уравнений (2.1.1)**. Введем обозначения:

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}.
$$

Перемножив матрицы $A$ и $X$, получим матрицу:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

Система(2.1.1) требует, чтобы матрицы $AX$ и $B$ были равны. Мы приходим к матричному уравнению

$$AX = B \tag{2.2.4}$$

**Определение 2.2.1.** Уравнение (2.2.4) называется **матричной записью** системы (2.1.1).

Если матрица $A$ является обратимой, то уравнение можно решить следующим образом (матричный метод):

1) умножим обе части этого уравнения на матрицу $A^{-1}$, т. е. $(A^{-1}(AX)) = A^{-1}B$;

2) используя слева свойство ассоциативности умножения матриц, получим $X = A^{-1}B$.

## 2.3 Теорема Крамера

Рассмотрим систему $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными над полем $\mathbb{P}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

**Теорема 2.3.1.** *(Крамера).* Если определитель $d$ матрицы системы (2.3.5) не равен нулю, то система (2.3.5) имеет единственное решение. Причем значения неизвестных находятся по формулам:

$$x_k = \frac{d_k}{d},$$

$k = \overline{1, n}$. Здесь $d_k$ — определитель, полученный из определителя $d$ заменой $k$-ого столбца столбцом свободных членов.

*Доказательство.* Запишем данную систему уравнений (2.3.5) в матричной форме $AX = B$, $A$ — матрица системы, $X$ – столбец неизвестных, $B$ – столбец свободных членов.

Так как по условию $|A| \neq 0$, то $A$ — обратимая матрица, а значит, матричное уравнение имеет единственное решение: $X = A^{-1}B =$

$$= \frac{1}{d}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_nA_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}.$$

Пусть $d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Алгебраические дополнения к элементам $b_1, b_2, \dots, b_n$ совпадают с алгебраическими дополнениями к элементам $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$. Поэтому первая сумма представления матрицы — это есть разложение $d_1$ по элементам первого столбца, аналогично, вторая сумма — разложение $d_2$ по элементам второго столбца, $n$-ая сумма — разложение $d_n$ по элементам $n$-ого столбца. Поэтому $X = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{d} \\ \dots \\ \frac{d_n}{d} \end{bmatrix}$, то есть $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{d} \\ \frac{d_2}{d} \\ \dots \\ \frac{d_n}{d} \end{bmatrix}$.

Таким образом, $x_k = \frac{d_k}{d}$, $k = \overline{1, n}$ — решение данной системы. □

**Следствие 2.3.1.** Если определитель однородной системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными не равен 0, то система имеет единственное нулевое решение.

**Следствие 2.3.2.** Если определитель однородной системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными равен 0, то система имеет бесконечное множество решений, в частности, нетривиальное решение.

**Пример 2.3.1.** Решите систему, используя теорему Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = -12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -13, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 134 \neq 0.$$

Значит, по теореме Крамера данная система имеет единственное решение.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -12 & -1 & -1 & -5 \\ -13 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -12 & -3 & -1 & -8 \\ -13 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -15 & -6 & -17 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -12 & -3 & -8 \\ -13 & 4 & -1 \\ 1 & -15 & -17 \end{vmatrix} =$$
$$= -134.$$

$$d_2=\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\3&-12&-1&-5\\2&-13&1&-4\\1&1&-6&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1&0\\2&-12&-1&-8\\3&-13&1&-1\\-5&1&-6&-17\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-12&-8\\3&-13&-1\\-5&1&-17\end{vmatrix}=$$
$$=-268.$$

$$d_3=\begin{vmatrix}1&2&0&3\\3&-1&-12&-5\\2&2&-13&-4\\1&-3&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&-7&-12&-14\\2&-2&-13&-10\\1&-5&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&-12&-14\\-2&-13&-10\\-5&-1&-2\end{vmatrix}=134.$$

$$d_4=\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\3&-1&-1&-12\\2&2&1&-13\\1&-3&-6&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&-7&2&-12\\2&-2&3&-13\\1&-5&-5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&-2&-12\\-2&3&-13\\-5&-5&1\end{vmatrix}=268.$$

Тогда:

$x_1=\frac{d_1}{d}=\frac{-134}{134}=-1,$

$x_2=\frac{d_2}{d}=\frac{-268}{134}=-2,$

$x_3=\frac{d_3}{d}=\frac{134}{134}=1,$

$x_4=\frac{d_4}{d}=\frac{268}{134}=2.$

Ответ: $x_1=-1, x_2=-2, x_3=1, x_4=2.$

# РАЗДЕЛ 3
# Введение в теорию векторных пространств

## 3.1 Определение и примеры векторных пространств. Арифметическое векторное пространство. Простейшие свойства векторных пространств

Пусть $\mathbb{P}$ – поле, элементы которого будем называть скалярами и обозначать малыми греческими буквами, $L$ – непустое множество элементов любой природы, которые будем обозначать малыми латинскими буквами. Пусть на $L$ задана бинарная операция "$+$". Рассмотрим отображение $\mathbb{P} \times L \to L$, которое назовем умножением элемента из $L$ на скаляр из $\mathbb{P}$, то есть $\forall(\alpha, a) \in \mathbb{P} \times L\ \exists! \alpha\, a \in L$. Элемент $\alpha a$ называется произведением элемента из $L$
на скаляр из $\mathbb{P}$. Операция умножения элемента из $L$ на скаляр из $\mathbb{P}$ не является бинарной, но является унарной.

**Определение 3.1.1.** Непустое множество $L$ с бинарной операцией "$+$" и операцией умножения элемента из $L$ на скаляр из $\mathbb{P}$ называется **векторным пространством** (линейным пространством), если выполняются следующие условия (аксиомы):

1) $(L, +)$ – коммутативная группа;
2) $\forall a \in L \quad 1a = a$ $(1 \in \mathbb{P})$;
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$, $\forall a \in L$ $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$, то есть умножение элемента из

$L$ на скаляр из $\mathbb{P}$ ассоциативно;

4) $\forall \alpha \in \mathbb{P}, \forall a, b \in L$ $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, то есть умножение на скаляр из $\mathbb{P}$ дистрибутивно относительно сложения элементов из $L$;

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}, \forall a \in L$ $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$, то есть умножение элементов из $L$ на скаляр из $\mathbb{P}$ дистрибутивно относительно сложения скаляров из $\mathbb{P}$.

Элементы векторного пространства $L$ будем называть **векторами**.

**Пример 3.1.1.** 1) Множество $\mathbb{P}^n$ всех $n$-мерных векторов, координаты которых принадлежат полю $\mathbb{P}$, то есть $\mathbb{P}^n = \{(p_1, \ldots, p_n) | p_i \in \mathbb{P}\}$, является векторным пространством.

Векторное пространство $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{P}$ называется **арифметическим векторным пространством** над полем $\mathbb{P}$. В частности $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ – арифметические векторные пространства над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, соответсвенно.

2) Множества всех векторов на плоскости и множество всех векторов обычного трехмерного пространства с операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$.

3) Расширение $\bar{\mathbb{P}}$ любого поля $\mathbb{P}$ относительно сложения элементов из $\bar{\mathbb{P}}$ и умножения элемента из $\bar{\mathbb{P}}$ на скаляр из $\mathbb{P}$ является векторным пространством на полем $\mathbb{P}$.

4) Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов от переменной $x$ с действительным коэффициентами со сложением многочленов и умножением мно-

гочлена на действительное число является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

### Простейшие свойства векторного пространства

Пусть $L$ – векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Тогда $(L,+)$ – коммутативная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) сложение на $L$ коммутативно и ассоциативно;

2) $\exists 0 \in L, \forall a \in L \ a+0=a$;

3) $\forall a \in L, \exists -a \in L \ a+(-a)=0$;

4) $\forall a, b \in L$ уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение $x=b+(-a)$, которое называется разностью векторов $b$ и $a$.

Из аксиом векторного пространства вытекают следующие свойства:

5) $\forall \alpha \in \mathbb{P}, \forall a \in L \ \alpha a=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ или $a=0 \in L$;

6) $\forall \alpha \in \mathbb{P}, \forall a \in L \ \alpha(-a)=(-\alpha)a=-\alpha a$;

7) $\forall \alpha \in \mathbb{P}, \forall a, b \in L \quad \alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b$;

8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{P} \quad (\alpha-\beta)a=\alpha a-\beta a$.

## 3.2 Линейная зависимость и независимость системы векторов

Пусть $L$ – произвольное векторное пространство над полем $\mathbb{P}$.

**Определение 3.2.1.** Вектор $b \in L$ называется **пропорциональным** вектору $a \in L$, если $\exists \alpha \in \mathbb{P}$ такое, что $b = \alpha a$.

**Пример 3.2.1.** Пусть $a = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ и $b = (2, 4, 6) \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, что $a$ и $b$ пропорциональны, так как $b = 2a$.

**Замечание 3.2.1.** Нулевой вектор из $L$ пропорционален произвольному вектору $a \in L$.

Обобщением понятия пропорциональности двух векторов является их линейная комбинация.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(a)$ — произвольная система векторов из пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$.

**Определение 3.2.2.** **Линейной комбинацией** векторов системы $(a)$ называется сумма произведений векторов этой системы на скаляры из поля $\mathbb{P}$, то есть вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m$, $\alpha_i \in \mathbb{P}$. Скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ называются коэффициентами линейной комбинации.

**Пример 3.2.2.** Пусть $a_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, $a_2 = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $2a_1 + 3a_2$ – линейная комбинация векторов $a_1$ и $a_2$.

**Определение 3.2.3.** Линейная комбинация называется **тривиальной (нетривиальной)**, если все ее коэффициенты равны нулю поля $\mathbb{P}$ (если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля поля $\mathbb{P}$).

**Определение 3.2.4.** Если вектор $b \in L$ является линейной комбинацией векторов системы $(a)$, то есть $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m$, то говорят, что вектор $b$ **линейно выражается** через систему векторов $(a)$.

**Пример 3.2.3.** 1) Вектор $b = (-1, 13) \in \mathbb{R}^2$ линейно выражается через систему векторов $a_1 = (1, 2)$ и $a_2 = (-1, 3)$ пространства $\mathbb{R}^2$, так как $b = 2a_1 + 3a_2$.

2) Нулевой вектор $0 \in L$ линейно выражается через систему $(a)$.

3) Любой вектор $a_s$ системы $(a)$ линейно выражается через систему $(a)$: $a_s = 0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_{s-1} + 1a_s + 0a_{s+1} + \ldots + 0a_n$.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(b)$ — еще одна система векторов пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$.

**Определение 3.2.5.** Будем говорить, что система векторов $(b)$ линейно выражается через систему векторов $(a)$, если каждый вектор системы $(b)$ линейно выражается через систему $(a)$.

**Замечание 3.2.2.** Всякая подсистема системы векторов $(a)$ линейно выражается через систему $(a)$.

**Утверждение 3.2.1.** Если система $(a)$ линейно выражается через систему векторов $(b)$, а система $(b)$ линейно выражается через систему $c_1, c_2, \ldots, c_k$ $(c)$ векторов пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$, то система $(a)$ линейно выражается через систему $(c)$.

С понятием линейной комбинации векторов тесно связано понятие линейной зависимости и линейной независимости системы векторов.

**Определение 3.2.6.** Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(a)$ векторов пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ называется **линейно независимой**, если равенство $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m$ возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$ $\ldots = \alpha_m = 0$, то есть если существует только тривиальная линейная комбинация векторов системы $(a)$ равная нулевому вектору пространства $L$.

**Определение 3.2.7.** Система векторов $(a)$ называется **линейно зависимой**, если $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ $(\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_m \neq 0)$ такие, что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m = 0$, то есть если существует нетривиальная линейная комбинация векторов системы $(a)$ равная нулевому вектору пространства $L$.

**Пример 3.2.4.** 1) Система векторов $1$, $i$ пространства комплексных чисел над полем $\mathbb{R}$ линейно независима.
$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i = 0;$
$\alpha_1 + \alpha_2 i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0.$

2) Система векторов $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin^2 x$ из пространства всех непрерывных функций над полем $\mathbb{R}$ является линейно зависимой.
$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \cos^2 x + \alpha_3 \cdot \sin^2 x = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 1.$
Коэффициенты комбинации нетривиальны.

3) Система векторов $e_1 = (1, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, …, $e_k = (0, 0, \dots, 1)$ $(e)$ арифметического пространства $\mathbb{P}^n$, где $\mathbb{P}$ — произвольное числовое поле, является линейно независимой.

Свойства линейной зависимости и линейной независимости системы векторов

**Теорема 3.2.1.** Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

**Следствие 3.2.1.** Система, состоящая из одного вектора, линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.

**Теорема 3.2.2.** Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда когда хотя бы один из векторов линейно выражается через остальные вектора системы.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m$ $(a)$ система векторов пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ и $(a)$ линейно зависима. Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{P}\, (\alpha_1 \neq 0 \vee \dots \vee \alpha_m \neq 0)$ такие, что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m = 0$.

Пусть, например, $\alpha_k \neq 0$. Тогда:
$a_k = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_k})a_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_k})a_2 + \ldots + (-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k})a_{k-1} + (-\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k})a_{k+1} + \ldots + (-\frac{\alpha_m}{\alpha_k})a_m.$

Это значит, что вектор $a_k$ линейно выражается через остальные вектора система $(a)$.

*Достаточность.* Пусть вектор $a_k$ системы $(a)$ линейно выражается через остальные вектора, то есть
$a_k = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \ldots + \alpha_m a_m.$

Тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + (-1) a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \ldots + \alpha_m a_m = 0$.

Так как $\alpha_k = -1$, то система $(a)$ линейно зависима. □

**Следствие 3.2.2.** Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда эти вектора пропорциональны.

**Следствие 3.2.3.** Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

**Теорема 3.2.3.** Если какая-нибудь подсистема системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.

**Следствие 3.2.4.** Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

**Теорема 3.2.4.** Если система векторов $(a)$ линейно независима, но при добавлении к ней вектора $b \in L$ становится линейно зависимой, то вектор $b$ линейно выражается через систему $(a)$ и причем однозначно.

*Доказательство.* По условию система $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ $(a')$ — линейно зависима. Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in \mathbb{P}$ $(\alpha_1 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_m \neq 0 \vee \alpha_{m+1} \neq 0)$ такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m + \alpha_{m+1} b = 0. \qquad (3.2.1)$$

Если $\alpha_{m+1} = 0$, то $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = 0$. Так как система (3.2.1) линейно независима, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$. Тогда и система $(b)$ так же линейно независима. Противоречие. Значит, $\alpha_{m+1} \neq 0$. Разделим

(3.2.1) на $\alpha_{m+1}$. Поэтому: $b = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}})a_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}})a_2 + \ldots + (-\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}})a_m$ — линейная комбинация векторов системы $(a)$.
Докажем однозначность.
Пусть $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m$ и $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_m a_m$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{P}$ — два различных выражения вектора $(b)$ через систему $(a)$.
Тогда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_m a_m$. Поэтому $(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)a_1 = 0$.
Так как система $(a)$ линейно независима, то $\alpha_i = \beta_i$. Противоречие. □

**Теорема 3.2.5.** Если система векторов $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ линейно выражается через систему векторов $b_1, \ldots, b_k$ $(b)$ и $m > k$, то система $(a)$ линейно зависима. Другими словами, если большая система векторов линейно выражается через меньшую, то большая система линейно зависима.

**Следствие 3.2.5.** Если система векторов $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ линейно выражается через систему векторов $b_1, \ldots, b_k(b)$ и система $(a)$ линейно независима, то $m \le k$.

**Следствие 3.2.6.** Любая система векторов, содержащая более $n$ векторов пространства $\mathbb{P}^n$, линейно зависима.

*Доказательство.* Хорошо известно, что произвольный вектор $b \in \mathbb{P}^n$ линейно выражается, через систему единичных векторов $(e)$: $e_1 = (1, \ldots, 0)$,

$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ , …, $e_n = (0, \ldots, 1)$. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ система векторов из $\mathbb{P}^n$, $m > n$. Тогда $(a)$ линейно выражается через $(e)$. По теореме 3.2.5 система $(a)$ линейно зависима. □

## 3.3 Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования системы векторов. Базис системы векторов. Ранг системы векторов

**Определение 3.3.1.** Две системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ и $b_1, \ldots, b_n$ $(b)$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ называются **эквивалентными** и пишут $(a) \sim (b)$, если каждая из них линейно выражается через другую.

**Утверждение 3.3.1.** Если $(a) \sim (b)$, а $(b) \sim (c)$, то $(a) \sim (c)$.

**Теорема 3.3.1.** Если две системы векторов эквивалентны и каждая из них линейно независима, то они содержат одинаковое число векторов.

*Доказательство.* Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ эквивалентна системе векторов $b_1, \ldots, b_n$ $(b)$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$. Тогда $(a)$ линейно выражается через $(b)$. По следствию 3.2.5 имеем, что $m \leq n$. Аналогично, $(b)$ линейно выражается через $(a)$. Тогда $m \geq n$. Поэтому $m = n$. □

**Определение 3.3.2.** **Элементарными преобразованиями систе-**

**мы векторов** пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ называются следующие преобразования:

1) перестановка двух векторов системы;

2) умножение какого-нибудь вектора системы на ненулевой скаляр из $\mathbb{P}$;

3) прибавление к одному из векторов системы другого вектора, умноженного на скаляр из поля $\mathbb{P}$;

4) исключение из системы векторов вектора, который линейно выражается через остальные векторы системы или введение в систему вектора из пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$, который линейно выражается через эту систему.

**Теорема 3.3.2.** Если одна система векторов получена из другой при помощи цепочки элементарных преобразований, то эти две системы эквивалентны.

Базис системы векторов

**Определение 3.3.3.** **Базисом системы векторов** $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ называется ее линейно независимая подсистема, через которую линейно выражается любой вектор системы $(a)$.

**Замечание 3.3.1.** Система нулевых векторов не имеет базиса.

**Пример 3.3.1.** $a_1 = (2, -3, 0, 4)$, $a_2 = (1, 5, 6, 0)$,
$a_3 = (-2, -10, -12, 0) \in \mathbb{R}^4$

Очевидно, что вектора $a_2$ и $a_3$ пропорциональны, а, значит, линейно независимы. Причем $a_1 = 1a_1 + 0a_2$, $a_2 = 0a_1 + 1a_2$, $a_3 = 0a_1 + (-2)a_2$. Значит вектора $a_1, a_2$ образуют базис.

**Определение 3.3.4.** Линейно независимая подсистема системы векторов $(a)$ называется **максимальной линейно независимой подсистемой**, если при добавлении к ней любого вектора из системы $(a)$ получается линейно зависимая подсистема.

**Теорема 3.3.3.** Подсистема системы векторов $(a)$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ образует базис системы $(a)$ тогда и только тогда, когда она является максимальной линейно независимой подсистемой.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть подсистема $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}$ $(a')$ – базис системы векторов $(a)$. Значит, любой вектор $b \in (a)$ линейно выражается через систему векторов $(a')$. Поэтому система $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}, b$ по теореме 3.2.2 линейно зависима, а значит, $(a')$ является максимальной линейно независимой подсистемой.
*Достаточность.* Пусть $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}$ $(a')$ максимальная линейно независимая подсистема системы $(a)$. Пусть $b \in (a)$ – произвольный вектор системы $(a)$. Поэтому система $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}, b$ является линейно зависимой. Тогда по теореме 3.2.4 вектор $b$ линейно выражается через $(a')$. А значит, $(a')$ является базисом системы $(a)$. □

**Теорема 3.3.4.** Всякая система векторов, содержащая хотя бы один ненулевой вектор, имеет базис.

**Теорема 3.3.5.** Любые два базиса одной и той же системы векторов имеют одинаковое число векторов.

*Доказательство.* Пусть $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ $(a'), b_{k_1}, \ldots, b_{k_m}$ $(b')$ – базисы системы $(a)$. Тогда $(a') \sim (b')$. Значит, из теоремы 3.3.1 следует заключение теоремы. $\square$

**Определение 3.3.5.** **Рангом конечной системы векторов**, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, называется количество векторов в ее базисе.

Заметим, что система нулевых векторов не имеет базиса. Поэтому принято считать, что ее ранг равен 0. Ранг системы векторов $(a)$ обозначим через $\operatorname{rang}(a)$. Из введенного определения следует, что:

1) если $\operatorname{rang}(a) = m$, то линейно независимая подсистема системы $(a)$, содержащая $m$ векторов, является базисом системы $(a)$.

2) если $\operatorname{rang}(a) = m$, то любая подсистема системы $(a)$, содержащая более $m$ векторов, будет линейно зависимой подсистемой системы $(a)$.

**Теорема 3.3.6.** Если система векторов $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ линейно выражается через систему $b_1, \ldots, b_n$ $(b)$, то $\operatorname{rang}(a) \leq \operatorname{rang}(b)$.

*Доказательство.* 1) Если система $(a)$ состоит из нулевых векторов, то $\operatorname{rang}(a) = 0$ и она выражается через любую ненулевую систему векторов $(b)$. Очевидно, что $0 = \operatorname{rang}(a) \leq \operatorname{rang}(b)$.

2) Пусть система $(a)$ ненулевая. Тогда системы $(a)$ и $(b)$ имеют базисы. Пусть $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} (a')$ – базис системы $(a)$, $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_s} (b')$ – базис системы $(b)$. Покажем, что $(a')$ линейно выражается через $(b')$. Так как $(a')$ выражается через $(a)$, а $(a)$ выражается через $(b)$, а $(b)$ выражается через $(b')$, то $(b)$ линейно выражается через $(b')$. Так как система $(a')$ линейно независима, то по следствию 3.2.5 $k \leq s$ или $\operatorname{rang}(a) \leq \operatorname{rang}(b)$. □

**Следствие 3.3.1.** Ранг всякой подсистемы конечной системы векторов не больше ранга самой системы.

**Следствие 3.3.2.** Ранги эквивалентных систем векторов равны.

**Следствие 3.3.3.** Элементарные преобразования не изменяют ранг системы векторов.

**Теорема 3.3.7.** Ранг любой конечной системы векторов арифметического пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{P}$ не превышает $n$.

*Доказательство.* Пусть $a_1, \ldots, a_m$ $(a)$ – произвольная система векторов пространства $\mathbb{P}^n$. Хорошо известно, что система $(a)$ линейно выражается через систему $(e)$ (единичных векторов). Тогда по теореме 3.3.6 $\operatorname{rang}(a) \leq \operatorname{rang}(e) = n$ □

**Теорема 3.3.8.** Ранги систем векторов $a_1, \ldots, a_n$ $(a)$ и $a_1, \ldots, a_n, b$ совпадают тогда и только тогда, когда $b$ линейно выражается через $(a)$.

*Доказательство. Достаточность.* Если $b$ линейно выражается через $(a)$, то систему $a_1, \dots, a_n, b$ получим из системы $(a)$ элементарными преобразованиями, а значит по следствию 3.3.3 их ранги совпадают.

*Необходимость.* Пусть $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ $(b)$ – базис системы $(a)$. Тогда $b$ линейно выражается через $(b)$. Так как $(a')$ линейно выражается через $(a)$, то $b$ линейно выражается через $(a)$. □

## 3.4 Ранг матрицы

Пусть $A = [a_{ij}]$ – матрица размера $k \times l$. Зафиксируем натуральное число $r$, не превосходящее $k$ и $l$. Выделим в матрице $r$ строк с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ и $r$ столбцов с номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Элементы матрицы $A$, стоящие на пересечении отмеченных строк и отмеченных столбцов, образуют квадратную матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} \\ & & \dots & \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \dots & a_{i_rj_r} \end{bmatrix}$$

порядка $r$. Определитель этой матрицы называется *минором $r$-го порядка матрицы $A$*. Конечно, для каждого $r < \min\{k, l\}$ можно составить несколько миноров $r$-го порядка. Обозначая миноры, номера выбранных строк будем указывать верхними индексами, а выбранных столбцов —

нижними, располагая их по возрастанию. Поэтому приведенный выше минор будет обозначаться $M^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_r}$

**Пример 3.4.1.** Записать миноры разных порядков матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Матрица $A$ имеет размеры $3 \times 4$. Она имеет: 12 миноров 1-го порядка, например, минор $M_2^3 = det(a_{32}) = 4$; 18 миноров 2-го порядка, например, $M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$; 4 минора 3-го порядка, например,

$$M_{134}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

□

**Определение 3.4.1.** В матрице $A$ размеров $m \times n$ минор $r$-го порядка называется **базисным**, если он отличен от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю или их вообще не существует.

**Определение 3.4.2.** **Рангом матрицы** называется порядок базисного минора. В нулевой матрице базисного минора нет. Поэтому ранг нулевой матрицы по определению полагают равным нулю. Ранг матрицы $A$ обозначается через $\mathrm{rang}A$.

**Пример 3.4.2.** Найти все базисные миноры и ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&2&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Все миноры третьего порядка данной матрицы равны нулю, так как у этих определителей третья строка нулевая. Поэтому базисным может быть только минор второго порядка, расположенный в первых двух строках матрицы. Перебирая 6 возможных миноров, отбираем отличные от нуля

$$M_{12}^{12}=M_{13}^{12}=\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix},\ M_{24}^{12}=M_{34}^{12}=\begin{vmatrix}2&0\\2&3\end{vmatrix},\ M_{14}^{12}=\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}.$$

Каждый из этих пяти миноров является базисным. Следовательно, ранг матрицы равен 2. □

**Лемма 3.4.1.** 1. Если в матрице все миноры $r$-го порядка равны нулю, то равны нулю все миноры более высокого порядка.

2. Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличного от нуля минора этой матрицы.

3. Если квадратная матрица невырожденная, то ее ранг равен ее порядку. Если квадратная матрица вырожденная, то ее ранг меньше ее порядка.

*Доказательство.* 1. Раскладывая минор $(k+1)$-го порядка по любой строке, получаем сумму произведений элементов этой строки на миноры $k$-го порядка, а они равны нулю

2. Если $r(A) = r$, то для $m > r$ в силу леммы 3.4.1 в матрице $A$ все миноры $m$-го порядка равны нулю. Поэтому ранг ненулевой матрицы $A$ — это наивысший порядок отличных от нуля миноров.

3. Так как матрица невырожденная, то ее определитель отличен от нуля. Следовательно, ее определитель является минором наибольшего порядка, отличным от нуля. Поэтому ранг матрицы равен ее порядку. □

**Пример 3.4.3.** Найдите ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* В матрице $A$ строки пропорциональны. По свойству 3 определителя любой минор $r$-го порядка, $r \geq 2$, этой матрицы равен нулю. Поэтому ее ранг равен 1. □

**Теорема 3.4.1.** (О базисном миноре) В произвольной матрице $A$ каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.

*Доказательство.* Без ограничения общности предполагаем, что в матрице $A$ размеров $m \times n$ базисный минор расположен в первых $r$ строках и первых $r$ столбцах. Рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & a_{sk} \end{vmatrix},$$

который получен приписыванием к базисному минору матрицы $A$ соответствующих элементов $s$-й строки и $k$-го столбца. Отметим, что при любых $1 \le s \le m$ и $1 \le k \le n$ этот определитель равен нулю.

Если $s \le r$ или $k \le r$, то определитель $D$ содержит две одинаковых строки или два одинаковых столбца.

Если же $s > r$ и $k > r$, то определитель $D$ равен нулю, так как является минором $(r + l)$-го порядка. Раскладывая определитель по последней строке, получаем

$$a_{s1} \cdot D_{\{r+1\}1} + \dots + a_{sr} \cdot D_{\{r+1\}r} + a_{sk} \cdot D_{\{r+1\}\{r+1\}} = 0,$$

где $D_{\{r+1\}j}$ — алгебраические дополнения элементов последней строки. Заметим, что $D_{\{r+1\}\{r+1\}} \neq 0$, так как это базисный минор. Поэтому

$$a_{sk} = \lambda_1 \cdot a_{s1} + \dots + \lambda_r \cdot a_{sr},$$

где $\lambda_j = -\frac{D_{\{r+1\}j}}{D_{\{r+1\}\{r+1\}}}$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Записывая последнее равенство для $s = 1, 2, \dots, m$, получаем

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \dots \\ a_{mr} \end{bmatrix},$$

т. е. $k$-й столбец (при любом $1 \leq k \leq n$) есть линейная комбинация столбцов базисного минора, что и требовалось доказать. □

**Теорема 3.4.2.** При элементарных преобразованиях строк (столбцов) ранг матрицы не меняется. В частности, при элементарных преобразованиях невырожденная квадратная матрица остается невырожденной.

*Доказательство.* Пусть $\operatorname{rang} A = r$. Предположим, что в результате одного элементарного преобразования строк матрицы $A$ получили матрицу $B$. Если была выполнена перестановка двух строк, то любой минор $(r+1)$-го порядка матрицы $B$ либо равен соответствующему минору $(r+1)$-го порядка матрицы $A$, либо отличается от него знаком (свойство определителя). Если было выполнено умножение строки на число $\lambda \neq 0$, то любой минор $(r+1)$-го порядка матрицы $B$ либо равен соответствующему минору $(r+1)$-го порядка матрицы $A$, либо отличается от него множителем $\lambda \neq 0$ (свойство определителя). Если было выполнено прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число $\lambda \neq 0$, то любой минор $(r+1)$-го порядка матрицы $B$ либо равен соответствующему минору $(r+1)$-го порядка матрицы $A$ (свойство определителя), либо равен сумме двух миноров $(r+1)$-го порядка матрицы $A$ (свойство определителя). Поэтому при элементарном преобразовании строк любого типа все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы $B$ равны нулю, так как равны нулю все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы $A$. Таким образом, доказано, что при элементарных преобразованиях строк ранг матрицы не может увеличиться. Так как преобразования, обратные к элементарным, являются элементарными, то ранг матрицы при элементарных преобразованиях строк не может и уменьшиться, т. е. не изменяется. Аналогично доказывается, что ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов. □

**Следствие 3.4.1.** *Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то эту строку (столбец) можно вычеркнуть из матрицы, не изменив при этом ее ранга.*

**Теорема 3.4.3.** (О ранге матрицы) Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.

*Доказательство.* Пусть $\operatorname{rang} A = r$ . Тогда в матрице $A$ имеется $r$ линейно независимых строк. Это строки, в которых расположен базисный минор. Если бы они были линейно зависимы, то этот минор был бы равен нулю, а ранг матрицы $A$ не равнялся бы $r$. Покажем, что $r$ — максимальное число линейно независимых строк, т. е. любые $p$ строк линейно зависимы при $p > r$. Действительно, образуем из этих $p$ строк матрицу

$B$. Поскольку матрица $B$ – это часть матрицы $A$, то $\operatorname{rang} B \leq \operatorname{rang} A = r < p$. Значит, хотя бы одна строка матрицы $B$ не входит в базисный минор этой матрицы. Тогда по теореме о базисном миноре она равна линейной комбинации строк, в которых расположен базисный минор. Следовательно, строки матрицы $B$ линейно зависимы. Таким образом, в матрице $A$ не более, чем $r$ линейно независимых строк. $\square$

**Следствие 3.4.2.** *Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов.*

**Теорема 3.4.4.** Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

*Доказательство.* Способ 1. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – векторы-строки ненулевой матрицы $A$. Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу $A$ к ступенчатому виду $A'$.
Пусть $a'_1, \ldots, a'_r$ – векторы-строки ступенчатой матрицы $B$. Очевидно, что $r \leq m$. Тогда из следствия 3.3.3 $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(a_1, \ldots, a_m) = \operatorname{rang}(a'_1, \ldots, a'_r)$. Так как система $a'_1, \ldots, a'_r$ линейно независима, то $\operatorname{rang}(a'_1, \ldots, a'_r) = r$ – число строк ступенчатой матрицы.

Способ 2. Доказать самостоятельно, используя понятие базисного минора.

$\square$

**Замечание 3.4.1.** Зная как находится ранг матриц, мы сможем находить ранг системы векторов пространства $\mathbb{P}^n$.
Ранг системы векторов пространства $\mathbb{P}^n$ равен рангу матрицы, строками которой являются эти вектора.

**Пример 3.4.4.** Найти ранг системы векторов пространства $\mathbb{P}^n$:

$$a_1(1,2,-1,4),\ a_2(2,4,3,-2),\ a_3(0,0,5,-3),\ a_4(1,2,-11,17)$$

Решение. Составим матрицу $A$, записывая координаты векторов $a_1, a_2, a_3, a_4$ в строки и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -11 & 17 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A = 3$. Значит $\operatorname{rang}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$.

Способы нахождения ранга матрицы.

I. При помощи элементарных преобразований.

Из теорем 3.4.2 и 3.4.4 получаем, что для вычисления ранга матрицы $A$ следует:

1) привести матрицу $A$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований;

2) число ненулевых строк получившейся ступенчатой матрицы будет рангом матрицы $A$.

II. Метод окаймляющих миноров.

Пусть в матрице $A$ найден ненулевой минор $k$-го порядка $M$. Рассмотрим все миноры $(k+1)$-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор $M$. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен $k$. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, и вся процедура повторяется.

## 3.5 Критерий совместности СЛУ. Теорема Кронекера — Капелли, следствие. Метод Гаусса решения СЛУ

**Определение 3.5.1.** Матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (2.2.3) называется матрицей системы (2.2.3).

**Определение 3.5.2.** Матрица $B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$, полученная из матрицы $A$ присоединением к ней столбца свободных членов системы (2.1.1) называется **расширенной матрицей** системы (2.1.1).

**Замечание 3.5.1.** Матрица $B$ и система (2.1.1) однозначно определяют друг друга. Элементарные преобразования строк матрицы $B$ соответствуют элементарным преобразованиям уравнений системы (2.1.1).

**Теорема 3.5.1.** Система линейных уравнений (2.1.1) совместна тогда и только тогда, когда последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая. Причем система (2.1.1) определенная, если число строк ступенчатой матрицы равно числу неизвестных и неопределенная, если это число меньше числа неизвестных.

*Доказательство. Необходимость.* Применим метод от противного. Предположим, что последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы нулевая, то есть $B' = \left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & \ldots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & \ldots & b_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & c_r \end{array}\right]$, $r \leq m$.

По определению ступенчатой матрицы $c_r \neq 0$. Поэтому система (2.1.1) не является однородной. Составим по матрице $B'$ систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1, \\ 0x_1 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_n = c_r. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Система (3.5.1) несовместна, так как последнее уравнение системы никогда не будет иметь решение. Так как матрица $B'$ получена из матрицы $B$ путем элементарных преобразований строк, то система (3.5.1) получена из системы (2.1.1) элементарными преобразованиями уравнений, а значит системы (2.1.1) и (3.5.1) равносильны. Поэтому система (2.1.1) не имеет решений. Противоречие с предположением.

*Достаточность.* Пусть последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая. Если в этой матрице первый слева ненулевой элемент $i$-той строки стоит не в $i$-ом столбце, а в $k$-ом, $k > 0$, то переставим местами столбцы $i$ и $k$ (это значит переименуем неизвестные $x_i$ на $x_k$, а $x_k$ на $x_i$). В результате получим следующую матрицу:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,r-1} & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2,r-1} & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} & c_r \end{array}\right]$$

$$r \leq m,\, b_{11} \neq 0,\, \dots,\, b_{rr} \neq 0.$$

В последней ступенчатой матрице путем элементарных преобразований на месте первых ненулевых элементов получим 1, а все элементы выше полученных единиц аннулируем. В результате получим следующую матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_{1,r+1} & \dots & b'_{1n} & c'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b'_{2,r+1} & \dots & b'_{2n} & c'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_{r,r+1} & \dots & b'_{rn} & c'_r \end{array}\right]$$

Составим по этой матрице систему:

$$\begin{cases} x_1 + b'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + b'_{1n}x_n = c'_1, \\ x_2 + b'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + b'_{2n}x_n = c'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + b'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + b'_{rn}x_n = c'_r. \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Возможны следующие варианты:

1) Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, при которых стоят первые ненулевые коэффициенты уравнений системы (3.5.2) называются **базисными** неизвестными системы, а остальные неизвестные — **свободными** неизвестными. Выразим в системе (3.5.2) базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -b'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{1n}x_n + c'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = -b'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{rn}x_n + c'_r. \end{cases} \tag{3.5.3}$$

Система (3.5.3) будет равносильной к системе (2.1.1) в случае обратной перенумерации неизвестных.

Вектор $(-b'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{1n}x_n + c'_1, \ldots, -b'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{rn}x_n + c'_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ называется **общим решением системы** (2.1.1). Так как свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ принимают произвольные значения числового поля $\mathbb{P}$, то система (2.1.1) имеет бесконечное множество решений.

2) Пусть $r = n$. В этом случае число строк ступенчатой матрицы для расширенной равно числу неизвестных. В этом случае система (3.5.2) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = c'_1, \\ x_2 = c'_2, \\ \ldots\ldots \\ x_r = c'_r. \end{cases}$$ Следовательно, система (2.1.1) имеет единственное решение $(c'_1, \ldots, c'_r)$. □

**Следствие 3.5.1.** Любая однородная система линейных уравнений совместна. Причем она определенная, если число строк в ступенчатой матрице для матрицы $A$ равно числу неизвестных системы, и неопределенная, если число строк меньше числа неизвестных системы.

**Следствие 3.5.2.** Всякая однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных является неопределенной.

**Теорема 3.5.2.** (*Кронекера — Капелли.*)
Система (2.1.1) совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. Причем система (2.1.1) определенная, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = n$, и неопределенная, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B < n$.

**Следствие 3.5.3.** Всякая однородная система совместна, причем она определенная, если ранг матрицы $A$ этой системы равен числу неизвестных системы и неопределенная, если ранг матрицы $A$ меньше числа неизвестных системы.

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных), основан на приведении системы линейных уравнений к ступенчатому виду. Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путем элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой.

Заметим, что если в процессе элементарных преобразований получаем уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_l = 0,$$

то такое уравнение можно убрать из системы, т. к. ему удовлетворяют все элементы поля $\mathbb{P}$.

Если в процессе элементарных преобразований приходим к уравнению

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_l = b, b \neq 0,$$

то система с таким уравнением будет несовместной, т. к. ему не удовлетворяет ни один набор элементов поля $\mathbb{P}$.

На втором этапе осуществляется обратный ход метода Гаусса, который заключается в последовательном выражении переменных. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (первая переменная слева, коэффициент при которой отличен от нуля) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» наверх.

Т. к. каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

Метод Гаусса идеально подходит для решения систем уравнений, у которых матрица системы не является квадратной (метод Крамера и матричный метод — только для квадратных систем), т. е. метод Гаусса — универсальный метод для нахождения решения любой системы линейных уравнений. Он работает в случае, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Краткий алгоритм решения СЛУ методом Гаусса.

Пусть дана система линейных уравнений (2.1.1). Метод Гаусса заключается в следующем:

1 составляем расширенную матрицу $B$ системы (2.1.1);

2 элементарными преобразованиями строк приводим матрицу $B$ к ступенчатой матрице $B'$;

3 пользуясь критерием Гаусса или Кронекера—Капелли, по ступенчатой матрице $B'$ определяем совместа система или нет;

4 в случае совместности составляем по ступенчатой матрице систему равносильную данной системе (2.1.1);

5 из этой системы, если она определенная, находим значения переменных и записываем их в виде вектора;

6 если система неопределенная, то выражаем базисные переменные

через свободные и записываем общее решение системы (2.1.1) в виде вектора.

**Пример 3.5.1.** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = -9. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Решение:

1) Составим расширенную матрицу $B$ и приведём ее к ступенчатому виду: $B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$

Последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы $B$ нулевая, поэтому система несовместна. Аналогичное заключение получаем по критерию Кронекера-Капелли: $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B$.

$$3)\ B = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & -12 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right].$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$, то система совместна. Составим равносильную к исходной систему линейных уравнений. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_3 - 5x_4 = -4. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5x_4 - 4, \\ 2x_1 = x_2 + 5x_4 - 4 - 3x_4 + 3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5x_4 - 4, \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, вектор $(\frac{1}{2}x_2 + x_4\frac{1}{2}; x_2; 5x_4 - 4; x_4)$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ является общим решением системы.

$$2) B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 4 = n$, то система совместна. Составим по ступенчатой матрице систему равносильную данной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5, \\ x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, вектор $(-1; -1; 0; 1) \in \mathbb{R}^4$ является единственным решением исходной системы.

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

Так как $\operatorname{rang} A = 2 < 3 = n$, то система неопределенная. Составим по ступенчатой матрице систему, равносильную данной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Выразим базисные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_2 = x_3, \\ x_1 = x_3. \end{cases}$$

Таким образом, вектор $(x_3; x_3; x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$ является общим решением исходной системы.

## 3.6 Базис и размерность векторного пространства

**Определение 3.6.1.** **Базисом векторного пространства** $L$ над полем $\mathbb{P}$ называется его линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается каждый вектор пространства $L$.

**Замечание 3.6.1.** Нулевое пространство над полем $\mathbb{P}$, то есть пространство, состоящее из одного нулевого вектора, не имеет базиса.

**Пример 3.6.1.** 1) Система единичных векторов $\underbrace{(1,\ldots,0)}_{n},\ldots,\underbrace{(0,\ldots,1)}_{n}$ пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{P}$ является базисом этого пространства.

2) Векторы $1, i$ – базис пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$.

3) Рассмотрим пространство $M_2(\mathbb{R})$ вещественных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$.

Матрицы $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ образуют базис пространства $M_2(\mathbb{R})$.

**Определение 3.6.2.** Линейно независимая система векторов пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ называется **максимальной линейно независимой системой**, если при добавлении к ней произвольного вектора из $L$ получается линейно зависимая система.

**Теорема 3.6.1.** Система векторов $(a)$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ является базисом этого пространства тогда и только тогда, когда система $(a)$ является максимальной линейно независимой системой.

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3.3. □

**Теорема 3.6.2.** Любые два базиса одного и того же пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ имеют одинаковое число векторов.

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3.5. □

**Определение 3.6.3.** **Размерностью** векторного пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ называется число векторов в любом базисе пространства $L$ и обозначается $\dim L$.

**Пример 3.6.2.** $\dim\{0\} = 0$, $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2$, $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, $\dim \mathbb{P}^n = n$.

**Определение 3.6.4.** Если $\dim L = n$, то пространство $L$ называют **$n$-мерным векторным пространством** и обозначают $L_n$.

Существуют векторные пространства, содержащие линейно независимые системы с любым числом векторов. Такие пространства называют **бесконечномерными.** Они не имеют базиса.

**Теорема 3.6.3.** Всякая система, содержащая более $n$ векторов пространства $L_n$, линейно зависима.

*Доказательство.* Пусть $(b)$ — система, содержащая более $n$ векторов пространства $L_n$, а система $(a)$ — базис пространства $L_n$. Предположим, что система $(b)$ линейно независима. Так как система $(b)$ линейно выражается через систему векторов $(a)$, то из следствия 3.2.5 вытекает, что число векторов системы $(b)$ не превышает числа векторов системы $(a)$, т. е. числа $n$. Противоречие с предположением. □

**Следствие 3.6.1.** Всякая линейно независимая система векторов пространства $L_n$ содержит не более $n$ векторов.

**Теорема 3.6.4.** Всякая линейно независимая система векторов пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$ является базисом, если содержит $n$ векторов, и может быть дополнена до базиса, если содержит менее $n$ векторов.

*Доказательство.* Пусть $a_1, \ldots, a_n$ $(a)$ – линейно независимая система векторов пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$. При добавлении к ней вектора $b \in L_n$ система $a_1, \ldots, a_n, b$ будет линейно зависимой, а, значит, система $(a)$ максимальная линейно независимая система. Тогда $(a)$ — базис пространства $L_n$.

Пусть $a_1, \ldots, a_m$ $(a')$ – линейно независимая система векторов. Если при добавлении к $(a')$ любого вектора из $L_n$ получим линейно зависимую систему, то $\dim L_n = m < n$. Противоречие. Значит, существует вектор $b$ из пространства $L_n$ такой, что система векторов $(b), b$ является линейно независимой.

А, значит, постепенное добавление к системе $(b)$ векторов из $L_n$ приведет к построению линейно независимой системы векторов, содержащую $n$ векторов, т. е. к базису пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$. $\square$

## 3.7 Координатная строка (столбец) вектора в данном базисе пространства. Связь между различными базисами пространства. Матрица перехода к новому базису. Связь между координатными столбцами вектора в различных базисах пространства

Пусть $L_n$ — $n$-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{P}$, система векторов $a_1, a_2, ..., a_n \quad (a)$ является его базисом, $x$ — произвольный вектор этого пространства. Тогда по определению базиса $x$ линейно выражается через базис $(a)$, т. е.

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n, \alpha_i \in \mathbb{P} \tag{3.7.1}$$

**Определение 3.7.1.** Представление вектора $x$ в виде (3.7.1) называется **разложением вектора** $x$ **по базису** $a_1, a_2, ..., a_n$. **Координатами вектора** $x$ относительно базиса $a_1, a_2, ..., a_n$ называются коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ в разложении (3.7.1) этого вектора по базису.

**Теорема 3.7.1.** Координаты вектора в заданном базисе определены однозначно.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть для любого вектора $x$ относительно заданного базиса $a_1, a_2, ..., a_n \quad (a)$ существует два набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{P}$ и $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{P}$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ такой, что $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$ и $x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_n a_n$.

Тогда $0 = (\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_n - \beta_1)a_n$. Так как базис $(a)$ является линейно независимой системой векторов, то $\beta_i = \alpha_i$ для каждого $i = \overline{1, ..., n}$. Противоречие с предположением. □

**Замечание 3.7.1.** Разложение (3.7.1) вектора $x$ по базису $(a)$ можно записать в виде матричного произведения:

$$x = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Матрица $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ называется **координатным столбцом** вектора $x$ в базисе $(a)$, а матрица $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{bmatrix}$ называется **координатной строкой** вектора $x$ в базисе $(a)$.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n \quad (a)$, и $b_1, b_2, ..., b_n \quad (b)$ — базисы пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$.

**Определение 3.7.2.** **Матрицей перехода** от базиса $(a)$ к базису $(b)$ называется матрица $n$-го порядка, $i$-й столбец которой является координатным столбцом вектора $b_i$ в базисе $(a)$, и обозначается $A_{(a)\to(b)}$.



Начало
Содержание
Страница 93 из 360
Назад
На весь экран
Закрыть

Легко проверить, что

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot A_{(a)\to(b)}. \qquad (3.7.2)$$

**Пример 3.7.1.** Найти матрицу перехода от базиса $a_1, a_2, a_3$ к базису $b_1, b_2, b_3$ арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^3$, если $b_1 = 2a_1 - a_3$, $b_2 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_3 = 2a_2$.

*Решение.* Так как разложение вектора $b_1$ по базису $a_1, a_2, a_3$ имеет вид

$$b_1 = 2a_1 + 0 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3,$$

то в этом базисе вектор $b_1$ имеет координаты: $b_1 = (2, 0, -1)$. Аналогично $b_2 = (1, 1, -1)$, $b_3 = (0, 2, 0)$. Расположив полученные наборы координат в виде координатных столбцов друг за другом, получим матрицу перехода от базиса $a_1, a_2, a_3$ к базису $b_1, b_2, b_3$:

$$A_{(a)\to(b)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Теорема 3.7.2.** Матрица $A_{(a)\to(b)}$ перехода от базиса $a_1, a_2, \dots, a_n$ к базису $b_1, b_2, \dots, b_n$ векторного пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$ является невырожденной. Кроме того, $C_{(b)\to(a)} = A^{-1}_{(a)\to(b)}$.

*Доказательство.* Из 3.7.2 вытекает, что

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \cdot C_{(b)\to(a)}. \qquad (3.7.3)$$

Подставляя (3.7.3) в (3.7.2), получим

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \cdot C_{(b)\to(a)} \cdot A_{(a)\to(b)}.$$

Отсюда $C_{(b)\to(a)} \cdot A_{(a)\to(b)} = E_n$. Значит, $A_{(a)\to(b)}$ обратима и $C_{(b)\to(a)} = A^{-1}_{(a)\to(b)}$.

$\square$

**Теорема 3.7.3.** Если $A_{(a)\to(b)}$ — матрица перехода от базиса $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(a)$ к базису $b_1, b_2, \dots, b_n$ $(b)$ векторного пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} -$$

координатные столбцы произвольного вектора $x \in L_n$ в базисах $(a)$ и $(b)$ соответственно, то

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A_{(a)\to(b)} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} = A^{-1}_{(a)\to(b)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

## 3.8 Подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Линейная оболочка

**Определение 3.8.1.** Пусть $L$ — векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Непустое подмножество $U$ пространства $L$ называется **подпространством** пространства $L$, если оно удовлетворяет условиям:

1) для любых векторов $a, b \in U$ их сумма $a + b \in U$;

2) для любого вектора $a \in U$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{P}$ произведение $\alpha a \in U$.

Очевидно, что совокупность условий 1 и 2 равносильна следующему условию: $\alpha a + \beta b \in U$ для любых векторов $a, b \in U$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$.

Из определения подпространства следует, что всякое подпространство $U$ векторного пространства $L$ само является векторным пространством, если выполнять операции сложения векторов из $U$ и умножения их на числа из $\mathbb{P}$ по правилам, определенным для пространства $L$.

**Пример 3.8.1.** 1) Множество, содержащее только нулевой вектор пространства $L$, удовлетворяет условиям 1 и 2 и, следовательно, является подпространством пространства $L$ (называется нулевым подпространством).

2) Пространство $L$ является своим подпространством.

Пусть
$$U_1, U_2, ..., U_k - \tag{3.8.1}$$
подпространства векторного пространства $V$.

Пусть
$$U_1, U_2, \ldots, U_k - \tag{3.8.2}$$
подпространства пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$.

**Определение 3.8.2.** **Пересечением подпространств** из (3.8.2) называется множество векторов пространства $L$, которые принадлежат каждому из этих подпространств. Обозначается пересечение подпространств через $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$.

**Определение 3.8.3.** **Суммой подпространств** из (3.8.2) называется множество векторов пространства $L$, каждый из которых есть сумма $u_1 + u_2 + \cdots + u_k$, где $u_i \in U_i$.

Обозначается сумма подпространств через $\sum\limits_{i=1}^{k} U_i$.

**Теорема 3.8.1.** Сумма и пересечение подпространств пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ являются подпространствами этого пространства.

*Доказательство.* Воспользуемся критерием подпространства. Пусть $U = \sum\limits_{i=1}^{k} U_i$, $U \subset L$, $U \neq \emptyset$. Тогда для любых $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ имеем, что $\alpha a+\beta b=\alpha\sum\limits_{i=1}^{k} a_i+\beta\sum\limits_{i=1}^{k} b_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha a_i+\beta b_i\in U$ (так как $a_i$ и $b_i\in U_i$, то $\alpha a_i+\beta b_i\in U_i$). Значит, $U$ – подпространство пространства $L$.

Пусть $V=\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, $V\subset L$, $V\neq\emptyset$. Тогда для любых $a,b\in V$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{P}$ имеем, что $a,b\in U_i$ для каждого $i=\overline{1,k}$. Следовательно, $\alpha a_i+\beta b_i\in U_i$ и $\alpha a_i+\beta b_i\in V$.

Значит, $V$ – подпространство пространства $L$. □

**Лемма 3.8.1.** Сложение подпространств коммутативно и ассоциативно.

**Лемма 3.8.2.** Если $U_1\subset U_2$, то $U_1+U_2=U_2$.

Общий способ получения подпространств произвольного векторного пространства $L$ заключается в следующем. Выберем в $L$ произвольные векторы $a_1,a_2,\dots,a_k$ $(a)$.

Рассмотрим множество всех линейных комбинаций векторов системы $(a)$ и обозначим его $L(a_1,a_2,\dots,a_k)$.

**Теорема 3.8.2.** Множество $L(a_1,a_2,\dots,a_k)$ — подпространство пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$.

*Доказательство.* Очевидно, что сумма любых двух линейных комбинаций векторов системы $(a)$ также является линейной комбинацией векторов системы $(a)$, поэтому сумма двух линейных комбинаций принадлежит множеству $L(a_1,a_2,\dots,a_k)$. Аналогично, произведение линейной комбинации векторов системы $(a)$ на скаляр из поля $\mathbb{P}$ также является линейной комбинацией векторов системы $(a)$, поэтому принадлежит множеству $L(a_1, a_2, ..., a_k)$. $\square$

**Определение 3.8.4.** Подпространство $L(a_1, a_2, ..., a_k)$ векторного пространства $L$ называют **линейной оболочкой векторов системы** $(a)$ или **подпространством, порожденным векторами** $(a)$. Векторы системы $(a)$ называют **образующими векторами** линейной оболочки $L(a_1, a_2, ..., a_k)$.

**Теорема 3.8.3.** Базисом линейной оболочки $L(a_1, a_2, ..., a_k)$ является базис системы векторов $(a)$, а ее размерность

$$\dim L(a_1, a_2, ..., a_k) = \operatorname{rang}(a_1, a_2, ..., a_k).$$

**Теорема 3.8.4.** (**формула Грассмана**) Пусть $U$ и $V$ — подпространства пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$, тогда

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

*Доказательство.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(a)$ — базис пространства $X = U \cap V$. Очевидно, что $(a)$ содержится в $U$ и в $V$. Дополним линейно независимую систему $(a)$ до базиса пространства $V$ :

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_s \tag{3.8.3}$$

и до базиса пространства $U$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, c_{k+1}, \ldots, c_m. \tag{3.8.4}$$

Рассмотрим систему векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_s, c_{k+1}, \ldots, c_m. \tag{3.8.5}$$

Покажем, что система (3.8.5) базис подпространства $Y = U + V$. Пусть $y$ – любой вектор пространства $Y$. Тогда $y = u + v$. Вектор $u$ линейно выражается через систему (3.8.4), а вектор $v$ через систему (3.8.3). Тогда вектор $y$ линейно выражается через систему (4.2.4).

Покажем, что система (3.8.5) линейно независима. Рассмотрим равенство:

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \beta_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \beta_s b_s + \tau_{k+1} c_{k+1} + \ldots + \tau_m c_m = 0.$

Пусть $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \beta_s b_s = -\tau_{k+1} c_{k+1} - \ldots \ldots - \tau_m c_m$. Очевидно, что вектор $a$ принадлежит как пространству $U$ так и $V$. А значит, $a \in X$. Тогда $a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ и поэтому $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = -\tau_{k+1} c_{k+1} - \tau_m c_m$.

Отсюда следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \tau_{k+1} = \ldots = \tau_m = 0$, так как система (3.8.4) линейно независима, а значит $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_s = 0$, так как система (3.8.3) линейно независима. Таким образом система (3.8.5) — базис.

Поэтому $\dim(U + V) = k + (s - k) + (m - k) = s + m - k = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$. $\square$

**Определение 3.8.5.** Сумма подпространств (3.8.2) называется **прямой** и обозначается $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, если каждый ее вектор можно единственным образом представить в виде суммы векторов этих подпространств.

**Теорема 3.8.5.** Сумма подпространств (3.8.2) является прямой тогда и только тогда, когда каждое из подпространств пересекается с суммой оставшихся подпространств по нулевому подпространству.

**Следствие 3.8.1.** $\dim U \oplus V = \dim\ U + \dim\ V$.

## 3.9 Пространство решений системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Рассмотрим произвольную однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.9.1}$$

Запишем данную систему в векторной форме

$$a_1'x_1 + a_2'x_2 + ... + a_n'x_n = \overline{0},$$

где $a'_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ — вектор-столбец матрицы системы (3.9.1), $i = \overline{1, n}$.

**Теорема 3.9.1.** Множество $M$ всех решений однородной СЛУ (3.9.1) над полем $\mathbb{P}$ с $n$ неизвестными является подпространством арифметического векторного пространства $\mathbb{P}^n$, причем $\dim M = n - r$, где $r$ — ранг матрицы системы (3.9.1).

*Доказательство.* Из определения решения СЛУ следует, что $M \subset \mathbb{P}^n$. Кроме этого, $M$ не является пустым множеством, т. к. $(0, \dots, 0) \in M$.

Воспользуемся критерием подпространства и докажем, что $M$ — подпространство пространства $\mathbb{P}^n$.

1) Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in M$, т. е. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ — решения системы (3.9.1). Тогда

$$a'_1\alpha_1 + \dots + a'_n\alpha_n = [0] \tag{3.9.2}$$

и

$$a'_1\beta_1 + \dots + a'_n\beta_n = [0]. \tag{3.9.3}$$

Сложив равенства (3.9.2) и (3.9.3), получим

$$a'_1(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + a'_n(\alpha_n + \beta_n) = [0].$$

Значит, вектор $(\alpha_1+\beta_1, ..., \alpha_n+\beta_n)$ — решение системы (3.9.1), т. е. $(\alpha_1+\beta_1, ..., \alpha_n+\beta_n) \in M$.

2) Пусть $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in M$, т. е. $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ — решение системы (3.9.1). Тогда

$$a_1'\alpha_1 + \ldots + a_n'\alpha_n = [0]. \tag{3.9.4}$$

Пусть $\gamma \in \mathbb{P}$. Домножая на него обе части равенства (3.9.4), получим

$$a_1'(\alpha_1\gamma) + \ldots + a_n'(\alpha_n\gamma) = [0].$$

Значит, вектор $(\alpha_1\gamma, \ldots, \alpha_n\gamma)$ — решение системы (3.9.1), т. е. $(\alpha_1\gamma, \ldots, \alpha_n\gamma) \in M$.

Из 1) и 2) следует, что $M$ — подпространство пространства $\mathbb{P}^n$.

Докажем, что $\dim M = n-r$, где $r$ — ранг матрицы $A$ системы (3.9.1).

*a*) Если $r=0$, то матрица $A$ — нулевая. Тогда любой вектор из $\mathbb{P}^n$ является решением системы (3.9.1), т. е. $M=\mathbb{P}^n$. Следовательно, $\dim M = n = n-r$.

*b*) Если $r=n$, то система (3.9.1) имеет только нулевое решение и $M=\{(0,\ldots,0)\}$. Следовательно, $\dim M = 0 = n-r$.

*c*) Пусть $0<r<n$. Будем считать, что первые $r$ столбцов $a_1', a_2', ..., a_r'$ образуют базис системы ветров-столбцов матрицы $A$. Тогда выразим

через данный базис векторы $a'_{r+1}, a'_{r+2}, ..., a'_n$. Получим

$$\begin{aligned}
&a'_{r+1} = \alpha_{\{r+1\}1}a'_1 + \alpha_{\{r+1\}2}a'_2 + ... + \alpha_{\{r+1\}r}a'_r,\\
&a'_{r+2} = \alpha_{\{r+2\}1}a'_1 + \alpha_{\{r+2\}2}a'_2 + ... + \alpha_{\{r+2\}r}a'_r,\\
&\dots\\
&a'_n = \alpha_{n1}a'_1 + \alpha_{n2}a'_2 + ... + \alpha_{nr}a'_r.
\end{aligned}$$

Отсюда справедливо записать

$$\begin{aligned}
&-\alpha_{\{r+1\}1}a'_1 - \alpha_{\{r+1\}2}a'_2 - ... - \alpha_{\{r+1\}r}a'_r + 1\cdot a'_{r+1} + 0\cdot a'_{r+2} + ... + 0\cdot a'_n = [0],\\
&-\alpha_{\{r+2\}1}a'_1 - \alpha_{\{r+2\}2}a'_2 - ... - \alpha_{\{r+2\}r}a'_r + 0\cdot a'_{r+2} + 1\cdot a'_{r+2} + ... + 0\cdot a'_n = [0],\\
&\dots\\
&-\alpha_{n1}a'_1 - \alpha_{n2}a'_2 - ... - \alpha_{nr}a'_r + 0\cdot a'_{r+1} + 0\cdot a'_{r+2} + ... + 1\cdot a'_n = [0].
\end{aligned}$$

Значит векторы

$$\begin{cases}
c_{r+1} = (-\alpha_{\{r+1\}1}, -\alpha_{\{r+1\}2}, ..., -\alpha_{\{r+1\}r}, 1, 0, ..., 0),\\
c_{r+2} = (-\alpha_{\{r+2\}1}, -\alpha_{\{r+2\}2}, ..., -\alpha_{\{r+2\}r}, 0, 1, ..., 0),\\
...\\
c_n = (-\alpha_{n1}, -\alpha_{n2}, ..., -\alpha_{nr}, 0, 0, ..., 1).
\end{cases} \tag{3.9.5}$$

являются решениями системы (3.9.1). Система (3.9.5) линейно независима. Действительно, для скаляров $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, ..., \lambda_n \in \mathbb{P}$ из равенства

$$\lambda r + 1c_{r+1} + \lambda_{r+2}c_{r+2} + ... + \lambda_n c_n = [0]$$

следует равенство

$$(\ldots., \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots 0).$$

Следовательно, $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_n = 0$.

Пусть вектор $b = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n)$ — любой вектор из множества $M$. Составим вектор

$$d = \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i c_i = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n).$$

Так как $M$ — подпространство и $c_i \in M$, то и вектор $d \in M$. Значит и вектор $b-d \in M$. Тогда вектор $b-d = (\beta_1-\gamma_1, \ldots, \beta_r-\gamma_r, 0, 0, \ldots, 0) \in M$. Следовательно,

$$(\beta_1 - \gamma_1)a'_1 + \ldots + (\beta_r - \gamma_r)a'_r + 0 \cdot a'_{r+1} + \ldots + 0 \cdot a'_n) = [0].$$

Отсюда справедливо записать

$$(\beta_1 - \gamma_1)a'_1 + \ldots + (\beta_r - \gamma_r)a'_r = [0].$$

Поскольку система векторов $(a'_1, \ldots, a'_r)$ — линейно независима, то

$$\beta_1 = \gamma_1, \ldots, \beta_r = \gamma_r.$$

Отсюда следует, что вектор $b$ совпадает с вектором $d$, т. е.

$$b = d = \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i c_i.$$

Таким образом, получили, что любой вектор из $M$ линейно выражается через систему (3.9.5). Значит, система (3.9.5) является базисом $M$. Поэтому, $\dim M = n - r$. □

**Определение 3.9.1.** Подмножество $M$ называется **пространством решений однородной системы линейных уравнений** (3.9.1), а базис этого пространства называется **фундаментальной системой решений** однородной СЛУ (3.9.1).

**Замечание 3.9.1.** Если $\mathrm{rang} A = n$, то фундаментальной системы решений не существует.

**Следствие 3.9.1.** Если $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — фундаментальная система решений однородной СЛУ (3.9.1), то вектор $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_k c_k$, где $\lambda_i \in \mathbb{P}$, $i = \overline{1,k}$, является общим решением системы (3.9.1).

**Теорема 3.9.2.** Каждое подпространство $H$ пространства $\mathbb{P}^n$ есть множество решений некоторой однородной системы линейных уравнений над полем $\mathbb{P}$ с $n$ неизвестными.

**Пример 3.9.1.** Найти фундаментальную систему решений и записать пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

*Доказательство.* Найдем ранг матрицы системы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$. Поэтому $\dim M = n - r = 5 - 2 = 3$. Значит, искомый базис состоит из трех векторов, например, $u_1, u_2, u_3$.

Переменные $x_1$ и $x_2$ являются базисными, а $x_3, x_4, x_5$ — свободными. Выразим базисные переменные через свободные. Получим

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_5, \\ x_2 = \frac{4}{3}x_3 - x_4 - x_5, \end{cases}$$

где $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Найдем общее решение:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\frac{1}{3}x_3 - x_5; \frac{4}{3} - x_4 - x_5; x_3; x_4; x_5) =$$

$$= x_3(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 1; 0; 0) + x_4(0; -1; 0; 1; 0) + x_5(-1; -1; 0; 0; 1).$$

Итак

$$\begin{aligned} u_1 &= (-\tfrac{1}{3}; \tfrac{4}{3}; 1; 0; 0), \\ u_2 &= (0; -1; 0; 1; 0), \quad - \\ u_3 &= (-1; -1; 0; 0; 1) \end{aligned}$$

фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений.

В состав базиса $M$ вместо вектора $u_1$ можно ввести вектор $u_1' = 3u_1 = (-1; 4; 3; 0; 0)$. Таким образом $u_1', u_2, u_3$ — фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений (базис подпространства $M$).

Таким образом $M$ можно рассматривать как линейную оболочку с порождающей системой $u_1', u_2, u_3$:

$$M = \{\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 | \alpha_i \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(-\alpha_1, -\alpha_2, 4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^5\} -$$

пространство решений системы линейных однородных уравнений. □

## 4.1 Скалярное умножение. Ортонормированная система векторов и базис системы векторов.

**Определение 4.1.1.** Пусть $L$ – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $L^2 \to \mathbb{R}$ называется **скалярным умножением векторов** из $L$, а образ пары векторов $(a, b) \in L^2$ при этом отображении называется **скалярным произведением векторов** $a$ и $b$ и обозначается $a \cdot b$, если выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

1) $(\forall a, b \in L)\ a \cdot b = b \cdot a$;
2) $(\forall a, b, c \in L)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
3) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall a, b \in L)\ (\alpha a)b = \alpha(a \cdot b)$;
4) $(\forall a \in L, a \neq 0)\ a^2 > 0$.

Векторное пространство $L$ над полем $\mathbb{R}$ со скалярным умножением векторов из $L$ называется **евклидовым пространством** и обозначается символом $E$.

**Пример 4.1.1.** 1) Обычное скалярное произведение в пространстве $V_3$ является скалярным произведением в смысле приведенного вышего определения. Таким образом, пространство $V_3$ геометрических векторов, в котором определено скалярное умножение, является евклидовым пространством.

2) В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ зададим формулой $a \cdot b = = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. (Проверте, что аксиомы (1-4) при этом выполняются). Значит, пространство $\mathbb{R}^n$ евклидово пространство.

3) В пространстве $C_{[a,b]}$ непрерывных функций действительной переменной на промежутке $[a, b]$ скалярное произведение функций $f$ и $g$ определяется по формуле $fg = \int_a^b f(x)g(x)dx$. (Убедитесь, что эта формула задает скалярное произведение).

Таким образом, пространство $C_{[a,b]}$ с определенной на нем операцией скалярного умножения является евклидовым.

**Теорема 4.1.1.** Любое ненулевое векторное пространство $L_n$ над полем $\mathbb{R}$ можно преобразовать в евклидово пространство $E_n$, это значит в $\mathbb{L}_n$ можно ввести скалярное умножение.

*Доказательство.* Действительно, это можно сделать, например, следующим способом. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – произвольный базис пространства $L_n$. Для любых векторов $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ из $\mathbb{L}_n$ примем

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \tag{4.1.1}$$

Введенное таким образом скалярное умножение векторов удовлетворяет аксиомам (1 - 4). На самом деле, когда $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i u_i$, $c = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i u_i$ – любые векторы пространства $L_n$ и $\lambda$ – любое действительное число, то:

1) $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \, \alpha_i = b \cdot a$;

2) $(a + b) \cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\gamma_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i = a \cdot c + b \cdot c$;

3) $(\lambda a) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_) \beta_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \lambda (a \cdot b)$;

4) $a \neq 0$, $a^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$, поскольку хотя бы одно из чисел $\alpha_i$ отлично от нуля.

Таким образом, получено евклидово пространство $E_n$. □

Заметим, что выбирая в пространстве $L_n$ различные базисы, получим из $L_n$ различные евклидовы пространства. Можно даже другими способами преобразовать пространство $L_n$ в евклидово.

Но дальше будет доказано, что как бы не выбиралось в пространстве $L_n$ скалярное произведение, все эти пространства изоморфны между собой и обязательно найдется такой базис пространства $E_n$ (и даже не один), в котором скалярное произведение выражается формулой (4.1.1).

Рассмотрим простейшие свойства скалярного произведения.

1)$(\forall a, b \in E)\ a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$. Действительно, применяя аксиомы (1),(2), получим: $a\cdot(b+c) = (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a = a\cdot b + a\cdot c$;

2)$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall a, b \in E)\ a\cdot(\alpha b) = \alpha(a\cdot b)$. На самом деле, с аксиом (1),(3) следует, что $a\cdot(\alpha b) = (\alpha b)\cdot a = \alpha(a\cdot b)$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} b_j = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{m} a_i\cdot b_j$ – формула скалярного произведения двух произвольных систем векторов $a_1,\ldots,a_k$ и $b_1,\ldots,b_m$ из $E$;

4)$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j b_j = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j(a_i\cdot b_j)$ – формула скалярного произведения линейных комбинаций двух произвольных систем векторов $a_1,\ldots,a_k$ и $b_1,\ldots,b_m$ из $E$.

(Формулы (3) и (4) докажите самостоятельно методом математической индукции);

5) $(\forall a \in E)\ a\cdot 0 = 0$. Действительно, $a\cdot 0 = a\cdot(0\cdot b) = 0(a\cdot b) = 0$, где $b$ – любой вектор из $E$. В частности, $0^2 = 0$, это значит скалярный квадрат нулевого вектора равен 0.

Заметим, что из формулы (4) для произвольного базиса $u_1,\ldots,u_n$ пространства $E$ и для любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j u_j$ получим, что $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_i (u_i \cdot u_j)$.

Пусть $a$ – произвольный вектор пространства $E$. Известно, что $a^2 \geq 0$.

**Определение 4.1.2.** **Длиной(нормой, модулем) вектора** $a$ называется арифметический квадратный корень из скалярного квадрата этого вектора.

Обозначим длину вектора $a$ через $||a||$. Таким образом, $||a|| = \sqrt{a^2}$. Значит, $||a||^2 = a^2$.

**Определение 4.1.3.** Вектор $a$ называется **нормированным**, когда $||a|| = 1$.

Рассмотрим некоторые свойства нормы вектора.

1) $||a|| \geq 0$, причем $||a|| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $||\alpha a|| = |\alpha| \cdot ||a||$. Действительно, $||\alpha a|| = \sqrt{(\alpha a) \cdot (\alpha a)} = \sqrt{\alpha^2 a^2} = |\alpha| \sqrt{a^2} = |\alpha| \cdot ||a||$.

Вывод. Любой ненулевой вектор $a \in E$ можно нормировать, это значит, преобразовать в нормированный вектор. Для этого достаточно вектор $a$ умножить на число $\frac{1}{||a||}$ или $-\frac{1}{||a||}$. На самом деле, $\left|\left|\pm\frac{1}{||a||} \cdot a\right|\right| = \frac{1}{||a||} \cdot ||a|| = 1$.

3) $(\forall a, b \in E)$ $|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$ (неравенство Коши-Буняковского), причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы $a$ и $b$ линейно зависимы.

*Доказательство.* Когда хотя бы один с векторов нулевой, то неравенство Коши-Буняковского очевидно. Пусть $a$ и $b$ – произвольные ненулевые вектора пространства $E$, а $\alpha$ – любое действительное число. Понятно, что $(\alpha a - b)^2 \geq 0$, откуда $\alpha^2 a^2 - 2\alpha(a \cdot b) + b^2 \geq 0$. Заметим, что левая часть последнего неравенства есть квадратный трехчлен относительно $\alpha$. Поэтому это неравенство действительно при всех $\alpha \in R$ тогда и только тогда, когда дискриминант трехчлена неположительный, то есть $(a \cdot b)^2 - a^2 b^2 \leq 0$ или $(a \cdot b)^2 \leq a^2 b^2$. Поскольку обе части неравенства неотрицательные, то $\sqrt{(a \cdot b)^2} \leq \sqrt{a^2 b^2}$ или $|a \cdot b| < ||a|| \cdot ||b||$. Когда векторы $a$ и $b$ линейно зависимы, то $b = \alpha a$. Тогда $|a \cdot b| = |a \cdot (\alpha a)| = |\alpha| \cdot ||a||^2 = ||a|| \cdot ||b||$. Когда же векторы $a$ и $b$ линейно независимы, то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha a - b \neq 0$, а поэтому $(\alpha a - b)^2 > 0$, откуда $|a \cdot b| < ||a|| \cdot ||b||$. □

4) $(\forall a, b \in E)$ $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$ (неравенство треугольника). Действительно, $||a + b||^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$. Но поскольку, по неравенству Коши-Буняковского, $|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$, то $||a + b||^2 \leq$ $\leq ||a||^2 + 2||a||\ ||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$, и поэтому $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$. Пусть $a$ и $b$ – ненулевые вектора евклидового пространства $E$. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $\frac{|a \cdot b|}{||a|| \cdot ||b||} \leq 1$. Поэтому на промежутке $[0, \pi]$ из равенства $\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{||a|| \cdot ||b||}$ однозначно определяется число $\varphi$, а значит, корректно будет следующее определение.

**Определение 4.1.4. Углом между ненулевыми векторами $a$ и**

$b$ пространства $E$ называется такое действительное число $\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$, что $\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{||a|| \cdot ||b||}$. С этого определения следует, что $a \cdot b = ||a|| \cdot ||b|| \cos\varphi$.

**Определение 4.1.5.** Векторы $a$ и $b$ пространства $E$ называются **ортогональными или взаимно ортогональными** и пишут $a \perp b$, когда их скалярное произведение равно нулю.

Отметим некоторые свойства ортогональных векторов.

1) $a \perp a$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

2) Вектор $a$ ортогонален каждому вектору пространства $E$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

3) Ненулевые вектора $a$ и $b$ пространства $E$ ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

4) Если $a \perp b$, то $||a+b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2$.

**Определение 4.1.6.** Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ пространства $E$ называется **ортогональной**, когда её векторы попарно ортогональны, это значит $a_i \cdot a_j = 0$, $i \ne j$, $i, j = \overline{1, k}$. Система, которая состоит из одного вектора, считается ортогональной.

Базис евклидова пространства $E$, который является ортогональной системой векторов называется **ортогональным базисом**. Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ – ортогональный базис.

**Теорема 4.1.2.** Любая ортогональная система ненулевых векторов пространства $E$ линейно независима.

*Доказательство.* Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_k - \tag{4.1.2}$$

ортогональная система ненулевых векторов пространства $E$. Допустим, что она линейно зависимая, это значит существуют числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,k}$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0. \tag{4.1.3}$$

Пусть $\alpha_j \neq 0, 1 \leq j \leq k$. Умножив скалярно обе части равенства (4.1.3) на вектор $a_j$, получим равенство $\alpha_1(a_1 a_j) + \ldots + \alpha_j(a_j a_j) + \ldots + \alpha_k(a_k a_j) = = 0$. Отсюда, учитывая ортогональность системы (4.1.2), имеем

$$\alpha_j a_j^2 = 0. \tag{4.1.4}$$

Поскольку по допущению $\alpha_j \neq 0$, то из (4.1.4) следует, что $a_j^2 = 0$. Это означает, что $a_j$ – нулевой вектор, что противоречит условию теоремы. □

Вывод 1. Любая ортогональная система $n$ ненулевых векторов евклидова пространства $E_n$ является ортогональным базисом этого пространства.

Вывод 2. Любая ортогональная система ненулевых векторов пространства $E_n$ содержит не более $n$ векторов.

## 4.2 Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис евклидова пространства

**Теорема 4.2.1.** Всякую систему векторов

$$a_1, \ldots, a_k \tag{4.2.1}$$

пространства $E$ можно ортогонализовать, это значит преобразовать в ортогональную систему векторов

$$b_1, \ldots, b_k \in E \tag{4.2.2}$$

такую, что системы

$$a_1, \ldots, a_i \tag{4.2.3}$$

и

$$b_1, \ldots, b_i, i = \overline{1, k} \tag{4.2.4}$$

эквивалентные.

*Доказательство.* Систему (4.2.2) будем строить последовательно, применяя способ, который называется **процессом ортогонализации**. Возьмем вектор $b_1 = a_1$. Вектор $b_2$ будем искать в форме линейной комбинации векторов $a_2$ и $b_1$: $b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$. Поскольку $b_2$ должен быть ортогонален $b_1$, то $b_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 + \lambda_1 b_1^2 = 0$, откуда $\lambda_1 = \frac{-b_1 \cdot a_2}{b_1^2}$. Когда же $b_1 = 0$, то $b_2 \perp b_1$ при $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Заметим, что системы (4.2.3), (4.2.4) эквивалентные при $i = 1, 2$. Пусть уже построена ортогональная система (4.2.4), эквивалентная системе (4.2.3), $i < k$. Возьмем следующий вектор

$$b_{i+1} = a_{i+1} + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_i b_i, \qquad (4.2.5)$$

где $\mu_j, j = \overline{1, i}$ – пока неизвестное действительное число. Условия ортогональности $b_{i+1}$ каждому $b_j (j = \overline{1, i})$ дают систему уравнений для определения $\mu_j$: $b_{i+1} \cdot b_j = a_{i+1} \cdot b_j + \mu_j b_j^2 = 0, j = \overline{1, i}$. Когда $b_j \neq 0$, то $\mu_j = -\frac{b_j \cdot a_{i+1}}{b_j^2}$. Когда же $b_j = 0$, то $b_{i+1} \perp b_j$ при $\forall \mu_j \in \mathbb{R}$. Докажем, что системы

$$a_1, \ldots, a_i, a_{i+1} \qquad (4.2.6)$$

и

$$b_1, \ldots, b_i, b_{i+1} \qquad (4.2.7)$$

эквивалентные. Действительно, система (4.2.4) линейно выражается через систему (4.2.3) ($i < k$), а вектор $b_{i+1}$ – через систему (4.2.6), значит, система (4.2.7) линейно выражается через систему (4.2.6). В свою очередь, система (4.2.3) линейно выражается через систему (4.2.4) ($i < k$), а вектор $a_{i+1}$, согласно с равенством (4.2.5) – через систему (4.2.7). Значит система (4.2.6) линейно выражается через систему (4.2.7). Поэтому эти системы эквивалентные. Таким образом, всякую систему (4.2.1) можно ортогонализовать, применяя процесс ортогонализации. □

Вывод 3. Всякую линейно независимую систему векторов

$$a_1, \ldots, a_k \qquad (4.2.8)$$

пространства $E$ можно преобразовать с помощью процесса ортогонализации в ортогональную линейно независимую систему векторов

$$b_1, \ldots, b_k \in E \tag{4.2.9}$$

Действительно, по теореме 4.2.1 системы (4.2.8) $\sim$ (4.2.9). Так как ранги эквивалентных систем векторов равны, то rang (4.2.8) $=$ $=$ rang (4.2.9) $= k$. Поэтому система (4.2.9) линейно независимая.

Вывод 4. В каждом ненулевом евклидовом пространства $E_n$ существует ортогональный базис. На самом деле, пусть

$$a_1, \ldots, a_n \tag{4.2.10}$$

произвольный базис пространства $E_n$. По выводу 3 базис (4.2.10) можно преобразовать в ортогональную линейно независимую систему $b_1, \ldots, b_n \in E_n$. Поскольку число векторов этой системы равно размерности $E_n$, то она является ортогональным базисом $E_n$.

Вывод 5. Всякую ортогональную систему ненулевых векторов пространства $E_n$, которая содержит менее $n$ векторов, можно дополнить до ортогонального базиса пространства $E_n$.

**Пример 4.2.1.** Ортогонализуем систему векторов $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, -3, -3), a_3 = (4, 3, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$.

Применим процесс ортогонализации. Возьмем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$, причем $\lambda_1$ найдем из условия ортогональности $b_2 \cdot b_1 = 0$

или $a_1 \cdot a_2 + \lambda_1 a_1^2 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -\frac{a_1 \cdot a_2}{a_1^2} = 1$. Поэтому $b_2 = a_2 + a_1 = = (2, 2, -2, -2)$. Вектор $b_3 = a_3 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, причем $a_3 \cdot a_1 + \alpha_1 b_1^2 = = 0, a_3 \cdot b_2 + \alpha_2 b_2^2 = 0$, откуда $\alpha_1 = -\frac{3}{2}, \alpha_2 = -1$. Тогда $b_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Значит, система векторов $b_1, b_2, b_3$ является ортогональной.

**Определение 4.2.1.** Система векторов $a_1, \ldots, a_k$ евклидова пространства называется **ортонормированной**, когда она ортогональная и каждый ее вектор **нормированный**, это значит $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, k} \end{cases}$

Вывод 6. Любая ортонормированная система векторов пространства $E_n$ содержит не более $n$ векторов.

Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства $E_n$ называется **ортонормированным**, когда он ортогонален и все его векторы нормированы. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ является ортонормированным.

**Теорема 4.2.2.** В каждом ненулевом евклидовом пространстве $E_n$ существует ортонормированный базис.

*Доказательство.* По выводу 4 в $E_n$ существует ортогональный базис. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ такой базис. Нормируем его векторы: $e_1 = \frac{b_1}{||b_1||}, \ldots$ $\ldots, e_n = \frac{b_n}{||b_n||}$. Очевидно, что $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$

Значит, система $e_1, \ldots, e_n$ является ортонормированным базисом пространства $E_n$. □

Вывод 7. Любая ортонормированная система векторов пространства $E_n$ является ортонормированным базисом, когда она содержит $n$ векторов, и может быть дополнена до ортонормированного базиса, когда она содержит менее $n$ векторов.

Ортонормированный базис удобен потому, что в нем скалярное произведение двух векторов просто выражается через их координаты.

**Теорема 4.2.3.** Скалярное произведение векторов $a, b \in E_n$, разложенных по базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства $E_n$, равно сумме произведений одноименных координат тогда и только тогда, когда этот базис ортонормированный.

*Доказательство.* Необходимость. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства $E_n$ такой, что скалярное произведение любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ выражается формулой $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. Так как вектор $e_i$ имеет $i$-тую координату, равную 1, а остальные его координаты ровны 0, то по этой формуле получим, что $e_i \cdot e_i = 1$. Аналогично по той же формуле получаем при $i \neq j$, произведение $e_i \cdot e_j = 0$. Значит, $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства $E_n$.

Достаточность. Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства $E_n$,то есть $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, n} \end{cases}$. Тогда для любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ имеем $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. □

Отметим еще некоторые свойства ортонормированного базиса. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства $E_n$ и $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ – любой вектор из $E_n$, то:

1) $||a|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}$;

2) $\alpha_i = a e_i, i = \overline{1, n}$.

# РАЗДЕЛ 5
# Многочлены

## 5.1 Основные понятия. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Кольцо многочленов от одной переменной

Пусть $K$ — произвольное кольцо с единицей $e, x$ — символ, который не принадлежит $K$ и называется **переменной**.

**Определение 5.1.1.** **Многочленом (полиномом) от переменной $x$ над кольцом** $K$ называется выражение вида

$$a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n, \tag{5.1.1}$$

где $n$ — любое целое неотрицательное число, $a_i \in K(i = \overline{0, n})$.

**Определение 5.1.2.** Элементы $a_i \in K(i = \overline{0, n})$ называются **коэффициентами многочлена** $f(x)$.

Наибольшее число $k, 0 \leq k \leq n$, такое, что $a_k \neq 0 \in K$ называется **степенью многочлена** $f(x)$ и обозначается через $\deg f(x)$. Например, $f(x) = 0x^0+(-2)x^1+3x^2+0x^3$ — многочлен над кольцом $\mathbb{Z}$, $\deg f(x) = 2$. $\deg (a_0x^0) = 0, a_0 \neq 0 \in K$, степень многочлена $0x^0$ не определена, он называется **нулевым**. Если $\deg f(x) = k$, то $a_k$ называется **старшим**

**коэффициентом многочлена** $f(x)$. Многочлен, старший коэффициент которого равен единице $e \in K$, называется **нормированным**.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ над кольцом $K$ называют **равными** (алгебраическими) и пишут $f(x) = g(x)$, если равны их коэффициенты при одинаковых «степенях» переменной $x$ и они отличаются разве лишь «слагаемыми» с нулевыми коэффициентами.

Например, следующие многочлены над кольцом $\mathbb{Z}$ равны:

1) $f(x) = 2x^0 + 3x^1 + 0x^2 + 3x^3, g(x) = 2x^0 + 3x^1 + 0x^2 + 3x^3 + 0x^4$;

2) $f(x) = 0x^0, g(x) = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2$.

**Замечание 5.1.1.** Роль буквы x в записи многочлена может играть любая буква.

**Замечание 5.1.2.** Поскольку для задания многочлена $f(x)$ существенны только коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$, то можно было бы назвать многочленном последовательность $(a_0, ..., a_n)$ элементов кольца $K$. Однако запись многочлена $f(x)$ в виде выражения( 5.1.1) является более удобной.

Определение многочлена как элемента простого трансцендентного расширения кольца $K$ с помощью $x$ дано в определении 5.1.1.

Множество всех многочленов от переменной $x$ над кольцом $K$ обозначим через $K[x]$. Введем понятие суммы и произведения двух многочленов из $K[x]$. Пусть $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \ldots + b_mx^m \in K[x], n \geq m$.

**Определение 5.1.3.** **Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x)$** называется многочлен

$$f(x) + g(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + \ldots + c_nx^n, \tag{5.1.2}$$

где $c_i = a_i + b_i, i = \overline{0, n}$. Имеется в виду, что если $i > m$, то $b_i = 0$.

**Определение 5.1.4.** **Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$** называется многочлен

$$f(x)g(x) = d_0x^0 + d_1x^1 + \ldots + d_{n+m}x^{n+m}, \tag{5.1.3}$$

где $d_i = \sum_{p+g=i} a_pb_q, i = \overline{0, n+m}$, т. е. чтобы найти $d_i$, перемножают попарно коэффициенты $a_p$ и $b_q$, сумма индексов которых равна $i$, и складывают полученные произведения. В частности, $d_0 = a_0b_0, d_{n+m} = a_nb_m$. Например, $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2, g(x) = b_0x^0 + b_1x^1$.

Тогда: $f(x)+g(x) = (a_0+b_0)x^0+(a_1+b_1)x^1+a_2x^2; f(x)g(x) = (a_0b_0)x^0+ (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_2b_1)x^3$

**Пример 5.1.1.** Докажите следующие свойства степени многочлена:

1. Если $f(x), g(x), f(x) + g(x)$ — ненулевые многочлены из $K[x]$, то $\deg{(f(x) + g(x))} \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$, т. е. степень суммы двух многочленов не больше их максимальной степени.

2. Если $f(x), g(x), f(x)g(x)$— ненулевые многочлены из $K[x]$, то

$$\deg{(f(x)g(x)} \leq \deg f(x) + \deg g(x),$$

т. е. степень произведения двух многочленов не больше суммы их степеней.

**Теорема 5.1.1.** Множество $K[x]$ со сложением и умножением является кольцо с единицей.

Кольцо $K[x]$ называется **кольцом многочленов от одной переменной** $x$ **над** $K$.

**Следствие 5.1.1.** На кольце $K[x]$ определена б. о. вычитания: $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$.

**Замечание 5.1.3.** Кольцо $K[x]$ — не поле, так как в $K[x]$ существуют ненулевые необратимые многочлены, например, $f(x)=0x^0+ex^1$

В дальнейшем будем рассматривать многочлены над областью целости.

Справедливы следующие утверждения:

1. Кольцо многочленов $K[x]$ над областью целостности $K$ также является областью целостности.

2. Степень произведения двух ненулевых многочленов над областью целостности $K$ равна сумме их степеней.

Существует две точки зрения на понятие многочлена: функциональная и алгебраическая. Первая характерна для матанализа. Пусть многочлен $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in K[x]$. Каждому элементу $\alpha\in K$

однозначно соответствует элемент $f(x) = a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\alpha^n \in K$, т. е. значение многочлена $f(x)$ при $x = \alpha$. Значит, многочлен $f(x) \in K[x]$ задает отображение (функцию) $f$ с областью определения $K$ и областью значений в $K$, т. е. $f : K \to K \mid \alpha \to f(\alpha)$. Эта функция называется **полиномиальной**.

**Определение 5.1.5.** Два многочлена $f(x)$ и $\varphi(x) \in K[x]$ называются **функционально равными**, если равны определяемые ими функции $f, \varphi$, т. е. $(\forall\alpha \in K)f(\alpha) = \varphi(\alpha)$.

В математике приходится рассматривать также многочлены, коэффициенты которых из других полей или колец. При этом представление о многочлене как о функции не всегда удобно. Так, с этой точки зрения многочлены $f_1(x) = \overline{1}x$ и $f_2(x) = \overline{1}x^2$, коэффициенты которых принадлежат $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, пришлось бы считать равными, поскольку

$$(\forall\alpha \in \mathbb{Z}_2)f_1(\alpha) = f_2(\alpha).$$

Очевидно, алгебраические равные многочлены определяют равные функции, т. е. $f(x) = \varphi(x) \Rightarrow (\forall\alpha \in K)f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ в силу однозначности умножения и сложения на $K$. Обратное не всегда верно (см. пример выше).

Однако, если область целостности $K$ **бесконечна**, то из функционального равенства многочлены из $K[x]$ следует их алгебраическое равенство.

Пусть $\widetilde{K}[x]$— множество функций, соответствующих многочленам из $K[x]$, с поточечным сложением и умножением. Можно доказать:

1) $< \widetilde{K}[x], ., + >$— кольцо,

2) если $K$ — бесконечная область целостности, то отображение $K[x]$ на кольцо $\widetilde{K}[x] \mid f(x) \to f$, является изоморфизмом.

## 5.2 Деление в кольце K[x]. Теорема о делении с остатком

Теория делимости в кольце многочленов над областью целостности во многом схожа с делимостью в кольце $\mathbb{Z}$.

**Определение 5.2.1.** Многочлен $f(x) \in K[x]$ **делится** в кольце $K[x]$ на многочлен $\varphi(x) \in K[x], \varphi(x) \neq 0$, если существует такой многочлен $g(x) \in K[x]$, что $f(x) = \varphi(x)g(x)$. Многочлен $f(x)$ называется **делимым**(кратным многочлену $\varphi(x)$), многочлен $\varphi(x)$ — **делителем** многочлена $f(x)$, а многочлен $g(x)$ — **частным** при делении $f(x)$ на $\varphi(x)$. Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то говорят также, что $f(x)$ кратно $\varphi(x)$ или $\varphi(x)$ делит $f(x)$ и пишут: $f(x) \vdots \varphi(x)$ или $\varphi(x) \mid f(x)$.

Простейшие свойства делимости в кольце $K[x]$ аналогичны свойствам делимости в кольце $Z$. Отметим некоторые из них:

1) $f(x) \vdots \varphi(x)$ и $f(x) \neq 0 \Rightarrow \deg f(x) \geq \deg \varphi(x)$.

**Следствие 5.2.1.** $f(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow f(x) = 0$ *или* $deg\, f(x) \geq deg\, \varphi(x)$.

2) $f(x) \vdots \varphi(x)$ и $\varphi(x) \vdots f(x) \Rightarrow f(x) = a_0\varphi(x)$, где $a_0 \in K$ — обратный элемент. Если к тому же старшие коэффициенты многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны,то $f(x) = \varphi(x)$.

**Определение 5.2.2.** Многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ из $K[x]$, которые отличаются только обратимыми в $K$ множителем, называется **ассоциированными**.

Заметим, что деление в кольце $K[x]$, также как и в кольце $\mathbb{Z}$, не всегда возможно. Например, многочлен $x \in K[x]$ нельзя разделить на многочлен $x^2 \in K[x]$.

**Определение 5.2.3.** Многочлен $f(x) \in K[x]$ **делится с остатком** в кольце $K[x]$ на многочлен $\varphi(x) \in K[x], \varphi(x) \neq 0$, если существуют такие многочлены $g(x), r(x) \in K[x]$, что $f(x) = \varphi(x)g(x) + r(x)$, причем $r(x) = 0$ или $\deg r(x) < \deg \varphi(x)$.

Многочлен $f(x)$ называется **делимым**, многочлен $\varphi(x)$— **делителем**, а многочлены $g(x)$ и $r(x)$ — соответственно **неполным частным** и **остатком** при делении $f(x)$ на $\varphi(x)$.

В отличии от кольца $\mathbb{Z}$ в кольце $K[x]$ деление с остатком не всегда выполняется.

**Теорема 5.2.1.** Всякий многочлен $f(x) \in K[x]$ однозначно делится с остатком в кольце $K[x]$ на многочлен $\varphi(x) \in K[x]$, старший коэффициент которого обратим в $K$, т. е. существует единственная пара многочленов $g(x)$ и $r(x) \in K[x]$, таких, что

$$f(x) = \varphi(x)g(x) + r(x), r(x) = 0 \vee \deg r(x) < \deg \varphi(x) \qquad (5.2.1)$$

**Замечание 5.2.1.** 1. Обратимость в $K$ старшего коэффициента многочлена $\varphi(x) \in K[x]$— это **только достаточное условие**, при котором всякий многочлен $f(x) \in K[x]$ однозначно делится с остатком на многочлен $\varphi(x)$, поскольку обратное утверждение неверно. Действительно, существуют многочлены $f(x), \varphi(x) \in K[x]$ такие, что $f(x)$ однозначно делится с остатком на $\varphi(x)$, однако старший коэффициент $\varphi(x)$ необратим в $K$. Например, $f(x) = 6x^5+13x^4-3x^3-7x^2+6x+2$, $\varphi(x) = 2x^3+x^2-1$, $g(x) = 3x^2 + 5x - 4$, $r(x) = 11x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$, но старший коэффициент 2 многочлена $\varphi(x)$ необратим в кольце $\mathbb{Z}$.

2. Чтобы разделить с остатком в кольце $K[x]$ многочлен $f(x) \in K[x]$ на многочлен $\varphi(x) \in K[x]$, если $\deg f(x) \geq \deg \varphi(x)$ и старший коэффициент $\varphi(x)$ обратим в $K$, можно применить, кроме алгоритма деления с остатком, метод неопределенных коэффициентов. Он состоит в следующем. Учитывая, что $\deg g(x) = \deg f(x) - \deg \varphi(x)$ и $r(x) = 0$ или $\deg r(x) < \deg \varphi(x)$, запишем искомые многочлены $g(x)$ и $r(x)$ в общем виде с неопределенными (неизвестными) коэффициентами. Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ или придавая $x$ разные значения из $K$ в равенстве $f(x) = \varphi(x)g(x) + r(x)$, получаем систему линейных уравнений с неизвестными коэффициентами $g(x)$ и $r(x)$, откуда находим эти коэффициенты.

**Следствие 5.2.2.** Многочлен $f(x) \in K[x]$ делится на многочлен $\varphi(x) \in K[x]$ тогда и только тогда,когда при делении $f(x)$ на $\varphi(x)$ с остатком получается остаток, равный $0 \in K$.

## 5.3 Деление с остатком на нормированный линейный двучлен $x - \alpha$. Схема Горнера. Теорема Безу

Поскольку старший коэффициент $x - \alpha \in K[x]$ обратим в $K$, то по теореме о делении с остатком в кольце $K[x]$ всякий многочлен $f(x) \in K[x]$ однозначно делится с остатком на $x-\alpha$, т. е. существует единственная пара многочленов $g(x)$ и $r(x) \in K[x]$, таких, что

$$f(x) = (x - \alpha)g(x) + r(x),$$

где $r(x) = 0$ или $\deg r(x) < 1$. Таким образом, $r(x) = r$ — элемент из $K$ (нулевой многочлен или многочлен нулевой степени). Если $f(x) = a_0 \in K$, то $g(x) = 0$, $r = a_0$. Пусть $\deg f(x) = n > 0$ и $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Разделить $f(x)$ на $x - \alpha$ можно "углом".

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Очевидно,что $\deg g(x) = n - 1$. Поэтому $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$, где $b_{n-1}, ..., b_0$ — неизвестные коэффициенты, и равенство $f(x) = (x - \alpha)g(x) + r$ примет вид:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1}+$$

$$+(b_{n-3}-\alpha b_{n-2})x^{n-2}+...+(b_0-\alpha b_1)x+(r-\alpha b_0).$$

Согласно определению алгебраического равенства двух многочленов

$$a_n=b_{n-1}, a_{n-1}=b_{n-2}-\alpha b_{n-1}, a_{n-2}=b_{n-3}-\alpha b_{n-2}, ...,$$

$$a_1=b_0-\alpha b_1, a_0=r-\alpha b_0.$$

Отсюда

$$b_{n-1}=a_n, b_{n-2}=a_{n-1}+\alpha b_{n-1}, b_{n-3}=a_{n-2}+\alpha b_{n-2}, ..., b_0=a_1+\alpha b_1,$$

$$r=a_0+\alpha b_0. \qquad (5.3.1)$$

Вычисления коэффициентов $b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0$ частного $g(x)$ и остатка $r$ по формулам(5.3.1) обычно заносят в таблицу, которая называется схемой Горнера (Уильям Джордж Горнер, 1786-1837, английский математик):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_1$ | $a_0$ |
| $\alpha$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-3}$ | ... | $b_0$ | $r$ |

**Пример 5.3.1.** Найти частное и остаток от деления многочлена $f(x)=3x^4+2x^2-x+4\in Z[x]$ на двучлен $x+2\in\mathbb{Z}[x]$ по схеме Горнера.

*Доказательство.* $x+2=x-(-2)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | 2 | -1 | 4 |
| -2 | 3 | -6 | 14 | -29 | 62 |

Таким образом, $g(x)=3x^3-6x^2+14x-29, r=62.$ □

Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$, $a \in K$ или некоторому расширению $K$. Сумма $a_n \alpha^n + \ldots + a_1 \alpha + a_0$ называется **значением многочлена** $f(x)$ **при** $x = \alpha$ и обозначается через $f(\alpha)$.

**Теорема 5.3.1.** Остаток при делении многочлена $f(x) \in K[x]$ на двучлен $x - \alpha \in K[x]$ равен $f(\alpha)$.

*Доказательство.* Действительно,

$$f(x) = (x - \alpha)g(x) + r, g(x) \in K[x], r \in K.$$

Отсюда, согласно однозначности умножения и сложения на $K$,

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)g(\alpha) + r = r.$$

□

**Следствие 5.3.1.** Если $f(x) \in K[x], \alpha \in K$, то $(f(x) - f(\alpha)) \vdots (x - \alpha)$ в $K[x]$

*Доказательство.* В самом деле, по теореме Безу существует единственный многочлен $g(x) \in K[x]$, такой, что $f(x) = (x-\alpha)g(x)+f(\alpha)$. Отсюда $f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)g(x)$, а значит, $(f(x) - f(\alpha)) \vdots (x - \alpha)$. □

**Следствие 5.3.2.** Если $f(x) \in \mathbb{Z}[x], \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha \neq \beta$, то

$$(f(\beta) - f(\alpha)) \vdots (\beta - \alpha)$$

в $\mathbb{Z}$.

*Доказательство.* Действительно, из равенства

$$f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)g(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x],$$

вытекает, что $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)g(\beta)$. Поэтому

$$(f(\beta) - f(\alpha)) \vdots (\beta - \alpha).$$

$\square$

**Пример 5.3.2.** Докажите, что для многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ не могут одновременно выполняться равенства $f(10) = 13$ и $f(1) = 7$.

## 5.4 Кольцо многочленов от одной переменной над полем

Так как поле $P$ — частный случай области целостности, то кольцо $P[x]$ имеет все свойства кольца $K[x]$, доказанные раньше. В частности, $P[x]$, как и $K[x]$, не является полем. Действительно, существует ненулевой многочлен из $P[x](K[x])$, необратимый в $P[x](K[x])$. Например, многочлен $x \in P[x](K[x])$ необратим, так как $\forall f(x) \in P[x](K[x])$ $xf(x) \neq 1$.

Однако, в силу обратимости ненулевых элементов из $P[x]$ обладают особыми свойствами:

1. Свойства делимости:

1.1. Всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ делится на любой $a_0 \in P[x]$ нулевой степени.

Действительно, $f(x) = a_0(a_0^{-1}f(x)), a_0^{-1}f(x) \in P[x]$.

1.2. Если многочлен $f(x) \in P[x]$ делится на многочлен $\varphi(x) \in P[x]$, то $f(x)$ делится и на ассоциированный многочлен $a_0\varphi(x)$, где $a_0 \in P, a_0 \neq 0$.

**Доказательство**. По условию $f(x) = \varphi(x)g(x), g(x) \in P[x]$. Тогда $f(x) = (a_0\varphi(x))(a_0^{-1}g(x)), a_0^{-1}g(x) \in P[x]$.

1.3. Если многочлен $a_0f(x) \in P[x]$ $(a_0 \in P, a_0 \neq 0)$ делится на многочлен $\varphi(x) \in P[x]$, то $f(x) \vdots \varphi(x)$.

Докажите самостоятельно.

2. В кольце $P[x]$, также как и в кольце $\mathbb{Z}$ деление с остатком выполнимо и притом однозначно.

**Теорема 5.4.1.** Всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ однозначно делится с остатком в кольце $P[x]$ на любой ненулевой многочлен $\varphi(x) \in P[x]$, т.е существует единственная пара многочленов $g(x)$ и $r(x) \in P[x]$ таких,что $f(x) = \varphi(x)g(x) + r(x)$, $r(x) = 0$ или $\deg r(x) < \deg \varphi(x)$.

Действительно, так как $\varphi(x) \neq 0$, то его старший коэффициент обратим в $P$. Поэтому по теореме о делении с остатком в $K[x]$ $f(x)$ делится с остатком на $\varphi(x)$ и притом единственным образом.

**Следствие 5.4.1.** Многочлен $f(x) \in P[x]$ делится на многочлен $\varphi(x) \in P[x]$ тогда и только тогда, когда остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ с остатком равен 0.

## 5.5 Общие делители и НОД многочленов. Взаимно простые многочлены. Общие кратные и НОК многочленов. Алгоритм Евклида и нахождение НОД двух многочленов

Пусть $f_1(x), ..., f_k(x)$ — многочлены из $P[x]$. Многочлен $d(x) \in P[x]$ называется **общим делителем** этих многочленов, если все они делятся на $d(x)$. Так как всякий многочлен из $P[x]$ делится на любой отличный от 0 элемент поля $P$, то среди общих делителей $f_i(x)$ $(i = \overline{1,k})$ всегда будут многочлены нулевой степени.

**Определение 5.5.1.** **Наибольшим общим делителем** (сокращенно НОД) не равных 0 одновременно многочленов $f_i(x) \in P[x], i = \overline{1,k}$, называется такой их общий делитель $D(x)$, который делится на любой общий делитель этих многочленов.

Это определение оставляет открытым вопрос о существовании НОД. Этот вопрос положительно решается с помощью алгоритма Евклида.

**Замечание 5.5.1.** 1. НОД многочленов является их общим делителем наибольшей степени и наоборот.

2. НОД многочлена обладает свойствами, аналогичными свойствам НОД целых чисел. Кроме того, в отличие от НОД целых чисел, НОД многочленов определяется неоднозначно.

**Теорема 5.5.1.** НОД многочленов определен однозначно лишь с точностью до множителя нулевой степени.

Действительно, если $D(x) = (f_1(x), ..., f_k(x))$, то в качестве НОД этих многочленов можно выбрать также ассоциированный многочлен $a_0 D(x)$.

**Теорема 5.5.2.** $(f(x), \varphi(x)) = (af(x), b\varphi(x))$, где $a, b \in P, a, b \neq 0$.

**Определение 5.5.2.** Многочлены $f_i(x) \in P[x], i = \overline{1, k}$, называется **взаимно простыми**, если их НОДом является многочлен нулевой степени.

Так как НОД многочленов определяется с точностью до множителя нулевой степени, то можно считать многочлены взаимно простыми, если их НОД равен $1 \in P$.

Основные свойства взаимно простых многочленов аналогичны свойствам взаимно простых чисел.

На практике линейное выражение НОД многочленов удобно искать с помощью метода неопределенных коэффициентов. В основе этого метода лежит следующая теорема и следствие из нее:

**Теорема 5.5.3.** Если $(f(x), \varphi(x)) = D(x), \deg f(x) = m,\ \deg \varphi(x) = n, \deg D(x) = k$, то существует единственная пара многочленов

$$h_1(x), h_2(x), \deg h_1(x) \leq n - k - 1, \deg h_2(x) \leq m - k - 1,$$

что $f(x)h_1(x) + \varphi(x)h_2(x) = D(x)$.

**Следствие 5.5.1.** Если многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты, $\deg f(x) = m, \deg \varphi(x) = h$, то существует единственная пара многочленов $h_1(x), h_2(x), \deg h_1(x) \le h-1, \deg h_2(x) \le m-1$, что

$$f(x)h_1(x) + \varphi(x)h_2(x) = 1.$$

Общим кратным многочленов $f_i(x) \in P[x], i = \overline{1,k}, f_i(x) \neq 0$, называется такой многочлен из $P[x]$, который делится на эти многочлены.

**Наименьшим общим кратным** (НОК) многочленов $f_i(x)$ называется такое их общее кратное, которое является делителем всякого общего кратного этих многочленов, т. е. делит любое общее кратное многочленов $f_i(x)$.

**Замечание 5.5.1.** НОК многочленов — общее кратное наименьшей степени и наоборот.

Так как множители нулевой степени не влияют на делимость многочленов, то НОК многочленов определено однозначно лишь с точностью до таких множителей.

Основные свойства НОК многочленов аналогичны свойствам НОК целых чисел.

Как и в кольце $\mathbb{Z}$, для нахождения НОД двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x) \neq 0$ над полем $P$ служит алгоритм Евклида.

Алгоритм Евклида для многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ состоит в следующем. Делим $f(x)$ на $\varphi(x)$ с остатком. Остаток и частное, полученные при делении, обозначим соответственно через $r_1(x), g(x)$:

$$f(x) = \varphi(x)g_1(x) + r_1(x), r_1(x) = 0 \vee \deg r_1(x) < \deg \varphi(x). \tag{5.5.1}$$

Затем делим $\varphi(x)$ на остаток $r_1(x)$ с остатком (если $r_1(x) \neq 0$); в результате получается частное $g_2(x)$ и второй остаток $r_2(x)$:

$$\varphi(x) = r_1(x)g_2(x) + r_2(x), r_2(x) = 0 \vee \deg r_2(x) < \deg r_1(x).$$

Если $r_2(x) \neq 0$, то делим $r_1(x)$ на $r_2(x)$ с остатком и т. д.:

$$r_1(x) = r_2(x)g_3(x) + r_3(x), r_3(x) = 0 \vee \deg r_3(x) < \deg r_2(x).$$

Заметим, что $\deg \varphi(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \deg r_3(x) > \ldots$, т. е. степени получающихся остатков $r_1(x), r_2(x), \ldots$ убывают. Но целые неотрицательные числа не могут убывать бесконечно. Следовательно, алгоритм Евклида — конечный процесс, и остановить его может только нулевой остаток.

Пусть $r_{k+1}(x) = 0$. Тогда два последних шага запишутся следующими равенствами:

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)g_k(x) + r_k(x), \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x)$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)g_{k+1}(x). \tag{5.5.2}$$

**Теорема 5.5.4.** НОД двух многочленов равен последнему ненулевому остатку в алгоритме Евклида для этих многочленов.

*Доказательство.* Докажем, что $(f(x), \varphi(x)) = r_k(x)$.

Поднимаясь от последнего равенства ( 5.5.2), имеем:

$$r_{k-1}(x) \vdots r_k(x),\ r_{k-2}(x) \vdots r_k(x), \ldots, r_3(x) \vdots r_k(x),\ r_2(x) \vdots r_k(x),$$

$$r_1(x) \vdots r_k(x),\ \varphi(x) \vdots r_k(x),\ f(x) \vdots r_k(x).$$

Значит,$r_k(x) = \mathrm{OD}(f(x), \varphi(x))$.

Пусть $\psi(x)$ — любой общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. Опускаясь от первого равенства ( 5.5.1), получим:

$$r_1(x)|\psi(x),\ r_2(x)|\psi(x),\ r_3(x)|\psi(x), \ldots,\ r_k(x)|\psi(x).$$

Следовательно, $r_k(x) = (f(x), \varphi(x))$. □

## 5.6 Корни многочлена. Наибольшее возможное число корней многочлена в области целостности

**Определение 5.6.1.** Элемент $\alpha$, который принадлежит области целостности $K$ или некоторому ее расширению, называется **корнем многочлена** $f(x) \in K[x]$, если $f(\alpha) = 0 \in K$.

**Теорема 5.6.1.** Элемент $\alpha \in K$ является корнем многочлена $f(x) \in K[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x) \vdots (x - \alpha)$ в кольце $K[x]$.

*Доказательство.* **Необходимость**. Пусть $\alpha \in K$— корень многочлена $f(x) \in K[x]$. По определению $f(\alpha) = 0$. Поэтому по теореме Безу $r = f(\alpha) = 0$, а значит, $f(x) \vdots (x - \alpha)$ в $K[x]$.

**Достаточность**. Пусть $f(x) \vdots (x-\alpha)$ в $K[x]$, т. е. остаток при делении $f(x)$ на $x-\alpha$ с остатком равен 0. Тогда по теореме Безу $f(\alpha) = 0$. Значит, $\alpha$ — корень многочлена $f(x)$.

$\square$

**Следствие 5.6.1.** Различные элементы $a_1, ..., a_n \in K$ являются корнями многочлена $f(x) \in K[x]$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) \vdots ((x - \alpha_1)...(x - \alpha_n))$$

в $K[x]$, т. е. $f(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_n)g(x), g(x) \in K[x]$.

**Пример 5.6.1.** Докажите, что если многочлен $f(x) \in Z[x]$ принимает значение, равное 5, в пяти целых точках, то $f(x)$ не имеет целых корней.

Пусть $\alpha \in K$ — корень многочлена $f(x) \in K[x]$. Тогда по теореме 5.6.1 $f(x) \vdots (x - \alpha)$. Возможно, многочлен $f(x)$ делится не только на первую степень двучлена $x - \alpha$, но и на высшие его степени.

**Определение 5.6.2.** Элемент $\alpha \in K$ называется **корнем кратности** $m$ **(**$m$ **— кратным корнем) многочлена** $f(x) \in K[x]$, если

$f(x) \vdots (x-\alpha)^m$, но $f(x) \not\vdots (x-\alpha)^{m+1}$; при $m = 1$ элемент $\alpha$ называется **простым корнем при** $m > 1$ **— кратным корнем многочлена** $f(x)$.

**Теорема 5.6.2.** Различные элементы $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ являются корнями многочлена $f(x) \in K[x]$ соответственно кратности $m_1, ..., m_n$ тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} ... (x - \alpha_n)^{m_n} g(x)$, $g(x) \in K[x]$, $g(\alpha_1) \neq 0, i = \overline{1, n}$.

Выясним, сколько корней может иметь многочлен $f(x) \in K[x]$ в $K$. Заметим, что любой элемент $\alpha \in K$ является корнем **нулевого** многочлена $f(x) \in K[x]$, так как $f(x) = 0 \in K$.

**Теорема 5.6.3.** Число корней ненулевого многочлена $f(x) \in K[x]$ в области целостности $K$ не превышает степени многочлена, если даже считать каждый корень столько раз, какова его кратность (или с учетом кратности).

*Доказательство.* Если $\deg f(x) = 0$, то $f(x)$, очевидно, не имеет корней в $K$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы верно.

Пусть $\deg f(x) = n > 0$. Если $f(x)$ не имеет корней в $K$, то доказываемое утверждение верно. Пусть $\alpha_1, ..., \alpha_s \in K$ — различные корни многочлена $f(x)$ соответственно кратности $m_1, ..., m_s$. Тогда по теореме(1.5.2) $f(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} ... (x - \alpha_s)^{m_s} g(x), g(x) \in K[x], g(\alpha_i) \neq 0$ $(i = \overline{1, s}), \deg g(x) = n_1 \geq 0$. Значит, степени многочлена слева и справа одинаковые: $n = m_1 + ... + m_n + n_1$. Отсюда $m_1 + ... + m_n = n - n_1 \leq n$, т. е.

число корней, если каждый из них считать столько раз, какова его кратность (или с учетом кратностей), не превосходит степени $n$ многочлена $f(x)$. □

**Замечание 5.6.1.** Если кольцо $K$ не является областью целостности, то многочлен $n$-й степени может иметь более $n$ корней в $K$. Например, многочлен $f(x) = x^2 - \bar{1} \in Z_8[x]$ имеет в кольце $Z_8$ четыре корня $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$.

**Следствие 5.6.2.** Если многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[x]$ имеет в области целостности $K$ более $n$ корней, то $f(x) = 0$.

**Следствие 5.6.3.** Если два многочлена $f(x), g(x) \in K[x]$ степени $\leq n$ имеют равные значения более чем при $n$ значениях из $K$ переменной $x$, то эти многочлены равны.

## 5.7 Приводимые и неприводимые над полем многочлены. Свойства неприводимых многочленов

Пусть дан многочлен $f(x) \in P[x]$ положительной степени. Делителями многочлена $f(x)$ будут все многочлены нулевой степени и все ассоциированные с ним многочлены $a_0 f(x)$, имеющие степень многочлена $f(x)$. Что же касается делителей многочлена $f(x)$, степень которых больше 0 и меньше степени $f(x)$, то они могут в кольце $P[x]$ существовать, а могут и отсутствовать.

**Определение 5.7.1.** Многочлен $f(x) \in P[x]$ положительной степени называется **приводимым над полем** $P$(в кольце $P[x]$), если в кольце $P[x]$ он имеет делители положительной степени, меньшей степени $f(x)$.

По принятому определению многочлен $f(x) \in P[x]$ положительной степени приводим над $P$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \varphi(x)\Psi(x), \tag{5.7.1}$$

$\varphi(x), \Psi(x) \in P[x], 0 < \deg \varphi(x) < \deg f(x)$. Из равенства (5.7.1) следует, что $0 < \deg \Psi(x) = \deg f(x) - \deg \varphi(x) < \deg f(x)$. Таким образом, многочлен $f(x) \in P[x]$ положительной степени приводим над полем $P$ тогда и только тогда, когда он может быть разложен в произведение двух многочленов из кольца $P[x]$ положительной степени, а следовательно, меньшей степени $f(x)$.

**Определение 5.7.2.** Многочлен $p(x) \in P[x]$ положительной степени называется **неприводимым над полем** $P$(в кольце $P[x]$), если в кольце $P[x]$ его делителями являются только все многочлены нулевой степени и все ассоциированные с ним многочлены $a_0 p(x)$.

Таким образом, неприводимый над полем $P$ многочлен $p(x)$ не может быть разложен в произведение двух многочленов из кольца $P[x]$ положительной степени, т. е. в любом его разложении в произведение двух многочленов из $P[x]$ один имеет степень 0, другой – $\deg p(x)$.

Неприводимые многочлены играют в кольце $P[x]$ ту же роль,что и простые числа в кольце $\mathbb{Z}$.

**Замечание 5.7.1.** 1. Всякий многочлен нулевой степени и нулевой многочлен ни приводим, ни неприводим.

2. Вопрос о приводимости или неприводимости над полем $P$ многочленов положительной степени решается положительно только для многочленов, заданных над этим полем $P$. Например, многочлен $x+i \notin \mathbb{R}[x]$. Поэтому он ни приводим, ни неприводим над $\mathbb{R}$.

Свойства неприводимых многочленов.

1. Всякий многочлен первой степени из кольца $P[x]$ неприводим над полем $P$.

2. Если многочлен $p(x) \in P[x]$ степени $\geq 2$ неприводим над $P$, то он не имеет корней в $P$.

**Доказательство** методом от противного. Пусть $\alpha \in P$ — корень неприводимого многочлена $p(x)$. По критерию корня $p(x) \vdots (x-\alpha)$, т. е. согласно определению $p(x)$ — приводим над $P$, что противоречит условию. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, многочлен $x^4+2x^2+1 \in R[x]$ не имеет действительных корней, но он приводим в кольце $R[x]$. Однако для многочленов степеней 2 и 3 обратное верно. Покажем это методом от противного. Пусть многочлен $p(x)$ приводим над $P$, т. е. разлагается в произведение двух многочленов положительной степени из $P[x]$. Так как $\deg p(x) = 2$ или 3, то обязательно один из них должен быть первой степени:

$$f(x) = (a_1x + a_0)\varphi(x), a_0, a_1 \in P, a_1 \neq 0.$$

Следовательно - $\frac{a_0}{a_1} \in P$— корень $p(x)$, что противоречит условию.

Таким образом, многочлен из $P[x]$ степени 2 и 3 неприводим над полем $P$ тогда и только тогда, когда он не имеет корней в поле $P$.

3. Если многочлен $p(x) \in P[x]$ неприводим над расширением $\bar{P}$ поля $P$, то он неприводим и над $P$.

4. Если многочлен $p(x) \in P[x]$ неприводим над полем $P$, то неприводим над $P$ будет и всякий ассоциированный с ним многочлен $a_0p(x)$.

5. Если $p_1(x)$ — неприводимый многочлен над полем $P$, $p_2(x)$— многочлен из $P[x]$ положительной степени и $p_1(x) \vdots p_2(x)$, то $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — ассоциированы.

**Доказательство.** Если $p_1(x) \vdots p_2(x)$, то $p_1(x) = p_2(x)g(x), g(x) \in P[x]$. Если бы $g(x)$ был многочленом положительной степени, то по определению $p_1(x)$ был бы многочленом приводимым. Следовательно, $g(x) = a_0 \in P, a_0 \neq 0$ и $p_1(x) = a_0p_2(x)$, ч. т. д.

6. Если $f(x)$ — произвольный, $p(x)$ — неприводимый многочлен кольца $P[x]$, то либо $f(x) \vdots p(x)$, либо же эти многочлены взаимно просты.

**Доказательство.** Пусть $(f(x), p(x)) = D(x)$. Тогда $p(x) \vdots D(x)$. По определению неприводимого многочлена $D(x) = a_0 \in P, a_0 \neq 0$, т. е. $f(x)$ и $p(x)$ взаимно просты, или $D(x) = a_0p(x), a_0 \in P, a_0 \neq 0$, т. е.

$f(x) \vdots a_0 p(x)$, следовательно, $f(x) \vdots p(x)$.

7. Если произведение многочленов $f(x)$ и $g(x) \in P[x]$ делится на многочлен $p(x)$, неприводимый над $P$, то хотя бы один из этих множителей делится на $p(x)$.

**Доказательство** методом от противного. Пусть $f(x) \not\vdots p(x)$ и $g(x) \not\vdots p(x)$. Тогда по свойству 6 $(f(x), p(x)) = (g(x), p(x)) = 1$, а поэтому $(f(x)g(x), p(x)) = 1$. Отсюда $f(x)g(x) \not\vdots p(x)$, что противоречит условию. Это свойство распределяется на случай произведения любого конечного числа множителей.

**Следствие 5.7.1.** Если произведение неприводимых многочленов из кольца $P[x]$ делится на неприводимый многочлен $p(x) \in P[x]$, то хотя бы один из этих множителей ассоциирован с $p(x)$.

## 5.8 Разложение многочленов на неприводимые множители и его единственность

**Теорема 5.8.1.** **(Основная теорема теории делимости многочленов)** Всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ положительной степени может быть разложен в произведении неприводимых над полем $P$ многочленов, и это разложение единственно с точностью до порядка следования множителей и множителей нулевой степени, т. е. разложения многочлена $f(x)$ на неприводимые множители могут отличаться лишь порядком записи множителей, а также множителями нулевой степени.

*Доказательство.* 1. Покажем сначала, что всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ положительной степени можно разложить на неприводимые над полем $P$ множители.

Для неприводимого многочлена $f(x)$ утверждение очевидно — в этом случае получается разложение из одного неприводимого множителя, самого многочлена $f(x)$.

Пусть $f(x)$ — приводимый над полем $P$ многочлен. Тогда $f(x)$ можно представить в виде произведения двух многочленов из $P[x]$ степени, меньшей степени $f(x)$. Если они неприводимы над $P$, то получим искомое разложение. Если же среди этих многочленов есть приводимые, представляем их в виде произведения многочленов меньшей степени и т.д. Этот процесс оборвется через конечное число шагов, так как сумма степеней сомножителей должна быть равна степени $f(x)$, а степень каждого сомножителя положительна.

2. Докажем единственность разложения на неприводимые множители. Пусть $f(x)$ двумя способами разлагается в произведение неприводимых многочленов:

$$f(x) = p_1(x)...p_k(x), \tag{5.8.1}$$

$$f(x) = q_1(x)...q_l(x), \tag{5.8.2}$$

где $p_i(x), q_j(x)$ — неприводимые над полем $P$ многочлены.

Предположим, что $k \neq l$. Пусть для определенности $k < l$. Из (5.8.1) и (5.8.2) следует

$$p_1(x)...p_k(x) = q_1(x)...q_l(x). \tag{5.8.3}$$

Левая часть равенства (5.8.3) делится на $p_1(x)$, значит и правая должна делиться на $p_1(x)$. Поэтому хотя бы один из множителей $q_j(x)$ ассоциирован с $p_1(x)$.

Пусть для определенности $q_1(x) = a_1p_1(x), a_1 \in P, a_1 \neq 0$. Тогда (5.8.3) примет вид:

$$p_2(x)...p_k(x) = a_1q_2(x)...q_l(x). \tag{5.8.4}$$

Повторяем относительно (5.8.4) аналогичные рассуждения. Получим $q_2(x) = a_2p_2(x), a_2 \in P, a_2 \neq 0$. Тогда (5.8.4) примет вид:

$$p_3(x)...p_k(x) = a_1a_2q_3(x)...q_l(x)$$

и т.д.

После $k$ таких рассуждений получим, что

$$q_i(x) = a_ip_i(x), a_i \in P, a_i \neq 0, i = \overline{1, k},$$

и

$$l = a_1a_2...a_lq_{k+1}(x)...q_l(x).$$

Но последнее равенство невозможно, так как $q_{k+1}(x), ..., q_l(x)$ — неприводимые многочлены. Значит, предположение неверно. Таким образом,

$k = l$ и $q_i(x), p_i(x)$ — ассоциированные многочлены, т. е. любые два разложения многочлена $f(x)$ на неприводимые множители могут различаться лишь порядком следования множителей, а также множителями нулевой степени, ч.т.д. $\square$

Вынося старший коэффициент из каждого неприводимого множителя в разложении многочлена $f(x)$, представим этот многочлен в виде произведения ненулевого элемента поля $P$ и нормированных неприводимых в кольце $P[x]$ многочленов:

$$f(x) = ap_1(x)...p_k(x) \tag{5.8.5}$$

где $a \in P, a \neq 0, p_i(x) \in P[x]$ — нормированные неприводимые над $P$ множители. Очевидно, $a$ совпадает со старшим коэффициентом $f(x)$.

Таким образом, всякий многочлен из $P[x]$ положительной степени можно представить в виде произведения ненулевого элемента поля $P$ и нормированных неприводимых в кольце $P[x]$ многочленов и это представление единственно с точностью до порядка следования множителей.

Среди нормированных неприводимых множителей в разложении (5.8.5) $f(x)$ могут быть одинаковые. Пусть $p_1(x), ..., p_s(x)$ — различны и $p_1(x)$ встречается в разложении (5.8.5)$\alpha_1$ раз, ..., $p_s(x) - \alpha_s$ раз. Тогда

$$f(x) = ap_1^{\alpha_1}(x)...p_s^{\alpha_s}(x), a \in P, a \neq 0. \tag{5.8.6}$$

Разложение (5.8.6) называется **каноническим разложением** многочлена $f(x) \in P[x]$ над полем $P$.

Способ определения НОД и НОК двух целых чисел по их разложению на простые множители, известный из курса средней школы, подсказывает, как можно было бы найти НОД и НОК двух многочленов, зная их канонические разложения.

**Утверждение 5.8.1.** НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ положительной степени равен произведению всех общих неприводимых множителей канонических разложений этих многочленов, причем каждый такой множитель берется в меньшей степени.

**Утверждение 5.8.2.** НОК многочлено $f(x)$ и $g(x)$ положительной степени равен произведению всех неприводимых множителей канонических разложений этих многочленов, причем каждый множитель берется в большей степени.

**Замечание 5.8.1.** Представленные выше утверждения имеют в основном теоретическое значение, так как не существует общего метода разложения многочленов на неприводимые множители. Более того, даже на вопрос о неприводимости данного многочлена над данным полем в настоящее время не имеется исчерпывающего ответа. Общее решение мы получим только для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, ограничившись замечаниями частного характера для случая многочленов над полем $\mathbb{Q}$.

## 5.9 Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$. Разложение многочлена над $\mathbb{C}$. Основная теорема алгебры. Формулы Виета

Далеко не всякий многочлен над полем $\mathbb{Q}$ имеет рациональные корни. Такая же картина наблюдается и в отношении поля $\mathbb{R}$, являющегося расширением $\mathbb{Q}$.

Самым «широким» числовым полем является поле комплексных чисел. Оказывается, что поле  обладает следующим характерным свойством.

**Теорема 5.9.1. (Основная теорема алгебры)** Всякий многочлен над полем $\mathbb{C}$ (с любыми числовыми коэффициентами) положительной степени имеет хотя бы один комплексный корень.

При доказательстве теоремы будут использованы следующие леммы.

**Лемма 5.9.1. (Лемма о возрастании модуля многочлена)** Для всякого многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ положительной степени и всякого наперед заданного положительного действительного числа $m$, сколь угодно большого, существует такое положительное действительное число $n$, что при $|x| > n$ будет $|f(x)| > m$.

**Лемма 5.9.2. (Лемма Даламбера)** Если многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ положительной степени не обращается в нуль при $x = x_0$, то можно найти такое комплексное число $h \neq 0$, чтобы $|f(x_0+h)| < |f(x_0)|$ (при этом $h$ может быть сколь угодно малым по модулю ).

**Лемма 5.9.3.** Если действительная функция $\phi(x)$ комплексной переменной непрерывна во всех точках круга $E$, то существует в круге $E$ точка минимума $x_0$ функции $\phi(x)$, т. е. $(\forall x \in E)\phi(x_0) \leq \phi(x)$.

*Доказательство.* 1. $f(0) = a_0 = 0$. Тогда $0$ — корень $f(x)$.

2. $f(0) = a_0 \neq 0$. По лемме 5.9.1 (о возрастании модуля многочлена) для числа $m = |f(0)| = |a_0|$ можно указать такое $n > 0$, что при $|x| > n$ будет

$$|f(x)| > |f(0)|. \tag{5.9.1}$$

Применим далее лемму 5.9.3 к модулю многочлена $f(x)$, являющемуся непрерывной действительной функцией комплексной переменной. В качестве $E$ возмем круг радиуса $n$ с центром в точке $0$. Пусть точка $x_0$ будет точкой минимума для $|f(x)|$ в круге $E$, т. е.

$$|f(x_0)| \leq |f(x)| \text{ для } |x| \leq n. \tag{5.9.2}$$

В частности,

$$|f(x_0)| \leq |f(0)|. \tag{5.9.3}$$

Покажем, что точка $x_0$ — точка минимума $|f(x)$ на всей комплексной плоскости. Действительно, если точка $x$ лежит вне $E$, то $|x| > n$ и поэтому выполняется (5.9.1). Тогда из (5.9.1) и (5.9.3) получаем

$$|f(x)| > |f(x_0)| \text{ для } x > n. \tag{5.9.4}$$

Таким образом, в силу (5.9.2) и (5.9.4), $x_0$ — точка минимума для $|f(x)|$ на множестве $\mathbb{C}$.

Покажем, что точка $x_0$ является корнем $f(x)$ методом от противного. Пусть $x_0$ не является корнем $f(x)$. Тогда $f(x_0) \neq 0$ и по лемме 5.9.2 (Даламбера) можно указать такое комплексное число $h \neq 0$, что

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|.$$

Но это неравенство противоречит, тому, что $x_0$ — точка минимума $|f(x)|$ на множестве $\mathbb{C}$. Следовательно, допущение неверно, и $f(x_0) = 0$. □

**Определение 5.9.1.** Поле $P$ называется **алгебраически замкнутым**, если любой многочлен положительной степени из $P[X]$ имеет в поле $P$ хотя бы один корень.

**Следствие 5.9.1.** Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

**Теорема 5.9.2.** Неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ являются только многочлены 1 степени.

*Доказательство.* Согласно определению, всякий многочлен нулевой степени,а также нулевой многочлен ни приводимы, ни неприводимы над полем $\mathbb{C}$. По свойству неприводимых многочленов всякий многочлен 1 степени с комплексными коэффициентами неприводим над полем $\mathbb{C}$.

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f(x) > 1$. По основной теореме алгебры (теорема 5.9.1) $f(x)$ имеет хотя бы один комплексный корень $a$.

Тогда $f(x) \vdots x - a$ в кольце $\mathbb{C}[x]$. Значит, по определению, многочлен $f(x)$ приводим над полем $\mathbb{C}$. $\square$

**Следствие 5.9.2.** Любой многочлен $f(x)$ из кольца $\mathbb{C}[x]$ положительной степени $n$ можно представить в виде произведения его старшего коэффициента и нормированных линейных множителей:

$$f(x) = a_n(x - a_1) \dots (x - a_n), \tag{5.9.5}$$

где $a_1, ..., a_n$ — комплексные корни $f(x)$.

Если в разложении (5.9.5) $a_1, ..., a_s$ — все различные комплексные корни многочлена $f(x)$ соответственно кратности $k_1, ..., k_s$, то это разложение можно представить в виде

$$f(x) = a_n(x - a_1)^{k_1} ... (x - a_s)^{k_s}, k_1 + ... + k_s = n. \tag{5.9.6}$$

Представление (5.9.5) — каноническое разложение многочлена $f(x)$ над полем $\mathbb{C}$.

**Следствие 5.9.3.** Всякий многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ положительной степени $n$ имеет ровно $n$ комплексных корней с учетом их кратности (если каждый корень считать столько раз, какова его кратность).

Установим зависимость между корнями и коэффициентами многочлена.

**Теорема 5.9.3.** **(Виета)** Пусть

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 - \tag{5.9.7}$$

многочлен над полем $\mathbb{C}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — его комплексные корни (каждый корень выписан столько раз, какова его кратность). Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -a_{n-1}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = a_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n a_0, \end{cases}$$

*Доказательство.* Так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — комплексные корни многочлена $f(x)$, то по следствию 5.9.2

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n). \tag{5.9.8}$$

Перемножив линейные множители в правой части равенства, получим

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = x^n - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)x^{n-1} + \ldots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n. \tag{5.9.9}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем формулы (5.9.8). $\square$

**Следствие 5.9.4.** Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — комплексные корни многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, то

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}, \end{cases}$$

*Доказательство.*

$$f(x) = a_n\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n}\right),$$

причём, очевидно, корни многочленов $f(x)$ и

$$f_1(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n}$$

совпадают, т. е. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни $f_1(x)$. Тогда по теореме 5.9.3 (Виета) для многочлена $f_1(x)$ имеем формулы (5.9.10). $\square$

## 5.10 Сопряженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами. Разложение многочлена над полем $\mathbb{R}$

**Теорема 5.10.1.** Мнимые корни многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x] \tag{5.10.10}$$

положительной степени попарно сопряжены.

*Доказательство.* Пусть мнимое число $\alpha$ является корнем $f(x)$. Тогда $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$. Найдем $f(\overline{\alpha})$. Используя свойства сопряженных комплексных чисел, имеем

$$\begin{aligned} f(\overline{\alpha}) = a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\alpha} + a_0) = \\ = \overline{a}_n\overline{\alpha^n} + \overline{a}_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a}_0 = \\ = \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} = \\ = \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0} = \overline{0} = 0. \end{aligned} \tag{5.10.11}$$

Следовательно, $\overline{\alpha}$ — корень многочлена $f(x)$. □

**Теорема 5.10.2.** Неприводимыми над полем $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени и многочлены второй степени, не имеющие действительных корней.

*Доказательство.* По свойству неприводимых многочленов, всякий многочлен первой степени с действительными коэффициентами неприводим над полем $\mathbb{R}$.

Пусть $p(x)$ — многочлен выше первой степени, неприводимый над полем $\mathbb{R}$.

По основной теореме алгебры (теорема 5.9.1) этот многочлен имеет хотя бы один комплексный корень $a+bi, a, b \in \mathbb{R}$. Если $b=0$, то $p(x) \vdots x-a$ в кольце $\mathbb{R}[x]$, что противоречит определению неприводимого многочлена над $\mathbb{R}$. Значит, $b \leq 0$, т. е. $a+bi$ — мнимый корень $p(x)$. По теореме 5.10.1 сопряженное мнимое число $a-bi$ также будет корнем $p(x)$. Разделим многочлен $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ на многочлен

$$(x-a-bi)(x-a+bi) = (x-a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x] :$$

$$p(x) = \left((x-a)^2 + b^2\right) g(x), g(x) \in \mathbb{R}[x], m, n \in \mathbb{R}.$$

Так как полином $p(x)$ по условию неприводим над $\mathbb{R}$, то $\deg\ g(x) = 0$, т. е. $g(x) = c \in \mathbb{R}$, $c \leq 0$

Итак, неприводимыми над полем $\mathbb{R}$ могут быть только многочлены не выше второй степени. □

**Следствие 5.10.1.** Всякий многочлен $f(x)$ из кольца $\mathbb{R}[x]$ положительной степени можно представить в виде произведения его старшего коэффициента и нормированных линейных многочленов или многочленов второй степени, не имеющих действительных корней, причем каждому линейному множителю соответствует действительный корень $f(x)$, а каждому квадратному множителю — пара мнимых сопряженных корней.

**Теорема 5.10.3.** Мнимые сопряженные корни многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ имеет одну и ту же кратность.

*Доказательство.* Пусть $\alpha = a + bi$; $\overline{\alpha} = a - bi$ — мнимые сопряженные корни многочлена $f(x)$ над $\mathbb{R}$. Тогда многочлен второй степени

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2.$$

Является неприводимым над полем $\mathbb{R}$ и входит в многочлен $f(x)$. Пусть его кратность равна $k$, т. е.

$$f(x) = a_n\Big((x - a)^2 + b^2\Big)^k \cdot g(x),$$

где $g(x)$ — произведение остальных неприводимых множителей разложения $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$, $g(x)$ — многочлен из $\mathbb{R}[x]$. Ни один из корней $\alpha$ и $\overline{\alpha}$ не может быть корнем $g(x)$, так как если бы, например, $\alpha$ было бы корнем $g(x)$, то и сопряженное число $\overline{\alpha}$ было бы корнем $g(x)$, вследствие чего $g(x)$ делилось бы на $(x - a)^2 + b^2$, т. е. $f(x)$ делилось бы на $\Big((x - a)^2 + b^2\Big)^{k+1}$. Получилось бы противоречие с тем, что кратность

$(x-a)^2+b^2$ равна $k$. Следовательно, корни $\alpha$ и $\overline{\alpha}$ имеют одну и ту же кратность.

**Теорема 5.10.4.** Всякий многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ положительной степени $n$ имеет ровно $n$ комплексных корней с учетом их кратностей.

**Следствие 5.10.2.** Всякий многочлен с действительными коэффициентами имеет четное число мнимых корней.

**Следствие 5.10.3.** Четность числа действительных корней многочлена из $\mathbb{R}(x)$ совпадает с четностью степени многочлена.

**Следствие 5.10.4.** Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

$\square$

## 5.11 Рациональные (целые) корни многочлена с целыми коэффициентами. Неприводимость многочленов над $\mathbb{Q}$. Критерий Эйзенштейна

Изучим вопрос о нахождении рациональных корней многочленов с рациональными коэффициентами. Заметим, что при этом можно ограничиться рассмотрением лишь многочленов с целыми коэффициентами. В противном случае, умножая многочлен $f(x)$, коэффициенты которого рациональны, но не все целые, на их общий знаменатель, получим многочлен с целыми коэффициентами и с тем же корнями что и многочлен $f(x)$.

Метод вычисления рациональных корней основан на следующих теоремах и следствиях из них.

**Теорема 5.11.1.** Если несократимая дробь $\frac{l}{m}(l \in \mathbb{Z}, l \neq 0, m \in \mathbb{N})$ является рациональным корнем многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

то $l$ — делитель свободного члена $a_0$, $m$ — натуральный делитель старшего коэффициента $a_n$.

*Доказательство.* Так как $\frac{l}{m}$ — корень $f(x)$, то $f\left(\frac{l}{m}\right) = 0$, т. е.

$$a_n \frac{l^n}{m^n} + a_{n-1}\frac{l^{n-1}}{m^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{l}{m} + a_0 = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на $m^n$:

$$a_n l^n + a_{n-1} m l^{n-1} + \cdots + a_1 l m^{n-1} + a_0 m^n = 0.$$

Отсюда

$$a_n l^n = -m(a_{n-1}l^{n-1} + \cdots + a_1 l m^{n-2} + a_0 m^{n-1}) \tag{5.11.12}$$

и

$$a_0m^n = -l(a_nl^{n-1} + a_{n-1}ml^{n-2} + \dots + a_1m^{n-1}). \qquad (5.11.13)$$

Из (5.11.12) следует, что $a_nl^n \vdots m$. Но $(l, m) = 1$ (по условию). Значит $(l^n, m) = 1$, а поэтому $a_n \vdots m$. Из (5.11.13) следует, что $a_0m^n \vdots l$. Но $(m^n, l) = 1$. Тогда $a_0 \vdots l$. □

**Следствие 5.11.1.** Целый корень многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, отличный от 0, является делителем свободного члена.

**Следствие 5.11.2.** Рациональный корень нормированного многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ является целым числом.

**Пример 5.11.1.** Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30. \qquad (5.11.14)$$

*Доказательство.* Нормированный многочлен с целыми коэффициентами дробных рациональных корней не имеет, т. е. все его рациональные корни должны быть целыми числами. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами находятся среди делителей свободного члена. В нашем случае дулителями свободного члена являются числа:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30. \qquad (5.11.15)$$

Теперь можно каждое из этих чисел проверить подстановкой в многочлен или по схеме Горнера.

$f(1) = 16$, $f(-1) = 24$, т. е. $\pm 1$ не являются корнями $f(x)$.

Проверим $x = 2$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -11 | -5 | 30 |
| 2 | 1 | 3 | -5 | -15 | 0 |

Следовательно 2 — корень $f(x)$. Проверим, не является ли 2 кратным корнем (пользуемся схемой Горнера или заметим, что многочлен $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15$ не делится на $x - 2$, т. к. свободный член $-15$ не делится на 2). Итак, $x = 2$ — простой корень $f(x)$.

Проверим $x = 3$. Здесь можно на $x - 3$ делить не $f(x)$, а $g(x)$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -5 | -15 |
| 3 | 1 | 6 | 13 | 24 |

Следовательно $g(3) = 24 \neq 0$. Значит, 3 не является корнем $g(x)$, а поэтому $f(x)$.

Проверим число $x = -3$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -5 | -15 |
| -3 | 1 | 0 | -5 | 0 |

Значит, $g(-3) = 0$. Следовательно, $x = -3$ корень $g(x)$, а значит, и $f(x)$.

При этом свободный член частного $g_1(x) = x^2 - 5$, не делится на $-3$. Поэтому $-3$ не является корнем $g_1(x)$, т. е. $x = -3$ — простой корень многочлена $f(x)$. Итак, $f(x)$ имеет простые рациональные корни 2 и $-3$. $\square$

Согласно определению, всякий многочлен нулевой степени, а также нулевой многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ ни приводим, ни неприводим над $\mathbb{Q}$.

По свойству неприводимых многочленов любой многочлен 1-ой степени с рациональными коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$. Многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ второй и третьей степени неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда он не имеет рациональных корней. Для многочленов выше третьей степени дело обстоит уже сложнее.

Так, например, многочлен 4-ой степени может оказаться приводимым над полем $\mathbb{Q}$ и тогда, когда он не имеет рациональных корней: многочлен $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ приводим над $\mathbb{Q}$ хотя не имеет рациональных корней.

Существует много критериев неприводимости многочленов над полем $\mathbb{Q}$. Одним из наиболее распространенных является критерий, предложенный в 1850 г. Эйзенштейном.

Заметим, что если некоторые или даже все коэффициенты многочлена $f(x)$ над полем $\mathbb{Q}$ дробные, то можно сделать их целыми, умножая $f(x)$ на общий знаменатель коэффициентов. При таком преобразовании неприводимый многочлен останется неприводимым, а приводимый —

приводимым.

**Лемма 5.11.1.** Если многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ приводим в кольце $\mathbb{Q}[x]$, то он приводим в кольце $\mathbb{Z}[x]$.

**Теорема 5.11.2. (Эйзенштейна)** Если все коэффициенты многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

кроме старшего, делятся на какое-нибудь простое число $p$ и свободный член не делится на $p^2$, то многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

*Доказательство.* Допустим, что $f(x)$ приводим над полем $\mathbb{Q}$. Тогда по лемме 5.11.1 $f(x) = g(x)h(x)$, где

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k, h(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_s x^s,$$

$$0 < k < n, 0 < s < n, k + s = n, h(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Перемножая $g(x)$ и $h(x)$, получаем:

$$g(x)h(x) = b_0c_0 + (b_1c_0 + b_0c_1)x + \ldots + (b_kc_0 + b_{k-1}c_1 + \ldots + b_0c_k)x^k + \ldots + b_kc_sx^{k+s}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} a_0 = b_0 c_0, \\ a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1, \\ \dots \\ a_k = b_k c_0 + b_{k-1} c_1 + \dots + b_0 c_k, \\ \dots \\ a_n = b_k c_s. \end{cases}$$

Коэффициент $a_0 = b_0 c_0 \vdots p$, значит, $b_0$ или $c_0$ делится на $p$.

Пусть $b_0 \vdots p$. Тогда $c_0 \not\vdots p$, так как в противном случае $a_0 = b_0 c_0$ делилось бы на $p^2$. Затем $a_1 \vdots p$, поэтому $b_1 \vdots p$ и так далее. Из $(k+1)$-го равенства: из делимости $a_k$ на $p$ следует, что $b_k \vdots p$. Наконец, из последнего равенства получаем, что $a_n \vdots p$, а это противоречит условию. Значит, $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. □

Известно, что неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ являются многочлены только первой степени, над $\mathbb{R}$ — только первой степени и второй, не имеющие действительных корней. Из теоремы Эйзенштейна следует, что непривомыми над полем $\mathbb{Q}$ могут быть многочлены любой положительной степени.

# РАЗДЕЛ 6
# Линейные операторы

## 6.1 Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора

Хорошо известно, что отображение множества можно задать указав образы каждого элемента множества. Поэтому линейный оператор $\varphi$ пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$ можно задать образом $\varphi(x)$ любого вектора $x \in L_n$. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ $(u)$ базис пространства $L_n$. Тогда $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Отсюда $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(u_n)$. Таким образом, $\varphi(x)$ задается образами базисных векторов, которые содержатся в $L_n$, а значит, тоже выражаются через базис $L_n$, то есть

$$\varphi(u_i) = [u_1, \ldots, u_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \ldots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ через $M^{\varphi}_{(u)}$.

**Определение 6.1.1.** Матрица $M^{\varphi}_{(u)}$ $n$ - го порядка над полем $\mathbb{P}$, $i$-ый столбец которой есть координатный столбец вектора $\varphi(u_i)$ в базисе $(u)$ называется **матрицей линейного оператора** $\varphi$ **в базисе** $(u)$.

Таким образом матрица $M^{\varphi}_{(u)}$ задает линейный оператор $\varphi$.

## Образ и ядро линейного оператора

**Определение 6.1.2.** Множество образов всех векторов пространства $L_n$, на которое действует линейный оператор $\varphi$, называется **образом линейного оператора** $\varphi$ и обозначается $\operatorname{Im}\varphi$, то есть

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) | x \in L_n\}.$$

**Теорема 6.1.1.** $\operatorname{Im}\varphi$ является подпространством пространства $L_n$.

**Определение 6.1.3.** Размерность образа линейного оператора $\varphi$ называется **рангом линейного оператора** $\varphi$ и обозначается $\operatorname{rang}\varphi$.

Легко показать, что $\operatorname{rang}\varphi = \operatorname{rang} M^{\varphi}_{(u)}$.

**Определение 6.1.4.** Множество векторов пространства $L_n$, которые линейным оператором $\varphi$ переводятся в нулевой вектор пространства $L_n$, называется **ядром оператора** $\varphi$ и обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$.

**Теорема 6.1.2.** $\operatorname{Ker}\varphi$ является подпространством пространства $L_n$.

**Определение 6.1.5.** Размерность ядра оператора $\varphi$ называется **дефектом** и обозначается $\operatorname{def}\varphi$.

**Теорема 6.1.3.** $\operatorname{rang}\varphi + \operatorname{def}\varphi = n = \dim L_n$

## 6.2 Связь между координатными столбцами векторов $x$ и $\varphi(x)$. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ $(u)$ – произвольный базис пространства $L_n$, на которое действует линейный оператор $\varphi$,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ — координатный столбец вектора $x$ в базисе $(u)$,

$\begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ — координатный столбец вектора $\varphi(x)$ в базисе $(u)$.

Тогда:

$$x = [u_1, \dots, u_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ и } \varphi(x) = [\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{Кроме того } \varphi(x) = [u_1, \dots, u_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Так как

$$[\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)] = [u_1, \dots, u_n] \; M^{\varphi}_{(u)},$$

то

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = M^{\varphi}_{(u)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{6.2.1}$$

## Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах

Пусть $u_1, \dots, u_n$ $(u)$ и $v_1, \dots, v_n$ $(v)$ – базисы пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$, $T$ – матрица перехода от базиса $(u)$ к базису $(v)$, то есть

$$[v_1, \dots, v_n] = [u_1, \dots, u_n] \, T, \tag{6.2.2}$$

$M_{(u)}^{\varphi}$, $M_{(v)}^{\varphi}$ – матрицы линейного оператора $\varphi$ в базисе $(u)$ и $(v)$, соответственно. Тогда справедливы следующие соотношения

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n]\, M_{(u)}^{\varphi}, \tag{6.2.3}$$

$$[\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)] = [v_1, \ldots, v_n]\, M_{(v)}^{\varphi}. \tag{6.2.4}$$

Из (6.2.2) следует, что

$$[\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)] = [\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)]\, T, \tag{6.2.5}$$

Подставим (6.2.3) и (6.2.4) в (6.2.5). Получим

$$[v_1, \ldots, v_n]\, M_{(v)}^{\varphi} = [u_1, \ldots, u_n]\, M_{(u)}^{\varphi} T. \tag{6.2.6}$$

Подставим (6.2.2) в (6.2.6). Получим:

$$[u_1, \ldots, u_n]\; M_{(v)}^{\varphi} T = [u_1, \ldots, u_n]\; M_{(u)}^{\varphi} T.$$

Следовательно, $M_{(v)}^{\varphi} = T^{-1}\, M_{(u)}^{\varphi} T$.

**Определение 6.2.1.** Матрицы $A$ и $B$ $n$-го порядка над полем $\mathbb{P}$ называются **подобными**, если найдется невырожденная матрица $T$ $n$-го порядка такая, что $B = T^{-1} AT$.

**Следствие 6.2.1.** Матрицы линейного оператора в различных базисах подобны.

Пусть $L_n$ – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $f_1$ и $f_2$ – линейные операторы пространства $L_n$.

**Определение 6.2.2.** **Суммой линейных операторов** $f_1$ и $f_2$ называется такой оператор $f_1 + f_2$, что $\forall x \in L_n$ $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

**Определение 6.2.3.** **Произведением линейного оператора** $f$ **на скаляр** $\lambda$ называется оператор $\lambda f$ такой, что $\forall x \in L_n$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Соответствующие операции называются сложением линейных операторов и умножением линейного оператора на скаляр. Кроме того, $f_1 + f_2$ и $\lambda f$ также линейные операторы пространства $L_n$ над $\mathbb{P}$.

**Утверждение 6.2.1.** Множество $V(L_n)$ линейных операторов пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$ относительно введенных операций является линейным пространством над полем $\mathbb{P}$.

**Утверждение 6.2.2.** 1) $M_{(u)}^{f_1+f_2} = M_{(u)}^{f_1} + M_{(u)}^{f_2}$.

2) $M_{(u)}^{\lambda f_1} = \lambda M_{(u)}^{f_1}$.

**Определение 6.2.4.** **Произведением линейных операторов** $f_1$ и $f_2$ называется оператор $f_2 f_1$ такой, что $\forall x \in L_n$ $(f_2 f_1)(x) = f_2(f_1(x))$.

**Утверждение 6.2.3.** 1) Оператор $f_2f_1$ является линейным.

2) $M_{(u)}^{f_2f_1} = M_{(u)}^{f_2}M_{(u)}^{f_1}$.

## Свойства действий над линейными операторами

1) $\varphi_1\varphi_2 \neq \varphi_2\varphi_1$ (Умножение операторов некоммутативно);

2) $(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$;

3) $\lambda(\varphi_1\varphi_2) = (\lambda\varphi_1)\varphi_2$;

4) $(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3$;

5) $\varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$ $(\forall\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in L_n)$.

Свойства (2) дает возможность ввести понятие степени линейного оператора следующим образом: $\varphi^n = \underbrace{\varphi \cdot \varphi \cdot \dots \cdot \varphi}_{n} = \varphi^{n-1} \cdot \varphi = \varphi \cdot \varphi^{n-1}$.

$\varphi^0 = \varepsilon$ – тождественный оператор.
$\varphi^1 = \varphi$.
Пусть $f$ – линейный оператор пространства $L_n$ и $f$ – биекция. Тогда существует обратимый оператор $f^{-1}$ пространства $L_n$ такой, что $\forall y = f(x) \in L_n$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Причем $f^{-1}$ тоже линейный оператор.

**Утверждение 6.2.4.** Если $f$ – обратимый оператор пространства $L_n$, то:

1) $\operatorname{Im} f = L_n$;
2) $\operatorname{rang} f = \dim L_n = n$;
3) $\operatorname{def} f = n - \operatorname{rang} f = 0$;
4) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$;
5) $M_{(u)}^{f^{-1}}$ – невырожденная матрица, причем $M_{(u)}^{f^{-1}} = (M_{(u)}^{f})^{-1}$.

**Определение 6.2.5.** Если на линейном пространстве $L$ над полем $\mathbb{P}$ определена единица и операция умножения векторов, которая является ассоциативной и дистрибутивной относительно сложения, то $L$ называется **линейной алгеброй** над полем $\mathbb{P}$.

**Пример 6.2.1.** Множество квадратных матриц и многочленов над заданным полем $\mathbb{P}$ являются примерами линейных алгебр. Множество $V(L_n)$ линейных операторов пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$ является линейной алгеброй над полем $\mathbb{P}$.

**Определение 6.2.6.** Две линейных алгебры $L$ и $L'$ над полем $\mathbb{P}$ называются **изоморфными**, если существует биективное отображение $f$ пространства $L$ на пространство $L'$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\forall a, b \in L\ f(a+b) = f(a) + f(b),\ f(ab) = f(a)f(b)$;
2) $\forall a \in L\ \forall \alpha \in \mathbb{P}\ f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

## 6.3 Собственные вектора и собственные значения линейного оператора. Характеристическая матрица и характеристический многочлен линейного оператора

Пусть $\varphi$ — линейный оператор линейного пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$.

**Определение 6.3.1.** Ненулевой вектор $x$ пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$, называется **собственным вектором** линейного оператора $\varphi$, если $\exists \lambda \in \mathbb{P}$ такой, что $\varphi(x) = \lambda x$. Скаляр $\lambda$ называется **собственным значением** линейного оператора $\varphi$, соответствующим собственному вектору $x$.

**Замечание 6.3.1.** 1. Всякому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Всякому собственному значению линейного оператора $\varphi$ соответствует хотя бы один собственный вектор.

*Доказательство.* 1. Доказать самостоятельно.

2. Пусть $\lambda_0$ — собственное значение оператора $\varphi$. Покажем, что всякий вектор вида $\alpha x$, $\alpha \neq 0$ является собственным вектором оператора $\varphi$, где $x$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_0$. Тогда $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha(\lambda_0(x)) = (\alpha\lambda_0)x = \lambda_0(\alpha x)$.

□

Пусть линейный оператор $\varphi$ пространства $L_n$ над полем $\mathbb{P}$ задан матрицей $M_{(u)}^{\varphi}$ в некотором базисе $(u)$: $M_u^{(\varphi)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$.

Пусть $x = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$ – собственный вектор линейного оператора $\varphi$, соответствующий собственному значению $\lambda_0$.

Тогда $\varphi(x) = \lambda_0 x = (\lambda_0\beta_1)u_1 + (\lambda_0\beta_2)u_2 + \dots + (\lambda_0\beta_n)u_n$.

Значит, $\begin{bmatrix} \lambda_0\beta_1 \\ \dots \\ \lambda_0\beta_n \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ – координатный столбец вектора $\varphi(x)$ в базисе $(u)$. Кроме того, $\lambda_0 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} = M_{(u)}^{\varphi} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$. Поэтому

$$(M_{(u)}^{\varphi} - \lambda_0 E_n) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} = [0], \qquad (6.3.1)$$

где $E_n$ – единичная матрица порядка $n$, $[0]$ – нулевая матрица размера $n \times 1$. Перепишем (6.3.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda_0)\beta_1+\dots+\dots+\alpha_{1n}\beta_n=0,\\ \alpha_{21}\beta_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)\beta_2+\dots+\alpha_{2n}\beta_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}\beta_1+\dots+\dots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)\beta_n=0. \end{cases}$$

Очевидно, что собственный вектор $x$ является ненулевым решением системы $n$ однородных линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\dots+\dots+\alpha_{1n}x_n=0,\\ \alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)x_2+\dots+\alpha_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}x_1+\dots+\dots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n=0. \end{cases} \qquad (6.3.2)$$

Система (6.3.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda_0 & \dots & \alpha_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda_0 \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \left|M^{\varphi}_{(u)}-\lambda_0 E\right|=0.$$

Поэтому $\lambda_0$ – корень алгебраического уравнения $n$ - ой степени с неизвестной $\lambda$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \dots & \alpha_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } \left|M^{\varphi}_{(u)}-\lambda E\right|=0. \qquad (6.3.3)$$

**Определение 6.3.2.** Уравнение (6.3.3) называется **характеристическим уравнением** линейного оператора $\varphi$, а многочлен $\left|M_{(u)}^{(\varphi)} - \lambda E\right|$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора $\varphi$.

Всякий корень уравнения (6.3.3), который принадлежит полю $\mathbb{P}$, является соответственным значением линейного оператора $\varphi$.

**Замечание 6.3.2.** Характеристическое уравнение матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим множество $L(\lambda_0) = \{x \in L_n | \varphi(x) = \lambda_0 x\}$ – множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_0$, вместе с нулевым вектором из $L_n$. Очевидно, что $L(\lambda_0)$ – векторное подпространство пространства $L_n$.

Справедливы следующие условия:

1) $\forall x, y \in L(\lambda_0)\ x + y \in L(\lambda_0)$.

$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \lambda_0 x + \lambda_0 y = \lambda_0(x + y)$.

2) $\forall x \in L(\lambda_0),\ \alpha \in \mathbb{P}\ \alpha x \in L(\lambda_0)$.

$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha\lambda_0 x = \lambda_0(\alpha x)$.

**Определение 6.3.3.** Подпространство $L(\lambda_0)$ называется **собственным подпространством**, соответствующим собственному значению $\lambda_0$.

**Определение 6.3.4.** Говорят, что $\alpha_0$ является $k$ - кратным корнем многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-\alpha_0)^k$, но не делится на $(x-\alpha_0)^{k+1}$.

**Пример 6.3.1.** Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ задан в базисе $(e)$ матрицей $M_{(e)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Найдите собственные значения, собственные вектора им соответствующие для данного оператора $\varphi$.

Решение.

Решим характеристическое уравнение $\left| M_{(e)}^{\varphi} - \lambda E \right| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda(\lambda-4)+4) = 0;$

$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) = 0.$

$\lambda_0 = 2$ — 3-кратный корень характеристического уравнения.

Составим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

где $x_3$ любое. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

По полученной ступенчатой матрице составим и решим систему линейных уравнений, равносильную данной:

$-2x_1 + x_2 = 0$, $x_1, x_3$ – свободные неизвестные.

Кроме того, $\dim L(2) = 3 - \operatorname{rang} A = 2$.

Таким образом, $x_2 = 2x_1$ и $\{(x_1, 2x_1, x_3), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ — множество всех собственных векторов, соответствующих $\lambda_0 = 2$.

# РАЗДЕЛ 7
## Билинейные и квадратичные формы

### 7.1 Билинейная форма. Матрица билинейной формы. Преобразование билинейной формы при переходе к новому базису

**Определение 7.1.1.** **Билинейной формой** на векторном пространстве $V$ над полем $P$ называется функция $b(x,y)$ двух векторных аргументов, принимающая значения из поля $P$, линейная по каждому из своих аргументов, т. е. удовлетворяющая следующим условиям.

1. $\forall x,\ y,\ z \in V : b(x+y,\ z) = b(x,\ z) + b(y,\ z)$;
2. $\forall x,\ y \in V\ \ \forall \alpha \in P : b(\alpha x,\ y) = \alpha\, b(x,\ y)$;
3. $\forall x,\ y,\ z \in V : b(x,\ y+z) = b(x,\ y) + b(x,\ z)$;
4. $\forall x,\ y \in V\ \ \forall \alpha \in P : b(x,\ \alpha y) = \alpha\, b(x,\ y)$.

Рассмотрим $n$-мерное линейное пространство $V_n$ и выберем в нем какой-либо базис:

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n \tag{7.1.1}$$

Каждый вектор пространства $V_n$ можно разложить по этому базису: $x = \sum x_i e_i,\ y = \sum y_j e_j$. Тогда

$$b(x,\ y) = b(\sum_i x_i e_i,\ \sum_j y_j e_j) = \sum_i x_i b(e_i,\ \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j b(e_i,\ e_j). \tag{7.1.2}$$

Из (7.1.2) видно, что значение билинейной формы для любых двух векторов $x$ и $y$ выражается через координаты этих векторов и некоторые числа $b(e_i,\ e_j)$, которые с аргументами $x$ и $y$ не связаны, а зависят только от выбранного базиса. Обозначим

$$b_{ij} = b(e_i,\ e_j). \tag{7.1.3}$$

Из (7.1.2) вытекает

$$b(x,\ y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j. \tag{7.1.4}$$

Равенство (7.1.4) называется **координатной формой записи билинейной формы**.

**Определение 7.1.2. Матрицей билинейной формы** $b(x,\ y)$ в базисе (7.1.1) называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = b(e_i,\ e_j)$.

Обозначим, как обычно, $X = [x_1\ x_2 \ldots\ x_n]^T, Y = [y_1\ y_2 \ldots\ y_n]^T$ — координатные столбцы векторов $x$ и $y$ соответственно в заданном базисе. Заметим, что $b(x,\ y)$ – число, которое можно рассматривать как матрицу размеров $1 \times 1$. В таком случае (7.1.4) можно переписать и так:

$$b(x,\ y) = X^T BY. \tag{7.1.5}$$

Это равенство называется **матричной формой записи билинейной формы**.

Итак, если в $V_n$ задан базис, то каждой билинейной форме на векторном пространстве $V_n$ соответствует единственная матрица $B$ – матрица этой билинейной формы в заданном базисе. Докажем, что верно и обратное утверждение.

**Теорема 7.1.1.** Пусть в векторном пространстве $V_n$ задан какой-либо базис (7.1.1). Тогда для любой квадратной матрицы $B = (b_{ij})$, $b_{ij} \in P$, $i,j = \overline{1,n}$, на векторном пространстве $V_n$ существует единственная билинейная форма $b(x,\ y)$, матрица которой в заданном базисе совпадает с $B$.

*Доказательство.* Положим по определению:

$$\forall\, x = \sum_i x_i e_i,\ \ y = \sum_j y_j e_j \in V_n\ :\ b\,(x,\ y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j .$$

*Линейность.*

$$\forall x = \sum_i x_i e_i,\ y = \sum_i y_i e_i,\ z = \sum_j z_j e_j \in V_n\ \ \forall \alpha \in P :$$

$$b(x+y,\ z) = \sum_{i,j} b_{ij} (x+y)_i z^j = \sum_{i,j} b_{ij} x_i z^j + \sum_{i,j} b_{ij} y_i z_j = b(x,\ z) + b(y,\ z);$$

$$b\,(\alpha x, y) = \sum_{i,j} b_{ij}\,(\alpha x)_i\, y_j = \alpha \sum_{i,j} (b_{ij} x_i y_j) = \alpha b\,(x, y)\,.$$

Таким образом, линейность $b(x,\ y)$ по первому аргументу доказана. Аналогично проверяется линейность и по второму аргументу.

*Выполнение условия* (7.1.3). Так как $e_k = \delta_i^k e_i$, $e_l = \delta_j^l e_j$ (т. е. $i$-я координата вектора $e_k$ равна $\delta_i^k$, а $j$-я координата вектора $e_l$ – $\delta_j^l$), то

$$b\left(e_k, e_l\right) = \sum_{i,j} b_{ij}\delta_i^k\delta_j^l = b_{kl}.$$

*Единственность*. Предположим, что существует еще одна билинейная форма $\tilde{b}(x,y)$, не совпадающая с формой $b(x,y)$, для которой выполняется (7.1.3). Тогда

$$\forall x = \sum_i x_i e_i,\ \ y = \sum_j y_j e_j\ \ :$$

$$\tilde{b}\left(\sum_i x_i e_i,\ \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j \tilde{b}\left(e_i,\ e_j\right) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j = b\left(x,\ y\right),$$

и мы пришли к противоречию. □

Таким образом, если в $V_n$ задан какой-либо базис, то между множеством билинейных форм на векторном пространстве $V_n$ и множеством квадратных матриц $n$-го порядка с элементами из поля $P$ устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса.

**Теорема 7.1.2.** Пусть в векторном пространстве $V_n$ заданы два базиса:

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n \tag{7.1.6}$$

и

$$e'_1,\ e'_2,\ \ldots,\ e'_n, \tag{7.1.7}$$

и пусть $B = (b_{ij})$ и $B' = (b'_{ij})$ — матрицы билинейной формы $b(x, y)$ в базисах (7.1.6) и (7.1.7) соответственно. Тогда

$$B' = C^T B\, C, \tag{7.1.8}$$

где $C$ – матрица перехода от (7.1.6) к (7.1.7).

*Доказательство.* Воспользуемся определением билинейной формы и ее матрицы, а также определением матрицы перехода:

$$b'_{ij} = b(e'_i,\ e'_j) = b(\sum_k c^i_k e_k,\ \sum_s c^j_s e_s) = \sum_{k,s} c^i_k c^j_s b(e_k,\ e_s) = \tag{7.1.9}$$

$$= \sum_{k,s} c^i_k c^j_s b_{ks} = \sum_{k,s} c^i_k b_{ij} c^j_s.$$

Заметим, что в правой части равенства (7.1.9) индекс $i$ должен соответствовать номеру строки, а индекс $j$ — номеру столбца (по согласованию с левой частью), поэтому из (7.1.9) и вытекает равенство (7.1.8). □

Кафедра ФМ

**Следствие 7.1.1.** Если матрица билинейной формы в одном из базисов пространства $V_n$ невырождена, то в любом другом базисе матрица этой билинейной формы также невырождена.

**Определение 7.1.3.** Билинейная форма на векторном пространстве $V_n$ называется **невырожденной**, если ее матрица в некотором, а значит, и в любом базисе пространства $V_n$ невырождена.

**Определение 7.1.4.** Квадратные матрицы $B$ и $B'$ называются **конгруэнтными**, если они связаны соотношением (7.1.8), где $C$ — невырожденная матрица.

**Замечание 7.1.1.** Таким образом, матрицы одной и той же билинейной формы в различных базисах конгруэнтны.

## Симметричные билинейные формы

**Определение 7.1.5.** Квадратная матрица $B = (b_{ij})$ называется **симметричной**, если $B^T = B$, или если $\forall i, j = \overline{1, n}\ :\ b_{ij} = b_{ji}$.

**Лемма 7.1.1.** Если матрица симметрична, то любая конгруэнтная ей матрица тоже симметрична.

*Доказательство.* Пусть $B$ — симметричная матрица, $B'$ — конгруэнтная ей. Тогда

$$(B')^T = (C^T B\, C)^T = C^T B^T\, C = C^T B\, C = B'.$$

□

**Определение 7.1.6.** Билинейная форма $b(x,\ y)$ на векторном пространстве $V$ называется **симметричной**, если

$$\forall x,\ y \in V\ :\ b(x,\ y) = b(y,\ x).$$

**Теорема 7.1.3.** Для того чтобы билинейная форма $b(x,\ y)$ на векторном пространстве $V_n$ была симметричной, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица в некотором, а значит, и в любом базисе пространства $V_n$ была симметричной.

*Доказательство.* Докажем утверждение для некоторого базиса, а для произвольного оно будет вытекать из леммы 7.1.1. Обозначим $B = (b_{ij})$ матрицу билинейной формы $b(x,\ y)$ в базисе $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$.

*Необходимость.* Пусть $b(x,\ y)$ — симметричная билинейная форма. Тогда $b_{ij} = b(e_i,\ e_j) = b(e_j,\ e_i) = b_{ji}$ и, таким образом, $B$ — симметричная матрица.

*Достаточность.* Пусть $B$ — симметричная матрица, т. е. $b_{ij} = b_{ji}$. Тогда

$$\forall\ x = \sum_i x_i e_i,\ \ y = \sum_j y_j e_j \in V_n : b(x,y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j = \sum_{j,i} b_{ji} y_j x_i = b(y,x).$$

$\square$

## 7.2 Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду невырожденным преобразованием. Закон инерции

**Определение 7.2.1.** **Квадратичной формой**, соответствующей симметричной билинейной форме $b(x, y)$ на векторном пространстве $V$, называется функция одного векторного аргумента $k(x) = b(x, x)$.

Пусть задана квадратичная форма $k(x)$, $b(x, y)$ — соответствующая ей симметричная билинейная форма. Тогда

$$
\begin{gathered}
k(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x+y) + b(y, x+y) = \\
= b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + (y, y) = \\
= b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = k(x) + k(y) + 2b(x, y) \Rightarrow \\
\Rightarrow b(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2},
\end{gathered}
$$

откуда вытекает, что по квадратичной форме соответствующая ей симметричная билинейная форма тоже определяется однозначно. Итак, между симметричными билинейными и квадратичными формами на векторном пространстве $V$ устанавливается взаимно однозначное соответствие, поэтому квадратичные формы можно изучать с помощью симметричных билинейных форм.

Рассмотрим $n$-мерное линейное пространство $V_n$.

**Определение 7.2.2.** **Матрицей квадратичной формы** в заданном базисе линейного пространства $V_n$ называется матрица соответствующей ей симметричной билинейной формы в том же базисе. Матрица квадратичной формы всегда симметрична.

Обозначим $A = (a_{ij})$ матрицу квадратичной формы в некотором базисе пространства $V_n$. Если, как обычно, обозначить $X$ координатный столбец вектора $x$ в том же базисе, то из равенства 7.1.5 получаем матричную форма записи квадратичной формы:

$$k(x) = X^T AX.$$

**Теорема 7.2.1.** Пусть в векторном пространстве $V_n$ заданы два базиса

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n \tag{7.2.1}$$

и

$$(e'_1,\ e'_2,\ \ldots,\ e'_n), \tag{7.2.2}$$

и пусть $A$ и $A'$ – матрицы квадратичной формы $k(x)$в базисах (7.2.1) и (7.2.2) соответственно. Тогда $A' = C^T AC$, где $C$ — матрица перехода от (7.2.1) к (7.2.2).

*Доказательство.* Доказательство вытекает из теоремы 7.1.2 и определения матрицы квадратичной формы. □

В связи с тем, что матрица перехода $C$ является невырожденной, то при переходе к новому базису ранг матрицы квадратичной формы не меняется. Поэтому можно сформулировать следующее определение.

**Определение 7.2.3.** **Рангом** квадратичной формы, заданной на векторном пространстве $V_n$, называется ранг ее матрицы в некотором, а значит, и в любом базисе пространства $V_n$ (обозначается $\operatorname{rang} k$).

Теперь запишем квадратичную форму в координатном виде. Для этого вектор $x$ разложим по базису (7.2.1): $x = \sum_i x_i e_i$. Если $A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной формы $k(x)$ в том же базисе, то в соответствии с равенством (7.1.4) имеем

$$k(x) = \sum_{i,j=1} a_{ij} x_i x_j - \tag{7.2.3}$$

координатная форма записи квадратичной формы.

Распишем (7.2.3) подробно при $n = 3$, учитывая, что $a_{ij} = a_{ji}$ :

$$k(x) = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}(x_3)^2. \tag{7.2.4}$$

Итак, если в $V_n$ задан базис, то квадратичная форма в координатной записи выглядит как однородный многочлен второй степени от $n$ переменных – координат вектора в данном базисе. Этот многочлен называется **видом** квадратичной формы $k(x)$ в заданном базисе. Но в приложениях часто такие многочлены возникают самостоятельно, без видимой связи с линейными пространствами (например, вторые дифференциалы функций), поэтому мы сформулируем еще одно определение квадратичной формы.

**Определение 7.2.4. Квадратичной формой от $n$ переменных** $x_1,\ x_2,\ldots,\ \ x_n$ называется однородный многочлен второй степени от этих переменных, т. е. функция вида (7.2.3). Матрицей квадратичной формы (7.2.3) называется симметричная матрица $A=(a_{ij})$.

**Пример 7.2.1.** Составьте матрицу квадратичной формы

$$k\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)=3x_1^2+2x_2^2-4x_3^2+6x_1x_2+5x_1x_3-3x_2x_3. \qquad (7.2.5)$$

*Доказательство.* Из (7.2.3) и (7.2.4) видно, что коэффициент при $(x_i)^2$ совпадает с $a_{ii}$, т.е. диагональные элементы матрицы квадратичной формы – это коэффициенты при квадратах. Точно так же видим, что $a_{ij}=a_{ji}$ – половина коэффициента при произведении $x_ix_j$. Таким образом, матрица квадратичной формы (7.2.5) выглядит так:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2,5\\ 3 & 2 & -1,5\\ 2,5 & -1,5 & -4\end{bmatrix}.$$

$\square$

Выберем теперь в пространстве $V_n$ опять два базиса (7.2.1) и (7.2.2) и обозначим, как обычно, $X = (x_i)$, $X' = (x_i')$ – координатные столбцы вектора $x$ в базисах (7.2.1) и (7.2.2) соответственно. При переходе от базиса (7.2.1) к базису (7.2.2) координаты вектора меняются по закону:

$$X = CX', \tag{7.2.6}$$

где $C = (c_{ij})$ — матрица перехода от (7.2.1) к (7.2.2). Заметим, что матрица $C$ — невырожденная. Запишем равенство (7.2.6) в координатной форме:

$$x_i = \sum_j c_{ij} x_j', \tag{7.2.7}$$

или подробно:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n', \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \ldots + c_{2n}x_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n'. \end{cases} \tag{7.2.8}$$

С помощью равенства (7.2.8) от переменных $x_i$ переходим к переменным $x^{i'}$.

**Определение 7.2.5. Линейным невырожденным преобразованием переменных** называется преобразование переменных, заданное системой равенств (7.2.7) или (7.2.8), или одним матричным равенством (7.2.6), при условии, что $C = (c_{ij})$ — невырожденная матрица.

Матрица $C$ называется **матрицей этого преобразования переменных**.

Если в (7.2.3) вместо переменных $x_i$ подставить их выражения через переменные $x_i'$ по формулам (7.2.8), раскрыть скобки и привести подобные, то получим другой однородный многочлен второй степени:

$$k'(x_1',\ x_2',\ \ldots,\ '_n) = a_{ij}'x_i'x_j' = \sum_{i,j=1} a_{ij}'x_i'x_j'.$$

В этом случае говорят, что линейное невырожденное преобразование переменных (7.2.8) переводит квадратичную форму $k$ в квадратичную форму $k'$. Значения переменных $X$ и $X'$, связанные соотношением (7.2.6) (или (7.2.8)), будем называть **соответствующими** при заданном линейном невырожденном преобразовании переменных.

**Определение 7.2.6.** Набор переменных называется **нетривиальным**, если в нем значение хотя бы одной из переменных отлично от нуля. В противном случае набор переменных называется **тривиальным**.

**Лемма 7.2.1.** При линейном невырожденном преобразовании переменных тривиальному набору переменных соответствует тривиальный набор.

*Доказательство.* Из равенства (7.2.6), очевидно, вытекает: если $X' = [0]$, то и $X = [0]$. С другой стороны, используя невырожденность матрицы $C$, опять же из (7.2.6) получаем $X' = C^{-1}X$, откуда видно, что при $X = [0]$, также и $X' = [0]$. $\square$

**Следствие 7.2.1.** При линейном невырожденном преобразовании переменных нетривиальному набору переменных соответствует нетривиальный набор.

**Теорема 7.2.2.** Если линейное невырожденное преобразование (7.2.6) переводит квадратичную форму $k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей $A$ в квадратичную форму $k'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ с матрицей $A'$, то $A' = C^T AC$ (другая формулировка теоремы 7.2.1).

**Следствие 7.2.2.** При линейном невырожденном преобразовании переменных определитель матрицы квадратичной формы не меняет знака.

**Замечание 7.2.1.** В отличие от матрицы перехода и матрицы линейного оператора, матрица линейного невырожденного преобразования переменных пишется не по столбцам, а по строкам.

Пусть заданы два линейных невырожденных преобразования переменных:

$$X = T_1 X', \quad \det T_1 \neq 0, \tag{7.2.9}$$

и

$$X' = T_2 X'', \quad \det T_2 \neq 0. \tag{7.2.10}$$

Применим их последовательно:

$$X = T_1 X' = T_1\,(T_2 X'') = (T_1 T_2) X'' = Q X''. \tag{7.2.11}$$

**Определение 7.2.7.** **Композицией линейных невырожденных преобразований переменных** (7.2.9) и (7.2.10) называется их последовательное применение, т. е. преобразование переменных $X = QX''$. Из (7.2.11) видно, что композиция двух линейных невырожденных преобразований переменных также является линейным невырожденным преобразованием переменных.

**Определение 7.2.8.** Квадратичные формы называются **эквивалентными**, если существует линейное невырожденное преобразование переменных, переводящее одну из них в другую.

## Канонический вид квадратичной формы

Мы уже говорили о том, что в каждом базисе линейного пространства $V_n$ квадратичная форма задается однородным многочленом второй степени, который называется видом данной квадратичной формы.

**Определение 7.2.9.** **Каноническим видом** квадратичной формы называется такой ее вид, в котором коэффициенты при произведениях разноименных переменных равны 0, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

**Определение 7.2.10.** **Нормальным видом** действительной квадратичной формы называется такой ее канонический вид, в котором отличные от нуля коэффициенты при квадратах равны 1 или -1.

**Теорема 7.2.3.** Для любой квадратичной формы, заданной на векторном пространстве $V_n$ в $V_n$ существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид, и существует базис, в котором она имеет нормальный вид.

Или другая формулировка этой же теоремы:

**Теорема 7.2.4.** *(альтернативная формулировка)* Для любой квадратичной формы от $n$ переменных существует линейное невырожденное преобразование переменных, приводящее ее к каноническому виду, и существует линейное невырожденное преобразование переменных, приводящее ее к нормальному виду.

Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом, который называется **методом Лагранжа** или выделения полных квадратов. Он заключается в следующем: выбираем переменную, коэффициент при квадрате которой отличен от 0, и выделяем полный квадрат, включающий в себя все слагаемые с этой переменной. С этой целью записываем перед скобкой число, обратное выбранному коэффициенту, а в скобках — половину производной по выбранной переменной. За скобками остается квадратичная форма, количество переменных которой уже на единицу меньше, с которой поступаем также. После конечного числа шагов получаем канонический вид.

**Пример 7.2.2.** Привести к каноническому виду квадратичную форму $2(x_1)^2 + 5(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

*Доказательство.*

$$2(x_1)^2+5(x_2)^2+3(x_3)^2+2x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3=\frac{1}{2}(2x_1+x_2+3x_3)^2-$$

$$-\frac{(x_2)^2}{2}-\frac{9(x_3)^2}{2}-3x_2x_3+5(x_2)^2+3(x_3)^2+12x_2x_3=$$

$$=\frac{1}{2}(2x_1+x_2+3x_3)^2+\frac{9}{2}(x_2)^2+9x_2x_3-\frac{3}{2}(x_3)^2=$$

$$=\frac{1}{2}(2x_1+x_2+3x_3)^2+\frac{9}{2}(x_2+x_3)^2-6(x_3)^2=\frac{1}{2}(y_1)^2+\frac{9}{2}(y_2)^2-6(y_3)^2,$$

где $y_1=2x_1+x_2+3x_3,\ y_2=x_2+x_3,\ y_3=x_3$. Матрица этого линейного преобразования запишется так:

$$C=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Как видим, она невырождена, значит, и преобразование переменных является невырожденным. Вводя обозначения

$$z_1=\frac{y_1}{\sqrt{2}},\ z_2=\frac{3y_2}{\sqrt{2}},\ z_3=\sqrt{6}y_3,$$

получаем нормальный вид квадратичной формы: $(z_1)^2+(z_2)^2-(z_3)^2$. $\square$

**Замечание 7.2.2.** 1. На самом деле при применении метода Лагранжа получаем не прямое преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, а обратное, т. е. преобразование, которое выражает не старые переменные через новые, а наоборот.

2. Если все коэффициенты при квадратах исходной квадратичной формы равны нулю, а отличен от нуля, например, коэффициент при произведении $x_1x_2$, применим вначале следующее преобразование: $x_1 = x_1' + x_2'$, $x_2 = x_1' - x_2'$, $x_i = x_i'$, $i = \overline{3,n}$. Матрица этого преобразования выглядит так:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, она невырождена, и поэтому, соответствующее преобразование переменных также будет невырожденным.

Заметим, что канонический вид квадратичной формы определяется неоднозначно, тем не менее, имеет место

**Теорема 7.2.5.** (**закон инерции**). Все канонические виды одной квадратичной формы на действительном векторном пространстве имеют одинаковое число положительных коэффициентов и одинаковое число отрицательных коэффициентов. Нормальный вид квадратичной формы определяется однозначно с точностью до порядка следования коэффициентов.

*Доказательство.* Пусть в базисе $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$ векторного пространства $V_n$ квадратичная форма $k(x)$ имеет вид

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x^r)^2 - \left(x^{r+1}\right)^2 - \ldots - \left(x^{r+s}\right)^2, \qquad (7.2.12)$$

а в базисе $e'_1,\ e'_2,\ \cdots,\ e'_n$ — вид

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + \ldots + (x'_m)^2 - (x'_{m+1})^2 - \ldots - (x'_{m+l})^2. \qquad (7.2.13)$$

Так как $r + s = (m + l)' = \operatorname{rang} k$, то достаточно показать, что $r = m$. Предположим, что это не так. Пусть, например, $r > m$. Обозначим

$$W_1 = \mathrm{L}(e_1,\ \ldots,\ e_r), W_2 = \mathrm{L}(e'_{m+1},\ e'_{m+2},\ \cdots,\ e'_n).$$

Так как $\dim W_1 + \dim \mathrm{W}_2 = r + n - m > n$, а $\dim(W_1 + \mathrm{W}_2) \leq n$, то сумма $W_1 + \mathrm{W}_2$ не прямая, поэтому $W_1 \bigcap \mathrm{W}_2 \neq \{0\}$, следовательно, $\exists x \neq 0$, $x \in W_1 \bigcap \mathrm{W}_2$. Так как $x \neq 0$, $\quad x \in W_1$, то из (7.2.12) видно, что $k(x) > 0$. Но так как $x \in W_2$, то из (7.2.13) видно, видно, что $k(x) \leq 0$. Итак, мы пришли к противоречию. Таким образом, $m \geq r$. Аналогично доказывается, что $m \leq r$, значит, $m = r$. □

**Замечание 7.2.3.** Для квадратичных форм на комплексном векторном пространстве нормальный вид, очевидно, определяется однозначно, так как количество отличных от нуля коэффициентов совпадает с рангом квадратичной формы.

## 7.3 Знакоопределенность квадратичных форм. Критерий Сильвестра

В этом параграфе мы будем рассматривать квадратичные формы только на действительных линейных пространствах.

**Определение 7.3.1.** Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если она принимает положительные значения для любого нетривиального набора переменных.

Квадратичная форма называется **отрицательно определенной**, если она принимает отрицательные значения для любого нетривиального набора переменных.

Квадратичная форма **знаконеопределена**, если существует нетривиальный набор переменных, при которых она принимает положительное значение, и существует нетривиальный набор переменных, при которых она принимает отрицательное значение.

**Лемма 7.3.1.** Эквивалентные квадратичные формы принимают одинаковые значения при соответствующих наборах переменных.

*Доказательство.* Пусть квадратичные формы $k(x_1, \dots, x_n) = X^T AX$ и $k'(x'_1, \dots, x'_n) = (X')^T A'X'$ эквивалентны. Это значит, что существует линейное невырожденное преобразование переменных $X = CX'$, переводящее квадратичную форму $k$ в квадратичную форму $k'$. Тогда по теореме 7.2.2 $A' = C^T AC$, значит,

$$k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = X^T AX = (CX')^T A(CX') = (X')^T (C^T AC)X' =$$

$$= (X')^T A'X' = k'(x'_1, x'_2\ \ldots,\ x'_n).\qquad\square$$

**Следствие 7.3.1.** Если квадратичная форма положительно определена, то все эквивалентные ей квадратичные формы также положительно определены.

**Лемма 7.3.2.** (**необходимое условие знакоопределенности**)**.** Если квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то все ее коэффициенты при квадратах положительны (отрицательны).

*Доказательство.* Пусть квадратичная форма

$$k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

положительно определена. Тогда

$$\forall m = \overline{1, n}\ \ :\ k(0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ 0) = a_{mm} > 0$$

(единица на $m$-м месте), следовательно, все коэффициенты при квадратах положительны. $\square$

**Теорема 7.3.1.** **(первый критерий знакоопределенности).** Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты какого-либо ее канонического вида были положительными (отрицательными).

*Доказательство.* Доказательство для положительной определенности.

Пусть задана квадратичная форма и пусть

$$k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i (x_i)^2 - \tag{7.3.1}$$

какой-либо ее канонический вид.

*Необходимость.* Поскольку данная квадратичная форма положительно определена, то по следствию 7.3.1 форма (7.3.1) тоже положительно определена, а значит, по лемме 7.3.2 $\alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, n}$.

*Достаточность.* Пусть $\alpha_i > 0,\ i = \overline{1, n}$. Тогда, очевидно, для любого нетривиального набора переменных форма (7.3.1) принимает только положительные значения, следовательно, она положительно определена, и поэтому положительно определена и исходная квадратичная форма. □

**Следствие 7.3.2.** Матрица положительно определенной квадратичной формы имеет положительный определитель.

*Доказательство.* Пусть $A$ — матрица положительно определенной квадратичной формы, $A'$ – матрица ее канонического вида (7.3.1). При линейном невырожденном преобразовании переменных определитель матрицы квадратичной формы не меняет знака. Так как

$$\det A' = \det\ \operatorname{diag}\left[\ \alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \ldots,\ \ \alpha_n\ \right] = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n > 0,$$

то и $\det A > 0$. $\square$

**Определение 7.3.2.** Назовем **r-м усечением** квадратичной формы

$$k(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{7.3.2}$$

квадратичную форму

$$k_r(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}x_ix_j.$$

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1r} & a_{2r} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{rn} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

матрица квадратичной формы (7.3.2).

**Определение 7.3.3.** **Главными минорами матрицы** $A$ называются ее миноры, расположенные в левом верхнем углу. Будем обозначать $\Delta_r$ главный минор $r$-го порядка матрицы $A$. Очевидно, что $\Delta_r$ совпадает с определителем матрицы квадратичной формы $k_r$.

**Теорема 7.3.2.** **(критерий Сильвестра).** Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительными. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы нечетного порядка были отрицательными, а четного — положительными.

**Замечание 7.3.1.** Можно доказать, что если хотя бы один минор четного порядка матрицы квадратичной формы есть число отрицательное, то эта квадратичная форма знаконеопределена.

# РАЗДЕЛ 8
# Практикум

## 8.1 Практическое занятие по теме «Матрицы и определители»

**Пример 8.1.1.** *Найдите произведение матриц*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Из определения 1.1.12 получаем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2(-1) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1)(-1) & 0 \cdot 4 + (-1)0 & 0 \cdot 3 + (-1)2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что умножение этих же матриц в обратном порядке не определено. □

**Пример 8.1.2.** *Вычислите значение многочлена* $f(x) = x^2 - 2x + 3$ *от матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Так как $f(A) = A^2 - 2A + 3E_2$, то

$$f\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} +$$

$$+3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 6\end{bmatrix}.$$

О т в е т: $f\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 6\end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.3.** *Найдите $2 \times 2$-матрицу $X$, удовлетворяющую условию*

$$2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Пусть $X = \begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$, тогда

$$2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2 - x_{11} & 4 - x_{12}\\ 6 - x_{21} & 8 - x_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Две матрицы равны, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах. Поэтому последнее равенство матриц приводит к уравнениям:

$2 - x_{11} = 3$, $4 - x_{12} = 0$, $6 - x_{21} = 0$, $8 - x_{22} = 3$. Откуда $x_{11} = -1$, $x_{12} = 4$, $x_{21} = 6$, $x_{22} = 5$.

О т в е т: $X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.4.** *Вычислите* $2A - BC + 3A^T$, *если*

$$A = \begin{bmatrix} -2i & 4 \\ i & i-3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Найдем произведение матриц $B$ и $C$:

$$BC = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2(-1) & 3(-2) + 0(-1) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2(-1) & 0(-2) + 1(-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & -6+2 \\ 2-2 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $2A - BC + 3A^T =$

$$= 2\begin{bmatrix} -2i & 4 \\ i & i-3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2i & i \\ 4 & i-3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4i & 8 \\ 2i & 2i-6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6i & 3i \\ 12 & 3i-9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4i-1-6i & 8-(-4)+3i \\ 2i-0+12 & 2i-6-1+3i-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-10i & 12+3i \\ 12+2i & -16+5i \end{bmatrix}.$$

О т в е т: $\begin{bmatrix} -1-10i & 12+3i \\ 12+2i & -16+5i \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.5.** *Решите матричное уравнение*

$$-2X - A^T + (B-3A)^T = A,$$

*где* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

*Доказательство.* Исходное уравнение имеет вид:

$$-2X - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T + \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$-2X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & -11 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$-2X + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$-2X + \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 4 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$-2X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 4 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 17 \end{bmatrix},$$

$$X = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -17/2 \end{bmatrix}.$$

О т в е т: $X = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -17/2 \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.6.** *Решите систему матричных уравнений*

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

*Доказательство.* Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим со вторым:

$$4X - 2Y + 3X + 2Y = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$7X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ -2/7 & 1/7 \end{bmatrix}.$$

Умножим первое уравнение системы на $(-3)$ и сложим его со вторым, умноженным на 2:

$$-6X + 3Y + 6X + 4Y = -3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$7Y = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 & -1 \\ 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}.$$

О т в е т: $X = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ -2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2/7 & -1 \\ 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.7.** *С помощью элементарных преобразований строк приведите к ступенчатому виду матрицу*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Умножим первую строку матрицы $A$ на 2 и сложим со второй строкой. Затем первую строку умножим на 3 и сложим с третьей. В итоге получим:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 11 & -11 \end{bmatrix}.$$

Теперь вторую строку умножим на $(-5/3)$ и сложим с третьей:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$ □

**Пример 8.1.8.** *С помощью элементарных преобразований найдите обратную матрицу для матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Запишем матрицу $[A \mid E]$, где $E$ — единичная матрица, и преобразуем ее с помощью элементарных преобразований так, чтобы получилась матрица вида $[E \mid B]$. Матрица $B$ будет обратной к матрице $A$. Выпишем матрицу $[A \mid E]$:

$$[A \mid E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Сделаем следующие элементарные преобразования: первую строку матрицы $[A \mid E]$ умножим на $(-2)$ и прибавим ко второй, затем первую строку прибавим к третьей. В итоге получим:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Теперь вторую строку прибавим к третьей:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Вторую строку умножим на $(-1)$, а третью – на $(1/2)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Третью строку умножим на 2 и прибавим ко второй, а затем третью прибавим к первой:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Вторую строку умножим на $(-1)$ и прибавим к первой:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

В итоге получили матрицу вида $[E \mid B]$, поэтому

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Кафедра ФМ

Начало

Содержание



Назад

На весь экран

Закрыть

Сделаем проверку:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

О т в е т: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.9.** *Выберите натуральные числа $i$, $j$, $k$ таким образом, чтобы слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ входило в развернутое выражение определителя четвертого порядка со знаком минус.*

*Доказательство.* В развернутое выражение определителя (определение 1.2.5) при $n = 4$ данное слагаемое входит в виде $\operatorname{sgn}\tau a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$, где перестановка

$$\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & j \\ i & k & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $j = 1$, а для $i$ и $k$ возможны 2 случая:

1) $i=1$, $k=3$. Тогда

$$\tau=\begin{pmatrix}4&2&3&1\\1&3&2&4\end{pmatrix}=(41)(23),\ \operatorname{sgn}\tau=(-1)^{4-2}=1;$$

2) $i=3$, $k=1$. Тогда

$$\tau=\begin{pmatrix}4&2&3&1\\3&1&2&4\end{pmatrix}=(4321),\ \operatorname{sgn}\tau=(-1)^{4-1}=-1.$$

Таким образом, при $i=3$, $j=1$, $k=1$ слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ имеет знак минус.

О т в е т: $i=3$, $j=1$, $k=1$. □

**Пример 8.1.10.** *Вычислите определитель верхней треугольной матрицы*

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n-1}&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n-1}&a_{2n}\\&&\dots&&\\0&0&\dots&a_{n-1n-1}&a_{n-1n}\\0&0&\dots&0&a_{nn}\end{bmatrix}. \tag{8.1.1}$$

*Доказательство.* В сумме из определения 1.2.5 интересны только ненулевые слагаемые. Очевидно, $a_{n\tau(n)}$ может быть отлично от нуля только при $\tau(n)=n$. Элемент $a_{n-1\tau(n-1)}\neq 0$ только при $\tau(n-1)=n-1$ и т. д. Итак, в сумме из определения 1.2.5 только одно слагаемое $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

может быть отлично от нуля. Это слагаемое соответствует тождественной перестановке, знак которой равен $(+1)$. Таким образом, *определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов* $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. $\square$

**Пример 8.1.11.** *Используя свойства 1–8, вычислите:*

$$\begin{vmatrix} 57\,823 & -23\,251 \\ 56\,823 & -22\,251 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Доказательство.* Вторую строку первого определителя умножим на $(-1)$ и прибавим к первой строке:

$$\begin{vmatrix} 57\,823 & -23\,251 \\ 56\,823 & -22\,251 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56\,823 & -22\,251 \end{vmatrix}.$$

Вынесем из первой строки общий множитель:

$$\begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56\,823 & -22\,251 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56\,823 & -22\,251 \end{vmatrix}.$$

Теперь первый столбец прибавим к второму:

$$1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56\,823 & -22\,251 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 56\,823 & 34\,572 \end{vmatrix} =$$

$$= 1000 \cdot 1 \cdot 34\,572 = 34\,572\,000.$$

Второй определитель вычислим, приведя его к треугольному виду. Вначале поменяем местами первую и вторую строки, а затем получившуюся первую строку умножим на 2 и на $(-1)$ и сложим соответственно со второй и третьей строками:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поменяем местами второй и третий столбец, а затем вторую и третью строку:

$$-\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

О т в е т: $34\,572\,000$, $-5$. $\square$

Определитель вида

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ & & \dots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$


Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Назад
На весь экран
Закрыть

называется *определителем Вандермонда.* Можно доказать, что он вычисляется по формуле

$$V = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j).$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

после транспонирования становится определителем Вандермонда, поэтому

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 25 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2^2 & 5^2 & (-1)^2 \end{vmatrix} = (5-2)(-1-2)(-1-5) = 54.$$

**Пример 8.1.12.** *Вычислите определитель*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Доказательство.* Применим утверждение 1.3.1 к элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+b\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c+d).$$

□

**Пример 8.1.13.** *Вычислите ранг матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* С помощью элементарных преобразований приведем матрицу $A$ к ступенчатому виду:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

О т в е т: $r(A) = 3$. □

**Пример 8.1.14.** *Найдите матрицу обратную к матрице 2-го порядка.*

*Доказательство.* Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = a_{22},\ A_{12} = -a_{21},\ A_{21} = -a_{12},\ A_{22} = a_{11}.$$

Поэтому присоединенная матрица принимает вид:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Если $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

$\square$

**Пример 8.1.15.** *Найдите обратную матрицу к матрице*

$$A = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Вычислим определитель матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{vmatrix} = i3i - (-2(1-i)) = -1 - 2i.$$

Найдем все алгебраические дополнения: $A_{11} = 3i$, $A_{12} = -1 + i$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = i$. Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1-2i} \begin{bmatrix} 3i & 2 \\ -1+i & i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{bmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{bmatrix} = E.$$

Аналогично,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{bmatrix} = E.$$

О т в е т: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.16.** *Найдите обратную к матрице*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Вычислим определитель матрицы $A$, а затем найдем присоединенную матрицу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 4 - 2 - 5 - 4 = 6.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, $AA^{-1} = E$.

О т в е т: $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.1.17.** *Найдите обратную к матрице*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Вычислим $A^{-1}$ по формуле обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Найдем $\det A$ с помощью разложения по элементам второй строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Так как $\det A = -2 \neq 0$, то обратная матрица $A^{-1}$ существует.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1\,1\\2\,1\end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-2 & 0 & -2\\1 & -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\1 & 0 & 1\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Вычислим $A^{-1}$ с помощью элементарных преобразований строк. Запишем матрицу $[A \mid E]$ и преобразуем ее с помощью элементарных преобразований к виду $[E \mid B]$. Матрица $B$ и будет обратной для матрицы $A$.

$$[A \mid E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [E \mid A^{-1}].$$

О т в е т: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. □

## Индивидуальные задания

1. Вычислите $AB$, $BA$, $B^TA$, $ABC$, $CBA$, $B^TC$:

1.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1 & 3i \end{bmatrix}$;

1.2 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} i-1 & 1 \\ 2 & i \end{bmatrix};$$

1.3 $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2i & -3 \\ 0 & i+2 \end{bmatrix};$$

1.4 $$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & i+1 \\ -1 & i \end{bmatrix};$$

1.5 $$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 2i & 3 \end{bmatrix};$$

1.6 $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ -2 & i-1 \end{bmatrix};$$

$$1.7\ A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ i-1 & 3i \end{bmatrix};$$

$$1.8\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4i \end{bmatrix};$$

$$1.9\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ i-2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$1.10\ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} i+2 & -3 \\ 1 & i \end{bmatrix};$$

1.11 $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$$C=\begin{bmatrix} i & i-3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

1.12 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ i & 2i \end{bmatrix};$$

1.13 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$,

$$C=\begin{bmatrix} -1 & i \\ -i+1 & 0 \end{bmatrix};$$

1.14 $A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} -i-1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$1.15\ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ i-2 & 2i \end{bmatrix}.$$

2. Для матрицы $C$ из задания 1 вычислите

$$C^3 - 5C^2 + 2C + 4E_2.$$

3. Решите матричное уравнение

$$5X + 3A - 2C^T = (2A - 3C)^T,$$

где $C$ — матрица из задания 1, а $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Решите систему матричных уравнений

$$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} n-8 & 1 \\ 0 & n+3 \end{bmatrix} \\ 2X + (n-16)Y = \begin{bmatrix} n+5 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

где $n \in \{1, 2, \ldots, 15\}$.

5. Приведите матрицы из задания 1 к ступенчатому виду.

6. Для матрицы $F$ с помощью элементарных преобразований строк вычислите обратную матрицу.

6.1 $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$; 6.2 $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$;

6.3 $F = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; 6.4 $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$;

6.5 $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; 6.6 $F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$;

6.7 $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 6.8 $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$;

6.9 $F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$; 6.10 $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

6.11 $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$; 6.12 $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

6.13 $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ 6.14 $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$;

6.15 $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$.

7. Найдите такие значения $i$, $j$, $k$, чтобы произведение $m$ входило в формулу определителя матрицы шестого порядка со знаком минус.

7.1 $m = a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$; 7.2 $m = a_{j3}a_{14}a_{5i}a_{k1}a_{26}a_{45}$;

7.3 $m = a_{32}a_{i1}a_{46}a_{1j}a_{2k}a_{63}$; 7.4 $m = a_{62}a_{i1}a_{4j}a_{25}a_{5k}a_{34}$;

7.5 $m = a_{4i}a_{j2}a_{36}a_{k5}a_{61}a_{53}$; 7.6 $m = a_{ij}a_{13}a_{4k}a_{62}a_{54}a_{31}$;

7.7 $m = a_{2i}a_{32}a_{j6}a_{k5}a_{51}a_{63}$; 7.8 $m = a_{16}a_{i3}a_{4j}a_{k1}a_{25}a_{32}$;

7.9 $m = a_{44}a_{2j}a_{k3}a_{65}a_{i6}a_{31}$; 7.10 $m = a_{26}a_{3j}a_{1k}a_{55}a_{64}a_{i1}$;

7.11 $m = a_{11}a_{2i}a_{63}a_{4k}a_{j6}a_{34}$; 7.12 $m = a_{i6}a_{2j}a_{5k}a_{13}a_{34}a_{62}$;

7.13 $m = a_{15}a_{i2}a_{j4}a_{51}a_{36}a_{2k}$; 7.14 $m = a_{23}a_{4k}a_{j6}a_{5i}a_{11}a_{34}$;

7.15 $m = a_{42}a_{i5}a_{66}a_{3j}a_{1k}a_{51}$.

8. Вычислите определители матриц $A$, $B$, $C$.

8.1 $A = \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13\,547 & 13\,647 \\ 28\,423 & 28\,523 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

8.2 $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23\,528 & 43\,621 \\ 24\,528 & 44\,621 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

8.3 $A = \begin{pmatrix} 3-i & 2i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10\,159 & 6523 \\ 11\,259 & 7623 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8.4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 3i & i+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12\,353 & 17\,829 \\ 12\,363 & 17\,839 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

8.5 $A = \begin{pmatrix} 6-i & 8 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 21\,351 & -22\,351 \\ 16\,273 & -17\,273 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

8.6 $A = \begin{pmatrix} 4i & 3+2i \\ 5 & -5+i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -13\,297 & 26\,153 \\ -13\,397 & 26\,253 \end{pmatrix},$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

8.7 $A = \begin{pmatrix} 8i & 9-i \\ -1 & 3i+2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 17\,324 & -11\,526 \\ 27\,324 & -21\,526 \end{pmatrix},$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

8.8 $A = \begin{pmatrix} -3-i & 2 \\ 1 & 6+i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 14\,326 & 15\,326 \\ -95\,623 & -96\,623 \end{pmatrix},$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

8.9 $A = \begin{pmatrix} 4+i & 6-i \\ 9i & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -35\,201 & 26\,731 \\ 35\,211 & -26\,741 \end{pmatrix},$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

8.10 $A = \begin{pmatrix} -7+i & 6i \\ 6-i & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 27\,802 & 28\,802 \\ 11\,935 & 12\,935 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

8.11 $A = \begin{pmatrix} 5-2i & -2 \\ -i & 4+3i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 17\,932 & 25\,113 \\ 13\,932 & 21\,113 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$;

8.12 $A = \begin{pmatrix} 6-i & 7+2i \\ 8i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 33\,253 & -16\,821 \\ 31\,253 & -14\,821 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

8.13 $A = \begin{pmatrix} -4i & 2+3i \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 71\,815 & -23\,526 \\ 71\,805 & -23\,516 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

8.14 $A = \begin{pmatrix} 3i-1 & 2 \\ i & 2i+3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 84\,434 & -84\,534 \\ 12\,796 & -12\,896 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

8.15 $A = \begin{pmatrix} -4+3i & 2i \\ 5-i & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 66\,437 & 41\,432 \\ -66\,337 & -41\,332 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислите определители матриц $F$ и $H$ приведением их к треугольному виду.

9.1 $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

9.2 $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$9.3\ F=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & 3 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 5 & 6\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 4 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 4 & 5\\ 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$9.4\ F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 5\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5\\ 1 & 1 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$9.5\ F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1\\ -3 & -4 & -3 & 8\\ 2 & 2 & 3 & -4\\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 2 & 4 & 5\\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$9.6\ F=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1\\ 3 & -5 & 5 & 6\\ -2 & 4 & -3 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 4 & 3 & 5\\ 4 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$9.7\ F=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\-2&4&1&-1\\3&-3&1&-1\\-1&3&2&1\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}0&1&5&3&2\\4&3&-1&2&0\\1&4&3&2&0\\-1&5&6&0&1\\2&4&-3&0&1\end{pmatrix};$$

$$9.8\ F=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&0&5&3\\-3&3&-5&-2\\1&1&4&2\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}-4&3&2&0&1\\-1&1&0&2&1\\0&1&5&3&2\\2&1&-4&4&3\\3&-3&0&1&2\end{pmatrix};$$

$$9.9\ F=\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\-4&1&-3&1\\2&-1&0&5\\2&-2&-1&9\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}-1&4&3&5&2\\2&1&5&3&0\\-3&4&5&0&1\\0&1&5&-3&2\\4&5&-1&1&0\end{pmatrix};$$

$$9.10\ F=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\-1&0&3&5\\2&-2&-3&0\\1&-2&0&6\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}-2&1&3&5&0\\1&4&3&-1&2\\0&1&5&0&2\\-3&2&4&1&1\\5&-3&2&0&1\end{pmatrix};$$

$$9.11\ F=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$9.12\ F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix};$$

$$9.13\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$9.14\ F=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$9.15\ F=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Вычислите определитель.

$$10.1\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 & -64 & 256 \end{vmatrix};\quad 10.2\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ 9 & 16 & 4 & 4 & 1 \\ -27 & 64 & 8 & -8 & 1 \\ 81 & 256 & 16 & 16 & 1 \end{vmatrix};$$

$$10.3\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -81 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix};\quad 10.4\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 2 & -3 \\ 16 & 25 & 4 & 9 \\ -64 & 125 & 8 & -27 \end{vmatrix};$$

$$10.5\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 81 & -729 & 6561 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix};\quad 10.6\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 & -2 & 5 \\ 49 & 9 & 16 & 4 & 25 \\ 343 & 27 & -64 & -8 & 125 \\ 2401 & 81 & 256 & 16 & 625 \end{vmatrix};$$

$$10.7\ \begin{vmatrix} 1 & -8 & 64 & -512 \\ 1 & -6 & 36 & -216 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix}; \qquad 10.8\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & -5 & 4 & 7 \\ 121 & 25 & 16 & 49 \\ 1331 & -125 & 64 & 343 \end{vmatrix};$$

$$10.9\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 \end{vmatrix}; \qquad 10.10\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -5 & 7 & -1 \\ 4 & 16 & 25 & 49 & 1 \\ -8 & 64 & -125 & 343 & -1 \\ 16 & 256 & 625 & 2401 & 1 \end{vmatrix};$$

$$10.11\ \begin{vmatrix} 1 & 12 & 144 & 1728 \\ 1 & -9 & 81 & -729 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \end{vmatrix}; \qquad 10.12\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 11 & -8 \\ 16 & 49 & 121 & 64 \\ -64 & 343 & 1331 & -512 \end{vmatrix};$$

$$10.13\ \begin{vmatrix} 1 & -4 & 16 & -64 & 256 \\ 1 & -6 & 36 & -216 & 1296 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -8 & 64 & -512 & 4096 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 \end{vmatrix}; \qquad 10.14\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ 49 & 4 & 1 & 16 & 25 \\ -343 & 8 & 1 & -64 & 125 \\ 2401 & 16 & 1 & 256 & 625 \end{vmatrix};$$

$$10.15\ \begin{vmatrix} 1 & -6 & 36 & -216 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & -12 & 144 & -1728 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}.$$

11. Вычислите определитель матрицы $C$ из задания 2 разложением

по элементам второго столбца, а определитель матрицы $F$ из задания 3 по элементам третьей строки.

12. Вычислите определитель.

12.1 $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$; 12.2 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}$;

12.3 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$; 12.4 $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$;

12.5 $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$; 12.6 $\begin{vmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{vmatrix}$;

12.7 $\begin{vmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{vmatrix}$; 12.8 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix}$;

12.9 $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$ 12.10 $\begin{vmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$;

12.11 $\begin{vmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{vmatrix}$; 12.12 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{vmatrix}$;

12.13 $\begin{vmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ x & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 12.14 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{vmatrix}$;

12.15 $\begin{vmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислите ранг матрицы при $x = 0$ и при $x = 1$.

13.1 $\begin{pmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$; 13.2 $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{pmatrix}$;

13.3 $\begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$; 13.4 $\begin{pmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{pmatrix}$;

13.5 $\begin{pmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{pmatrix}$; 13.6 $\begin{pmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{pmatrix}$;

13.7 $\begin{pmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{pmatrix}$; 13.8 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{pmatrix}$;

13.9 $\begin{pmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix}$; 13.10 $\begin{pmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{pmatrix}$;

13.11 $\begin{pmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{pmatrix}$; 13.12 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{pmatrix}$;

13.13 $\begin{pmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ x & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 13.14 $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$;

$$13.15 \quad \begin{pmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{pmatrix}.$$

14. С помощью алгебраических дополнений найдите матрицы, обратные матрицам $A$ и $C$ из задания 2.

## Дополнительные задачи

1. Вычислите при любом натуральном $n$.

$$1.1 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}^n; \quad 1.2 \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & i \end{bmatrix}^n; \quad 1.3 \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n;$$

$$1.4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n; \quad 1.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n;$$

$$1.6 \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n.$$

*Верхней треугольной матрицей* называют $n \times n$-матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix},$$

а *нижней треугольной матрицей* — матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. В кольцах $M_2(\mathbb{P})$ и $M_3(\mathbb{P})$, $\mathbb{P} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$, найдите все матрицы, квадраты которых равны:

2.1 нулевой матрице;

2.2 единичной матрице;

2.3 скалярной матрице;

2.4 диагональной матрице;

2.5 верхней треугольной матрице;

2.6 нижней треугольной матрице.

3. Пусть $f(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ и $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Докажите, что $f(A) = O$.

4. Решите и исследуйте уравнение

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

относительно переменных $x$, $y$, $z$, $u$.

5. Решите системы матричных уравнений.

$$5.1 \begin{cases} X+Y=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, \\ 2X+3Y=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}. \end{cases};\quad 5.2 \begin{cases} 2X-Y=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, \\ -4X+2Y=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}. \end{cases}$$

6. Докажите, что для матриц $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ невозможно равенство $AB - BA = E$.

7. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$. Докажите, что $(2A - E)^2 = E$.

8. Две квадратные матрицы $A$ и $B$ одного порядка называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Докажите, что сумма и произведение матриц, перестановочных с данной матрицей, также перестановочны с ней.

9. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$. Докажите, что матрица $A$ перестановочна с каждой диагональной матрицей порядка $n$ тогда и только тогда, когда матрица $A$ сама диагональная.

10. Докажите, что матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\0&1&a_{23}\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&b_{12}&b_{13}\\0&1&b_{23}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

перестановочны тогда и только тогда, когда $a_{12}b_{23} = b_{12}a_{23}$.

11. Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы одного порядка над полем $\mathbb{R}$. Докажите равносильность следующих утверждений:

11.1 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

11.2 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;

11.3 матрицы $A$ и $B$ перестановочны.

12. Пусть $A$ — обратимая квадратная матрица. Докажите, что $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

13. Матрица $S$ называется *симметрической*, если $S^T = S$. Пусть $A$ — произвольная квадратная матрица. Докажите, что симметрическими являются матрицы $A^T$, $AA^T$, $A + A^T$.

14. Матрица $K$ называется *кососимметрической*, если $K^T = -K$. Пусть $A$ — произвольная квадратная матрица. Докажите, что $A - A^T$ — кососимметрическая матрица.

15. Докажите, что каждая квадратная матрица представима в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

16. Докажите следующие утверждения:

16.1 произведение двух симметрических или кососимметрических матриц является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны;

16.2 произведение симметрической и кососимметрической матриц является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

17. Найдите все квадратные матрицы, перестановочные со всеми квадратными матрицами того же порядка.

18. Найдите все верхние треугольные матрицы, перестановочные со

всеми верхними треугольными матрицами того же порядка.

19. Докажите, что в кольце квадратных матриц над полем справедливы следующие утверждения:

19. 1 обратимая матрица не является делителем нуля;

19. 2 любая матрица либо обратима, либо является делителем нуля.

20. Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы одного порядка. Докажите, что если матрица $E+AB$ обратима, то матрица $E+BA$ также обратима.

21. С помощью элементарных преобразований строк приведите к ступенчатому виду следующие матрицы.

$$\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2), \quad \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_3).$$

22. Докажите, что элементарное преобразование строк матрицы равносильно умножению слева на некоторую обратимую матрицу.

23. Являются ли кольцами следующие множества матриц с операциями сложения и умножения?

23. 1 $\left\{ \begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$; 23. 2 $\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3\mathbb{Z} \right\}$;

23. 3 $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

24. Докажите, что матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ является делителем нуля. Найдите все такие матрицы $B \in M_2(\mathbb{R})$, для которых $AB = O$.

24.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; 24.2 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; 24.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

24.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; 24.5 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

25. Вычислите определители.

25.1 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; 25.2 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; 25.3 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$;

25.4 $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$, $z = -1/2 + i(\sqrt{3}/2)$;

25.5 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$, $z = \cos(4/3)\pi + i\sin(4/3)\pi$.

26. Вычислите коэффициенты при $x^3$ и $x^4$ в многочлене

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 3 & 1 \\ x & x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

27. Вычислите определитель матрицы над полем $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}.$$

28. Вычислите определитель $n \times n$-матрицы.

$$28.1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ & & & \dots & & \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad 28.2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ & & & \dots & \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}; \quad 28.3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix};$$

$$28.4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

29. Решите уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ -4 & -4 & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0.$$

30. Докажите тождество

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2,$$

вычислив определитель

$$\left|\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}\right|$$

двумя способами: как определитель произведения матриц и как произведение определителей матриц.

31. Вычисляя определитель произведения матриц разными способами, получите соответствующие тождества для элементов $a$, $b$, $c$, $d$.

31.1 $\begin{bmatrix} a & b \\ 5b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d \\ 5d & c \end{bmatrix}$; 31.2 $\begin{bmatrix} c & -3d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix}$.

32. Как изменится определитель квадратной матрицы, если выполняется следующее условие?

32.1 Каждый элемент матрицы заменить на противоположный.

32.2 Каждый элемент матрицы умножить на фиксированный элемент поля.

32.3 Каждый элемент $a_{ik}$ матрицы умножить на $c^{i-k}$, где $c$ — ненулевой элемент поля.

33. Как изменится определитель квадратной матрицы, если выполняется следующее условие?

33.1 Строки записать в обратном порядке.

33. 2 Первую строку поставить на место последней строки, а остальные строки сдвинуть вверх, не меняя их порядок.

33. 3 К каждой строке, начиная со второй, прибавить предыдущую строку.

33. 4 К каждой строке, начиная со второй, прибавить все предыдущие строки.

34. Чему равен определитель квадратной матрицы, у которой сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

35. Пусть $A$ — квадратная матрица над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Заменяя элементы матрицы $A$ сопряженными комплексными числами, получим матрицу $B$. Как связаны между собой определители матриц $A$ и $B$?

36. Пусть поле $\mathbb{P}$ имеет характеристику $\neq 2$. Докажите, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка над полем $\mathbb{P}$ равен 0.

37. Пусть $A'$ — присоединенная матрица к квадратной матрице $A$ порядка $n$. Докажите, что:

37. 1 $AA' = A'A = |A|E_n$;

37. 2 $(A')^T = (A^T)'$;

37. 3 $|A'| = |A|^{n-1}$;

37. 4 $|A'| = 0$ тогда и только тогда, когда $|A| = 0$;

37. 5 если $A$ — симметрическая матрица, то есть $A^T = A$, то $A'$ также является симметрической матрицей.

38. Пусть все элементы матриц $A$ и $A^{-1}$ являются целыми числами. Чему равны определители этих матриц?

39. Найдите сумму алгебраических дополнений всех элементов матрицы.

$$39.1 \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}; \quad 39.2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ & & \dots & & \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

40. Приведите матрицы к ступенчатому виду и исследуйте зависимость ранга матрицы от параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

$$40.1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{bmatrix}; \qquad 40.2 \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix};$$

$$40.3 \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

41. При каких ограничениях на параметры следующие матрицы обратимы? Для обратимых матриц найдите обратные.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{bmatrix}.$$

42. Обратимы ли матрицы над полем $\mathbb{Z}_5$? Если да, то найдите к ним обратные матрицы.

$$
\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{4} & \overline{4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{2} & \overline{1} \end{bmatrix}.
$$

43. Найдите наибольшее значение определителя квадратной матрицы третьего порядка, элементами которой являются числа: 0 и 1; 1 и $-1$.

44. Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — квадратные матрицы порядка $n$, причем $CD = DC$ и одна из матриц $C$ или $D$ невырождена. Докажите, что

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \mid AD - BC \mid .
$$

45. Докажите, что сумма алгебраических дополнений всех элементов матрицы не изменится, если к каждому элементу прибавить один и тот же элемент поля.

46. Докажите, что с операцией умножения матриц группами являются следующие множества квадратных матриц порядка $n$ над полем $\mathbb{P}$:

46. 1 множество всех невырожденных матриц;

46. 2 множество всех матриц, определитель которых равен единичному элементу поля;

46. 3 множество всех матриц, у которых определитель равен единичному элементу поля или элементу, противоположному к единичному;

46. 4 множество всех скалярных невырожденных матриц;

46. 5 множество всех невырожденных верхних треугольных матриц;

46. 6 множество всех верхних треугольных матриц с единичными элементами на диагонали.

47. Докажите, что группа всех скалярных невырожденных матриц порядка $n$ над полем $\mathbb{P}$ изоморфна мультипликативной группе поля $\mathbb{P}$.

48. Докажите, что множество всех матриц

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}, \ a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует некоммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

49. Докажите, что множество всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует поле, изоморфное полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

## 8.2 Практическое занятие по теме «Системы линейных уравнений»

**Пример 8.2.1.** *Решите над полем $\mathbb{Q}$ систему*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

*Доказательство.* Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right].$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку исходной матрицы умножали на $(-2)$, $(-3)$, $(-2)$ и складывали со второй, третьей и четвертой строками соответственно. В результате получили вторую матрицу. Во второй матрице ко второй строке прибавили третью, умноженную на $(-1)$, а затем получившуюся вторую строку умножили на $(-1)$. Пришли к третьей матрице. В третьей матрице вторую строку умножали на 4 и 7 и складывали с третьей и четвертой строками соответственно. Получили четвертую матрицу. В этой матрице третью строку умножили на $(-1)$ и прибавили к четвертой строке. В итоге получили пятую матрицу.

Таким образом, начальная система равносильна следующей ступенчатой системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -8, \\ -18x_3 + 36x_4 = -40, \\ 18x_4 = -7. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_4 = -\frac{7}{18},\ x_3 = \frac{13}{9},\ x_2 = -\frac{43}{18},\ x_1 = \frac{2}{3}.$$

Легко проверить, что эти значения превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

О т в е т: система имеет единственное решение $x_1 = 2/3,\ x_2 = -43/18,\ x_3 = 13/9,\ x_4 = -7/18.$ □

**Пример 8.2.2.** *Решите над полем $\mathbb{C}$ систему*

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 - (3-2i)x_3 = -1, \\ 2ix_1 - x_2 + 3x_3 = 3i, \\ -ix_1 + 3x_2 + ix_3 = -4i. \end{cases}$$

*Доказательство.* Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 2i & -1 & 3 & 3i \\ -i & 3 & i & -4i \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 5 & -2-2i & -5i \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 0 & 5+4i & 0 \end{array}\right] = B.$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку матрицы $\tilde{A}$ умножали на $(-2i)$, $i$ и складывали со второй и третьей строками соответственно. В результате получили вторую матрицу.

Во второй матрице к третьей строке прибавили вторую. В результате получили матрицу $B$. Таким образом, исходная система равносильна следующей ступенчатой системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + (-3+2i)x_3 = -1, \\ -5x_2 + (7+6i)x_3 = 5i, \\ (5+4i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x_3 = 0$, $x_2 = -i$, $x_1 = 1$. Легко проверить, что эти значения неизвестных превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

О т в е т: система имеет единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = -i$, $x_3 = 0$. □

**Пример 8.2.3.** *Решите над полем* $\mathbb{R}$ *систему*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

*Доказательство.* Приведем расширенную матрицу этой системы к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ -3x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 9, \\ 10x_3 - 20x_4 = 18, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Последнее уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$ не может быть удовлетворено никакими значениями неизвестных. Поэтому система несовместна.

О т в е т: система несовместна. $\square$

**Пример 8.2.4.** *Решите систему уравнений по правилу Крамера*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

*Доказательство.* Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -25.$$

Вычислим определители $\Delta_i$, $i = 1, 2, 3$, где $\Delta_i$ — определитель матрицы, у которой в $i$-м столбце стоят свободные коэффициенты $7, 9, 11$, а остальные столбцы — как у матрицы $A$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 1 \\ 11 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -25 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ -25 & -2 \end{vmatrix} = -75,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 25,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & -4 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -50.$$

По формулам Крамера 2.3.1 имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Сделаем проверку. Подставим в систему значения неизвестных $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Получим:

$$\begin{cases} 3 + 2(-1) + 3 \cdot 2 = 7, \\ 2 \cdot 3 - 1(-1) + 2 = 9, \\ 3 - 4(-1) + 2 \cdot 2 = 11. \end{cases}$$

Поскольку каждое уравнение превратилось в истинное равенство, то полученные значения неизвестных являются решением исходной системы.

О т в е т: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. □

**Пример 8.2.5.** *Совместна ли система уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

*Доказательство.* Ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы находим одновременно, приводя расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right].$$

Очевидно, что ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

О т в е т: несовместна. $\square$

**Пример 8.2.6.** *Дана система линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1. \end{cases} \tag{8.2.2}$$

*Исследуйте систему на совместность. Если система окажется совместной, то найдите неизвестные.*

*Доказательство.* Исследуем систему на совместность:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Так как ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен 2, то по теореме Кронекера–Капелли система совместна. Поскольку найденные ранги меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

Для решения системы (8.2.2) методом Гаусса используем полученную ступенчатую матрицу. Составим соответствующую ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

В соответствии с числом уравнений ступенчатой системы выбираем две главные неизвестные. В качестве главных неизвестных можно выбирать те, для которых минор 2-го порядка матрицы ступенчатой системы, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. В частности, главными неизвестными всегда можно выбирать неизвестные, которые первыми встречаются в уравнениях ступенчатой системы.

Пусть $x_1$ и $x_2$ — главные неизвестные, тогда $x_3$ и $x_4$ — свободные неизвестные. Пусть $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ — произвольные числа. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 2\alpha + \beta \\ -x_2 = 7 - 3\alpha - \beta. \end{cases}$$

Находим главные неизвестные:

$$\begin{cases} x_2 = -7 + 3\alpha + \beta \\ x_1 = -5 + \alpha + 2\beta. \end{cases}$$

О т в е т: $x_1 = -5 + \alpha + 2\beta$, $x_2 = -7 + 3\alpha + \beta, x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, где $\alpha$, $\beta$ — любые числа. □

**Пример 8.2.7.** *Исследуйте систему на совместность в зависимости от параметра $\alpha$. В случае совместности найдите решения системы*

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ -3x_1 + x_2 - \alpha x_3 = 0. \end{cases}$$

*Доказательство.* Исследуем систему на совместность. Пусть $\tilde{A}$ — расширенная матрица системы.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -\alpha & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{array}\right].$$

Если $-3+2\alpha=0$, то есть $\alpha=3/2$, то

$$\tilde{A} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right].$$

В этом случае ранг матрицы $A$ системы уравнений равен 2, а ранг расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ равен 3. По теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq \frac{3}{2}$. Тогда

$$\tilde{A} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha} \end{array}\right] = B.$$

Если $\alpha = 3$, то

$$\tilde{A} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{3} \end{array}\right].$$

В этом случае ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq 3$. Тогда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 3. В этом случае система совместна и имеет единственное решение. Запишем ступенчатую систему, соответствующую ступенчатой матрице $B$:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{3-2\alpha} \\ (3-\alpha)x_3 = \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha}. \end{cases}$$

Из этой системы находим:

$$x_3 = \frac{5+6\alpha}{(3-2\alpha)(3-\alpha)},\ x_2 = \frac{4}{3-2\alpha},\ x_1 = \frac{-2\alpha^2-3\alpha+4}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}. \qquad (8.2.3)$$

О т в е т: если $\alpha \in \{3, 3/2\}$, то система несовместна; если $\alpha \notin \{3, 3/2\}$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами (8.2.3). □

# Индивидуальные задания

1. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

$$1.1 \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1,5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases} \quad 1.2 \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -10, \\ 2x_1 + 5x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$$

$$1.3 \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 = -2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases} \quad 1.4 \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -8, \\ 5x_2 + x_3 = -6, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -7; \end{cases}$$

$$1.5 \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -5, \\ 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 7; \end{cases} \quad 1.6 \begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = -10, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 3; \end{cases}$$

$$1.7 \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases} \quad 1.8 \begin{cases} -3x_1 + x_3 = 3, \\ 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$1.9 \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad 1.10 \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6; \end{cases}$$

$$1.11 \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3; \end{cases} \quad 1.12 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$$

1.13 $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + 4x_2 = 13, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$

1.14 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$

1.15 $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -5; \end{cases}$

2. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса.

2.1 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4; \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 3; \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8; \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 12, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2; \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1; \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 16, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9; \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -4; \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4; \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3; \end{cases}$

2.11 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \end{cases}$

2.12 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -8, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$

2.13 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases}$

2.14 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 11, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4; \end{cases}$

2.15 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -8. \end{cases}$

3. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

3.1 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -4; \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2; \end{cases}$ 3.4 $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = -1; \end{cases}$

3.5 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 9; \end{cases}$ 3.6 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2; \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5; \end{cases}$ 3.8 $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$

3.9 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 10; \end{cases}$ 3.10 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -4; \end{cases}$

3.11 $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1; \end{cases}$ 3.12 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1; \end{cases}$

3.13 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -8; \end{cases}$ 3.14 $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$

3.15 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 9. \end{cases}$

4. Исследуйте систему на совместность в зависимости от параметра $\alpha$. В случае совместности найдите решения системы

$$\begin{cases} x_1 + (n-7)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = -1 \\ (n-8)x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1, \end{cases}$$

где $1 \leq n \leq 15$ — номер варианта.

5. Матрицы $A$ и $B$ называются перестановочными, если $AB = BA$.

Найдите все матрицы $B$ над полем $\mathbb{R}$, перестановочные с матрицей $A$.

5.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

5.4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5.5 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5.6 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5.8 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 5.9 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5.10 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 5.11 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 5.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

5.13 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 5.14 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 5.15 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

## Дополнительные задачи

1. Решите систему уравнений в зависимости от значения параметра $\alpha$.

1.1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = \alpha, \\ 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 4, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = \alpha; \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + (\alpha - 1)x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\alpha - 1)x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + (\alpha - 1)x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_4 = 1; \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} (1+\alpha)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\alpha)x_2 + x_3 = \alpha, \\ x_1 + x_2 + (1+\alpha)x_3 = \alpha^2; \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} (1+\alpha)x_1 + x_2 + x_3 = \alpha^2 + 3\alpha, \\ x_1 + (1+\alpha)x_2 + x_3 = \alpha^3 + 3\alpha^2, \\ x_1 + x_2 + (1+\alpha)x_3 = \alpha^4 + 3\alpha^4. \end{cases}$

2. Сколько решений имеет совместная система линейных уравнений с $n$ неизвестными над конечным полем порядка $q$, если ранг матрицы системы равен $r$?

3. Дана система уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

коэффициенты которой удовлетворяют следующим условиям: $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ положительные, все остальные коэффициенты отрицательные, в каждом уравнении сумма коэффициентов положительна. Докажите, что

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ является единственным решением системы.

4. Докажите, что система над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0, \\ bx - ay + dz - ct = 0, \\ cx - dy + az + bt = 0, \\ dx + cy - bz - at = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, если $a$, $b$, $c$, $d$ — действительные числа, не все равные нулю.

5. Система над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} ay + bx = c, \\ cx + az = b, \\ bz + cy = a \end{cases}$$

имеет единственное решение. Докажите, что $abc \neq 0$, и найдите решение системы.

6. Решите системы линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_2$.

$$6.\,1 \begin{cases} \overline{1}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{1}x_3 + \overline{1}x_4 = \overline{1}, \\ \overline{1}x_1 + \overline{1}x_3 = \overline{1}, \\ \overline{1}x_2 + \overline{1}x_4 = \overline{0}; \end{cases}$$

$$6.\,2 \begin{cases} \overline{1}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{1}x_3 + \overline{1}x_4 = \overline{1}, \\ \overline{1}x_1 + \overline{1}x_3 = \overline{1}, \\ \overline{1}x_2 + \overline{1}x_4 = \overline{1}. \end{cases}$$

7. Решите системы линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_3$.

$$7.1\ \begin{cases}\overline{1}x_1+\overline{1}x_2+\overline{1}x_3=\overline{1},\\ \overline{2}x_1+\overline{1}x_2+\overline{1}x_3=\overline{1},\\ \overline{2}x_2+\overline{2}x_3=\overline{1};\end{cases}\qquad 7.2\ \begin{cases}\overline{2}x_1+\overline{1}x_2+\overline{1}x_3=\overline{1},\\ \overline{2}x_1+\overline{1}x_2+\overline{2}x_3=\overline{2},\\ \overline{2}x_1+\overline{2}x_2+\overline{1}x_3=\overline{0}.\end{cases}$$

8. Решите системы линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_5$.

$$8.1\ \begin{cases}\overline{1}x_1+\overline{2}x_2+\overline{4}x_3=\overline{1},\\ \overline{1}x_1+\overline{3}x_2+\overline{4}x_3=\overline{2},\\ \overline{1}x_1+\overline{4}x_2+\overline{1}x_3=\overline{3};\end{cases}\qquad 8.2\ \begin{cases}\overline{1}x_1+\overline{1}x_2+\overline{1}x_3=\overline{2},\\ \overline{2}x_1+\overline{3}x_2+\overline{4}x_3=\overline{1},\\ \overline{3}x_1+\overline{2}x_3=\overline{0}.\end{cases}$$

9. Решите систему линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{cases}\overline{3}x_1+\overline{2}x_2+\overline{1}x_3+\overline{6}x_4=\overline{0},\\ \overline{1}x_1+\overline{1}x_2+\overline{3}x_3=\overline{0},\\ \overline{5}x_1+\overline{6}x_2+\overline{2}x_3+\overline{4}x_4=\overline{0}.\end{cases}$$

10. Решите систему линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_{17}$.

$$\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y+\overline{5}z=\overline{1},\\ \overline{2}x+\overline{5}y+\overline{3}z=\overline{1},\\ \overline{5}x+\overline{3}y+\overline{2}z=\overline{4}.\end{cases}$$

11. Решите систему линейных однородных уравнений над полем $\mathbb{R}$

при всевозможных значениях параметра $\lambda$.

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

12. При каких значениях $\lambda$ однородная система над полем $\mathbb{R}$ имеет ненулевые решения?

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + \ldots + x_n = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots - \lambda x_n = 0. \end{cases}$$

13. Пусть ранг матрицы однородной системы линейных уравнений равен $(n-1)$, где $n$ — число неизвестных. Докажите, что любые два решения этой системы пропорциональны.

14. Найдите условия, при которых в любом решении однородной системы линейных уравнений $k$-я неизвестная равна нулю.

15. Найдите все решения системы, принадлежащие $\mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

16. Исследуйте систему линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$.

$$16.1\ \begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3, \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3, \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3; \end{cases}$$

$$16.2\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2; \end{cases}$$

$$16.3\ \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = a + b + c, \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = a + b + c, \\ cx_1 + bx_2 + ax_3 = a + b + c. \end{cases}$$

17. Решите системы линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$.

$$17.1\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + x_4 = b, \\ x_1 + x_3 + x_4 = c, \\ x_2 + x_3 + x_4 = d; \end{cases} \qquad 17.2\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad \dots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$$

Кафедра ФМ

Начало

Содержание



Назад

На весь экран

Закрыть

17.3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2b, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2c, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2d; \end{cases}$

17.4 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = a_1, \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \ldots + (n-1)x_n = a_2, \\ \qquad \ldots \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \ldots + x_n = a_n. \end{cases}$

18. Имеется система уравнений

$$\begin{cases} *x_1 + *x_2 + *x_3 = 0, \\ *x_1 + *x_2 + *x_3 = 0, \\ *x_1 + *x_2 + *x_3 = 0. \end{cases}$$

Два студента по очереди вписывают вместо звездочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

## 8.3 Практическое занятие по теме «Введение в теорию векторных пространств»

**Пример 8.3.1.** 1. Выясним, является ли векторным пространством над полем $\mathbb{R}$:

а) множество $A$ всех многочленов с действительными коэффициентами $n$-й степени со сложением многочленов и умножением многочлена на действительное число;

б) множество $Z$ относительно сложения целых чисел и умножения целого числа на действительное число.

2. Покажем, что множество $M$ всех матриц формата $m \times n$ над числовым полем $\mathbb{P}$ со сложением матриц и умножением матрицы на число из $\mathbb{P}$ есть векторное пространство над полем $\mathbb{P}$.

*Доказательство.* 1. а) Сложение многочленов с действительными коэффициентами $n$-й степени не является бинарной операцией на множестве $A$, т.е. отображением $A^2 \to A$, так как сумма двух многочленов степени $n$ не всегда является многочленом также степени $n$. Так, при $n=3$ сумма многочленов $f_1(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 5$, $f_2(x) = -2x^3 - x^2 + x + 3$ есть многочлен $f(x) = -x + 8$ первой, а не третьей степени. Значит, множество $A$ не является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$.

б) Сложение целых чисел — бинарная операция на $\mathbb{Z}$. Однако умножение целого числа на действительное число не является отображением $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, так как $(\forall(\alpha, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ $(\exists \alpha a \in \mathbb{Z})$, т. е. при умножении целого числа $a$ на действительное число $\alpha$ не всегда получим целое число (например, при $a = 1, \alpha = \frac{1}{2}$ ). Поэтому $\mathbb{Z}$ не является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

2. Известно из теории матриц, что сложение матриц из $M$ — бинарная операция на $M$. Умножение матрицы из $M$ на число из $\mathbb{P}$ — отображение $\mathbb{P}\times M \to M$, потому что $(\forall(\alpha, A) \in \mathbb{P}\times\mathbb{M})$ $(\exists!\alpha A \in M)$. Известно также, что $< M, + >$ — коммутативная группа. Операции сложения матриц из $M$ и умножения матрицы из $M$ на число поля $\mathbb{P}$ удовлетворяют условиям 2)–5) в определении векторного пространства. Значит, $M$ есть векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. $\square$

**Пример 8.3.2.** Показать, что каждая из систем векторов:

$a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 3, 3)$, $a_3 = (3, 7, 1)$ $(a)$

$b_1 = (3, 1, 4)$, $b_2 = (5, 2, 1)$, $b_3 = (1, 1, -6)$ $(b)$ является базисом пространства $\mathbb{R}^3$, найти матрицы перехода от базиса $(a)$ к базису $(b)$ и обратно, а также координаты вектора $c = (-17, -36, -11) \in \mathbb{R}^3$ в каждом из заданных базисов.

*Доказательство.* Каждая из систем состоит из 3 векторов. Так как $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, то по теореме 3.6.4 достаточно показать, что системы линейно независимы.

Первый способ. Докажем линейную независимость систем $(a)$ и $(b)$ по определению. Для этого решим уравнение $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ относительно неизвестных скаляров $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$.

Выполним слева операции умножения вектора на скаляр и сложения векторов. Получим:

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственное нулевое решение (проверьте!). Следовательно, по определению линейной независимости система векторов $(a)$ линейно независима. Аналогично доказываем линейную независимость системы векторов $(b)$.

Второй способ. Составим матрицы, строками которых являются координаты данных векторов: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$.

Найдем $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} B = 3$ (проверьте!). Следовательно, $\operatorname{rang}(a) = \operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang}(b) = \operatorname{rang} B = 3$, т. е. равен числу векторов в системе. Значит, системы $(a)$ и $(b)$ линейно независимы.

Можно также найти, $|A| = 1 \neq 0, |B| = 4 \neq 0$ (проверьте!). Поэтому строки каждой матрицы линейно независимы. А это и означает, что и обе системы векторов линейно независимы.

Таким образом, доказано, что системы векторов $(a)$ и $(b)$ есть базисы $\mathbb{R}^3$.

Пусть $x_1, x_2, x_3$ — координаты вектора $c$ в базисе $(a)$,

$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ — матрица перехода от базиса $(a)$ к базису $(b)$.

Решим уравнения:

$$c = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3, \tag{8.3.4}$$

$$[b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3] \cdot T \tag{8.3.5}$$

В уравнении (8.3.4) выполним справа умножение вектора на скаляр и сложение векторов, а затем приравняем соответствующие координаты равных векторов; в уравнении (8.3.5) перемножим справа матрицы, приравняем одноименные элементы равных матриц и полученные уравнения решаем аналогично уравнению (8.3.4). Уравнения (8.3.4), (8.3.5) дадут соответственно следующие системы уравнений с одинаковой матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -17, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -36, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -11; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} = 3, \\ 2a_{11} + 3a_{21} + 7a_{31} = 1, \\ a_{11} + 3a_{21} + a_{31} = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} + 2a_{22} + 3a_{33} = 5, \\ 2a_{12} + 3a_{22} + 7a_{32} = 2, \\ a_{12} + 3a_{22} + a_{32} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{13} + 2a_{23} + 3a_{33} = 1, \\ 2a_{13} + 3a_{23} + 7a_{33} = 1, \\ a_{13} + 3a_{23} + a_{33} = -6. \end{cases}$$

Поэтому все четыре системы можно решать методом Гаусса одновременно:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -36 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -11 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right].$$

Получаем: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -4$ — координаты вектора   в базисе $(a)$;

$$T = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$ — матрица перехода от базиса $(a)$ к базису $(b)$.

Замечание. Последние три системы можно записать одним матричным уравнением: $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot T$ и отсюда найти матрицу $T$.

Обратная к ней матрица:

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 52 & 76 & 181 \\ -36 & -52 & -126 \\ 28 & 40 & 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 9 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{bmatrix}$$

(проверьте !), является матрицей перехода от базиса (b) к базису (a). Координаты $y_1, y_2, y_3$ вектора в базисе $(b)$ можно найти также как и в базисе (a) или, используя связь между координатами столбцами вектора в различных базисах: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -232 \\ 161 \\ -126 \end{bmatrix}$.

П р о в е р к а : $c = -232 \cdot b_1 + 161 \cdot b_2 - 126 \cdot b_3$. □

**Пример 8.3.3.** В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите подпространство $M$ решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 24x_4 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

его размерность и базис (фундаментальную систему решений).

*Доказательство.* Составим матрицу $A$ данной системы и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4&3\\2&5&5&8\\4&6&-2&24\\-3&-4&3&-19\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&3&4&3\\0&-1&-3&2\\0&-6&-18&12\\0&5&15&-10\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&3&4&3\\0&-1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&3&4&3\\0&-1&-3&2\end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A = 2$, $\dim M = n - \operatorname{rang} A = 4 - 2 = 2$. Следовательно, базис $M$, т. е. фундаментальная система решений, состоит из 2-х непропорциональных решений. Найдем их. Запишем равносильную к исходной систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+4x_3+3x_4=0,\\ -x_2-3x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

Придавая свободным переменным $x_3, x_4$ значения 1, 0 и 0, 1, найдем базис : $a_1 = (5, -3, 1, 0), a_2 = (-9, 2, 0, 1)$.

Итак, $M = \{k_1a_1 + k_2a_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$. $\square$

**Пример 8.3.4.** Докажем, что в пространстве $L$ вещественных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$ подмножество $M$ матриц вида $\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ является его подпространством. Найдем базис и размерность $M$.

*Доказательство.* 1) $\forall A_1 = \begin{bmatrix}a_1&0\\0&b_1\end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix}a_2&0\\0&b_2\end{bmatrix} \in M$

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix} \in M, \text{ так как } a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}.$$

$$2)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M\ \ \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{bmatrix} \in M, \text{ так как } \lambda a, \lambda b \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, множество является подпространством пространства $L$. Система векторов $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ линейно независима как подсистема базиса пространства $L$. Кроме того, любой вектор из $M$ линейно разлагается по векторам $E_{11}, E_{22}$: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = aE_{11} + bE_{22}$. Поэтому система $E_{11}, E_{22}$ есть базис подпространства $M$ и $\dim M = 2$. □

**Пример 8.3.5.** Найдите размерность и базис линейной оболочки, порожденной векторами пространства $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 3, 4)$, $a_3 = (-2, 0, 2, 4)$, $a_4 = (0, 3, 6, -5)(a)$.

*Доказательство.* Известно, что базисом линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ является базис системы векторов $(a)$, а $\dim L(a_1, a_2, a_3, a_4) = \mathrm{rang}(a)$.

Поэтому составляем матрицу $A$, строками которой являются векторы системы $(a)$ и элементарными преобразованиями строк приводим ее к ступенчатой; при этом слева от каждой строки пишем ее выражение через векторы системы $(a)$. Итак, имеем:

$$A=\begin{array}{l}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\-2&0&2&4\\0&3&6&-5\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{array}{l}a_1\\a_2-a_1\\a_3+2a_1\\a_4\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&3&6&-5\end{pmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l}a_1\\a_2-a_1\\a_3+2a_1-2(a_2-a_1)\\a_4-3(a_2-a_1)\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&-14\end{pmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l}a_1\\a_2-a_1\\a_4-3a_2+3a_1\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&-14\end{pmatrix}$$

Отсюда $\dim L(a_1,a_2,a_3,a_4)=\operatorname{rang}(a)=\operatorname{rang}A=3$ . Значит, базис $L(a_1,a_2,a_3,a_4)$ состоит из 3-х линейно независимых векторов. Найдем его. Заметим, что система векторов-строк $a_1, a_2-a_1, a_4-3a_2+3a_1$ ступенчатой матрицы получена с помощью элементарных преобразований подсистемы $a_1,a_2,a_4$ данной системы $(a)$. Следовательно,

$$\operatorname{rang}(a_1,a_2,a_4)\underset{1}{=}\operatorname{rang}(a_1,a_2-a_1,a_4-3a_2+3a_1)\underset{2}{=}3.$$

1) элементарные преобразования не изменяют ранга системы векторов;

2) векторы-строки ступенчатой матрицы линейно независимы.

Тогда $a_1, a_2, a_4$ — линейно независимая подсистема системы $(a)$, которая содержит 3 вектора. Но и $\operatorname{rang}(a) = 3$.

Таким образом, векторы $a_1, a_2, a_4$ составляют базис системы $(a)$, а значит базис подпространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4) = L(a_1, a_2, a_4) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_4 a_4 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

## Индивидуальные задания

1. Докажите, что системы векторов $(a)$ и $(b)$ образуют базисы $\mathbb{R}^3$, найдите матрицы перехода от первого базиса ко второму базису и обратно, а так же координаты вектора  в каждом из заданных базисов.

$$1.1 \quad \begin{matrix} a_1 = (1,1,1) \\ a_2 = (1,1,2) \\ a_3 = (1,2,3) \end{matrix} \quad (a), \quad \begin{matrix} b_1 = (2,2,3) \\ b_2 = (3,4,6) \\ b_3 = (1,1,1) \end{matrix} \quad (b),$$

$c = (6, 9, 14)$;

$$1.2 \quad \begin{matrix} a_1 = (1,1,-1) \\ a_2 = (1,-1,1) \\ a_3 = (-1,1,1) \end{matrix} \quad (a), \quad \begin{matrix} b_1 = (1,1,1) \\ b_2 = (2,0,0) \\ b_3 = (0,0,2) \end{matrix} \quad (b),$$

$c = (-2, 6, -4)$.

2. Может ли матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

служить матрицей перехода от базиса $a_1 = (1, -1, 0)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1, -1)$ пространства $\mathbb{R}^3$ к новому базису того же пространства? Если да, то найдите новый базис и координаты вектора $c = (2, 1, 3)$ в этом базисе.

3. Покажите, что в пространстве $L$ (над полем $\mathbb{R}$) вещественных матриц 2-го порядка система матриц $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ является базисом. Найдите $\dim L$ и координаты вектора $a = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ пространства $L$ в этом базисе.

4. Докажите, что каждая из следующих систем векторов $1, i$ ($a$), $1 + i$, $1 - i$ ($b$) является базисом пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$. Найдите $\dim\mathbb{C}$, а так же координаты вектора $z = 8 - 9i$ пространства $\mathbb{C}$ в этих базисах.

5. Пусть $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ — матрица перехода от базиса $a_1, a_2, a_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ к базису $b_1, b_2, b_3$ этого пространства. Найдите координаты вектора $a = 3a_1 - a_2 + 2a_3$ во втором базисе и координаты вектора $b = 4b_1 - b_2 + 3b_3$ в первом базисе.

6. Может ли матрица $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ быть матрицей перехода от базиса $a_1 = (1,2,1)\,, a_2 = (1,1,2)\,, a_3 = (1,2,2)$ пространства $\mathbb{R}^3$ к новому базису того же пространства? Если да, то найдите новый базис и координаты вектора $b = (6,10,10)$ в этом базисе.

7. Пусть векторы $a_1, a_2, a_3$ $(a)$ образуют базис пространства $L_3$ над полем $\mathbb{P}$. Докажите, что система векторов $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $(b)$ является базисом $L_3$, найдите матрицу перехода от базиса $(a)$ к базису $(b)$ и координаты вектора $x = 3a_1 - 2a_2 + a_3$ в базисе $(b)$.

8. Покажите, что векторы $a_1, a_2, a_3,$ $a_4$ $(a)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^4$ и найдите координаты вектора $b = (1,2,3,4)$ в базисе $(a)$.

8.1 $a_1 = (0,1,0,1)$, $a_2 = (0,1,0,-1)$, $a_3 = (1,0,1,0)$, $a_4 = (1,0,-1,0)$ $(a)$.

8.2 $a_1 = (1,2,3,0)$, $a_2 = (1,2,0,3)$, $a_3 = (1,0,2,3)$, $a_4 = (0,1,2,3)$ $(a)$.

9. Докажите, что в пространстве $L$ вещественных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$ подмножество $M$ матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in R$, является его подпространством. Найдите базис и размерность $M$.

10. Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ подмножество

$$L = \{(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 0)\,,\ \ a_1, ..., a_{n-1} \in R\}$$

является его подпространством. Найдите базис и размерность $L$.

11. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите подпространство $M$ решений однородной линейной системы, его размерность и базис (фундаментальную систему решений).

$$11.1\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

$$11.2\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 = 0; \end{cases}$$

$$11.3\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

$$11.4\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

12. Найдите размерность и базис линейной оболочки, натянутой на векторы пространства $\mathbb{R}^4$.

12.1. $a_1 = (2, 1, 1, 0)$, $a_2 = (3, 2, -1, -2)$, $a_3 = (1, 1, -2, -2)$,

$a_4 = (-1, 0, -3, -2)$.

12.2. $a_1 = (1, 2, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)$, $a_3 = (3, 5, 1, 2)$.

## 8.4 Практическое занятие по теме «Евклидовы пространства»

**Пример 8.4.1.** Ортогонализируйте систему векторов $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, -3, -3)$, $a_3 = (4, 3, 0, -1)$ пространства $\mathbb{R}^4$.

*Доказательство.* Применим процесс ортогонализации.

Возьмем $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$, причем $\lambda_1$ найдем из условия ортогональности векторов $b_1, b_2$: $b_1 \cdot b_2 = 0$ или $b_1 \cdot a_2 + \lambda_1 b_1^2 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -\frac{b_1 \cdot a_2}{b_1^2} = 1$. Тогда $b_2 = a_2 + b_1 = (2, 2, -2, -2)$.

Вектор $b_3 = a_3 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, причем $a_3 \cdot b_1 + \alpha_1 b_1^2 = 0$, $a_3 \cdot b_2 + \alpha_2 b_2^2 = 0$, откуда $\alpha_1 = \frac{-3}{2}, \alpha_2 = -1$. Поэтому $b_3 = a_3 - \frac{3}{2} b_1 - b_2 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$.

Значит, система векторов $b_1, b_2, b_3$ является ортогональной.

П р о в е р к а:

$b_1 \cdot b_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = 0;$

$b_1 \cdot b_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} = 0;$

$b_2 \cdot b_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{-1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{-1}{2} = 0.$ □

**Пример 8.4.2.** Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, по заданному базису

$$x_1 = (1, -2, 2), x_2 = (-1, 0, 1), x_3 = (5, -3, -7)$$

постройте в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис.

*Доказательство.* Построим сначала ортогональный базис $a_1, a_2, a_3$ пространства $\mathbb{R}^3$. Положим $a_1 = x_1$. Ввиду теоремы 4.2.1 имеем $a_2 = x_2 + \alpha a_1$, где

$$\alpha = -\frac{a_1 \cdot x_2}{a_1 \cdot a_1} = -\frac{1(-1)+(-2)0+2(-1)}{1\cdot 1+(-2)(-2)+2\cdot 2} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$a_2 = (-1, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}).$$

Снова ввиду теоремы 4.2.1 имеем $a_3 = x_3 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, где

$$\alpha_1 = -\frac{a_1 \cdot x_3}{a_1 \cdot a_1} = -\frac{1\cdot 5+(-2)(-3)+2(-7)}{9} = \frac{1}{3},\ \alpha_2 = -\frac{a_2 \cdot x_3}{a_2 \cdot a_2} = -1.$$

Тогда $a_3 = (5, -3, -7) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) - (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = (6, -3, -6)$. Пронормируем векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$. Для этого найдем их длины:

$$||a_1|| = \sqrt{a_1 \cdot a_1} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

$$||a_2|| = \sqrt{a_2 \cdot a_2} = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2} = 1,$$

$$||a_3|| = \sqrt{a_3 \cdot a_3} = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 9.$$

Теперь векторы

$$y_1 = \frac{1}{3}a_1 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),$$

$$y_2 = a_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$y_3 = \frac{1}{9}a_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. $\square$

**Пример 8.4.3.** Методом ортогонализации постройте ортонормированный базис подпространства $L$, натянутого на следующую систему векторов пространства $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$.

*Доказательство.* Находим сначала базис подпространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_5 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 - 2a_1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ a_3 - a_1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ a_4 - a_1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ a_5 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 - 2a_1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ a_1 + a_3 - a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 - 2a_2 + 3a_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_5 - a_2 + 2a_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 - 2a_1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ a_4 - 2a_2 + 3a_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, векторы $a_1$, $a_2$, $a_4$ составляют базис $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Ортогонализируем найденный базис. Положим $b_1 = a_1$. Второй вектор $b_2$ получим по формуле $b_2 = a_2 - \frac{b_1 \cdot a_1}{b_1^2} b_1$.

Имеем:

$b_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2;$

$b_1^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$, $b_2 = a_2 - 1b_1 = (1, 1, 1, 1)$.

Третий вектор $b_3$ получим по формуле $b_3 = a_4 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, где $\alpha_1 = \frac{-b_1 \cdot a_4}{b_1^2}$, $\alpha_2 = \frac{-b_2 \cdot a_4}{b_2^2}$ , откуда $b_3 = a_4 - \frac{3}{2} b_1 - \frac{5}{2} b_2 = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ (проверьте!).

Следовательно, система $b_1$, $b_2$, $b_3$ является ортогональным базисом $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Нормируем этот базис:

$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2}} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2})$,

$e_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$e_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{b_3}{\sqrt{b_3^2}} = (0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Итак, ортонормированным базисом пространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ является система векторов $e_1$, $e_2$, $e_3$. □

**Пример 8.4.4.** Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Является ли функция

$$F(x, y) = (x_1 + \dots + x_n) \cdot (y_1 + \dots + y_n)$$

скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$ ? Если нет, то укажите, какие из свойств скалярного произведения нарушаются.

*Доказательство.* Очевидно, $F(x,y) = F(y,x)$. Значит, первое свойство скалярного произведения выполняется. Положим $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Тогда

$$F(x+y,z) = ((x_1+y_1)+\cdots+(x_n+y_n))\cdot(z_1+\cdots+z_n) =$$

$$= ((x_1+\cdots+x_n)+(y_1+\cdots+y_n))\cdot(z_1+\cdots+z_n) =$$
$$= (x_1+\cdots+x_n)\cdot(z_1+\cdots+z_n)+(y_1+\cdots+y_n)\cdot(z_1+\cdots+z_n) =$$
$$= F(x,z)+F(y,z).$$

Значит, второе свойство скалярного произведения выполняется. Так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$F(\lambda x,y) = (\lambda x_1+\cdots+\lambda x_n)\cdot(y_1+\cdots+y_n) = \lambda(x_1+\cdots+x_n)\cdot(y_1+\cdots+y_n) =$$

$$= \lambda F(x,y),$$

то третье свойство скалярного произведения выполняется. Положим $x = (-1,1,0,\ldots,0)$. Тогда

$$F(x,x) = (-1+1)(-1+1) = 0.$$

Значит, четвертое свойство скалярного произведения не выполняется. $\square$

**Пример 8.4.5.** Векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$ образуют ортогональный базис евклидова пространства $V$ и

$$||e_1|| = 2, ||e_2|| = 1, ||e_3|| = 3.$$

Найдите угол $\phi$ между векторами

$$a = e_1 + e_2 - e_3, \; b = e_1 + e_2 + e_3.$$

*Доказательство.* Так как векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$ образуют ортогональный базис евклидова пространства $V$, то $e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$. Поэтому

$$a \cdot a = e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_3 = ||e_1||^2 + ||e_2||^2 + ||e_3||^2 = 4 + 1 + 9 = 14,$$

$$b \cdot b = e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_3 = 14,$$

$$a \cdot b = e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 - e_3 \cdot e_3 = 4 + 1 - 9 = -4.$$

Теперь

$$\cos\phi = \frac{a \cdot b}{||a|| \cdot ||b||} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{2}{7},$$

и угол $\phi = \arccos(-\frac{2}{7})$. □

## Индивидуальные задания

1. Пусть $a$ и $b$ – векторы действительного линейного пространства $V$. Является ли функция $F(a, b)$ скалярным произведением ?

Если нет, то укажите какие из аксиом скалярного произведения нарушаются.

1.1 $V = \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $F(a, b) = 2a_1b_1 + 3a_2b_2$.

1.2 $V = \mathbb{R}[x]$, $a = m(x)$, $b = n(x)$, $F(a, b) = \deg(m(x) \cdot n(x))$.

1.3 $V = \mathbb{R}^3$, $a = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $b = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, $F(a, b) = a_1b_1 + 2a_2b_2+$ $+3a_3b_3$.

2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите скалярное произведение векторов $a,\ b$ и угол между ними.

2.1 $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (3, 5, 1, 1)$;

2.2 $a = (1, 0, 1, 2)$, $b = (3, -5, 1, 0)$;

2.3 $a = (1, 0, 0, 4)$, $b = (1, 2, 7, -5)$;

2.4 $a = (2, -1, 0, 3)$, $b = (-1, 0, -1, 1)$;

2.5 $a = (2, 2, -1, 0)$, $b = (1, 1, -1, -1)$;

2.6 $a = (-3, 1, 0, 2)$, $b = (-1, 1, 0, 4)$.

3. Найдите нормированный вектор евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ортогональный векторам $a_1,\ a_2$.

3.1 $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, -1, 1)$;

3.2 $a = (2, -1, 1)$, $b = (-3, 1, -1)$;

3.3 $a = (1, 0, 2)$, $b = (-3, 4, -1)$.

4. Дополните до ортонормированного базиса евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ систему векторов $a_1,\ a_2$.

4.1 $a = (1, -2, 2, -3)$, $b = (2, -3, 2, 4)$;

4.2 $a = (1, 1, 1, 2)$, $b = (1, 2, 3, -3)$;

4.3 $a = (1, 1, 2, 1),\ b = (1, -1, -1, -2)$.

5. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, постройте ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов $a_1,\ a_2,\ a_3$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

5.1 $a_1 = (1, 2, 2, -1),\ a_2 = (1, -1, 0, 3),\ a_3 = (0, 3, 2, -4)$;

5.2 $a_1 = (1, 1, -1, -2),\ a_2 = (3, 0, -1, 2),\ a_3 = (2, -1, 0, 4)$;

5.3 $a_1 = (2, 1, 3, -1),\ a_2 = (1, 1, -3, 2),\ a_3 = (3, 2, 0, 1)$.

6. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, по заданному базису пространства $\mathbb{R}^3$ постройте ортонормированный базис. Сделайте проверку.

6.1 $a = (1, 1, 1, 1),\ b = (3, 5, 1, 1)$;

6.2 $a = (1, 0, 1, 2),\ b = (3, -5, 1, 0)$;

6.3 $a = (2, -1, 0, 3),\ b = (-1, 0, -1, 1)$;

6.4 $a = (2, 2, -1, 0),\ b = (1, 1, -1, -1)$;

6.5 $a = (-3, 1, 0, 2),\ b = (-1, 1, 0, 4)$.

7. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ — произвольные векторы из $\mathbb{R}^2$. Какая из следующих формул определяет на $\mathbb{R}^2$ скалярное произведение:

7.1 $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$;

7.2 $a \cdot b = ka_1b_1 + la_2b_2$, где $k,\ l \neq 0$;

7.3 $a \cdot b = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1$;

7.4 $a \cdot b = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$;

7.5 $a \cdot b = 3a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2$?

8. Докажите, что в евклидовом пространстве:

8.1 $a \cdot (kb) = k(a \cdot b)$;

8.2 $0 \cdot b = a \cdot 0 = 0$;

8.3 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

8.4 $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$;

8.5 $(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i a_i) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i (a_i \cdot b)$.

9. Пусть $a$ и $b$ – ненулевые векторы в евклидовом пространстве, $\varphi$ – угол между ними. Докажите, что

1) угол $\varphi$ не меняется при умножении обоих векторов на одно и то же число;

2) угол $\varphi$ равен нули или $\pi$ тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы.

10. Для треугольника, образованного векторами $a$, $b$, $a+b$ евклидова пространства, докажите:

10.1 теорему Пифагора;

10.2 теорему, обратную теореме Пифагора;

10.3 теорему косинусов;

10.4 неравенство треугольников.

11. Докажите в евклидовом пространстве теорему о сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма.

## 8.5 Практическое занятие по теме «Многочлены»

**Пример 8.5.1.** *В кольце $\mathbb{Q}[x]$ разделить многочлен $x^3 - x^2 + x + 1$ на $x^2 - 1$.*

*Доказательство.* На первом этапе надо домножить делитель $x^2 - 1$ на $x$ и вычесть из делимого: $x^3 - x^2 + x + 1 - x(x^2 - 1) = -x^2 + 2x + 1$. Теперь надо повторить этот прием и уничтожить старший член $(-x^2)$. Деление удобно записывать углом:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\_\,x^3 & -x^2 & +x & +1 & x^2 - 1 \\
\cline{5-5}
x^3 & & -x & & x - 1 \\
\cline{1-4}
& \_\,-x^2 & +2x & +1 & \\
& -x^2 & & +1 & \\
\cline{2-4}
& & 2x. & &
\end{array}
$$

О т в е т: $x^3 - x^2 + x + 1 = (x^2 - 1)(x - 1) + 2x$. □

**Пример 8.5.2.** *В кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ найдите неполное частное и остаток при делении многочлена*

$$f(x) = \overline{1}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{1}x + \overline{4}$$

*на многочлен $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}x^2 + \overline{4}x + \overline{4}$.*

*Доказательство.* Разделим $f(x)$ на $g(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\overline{1}x^4+\overline{2}x^3+\overline{2}x^2+\overline{1}x+\overline{4} & \overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{4} \\
\overline{1}x^4+\overline{1}x^3+\overline{4}x^2+\overline{4}x \phantom{+\overline{4}} & \overline{1}x+\overline{1} \\
\hline
-\;\overline{1}x^3+\overline{3}x^2+\overline{2}x+\overline{4} & \\
\overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{4} & \\
\hline
\overline{2}x^2+\overline{3}x. & 
\end{array}
$$

О т в е т: $q(x)=\overline{1}x+\overline{1}$ — неполное частное, $r(x)=\overline{2}x^2+\overline{3}x$ — остаток, $f(x)=g(x)(\overline{1}x+\overline{1})+(\overline{2}x^2+\overline{3}x)$. $\square$

**Пример 8.5.3.** *Найти НОД*[1] $(x^3-1, x^2+1)$ *в кольце* $\mathbb{Q}[x]$.

*Доказательство.* Построим алгоритм Евклида для этих многочленов. Вначале произведем деление.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-1 & x^2+1 \\
x^3+x & x \\
\hline
-x-1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\;x^2+1 & -x-1 \\
x^2+x & -x+1 \\
\hline
-\;-x+1 & \\
-x-1 & \\
\hline
2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\;-x-1 & 2 \\
-x & \frac{-x}{2}-\frac{1}{2} \\
\hline
-\;-1 & \\
-1 & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

Теперь запишем равенства.

$$
\begin{cases}
x^3-1=(x^2+1)x+(-x-1), \\
x^2+1=(-x-1)(-x+1)+2, \\
-x-1=2(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}).
\end{cases}
\tag{8.5.6}
$$

Итак, $2 \in$ НОД$(x^3-1, x^2+1)$. Ясно, что НОД$^1(x^3-1, x^2+1) = 1$.

О т в е т: НОД$^1(x^3-1, x^2+1) = 1$. □

**Пример 8.5.4.** *Выразите НОД$^1(x^3-1, x^2+1)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ через исходные многочлены.*

*Доказательство.* Для многочленов $x^3-1$ и $x^2+1$ алгоритм Евклида состоит из трех равенств (см. систему (8.5.6)). Из второго и первого равенств получаем:

$$2 = x^2+1-(-x-1)(-x+1) =$$
$$= x^2+1-((x^3-1)-(x^2+1)x)(-x+1) =$$
$$= (x^3-1)(x-1)+(x^2+1)(1+x(-x+1)).$$

О т в е т: $1 = ((1/2)x-1/2)(x^3-1)+(1/2+(1/2)x-(1/2)x^2)(x^2+1)$.

□

**Пример 8.5.5.** *В кольце $\mathbb{Q}[x]$ найдите НОД$(f(x), g(x))$ и выразите его через исходные многочлены, если $f(x) = 3x^4+8x^3+6x^2+3x-2$ и $g(x) = 3x^4-x^3-9x^2-3x+2$.*

*Доказательство.* Составим алгоритм Евклида многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Разделим многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^4+8x^3+6x^2+3x-2 & 3x^4-x^3-9x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} 3x^4-x^3-9x^2-3x+2 & 1 \\ \cline{1-1} 9x^3+15x^2+6x-4. & \end{array}$$

$$f(x) = g(x) + (9x^3 + 15x^2 + 6x - 4).$$

Разделим $3g(x)$ на $r_1(x) = 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4$:

$$\begin{array}{r|l}
_\; 9x^4 - 3x^3 - 27x^2 - 9x + 6 & 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 \\ \cline{2-2}
9x^4 + 15x^3 + 6x^2 - 4x \phantom{+6} & x - 2 \\ \cline{1-1}
_\; -18x^3 - 33x^2 - 5x + 6 & \\
-18x^3 - 30x^2 - 12x + 8 & \\ \cline{1-1}
-3x^2 + 7x - 2. &
\end{array}$$

$$3g(x) = r_1(x)(x - 2) + (-3x^2 + 7x - 2).$$

Делим $r_1(x)$ на $r_2(x) = -3x^2 + 7x - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
_\; 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 & -3x^2 + 7x - 2 \\ \cline{2-2}
9x^3 - 21x^2 + 6x \phantom{-4} & -3x - 12 \\ \cline{1-1}
_\; 36x^2 \phantom{+6x} - 4 & \\
36x^2 - 84x + 24 & \\ \cline{1-1}
84x - 28. &
\end{array}$$

$$r_1(x) = r_2(x)(-3x - 12) + 28(3x - 1).$$

Делим $r_2(x)$ на $r_3(x) = 3x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} -3x^2+7x-2 & \;3x-1 \\ \cline{2-2} -3x^2+\;x & -x\;+2 \\ \cline{1-1} 6x-2 & \\ 6x-2 & \\ \cline{1-1} 0. & \end{array}$$

$$r_2(x) = r_3(x)(-x+2).$$

Итак, алгоритм Евклида многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + r_1(x) \\ 3g(x) = r_1(x)(x-2) + r_2(x) \\ r_1(x) = r_2(x)(-3x-12) + 28r_3(x) \\ r_2(x) = r_3(x)(-x+2). \end{cases}$$

Последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида является наибольшим общим делителем $f(x)$ и $g(x)$, то есть $28r_3(x) = 84x - 28 \in$ НОД$(f(x), g(x))$.

Двигаясь в алгоритме Евклида снизу вверх и последовательно заменяя остатки, выразим НОД через исходные многочлены: $84x - 28 = 28r_3(x) = r_1(x)+r_2(x)(3x+12) = r_1(x)+(3g(x)-r_1(x)(x-2))(3x+12) = g(x)(9x+36)+r_1(x)(-3x^2-6x+25) = g(x)(9x+36)+(f(x)-g(x))(-3x^2-6x+25) = f(x)(-3x^2-6x+25)+g(x)(3x^2+15x+11)$.

О т в е т: $84x - 28 \in$ НОД$(f(x), g(x))$,

$$84x - 28 = (-3x^2 - 6x + 25)f(x) + (3x^2 + 15x + 11)g(x). \qquad \square$$

**Пример 8.5.6.** *В кольце* $\mathbb{C}[x]$ *разделить многочлен*

$$f(x) = 2x^5 + (1 + 2i)x^4 + (2 + i)x^2 + (1 + 4i)x + i$$

*на многочлен* $g(x) = x + i$.

*Доказательство.* Применим схему Горнера.

| | 2 | $1+2i$ | 0 | $2+i$ | $1+4i$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-i$ | 2 | 1 | $-i$ | $1+i$ | $2+3i$ | $3-i$ |

Так как $g(x) = x + i$, то первый элемент второй строки равен $(-i)$. Во второй клетке стоит коэффициент $b_0 = a_0 = 2$, остальные клетки заполняются по формуле $b_k = a_k + b_{k-1}c$. Остаток $f(c) = 3 - i$, частное $q(x) = 2x^4 + x^3 - ix^2 + (1 + i)x + 2 + 3i$.

О т в е т:

$$f(x) = (2x^4 + x^3 - ix^2 + (1 + i)x + 2 + 3i)g(x) + 3 - i. \qquad \square$$

**Пример 8.5.7.** *Используя схему Горнера, вычислите* $f(-5)$, *если* $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

*Доказательство.* Так как при делении на $(x + 5)$ многочлен $f(x) = (x + 5)q(x) + r$, где $q(x)$ — неполное частное, $r$ — остаток, то очевидно, что $f(-5) = r$. Составим схему Горнера деления $f(x)$ на $(x + 5)$:

| | 2 | 0 | –3 | 2 | 0 | –1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| –5 | 2 | –10 | 47 | –233 | 1165 | –5826 |

О т в е т: $f(-5) = -5826$. $\square$

**Пример 8.5.8.** *Разложите многочлен* $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ *по степеням* $x - 1$.

*Доказательство.* Разделим по схеме Горнера на $(x-1)$ поочередно $f(x)$, первое неполное частное, второе неполное частное и т. д. Получаемые при этом остатки являются коэффициентами искомого разложения:

| | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 6 | 11 | 12 |
| 1 | 1 | 4 | 10 | 21 | |
| 1 | 1 | 5 | 15 | | |
| 1 | 1 | 6 | | | |
| 1 | 1 | | | | |

Искомое разложение многочлена $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 15(x-1)^2 + 21(x-1) + 12.$$ □

**Пример 8.5.9.** *Найдите кратность корня* $x = 2$ *многочлена*

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \in \mathbb{R}[x].$$

*Доказательство.* Делим $f(x)$ на $(x-2)$, затем получившиеся частное делим на $(x-2)$ и т. д., пока не получится ненулевой остаток. Деление удобно производить по схеме Горнера.

| | 1 | $-5$ | 7 | $-2$ | 4 | $-8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | $-3$ | 1 | 0 | 4 | 0 |
| 2 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-2$ | 0 | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | | |
| 2 | 1 | 3 | $7 \neq 0$ | | | |

Итак, $f(x)$ делится на $(x-2)^3$, но не делится на $(x-2)^4$.

О т в е т: $x = 2$ — корень кратности 3. □

**Пример 8.5.10.** *Определите $a$ и $b$ так, чтобы многочлен $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ имел $x = 1$ корнем кратности $\geq 2$.*

*Доказательство.* Число 1 будет корнем многочлена $f(x)$ не ниже второй кратности, если значения многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$ при $x = 1$ равны нулю. Приравнивая $f(1)$ и $f'(1)$ к нулю, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 3b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем искомые значения $a$ и $b$.

О т в е т: $a = 3$, $b = -4$. □

**Пример 8.5.11.** *Определите коэффициенты $a$ и $b$ многочлена $f(x) = (a-2)x^4 + 2(b+1)x^3 - 3x + 1$ так, чтобы $x = -2$ стал двукратным корнем многочлена $f(x)$.*

*Доказательство.* Поскольку $x = -2$ двукратный корень многочлена $f(x)$, то должны выполняться условия: $f(-2) = 0$, $f'(-2) = 0$. Так как $f'(x) = 4(a-2)x^3 + 6(b+1)x^2 - 3$, то

$$\begin{cases} (a-2)16 - 16(b+1) + 6 + 1 = 0 \\ 4(a-2)(-8) + 6(b+1)4 - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 16a - 16b = 41 \\ -32a + 24b = -85. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2 и складывая его со вторым, получим:

$$\begin{cases} 16a - 16b = 41 \\ -8b = -3, \end{cases} \quad b = \frac{3}{8}, \ a = \frac{47}{16}.$$

О т в е т: $a = 47/16$, $b = 3/8$. □

**Пример 8.5.12.** *Найдите многочлен над полем $\mathbb{R}$ третьей степени, имеющий двукратным корнем число 3 и простым корнем число $(-2)$.*

*Доказательство.* Многочлен $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ имеет корни: $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$. По формулам Виета получаем:

$a_1 = -(3 + 3 - 2) = -4$, $a_2 = 9 - 6 - 6 = -3$, $a_3 = 18$.

О т в е т: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$. □

**Пример 8.5.13.** *Разложите над полем $\mathbb{C}$ на неприводимые множители многочлен $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$.*

*Доказательство.* Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^3 - 1) =$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Решим уравнение $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

О т в е т: $x^4 + x^3 - x - 1 = (x+1)(x-1)(x + 1/2 - i(\sqrt{3}/2))(x + 1/2 + i(\sqrt{3}/2))$. □

**Пример 8.5.14.** *Разложите над полем $\mathbb{R}$ на неприводимые множители многочлен $x^4 + x^3 - 8x - 8$.*

*Доказательство.* Группируя слагаемые, получаем:

$$x^4 + x^3 - 8x - 8 = x^3(x+1) - 8(x+1) = (x+1)(x^3-8) =$$

$$= (x+1)(x-2)(x^2+2x+4).$$

Многочлен $x^2+2x+4$ имеет отрицательный дискриминант $D = 4-16 = -12$, поэтому неприводим над $\mathbb{R}$.

О т в е т: $x^4 + x^3 - 8x - 8 = (x+1)(x-2)(x^2+2x+4).$ $\square$

**Пример 8.5.15.** *Разложите над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ на неприводимые множители многочлен $f(x) = x^4 + 4$.*

*Доказательство.* Вначале над полем комплексных чисел найдем корни многочлена $x^4 + 4$:

$$x_k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} =$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$x_0 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i,$$

$$x_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})) =$$

$$= \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = -1 + i,$$

$$x_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})) =$$

$$= \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = -1 - i,$$

$$x_3 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{4})) =$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 - i.$$

Получаем разложение:

$$f(x) = (x - (1 + i))(x - (-1 + i))(x - (-1 - i))(x - (1 - i)) =$$

$$= (x - 1 - i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i).$$

Перемножим скобки, отвечающие сопряженным корням:

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2,$$

$$(x + 1 - i)(x + 1 + i) = (x + 1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2.$$

Над полем $\mathbb{R}$ получаем разложение: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

О т в е т: $f(x) = (x - 1 - i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i)$ над полем $\mathbb{C}$; $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ над полем $\mathbb{R}$. $\square$

**Пример 8.5.16.** *Найдите все корни многочлена* $f(x) = 16x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1$.

*Доказательство.* Составим множество возможных рациональных корней $p/q$ многочлена $f(x)$.

$$p \in \{\pm 1\},\ q \in \{1, 2, 4, 8, 16\},$$

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8},\ \pm\frac{1}{16}\right\}.$$

Для нахождения корней используем схему Горнера:

| | 16 | 8 | –7 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 24 | 17 | 19 | $20 \neq 0$ |
| –1 | 16 | –8 | 1 | 1 | 0 |
| –1 | 16 | –24 | 25 | $-24 \neq 0$ | |
| 1/2 | 16 | 0 | 1 | $(3/2) \neq 0$ | |
| $-(1/2)$ | 16 | –16 | 9 | $-(7/2) \neq 0$ | |
| 1/4 | 16 | –4 | 0 | $1 \neq 0$ | |
| $-(1/4)$ | 16 | –12 | 4 | 0 | |

Итак, найдены корни $x_1 = -1$, $x_2 = -(1/4)$. По теореме Безу

$$f(x) = 4(x+1)(x+\frac{1}{4})(4x^2 - 3x + 1).$$

Находим остальные корни, решая уравнение $4x^2 - 3x + 1 = 0$:

$$x_3 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{8}, \quad x_4 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{8}.$$

О т в е т: $x_1 = -1$, $x_2 = -(1/4)$, $x_3 = (3 - i\sqrt{7})/8$, $x_4 = (3 + i\sqrt{7})/8$. □

**Пример 8.5.17.** *Найдите все корни многочлена*

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2,$$

*если известен один из корней* $x_1 = 1 + i$.

*Доказательство.* Так как коэффициенты многочлена $f(x)$ являются действительными числами, то вторым корнем многочлена $f(x)$ будет число, сопряженное $x_1$, то есть $x_2 = 1 - i$. По теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на $(x - x_1)$ и на $(x - x_2)$, то есть на многочлен

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 - i)(x - 1 + i) =$$
$$= (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

$$\begin{array}{r|l}
-\,3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2}
3x^4 - 6x^3 + 6x^2 \phantom{{}+ 4x - 2} & 3x^2 + x - 1 \\ \cline{1-1}
-\,x^3 - 3x^2 + 4x - 2 & \\
x^3 - 2x^2 + 2x \phantom{{}-2} & \\ \cline{1-1}
-\,-x^2 + 2x - 2 & \\
-x^2 + 2x - 2 & \\ \cline{1-1}
0. &
\end{array}$$

Решая уравнение $3x^2 + x - 1 = 0$, находим остальные корни:

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \quad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}.$$

О т в е т: $x_1 = 1+i$, $x_2 = 1-i$, $x_3 = (-1-\sqrt{13})/6$, $x_4 = (-1+\sqrt{13})/6$. □

**Пример 8.5.18.** *Разложите на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ многочлены $f(x) = x^4-3x^3+2x^2+2x-4$ и $g(x) = x^4+3x^2+9$.*

*Доказательство.* Найдем все корни многочлена $f(x)$:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1+i,\ x_4 = 1-i.$$

Так как неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ являются только многочлены первой степени, то искомое разложение над $\mathbb{C}$ имеет вид: $f(x) = (x+1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$.

Неприводимые многочлены над полем $\mathbb{R}$ должны иметь действительные коэффициенты. Поэтому $(x+1)$ и $(x-2)$ — неприводимые множители $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$. Перемножим

$$(x-1-i)(x-1+i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2-2x+2.$$

Тогда $f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-2x+2)$. Поскольку неприводимыми над полем $\mathbb{R}$ являются многочлены первой степени и второй степени с отрицательным дискриминантом, то полученное разложение и будет искомым над полем $\mathbb{R}$.

Преобразуем многочлен $g(x)$:

$$g(x) = x^4+3x^2+9 = x^4+6x^2+9-3x^2 =$$

$$= (x^2+3)^2 - (\sqrt{3}x)^2 = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Так как дискриминанты полученных квадратных трехчленов отрицательны, то $g(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ — искомое разложение над полем $\mathbb{R}$.

Разложим каждый из квадратных трехчленов на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$:

$$x^2 - \sqrt{3}x + 3 = \left(x - \frac{\sqrt{3} - 3i}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3} + 3i}{2}\right),$$

$$x^2 + \sqrt{3}x + 3 = \left(x - \frac{-\sqrt{3} - 3i}{2}\right)\left(x - \frac{-\sqrt{3} + 3i}{2}\right).$$

Тогда разложение на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$ имеет вид:

$$g(x) = \left(x - \frac{\sqrt{3} - 3i}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3} + 3i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} + 3i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} - 3i}{2}\right).$$

О т в е т: разложение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 2),$$

$$g(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Разложение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$:

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i),$$

$$g(x) = (x - \frac{\sqrt{3} - 3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3} - 3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3} + 3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3} - 3i}{2}).$$

$\square$

## Индивидуальные задания

1. В кольце $\mathbb{Z}_4[x]$ найдите неполное частное и остаток при делении $f(x)$ на $g(x)$.

1.1 $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{1}x + \overline{1}$;

1.2 $f(x) = \overline{1}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$;

1.3 $f(x) = \overline{1}x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{1}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{2}$;

1.4 $f(x) = \overline{3}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$;

1.5 $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^2 + \overline{3}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{2}x + \overline{1}$;

1.6 $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{2}$;

1.7 $f(x) = \overline{1}x^4 + \overline{2}x + \overline{1}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}$;

1.8 $f(x) = \overline{2}x^5 + \overline{1}x^3 + \overline{1}x + \overline{1}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}x + \overline{1}$;

1.9 $f(x) = \overline{1}x^5 + \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{1}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}$;

1.10 $f(x) = \overline{2}x^5 + \overline{3}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}x$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{2}x + \overline{1}$;

1.11 $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}x + \overline{2}$;

1.12 $f(x) = \overline{3}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{3}x + \overline{3}$;

1.13 $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{3}$;

1.14 $f(x) = \overline{1}x^5 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}x$;

1.15 $f(x) = \overline{1}x^5 + \overline{2}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{3}$.

2. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД$(f(x), g(x))$ и выразите

его через исходные многочлены.

2.1 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,$
$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2;$

2.2 $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$
$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2;$

2.3 $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35,$
$g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25;$

2.4 $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6,$
$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2;$

2.5 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2;$
$g(x) = x^2 - x + 1.$

2.6. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1,$
$g(x) = x^2 - x - 1.$

2.7 $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$
$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4;$

2.8 $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,$
$g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17;$

2.9 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1,$
$g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1;$

2.10 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$
$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1;$

2.11 $f(x) = x^6 - x^4 + 4x^3 - 3x + 2,$
$g(x) = x^3 + 2;$

2.12 $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$,

$g(x) = x^5 - 1$;

2.13 $f(x) = x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 7$,

$g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;

2.14 $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1$,

$g(x) = x^4 - 1$;

2.15 $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3$,

$g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

3. Используя схему Горнера, вычислите $f(x_0)$.

3.1 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $x_0 = 1 + i$;
3.2 $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $x_0 = -3 + i$;
3.3 $f(x) = 4x^3 + x^2$, $x_0 = -1 - i$;
3.4 $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $x_0 = 1 - 2i$;
3.5 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = i$;
3.6 $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 7$, $x_0 = 3i$;
3.7 $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $x_0 = -2 - i$;
3.8 $f(x) = x^5 + (1 - 2i)x^4 - (3 + i)x^2 + 7$, $x_0 = -1 + 2i$;
3.9 $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$, $x_0 = -i$;
3.10 $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $x_0 = 1 + 2i$;
3.11 $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 5x + 2$, $x_0 = 2i$;

3.12 $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x,$ $\quad x_0 = 2 + i;$

3.13 $f(x) = 3x^4 - ix^3 + (1 - 2i)x^2 + 2x - 1,$ $\quad x_0 = 3i;$

3.14 $f(x) = 5x^4 + 2ix^3 + 5x - i,$ $\quad x_0 = 1 + i;$

3.15 $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 1,$ $\quad x_0 = i.$

4. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x)$ из задания 2 по степеням $(x + 1)$.

5. Определите коэффициенты $a, b, c$ так, чтобы многочлен $f(x)$ имел $x = 1$ корнем кратности три.

5.1 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 1;$

5.2 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2cx + 2;$

5.3 $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 1;$

5.4 $f(x) = x^4 - ax^3 + 2bx + c;$

5.5 $f(x) = -ax^4 + 2bx^3 - cx^2 + 2x;$

5.6 $f(x) = ax^4 + 2bx^3 + 3cx - 3;$

5.7 $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 4;$

5.8 $f(x) = -2ax^4 + 3bx^2 - 2cx + 3;$

5.9 $f(x) = ax^4 - 2bx^2 + cx - 2;$

5.10 $f(x) = ax^3 - 3bx^2 + 2cx - 4;$

5.11 $f(x) = 3ax^3 + 2bx^2 - 4cx - 1;$

5.12 $f(x) = -2ax^4 + bx^3 - 2cx - 6;$

5.13 $f(x) = ax^4 - 4bx^2 + cx - 2;$

5.14 $f(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4;$

5.15 $f(x) = -2ax^3 + 2bx^2 - 6cx + 1.$

6. Найдите все корни многочлена $f(x)$ в поле $\mathbb{C}$.

6.1 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9$;

6.2 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x - 50$;

6.3 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$;

6.4 $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 12$;

6.5 $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 16x - 24$;

6.6 $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 5x - 6$;

6.7 $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 19x^2 + 2x + 8$;

6.8 $f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 14x + 5$;

6.9 $f(x) = -2x^4 + x^3 - x + 2$;

6.10 $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 22x - 10$;

6.11 $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 33x^2 - 23x + 12$;

6.12 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 18$;

6.13 $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 37x + 20$;

6.14 $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 20x + 16$;

6.15 $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 15x + 25$.

7. Найдите все корни многочлена $f(x)$ в поле $\mathbb{C}$, если известен один из корней $x_1$.

7.1 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 6x + 13, \quad x_1 = 3 - 2i;$

7.2 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 29x^2 - 50x + 52, \quad x_1 = 1 + i\sqrt{3};$

7.3 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 65, \quad x_1 = 3 + 2i;$

7.4 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5, \quad x_1 = i;$

7.5 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x + 20, \quad x_1 = -2i;$

7.6 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 32, \quad x_1 = 2i;$

7.7 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 50x + 50, \quad x_1 = 2 - i;$

7.8 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2, \quad x_1 = 1 + i;$

7.9 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 30x + 50, \quad x_1 = 1 + 3i;$

7.10 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 16x + 20, \quad x_1 = -2 + i;$

7.11 $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10, \quad x_1 = -1 + i;$

7.12 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 52, \quad x_1 = -2 + 3i;$

7.13 $f(x) = x^4 + 11x^2 + 10x + 50, \quad x_1 = -1 + 2i;$

7.14 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 6x + 65, \quad x_1 = -2 + 3i;$

7.15 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5, \quad x_1 = 2 - i.$

8. Разложите многочлены $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

8.1 $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2, \quad g(x) = x^6 + 27;$

8.2 $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12, \quad g(x) = x^4 + 16;$

8.3 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2, \quad g(x) = x^4 + 81;$

8.4 $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1,$

$g(x) = x^4 - 2x^2 + 16;$

8.5 $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = 16x^4 + 1;$

8.6 $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4,$

$g(x) = x^6 - 27;$

8.7 $f(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9,$

$g(x) = x^4 - 2x^2 + 4;$

8.8 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54, \quad g(x) = x^6 - 1;$

8.9 $f(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10,$

$g(x) = x^4 + 4x^2 + 9$

8.10 $f(x) = x^5 + 5x^4 - 6x^3 - x^2 - 5x + 6,$

$g(x) = 81x^4 + 1;$

8.11 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5, \quad g(x) = x^4 - x^2 + 1;$

8.12 $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 16,$

$g(x) = 16x^4 + 4x^2 + 1;$

8.13 $f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1, \quad g(x) = x^4 + 1;$

8.14 $f(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 6,$

$g(x) = x^4 - x^2 + 9;$

8.15 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9, \quad g(x) = x^8 - 1.$

## Дополнительные задачи

1. Найдите все такие значения $a$ и $p$, чтобы многочлен $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax - 3$ делился на многочлен $\varphi(x) = x^2 + 3x + p$.

2. С помощью производной определите кратные множители многочлена $f(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 + 12x^3 - 48x^2 + 48x - 16$.

3. При каком условии многочлен $x^4 + px^2 + q$ делится на многочлен

$x^2+mx+1$?

4. Докажите, что

$$(\overline{1}x-\overline{1})(\overline{1}x-\overline{2})\dots(\overline{1}x-\overline{p-1})=\overline{1}x^{p-1}-\overline{1}$$

в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$ для любого простого числа $p$.

5. Найдите многочлен $f(x)$ из условия

$$xf(x-1)=(x-5)f(x).$$

6. Докажите, что многочлен $x^4-2x+3$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

7. Докажите, что любой многочлен $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\deg f(x)\geq 3$, приводим над полем $\mathbb{R}$.

8. Пусть $f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-n)\in\mathbb{Q}[x]$. Сколько корней у многочлена $f'(x)$?

9. Докажите, что многочлен $f(x)=x^3-2x+a\in\mathbb{R}[x]$ при любом $a\in\mathbb{R}$ имеет на интервале $(1;\infty)$ не больше одного корня.

10. Докажите, что многочлен $f(x)=\overline{1}x^2+\overline{1}x+\overline{1}$ неприводим над полем $\mathbb{Z}_2$, но приводим над полем $\mathbb{Z}_3$.

11. Укажите число различных многочленов степени $n>0$ в кольце $\mathbb{Z}_2[x]$.

12. Перечислите все многочлены степени 2 из кольца $\mathbb{Z}_2[x]$. Укажите неприводимые над полем $\mathbb{Z}_2$.

13. Перечислите все многочлены степени 2 из кольца $\mathbb{Z}_3[x]$. Укажите неприводимые над полем $\mathbb{Z}_3$.

14. Перечислите все неприводимые многочлены степени 3 из кольца $\mathbb{Z}_2[x]$.

15. Укажите число различных многочленов степени $n > 0$ в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$, где $p$ — простое число.

16. Найдите такие значения $a$ и $b$ из поля $\mathbb{R}$, чтобы многочлен $f(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ делился на $(x-1)^2$.

17. Докажите, что при $n \geq 2$ для многочлена $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ число 1 является корнем кратности 3.

18. Разложите многочлен $h(x) = x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1$ по степеням $x - 1$.

19. Докажите, что многочлен $f(x) = x^n - 1$ не имеет кратных корней.

20. При каком значении $a$ многочлен $g(x) = x^3 - 3x + a$ имеет кратные корни?

21. Пусть $\mathbb{P}$ — конечное поле. Докажите, что существует такое $m \neq 1$, что значения многочленов $x$ и $x^m$ равны при любом значении $x$ из поля $\mathbb{P}$.

22. Найдите многочлен наименьшей степени из кольца $\mathbb{C}[x]$, который имеет двойной корень 1 и простые корни 2, 3, $1+i$. Найдите многочлен наименьшей степени из кольца $\mathbb{R}[x]$, который имеет такие же корни.

23. Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Найдите $\lambda$ и корни уравнения.

24. Пусть $f(x)$ — многочлен из кольца $\mathbb{R}[x]$. Докажите, что $f(x)$ имеет хотя бы один действительный корень, если старший коэффициент и

свободный коэффициент имеют разные знаки.

25. Пусть $f(x)$ — многочлен из кольца $\mathbb{R}[x]$ и все корни этого многочлена являются чисто мнимыми, то есть имеют вид $ai$, где $a \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. Докажите, что все корни производной $f'(x)$, кроме одного, также являются чисто мнимыми.

26. Найдите все пары действительных чисел $a$ и $b$, для которых многочлен $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ имеет четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

**Пример 8.6.1.** 1. Покажите, что оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ переводящий любой вектор $x=(x_1,x_2,x_3)$ в вектор

$$\varphi(x)=(x_2+x_3,2x_1+x_3,3x_1-x_2+x_3)$$

является линейным. Найдите его матрицу в базисе

$$e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1). \qquad (8.6.7)$$

*Доказательство.* По определению оператор $\varphi$ пространства $L$ над полем $\mathbb{P}$ является линейным, если выполняются следующие два условия:

1)$(\forall x,y\in L)\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$;

2)$(\forall x,y\in L)(\forall\lambda\in\mathbb{P})\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$.

Проверим, выполняются ли эти требования для заданного оператора.

1) $\forall(x=(x_1,x_2,x_3),y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3)$
$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$,
$\varphi(x+y)=(x_2+x_3+y_2+y_3,2x_1+2y_1+x_3+y_3,3x_1+3y_1-x_2-y_2+x_3+y_3)=$
$=(x_2+x_3,2x_1+x_3,3x_1-x_2+x_3)+(y_2+y_3,2y_1+y_3,3y_1-y_2+y_3)=$
$=\varphi(x)+\varphi(y)$;

2)$(\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3)(\forall\lambda\in\mathbb{R})$ $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$,
$\varphi(\lambda x)=(\lambda x_2+\lambda x_3,2\lambda x_1+\lambda x_3,3\lambda x_1-\lambda x_2+\lambda x_3)=\lambda(x_2+x_3,2x_1+$
$+x_3,3x_1-x_2+x_3)=\lambda\varphi(x)$.

Таким образом, требования 1) – 2) выполнены, и поэтому оператор $\varphi$ является линейным. Найдем $M_{(e)}^{\varphi}$. По условию

$\varphi(e_1) = (0, 2, 3) = 0e_1 + 2e_2 + 3e_3,$
$\varphi(e_2) = (1, 0, -1) = 1e_1 + 0e_2 - 1e_3,$
$\varphi(e_3) = (1, 1, 1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3.$

Записывая эти равенства в матричной форме, получаем:

$$[\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)] = [e_1, e_2, e_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица $M_{(e)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ будет искомой матрицей оператора $\varphi$ в базисе $(e)$. □

**Пример 8.6.2.** Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ имеет в базисе

$$a_1 = (8, -6, 7), a_2 = (-16, 7, -13), a_3 = (9, -3, 7) \tag{8.6.8}$$

матрицу $M_{(a)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$.

Найдем матрицу того же оператора $\varphi$ в базисе

$$b_1 = (1, -2, 1), b_2 = (3, -1, 2), b_3 = (2, 1, 2). \tag{8.6.9}$$

*Доказательство.* Сначала находим матрицу $T$ перехода от базиса (8.6.8) к базису (8.6.9): $[b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3] \cdot T$, что равносильно матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{bmatrix} \cdot T$$

Отсюда получим $T = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (проверьте). Найдем обратную к $T$ матрицу: $T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (проверьте!). Матрицу данного оператора $\varphi$ в базисе (8.6.9) находим по известной формуле: $M^{\varphi}_{(b)} = T^{-1} \cdot M^{\varphi}_{(a)} \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. □

**Пример 8.6.3.** Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^4$, заданного матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Так как $\mathbb{R}^4$ есть линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, то собственными значениями л.о. $\varphi$ будут являться только действительные корни его характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$. Найдем определитель матрицы $A-\lambda E$:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda & -1 \\ 2\lambda-\lambda^2 & -2+\lambda & -2+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3(\lambda+2).$$

Так как характеристическое уравнение $(\lambda-2)^3(\lambda+2)=0$ имеет действительные корни $\lambda_{1,2,3}=2$, $\lambda_4=-2$, то собственными значениями л.о. $\varphi$ являются числа 2 и -2. Теперь найдем соответствующие этим значениям собственные векторы.

а) Собственными векторами, соответствующими собственному значению $\lambda=2$ будут ненулевые решения матричного уравнения $(A-2E)X=0$, т. е. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ или однородной линейной системы уравнений: $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ которая равносильна одному уравнению: $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Ранг матрицы этой системы, т.е. $\operatorname{rang}(A - 2E) = 1$. Значит, фундаментальная система решений состоит из трех векторов, например, $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0, 1)$.

Значит, собственному значению $\lambda = 2$ соответствуют собственные векторы $\{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.

б) При $\lambda = -2$ для соответствующих собственных векторов получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Кроме того, $\operatorname{rang}(A+2E) = 3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, $b = (-1, 1, 1, 1)$(проверьте!). Значит, собственному значению $\lambda = -2$ соответствуют собственные векторы $\{\beta b, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.\}$

$\square$

**Пример 8.6.4.** Выясните, можно ли матрицу $A$ л.о. $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Если можно, то найдите этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

*Доказательство.* а) Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$$

Оно имеет три действительных различных корня $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$, т. е. $\mathrm{Sp}\varphi = \{1, 2, -1\}$ – простой спектр. Следовательно, матрица л.о. приводится к диагональной -– элементами ее главной диагонали будут собственные значения $1, 2, \breve{}1$: $M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, где $a_1, a_2, a_3 (a)$ -– собственные векторы, соответствующие собственным значениям $1, 2, \breve{}1$. Для нахождения базиса $(a)$ нужно найти по одному ненулевому решению для каждой из линейных систем уравнений:

1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

2) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

3) $\lambda_3 = -1$

$$\begin{cases} 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Получаем соответственно $a_1 = (0, 1, 0), a_2 = (2, -1, 30), a_3 = (2, -1, 0)$

б) Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$. Значит, $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$ – действительные корни этого уравнения. Так как Sp$\varphi$ не простой (имеется кратный корень 1), то сразу на поставленный в задаче вопрос ответить нельзя. Найдем сначала сумму размерностей собственных подпространств $L(1)$, $L(2)$, соответствующих собственным значениям 1 и 2: $\dim L(1) + \dim L(2)$.

$L(1)$ – пространство решений однородной линейной системы уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$\dim L(1) = 3 - 1 = 2$.

$L(2)$ – пространство решений однородной линейной системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\dim L(2) = 3 - 2 = 1$. Итак, $\dim L(1) + \dim L(2) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Поэтому объединение базисов $L(1)$ и $L(2)$ образует базис $\mathbb{R}^3$ и матрица л.о. $\varphi$ в этом базисе является диагональной.

Найдем базисы $L(1)$ и $L(2)$: $a_1 = (1, -1, 0), a_2 = (2, 0, -1)$ – базис $L(1)$; $a_3 = (1, 0, -1)$ – базис $L(2)$.

Значит, в базисе $a_1, a_2, a_3$ $(a)$ пространства $\mathbb{R}^3$ матрица л.о. $\varphi$ принимает вид: $M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

в) В этом случае характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

также имеет действительный кратный корень $\lambda = 1$. Поэтому сначала найдем $\dim L(1) + \dim L(2)$.

Подпространство $L(1)$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Тогда $\dim L(1) = 3 - 2 = 1$.

Подпространство $L(2)$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Тогда $\dim L(2) = 3 - 2 = 1$.

Итак, $\dim L(1) + \dim L(2) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$ , а, следовательно, матрица к диагональному виду не приводится.

г) Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 6 \\ 3 & 2-\lambda & 6 \\ -3 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda^2-\lambda+1)=0$$

имеет только один простой действительный корень $\lambda = -3$, который является единственным собственным значением л.о. $\varphi$. Значит, матрица к диагональному виду не приводится. $\square$

## Индивидуальные задания

1. Покажите, что оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$, переводящий любой вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi(x)$, является линейным. Найдите его матрицу в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ $\quad (e)$.

1.1 $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2, x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)$;

1.2 $\varphi(x) = (x_2, x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2 + x_3)$;

1.3 $\varphi(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2)$;

1.4 $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$;

1.5 $\varphi(x) = (3x_1 - x_3, 2x_2 - x_3, x_3)$;

1.6 $\varphi(x) = (x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2)$;

1.7 $\varphi(x) = (5x_1 - 2x_2, x_2 - x_3, 4x_3)$;

1.8 $\varphi(x) = (x_1, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;

1.9 $\varphi(x) = (x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_3)$;

1.10 $\varphi(x) = (x_1 - x_2, 0, x_1 + x_2)$.

2.1 Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ задан в некотором базисе

$a_1,\ a_2,\ a_3\ (a)$ матрицей

$$M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что система векторов

$b_1 = a_1 + a_2 - a_3,\ b_2 = -a_1 - 2a_2,\ b_3 = 2a_2 + a_3\ (b)$ составляет базис пространства $\mathbb{R}^3$ и найдите $M^{\varphi}_{(b)}$;

2.2 Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ имеет в базисе $a_1 = (0,\ 0,\ 1)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 1)$, $a_3 = (1,\ 1,\ 1)\ (a)$ матрицу

$$M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу этого же оператора в базисе

$$b_1 = (2,\ 3,\ 5), b_2 = (0,\ 1,\ 2), b_3 = (1,\ 0,\ 0)\ (b);$$

2.3 Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ в некотором базисе $a_1,\ a_2,\ a_3\ (a)$ имеет матрицу

$$M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что система векторов

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2 + a_3, b_2 = 3a_1 + 4a_2 + a_3, b_3 = a_1 + 2a_2 + 2a_3 \ (b)$$

составляет базис пространства $\mathbb{R}^3$ и найдите $M^{\varphi}_{(b)}$;

2.4 Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1)$ $(a)$ имеет матрицу

$$M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что векторы $b_1 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_2 = a_2 + a_3$, $b_3 = 2a_2 + a_3$ $(b)$ образуют базис $\mathbb{R}^3$ и найдите $M^{\varphi}_{(b)}$;

2.5 – 2.8 Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^4$ в некотором базисе $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ $(a)$ имеет матрицу

$$M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу $M^{\varphi}_{(b)}$.

2.5 $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_2 + a_3$, $b_4 = a_3 + a_4$ $(b)$;

2.6 $b_1 = a_1$,$b_2 = 3a_1 + a_2$, $b_3 = -5a_1 + 2a_2 + a_3$, $b_4 = 7a_1 - 3a_2 + 2a_3 + a_4$ $(b)$;

2.7 $b_1 = a_4$, $b_2 = a_3$, $b_3 = a_2$, $b_4 = a_1$ $(b)$;

2.8 $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_3$, $b_4 = a_4$ $(b)$;

2.9 – 2.10 Линейный оператор $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^4$ в некотором базисе $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ $(a)$ имеет матрицу

$$M_{(a)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу этого же оператора в базисе $(b)$;

2.9 $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ $(b)$;

2.10 $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_2 + a_3$, $b_4 = a_3 + a_4$ $(b)$.

3.1 – 3.5; Найдите собственные значения, собственные векторы и собственные подпространства линейного оператора $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$, заданного матрицей $A$:

3.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

3.2 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

$$3.3\ A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix};$$

$$3.4\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix};$$

$$3.5\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

3.1 – 3.5; Найдите собственные значения, собственные векторы и собственные подпространства линейного оператора $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$, заданного матрицей $A$:

$$3.1\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$3.2\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$3.3\ A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix};$$

3.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix};$

3.5 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$

3.6 – 3.10 Выясните, можно ли матрицу $A$ линейного оператора $\varphi$ пространства $\mathbb{R}^3$ привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Если можно, то найдите этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

3.6 $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix};$

3.7 $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix};$

3.8 $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix};$

3.9 $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix};$

$$3.10\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

## 8.7 Практическое занятие по теме «Билинейные и квадратичные формы»

**Пример 8.7.1.** *Запишите в симметричном виде и найдите ранг квадратичной формы*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3x_1 - 3x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

*Доказательство.* В результате приведения подобных форма примет вид: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 3x_2x_3$. Запишем её в симметричном виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_1 +$$
$$+ x_2^2 - \frac{3}{2}x_2x_3 + x_3x_1 - \frac{3}{2}x_3x_2 + 0x_3^2.$$

Матрицей квадратичной формы $f$ будет матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $A$ имеет ранг 3, то ранг квадратичной формы $f$ равен 3.

□

**Пример 8.7.2.** *С помощью метода Лагранжа приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ к нормальному виду над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Укажите линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду.*

*Доказательство.* Приведём квадратичную форму $f$ к каноническому виду методом Лагранжа. Так как в $f$ нет квадратов переменных, то сделаем замену переменных $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$ с матрицей линейного преобразования

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим квадратичную форму

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 4y_2y_3.$$

Теперь, сделаем ещё одно линейное преобразование переменных $z_1 = 2y_1 - 2y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$ или $y_1 = \frac{1}{2}z_1 + z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$ с матрицей линейного преобразования

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим квадратичную форму

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 4z_2z_3.$$

Наконец, преобразование переменных $t_1 = z_1$, $t_2 = -2z_2 - 2z_3$, $t_3 = z_3$ или $z_1 = t_1$, $z_2 = -\frac{1}{2}t_2 - t_3$, $z_3 = t_3$ с матрицей преобразования

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$f(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2.$$

Найдём нормальный вид квадратичной формы $f$ над полем $\mathbb{R}$. Для этого сделаем замену переменных $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}t_2$, $u_3 = t_3$ или $t_1 = \sqrt{2}u_1$, $t_2 = \sqrt{2}u_2$, $t_3 = u_3$ с матрицей линейного преобразования

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим нормальный вид квадратичной формы $f$ над полем $\mathbb{R}$: $f(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 - u_2^2$. Матрицей линейного преобразования переменных будет матрица

$$T = A_1 * A_2 * A_3 * A_4 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Невырожденное линейное преобразование переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, приводящее к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$, следующее:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2 + 2u_3,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u_2,\ x_3 = u_3.$$

Нетрудно проверить, что при этом преобразовании форма $f(x_1, x_2, x_3)$ примет вид формы $f(u_1, u_2, u_3)$.

Дя нахождения нормального вида квадратичной формы $f$ над полем сделаем замену переменных $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{-2}}t_2$,$v_3 = t_3$ или $t_1 = \sqrt{2}v_1$, $t_2 = i\sqrt{2}v_2$, $t_3 = v_3$ с матрецей линейного преобразования

$$B_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим нормальный вид квадратичной формы $f$ над полем : $f(v_1, v_2, v_3) = v_1^2 + v_2^2$. Матрицей линейного преобразования переменных $x_1, x_2, x_3$ будет матрица

$$T_1 = A_1 * A_2 * A_3 * B_4 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Линейное преобразование переменных $x_1, x_2, x_3$, приводящее к нормальному виду над $\mathbb{C}$, имеет вид: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1 + +i\frac{1}{\sqrt{2}}v_2 + 2v_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1 - i\frac{1}{\sqrt{2}}v_2$, $x_3 = v_3$. $\square$

**Пример 8.7.3.** *При каких значениях $\lambda$ квадратичная форма $f(x_1, x_2) = x\lambda_1^2 - -4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$ является отрицательно определённой?*

*Доказательство.* Составим матрицу квадратичной формы $f$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{bmatrix}.$$

Матрица $A$ имеет два главных минора

$$\triangle_1 = |\ \lambda\ | = \lambda, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4.$$

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма $f$ является отрицательно определённой, если:

$$\begin{cases} \triangle_1 < 0, \\ \triangle_2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda < 0, \\ \lambda^2 + 3\lambda - 4 > 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим:$\lambda \in (-\infty; -4)$. Итак, квадратичная форма $f(x_1, x_2)$ является отрицательно определенной при $\lambda \in (-\infty; -4)$. $\square$

## Индивидуальные задания

1. Запишите матрицы квадратичных форм $F_1$, $F_2$. Вычислите ранги этих квадратичных форм.

1.1 $F_1(x_1, x_2, x_3) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz$,
$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - 4x_2x_4$;

1.2 $F_1(x_1, x_2, x_3) = x^2 - 2xy + 2z^2 + 4yz + 5z^2,$
$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4;$

1.3 $F_1(x_1, x_2, x_3) = x^2 - 4xy + 2xz + 4y^2 + z^2,$
$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3;$

1.4 $F_1(x_1, x_2, x_3) = 2x^2 + 9y^2 - 3z^2 + 8xy - 4xz - 10yz,$
$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 + x_1x_2 + x_3x_4;$

1.5 $F_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4xy - 2xz + z^2,$
$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + x_1x_3 + x_4^2.$

2. Методом Лагранжа приведите квадратичные формы $G_1$ и $G_2$ к каноническому виду. Укажите невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду. Сделайте проверку.

2.1 $G_1 = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$
$G_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;$

2.2 $G_1 = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$
$G_2 = 2x_1x_3 - 4x_2X_3;$

2.3 $G_1 = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3,$
$G_2 = 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3;$

2.4 $G_1 = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_2,$
$G_2 = -4x_1x_2 + 2x_1x_3;$

2.4 $G_1 = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3,$
$G_2 = x_1x_2 - 4x_2x_3 + 6x_1x_3.$

3. Определите индекс инерции квадратичных форм $F_1$, $G_1$, $F_2$, $G_2$ из заданий 1 и 2.

4. Найдите ортогональную матрицу $T$ такую,что $TAT^{-1}$ – диагональная матрица, где $A$ – матрица квадратичной формулы $F$. Сделайте проверку.

4.1 $F = x_1^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$;

4.2 $F = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$;

4.3 $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

4.4 $F = x_2^2 + 2x_1x_3$;

4.5 $F = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

5. Найдите ортогональное преобразование перемены,приводящее квадратичную форму $F(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду.

5.1 $F = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2$;

5.2 $F = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

5.3 $F = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

5.4 $F = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

5.5 $F = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

6. Найдите нормальный вид над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$, а также невырожденное линейное преобразование переменных,приводящеек этому виду,для квадратичных форм $F$ из заданий 4 и 5.

7. Вычислите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичных форм $G_1$, $G_2$ из заданий 2. Являются ли эти формы положительно определенными (отрицательно определенными)?

8. При каких значений $\lambda$ квадратичных форм $F$ является положительно (отрицательно) определенной?

8.1 $F = 5x_1^2 - x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

8.2 $F = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_1x_3;$

8.3 $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3;$

8.4 $F = x_1^2 + 4x_2^2 = 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3;$

8.5 $F = x_1^2 - \lambda x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3.$

## 2 Семестр

1. Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами и их свойства.

2. Элементарные преобразования строк матрицы. Ступенчатая матрица. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

3. Обратимая матрица. Свойства обратимой матрицы. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.

4. Подстановки. Четность и знак подстановки. Примеры.

5. Определитель квадратной матрицы. Правило нахождения определителей второго и третьего порядка (с выводом).

6. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей.

7. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Пример.

8. Миноры и алгебраические дополнения. Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения. Пример.

9. Ранг матрицы. Способы нахождения. Теорема о базисном миноре (с док-вом).

10. Ранг матрицы. Способы нахождения. Метод окаймляющих миноров.

11. Системы линейных алгебраических уравнений. Понятие решения. Виды систем. Элементарные преобразования СЛУ. Равносильные СЛУ.

12. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный метод решения СЛУ.

13. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Крамера (с док-вом). Следствия.

14. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса (с док-вом). Следствия.

15. Определение векторного пространства. Примеры. Арифметическое пространство. Простейшие свойства векторных пространств.

16. Линейная комбинация систем векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства (одно из свойств с док-вом).

17. Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования системы векторов. Теорема о числе векторов в эквивалентных линейно независимых системах (с док-вом).

18. Базис системы векторов. Примеры. Максимально независимая подсистема векторов (теорема с док-вом).

19. Ранг системы векторов. Свойства ранга. Теорема о рангах системы и подсистемы (с док-вом).

20. Базис и размерность векторного пространства. Теорема о дополнении ЛНЗ системы до базиса (с док-вом).

21. Изоморфизм векторных пространств. Примеры. Свойства изоморфизма в.п. (св. 3 с док-вом).

22. Координаты вектора в базисе. Теорема единственности координатного разложения (с док-вом).

23. Матрица перехода к новому базису пространства. Связь между координатными столбцами вектора в разных базисах (с выводом).

24. Кольцо многочленов от одной переменной. Определение многочлена. Сумма и произведение многочленов. Свойства степени многочлена. Теорема: множество многочленов со сложением и умножением является кольцом с единицей (с док-вом).

25. Деление в кольце многочленов. Простейшие свойства делимости многочленов. Деление с остатком в кольце многочленов. Теорема о делении с остатком.

26. Деление с остатком на нормированный линейный двучлен. Схема Горнера (с выводом). Значение многочлена в точке. Теорема Безу (с док-вом).

27. Корни многочлена. Критерий корня (с док-вом). Кратные корни. Теорема о наибольшем возможном числе корней многочлена (с док-вом).

28. Общие делители и НОД многочленов. Примеры. Свойства НОДа. Взаимно простые многочлены. Общие кратные и НОК многочленов.

29. Алгоритм Евклида нахождения НОДа 2-х многочленов. Теорема о НОД (с док-вом).

30. Приводимые и неприводимые над полем многочлены. Свойства неприводимых многочленов (хотя бы одно с док-вом).

31. Основная теорема теории делимости многочленов (с док-вом).

32. Разложение многочлена по степеням двучлена x-a. Связь с формулой Тейлора.

33. Основная теорема алгебры. Теорема о неприводимых над полем C многочленах (с док-вом). Следствия. Теорема Виета.

34. Многочлены над полем R. Теорема о сопряженных корнях многочлена над полем R (с док-вом).

35. Многочлены над полем R. Теорема о неприводимых над полем R многочленах (с док-вом).

36. Многочлены над полем Q. Необходимое условие рационального корня (с док-вом).

37. Многочлены над полем Q. Теорема Эйзенштейна. Примеры.

38. Линейные операторы. Примеры. Свойства линейного оператора (одно из свойств с док-вом).

39. Матрица линейного оператора в данном базисе. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах (с выводом). Подобие матриц.

40. Матрица линейного оператора в данном базисе. Связь между координатными столбцами векторов x и phi(x) (с выводом).

41. Образ и ядро линейного оператора. Теоремы (с доказательством). Ранг и дефект линейного оператора.

42. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение линейного оператора. Собственное подпространство.

43. Билинейная форма. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису.

44. Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

45. Метод Якоби. Знакоопределенность квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

46. Определитель Грама. Закон инерции.

К итоговому тесту можно перейти по следующей ссылке Тест.

## Литература


1. Беняш-Кривец, В. В. Лекции по алгебре: группы, кольца, поля / В. В. Беняш-Кривец, О. В. Мельников. – Минск : БГУ, 2009.

2. Боревич, З. И. Определители и матрицы / З. И. Боревич. – М. :Наука, 1988. – 354 с.

3. Бузланов, А. В. Лабараторные работы по курсу «Алгебра и теория чисел» / А. В. Бузланов, В. С. Монахов. – Гомель : ГГУ, 1991. – 96 с.

4. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: в 3 ч. / А. И. Кострикин. – М. : Физматлит, 2001. – 3 ч. – 356 с.

5. Куликов, Л. Я. Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. – М. : Высш. шк., 1979. – 560 с.

6. Куликов, Л. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. – М. : Просвещение, 1993. – 250 с.

7. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск : Амалфея, 2001. – 401 с.

8. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. — Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

9. Монахов, В. С. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 264 с.

10. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. – М. :

Физматлит, 2001.

11. 2. Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. -– Факториал Пресс, 2001. – 544 с.

12. Шнеперман, Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Б. Шнеперман. – Минск : Выш. шк., 1982. – 224 с.

13. Шнеперман, Л. Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях : в 2 ч. / Л. Б. Шнеперман. – Минск : Выш. шк., 1986–1987. – 2 ч. – 256 с.

14. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1975. – 402 с.

15. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия: учебное посо-бие: в 2 ч. / М. В. Милованов [и др.]. Ч. 2. Минск, 2001. – 352 с.

16. Глухов, М. М., Алгебра: Учебник. В 2-х т. / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев – М. : Гелиос АРВ, 2003. – 336+416 с.

17. Многочлены от одной переменной : методические рекомендации по курсу алгебры и теории чисел для студентов стационара и ОЗО математического факультета / сост. Г. М. Архутик ; ред. В. Ф. Савчук. - Брест : БрГУ им. А.С. Пушкина, 2001. — 27 с.

18. Многочлены над полями C, R, Q : методические указания / сост. Г. М. Архутик . - Брест : БрГУ им. А.С. Пушкина, 2002. — 31 с.

19. Трофимук, А. А. Алгебра. Линейная алгебра. Часть 1 / А. А. Трофимук, В. С. Монахов // Электронный учебно-методический комплекс, Брест, объём – 1,8 Мб, 1 файл, 235 с., 2015.

20. Грицук, Д. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Д. В. Грицук, М. Г. Кот, З. Н. Серая // Электронный учебно-методический комплекс, Брест, объём — 4,59 Мб, 1 файл, 315 с., 2019.