Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Физико-математический факультет

Кафедра общей и теоретической физики

А.В. ДЕМИДЧИК
А.М. КУЗЬМИЧ

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование
(физика и информатика)

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2024

УДК 528.06
ББК 30.10

Авторы-составители:

Демидчик Александр Владимирович – заведующий кафедрой общей и теоретической физики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент

Кузьмич Анастасия Михайловна – преподаватель кафедры общей и теоретической физики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Рецензенты:

Кафедра физики учреждения образования Брестский государственный технический университет

Сендер Николай Никитич – доцент кафедры фундаментальной математики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент

Электронный учебно-методический комплекс предназначен для проведения лекционных и практических занятий по учебной дисциплине «Методы обработки результатов и измерений». Рекомендуется студентам первого курса физико - математического факультета специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование (физика и информатика).

Учебный комплекс составлен на основе учебной программы для специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование (физика и информатика) рег. № УД-17-009-23/уч. от 05.07.2023 и учебного плана для специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование (физика и информатика), рег. № ФМ-6-002-23/уч. от 23.02.2023.

Разработан в формате pdf.

УДК 528.06
ББК 30.10

Текстовое учебное электронное издание

Системные требования: тип браузера и версия любые, скорость подключения к информационно-телекомуникационным сетям любая, дополнительные настройки к браузеру не требуются.

Использованное ПО: Windows 10, Microsoft Office 2019.
Дата размещения на сайте : ??.??.2025.
Объём издания: 4,8 Мб.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Познание физики - науки, имеющей экспериментальные основы, её законов невозможно без проведения экспериментальных исследований физических процессов, явлений, обработки полученных результатов, их анализа и интерпретации, что в свою очередь требует от исследователя специальных знаний и умений и делает актуальным изучение дисциплины «Методы обработки результатов измерений».

Новые подходы к образованию, связанные с преодолением репродуктивного стиля в обучении, обеспечением познавательной активности и самостоятельности в учении также требуют системного подхода в формировании у будущего преподавателя физики измерительных умений и навыков. В процессе обучения должны быть созданы необходимые условия для реализации потенциальных возможностей каждой личности по накоплению знаний и формированию умений применять их на практике. Залогом успешной профессиональной деятельности преподавателя любой специальности являются высокий уровень теоретических знаний и практических умений. Для преподавателя физики к числу таких умений относятся умения осуществлять физический эксперимент и проводить анализ полученных результатов. Развитие творческих способностей и готовности будущего преподавателя к ответственной профессиональной деятельности - одна из главных задач процесса обучения. За последние годы физическая наука обогатилась новым содержанием. Сверхточные исследования микромира, нанотехнологии в создании новых материалов, исследование космоса и др. связаны с разработкой новых методик измерений и использованием физических приборов высокой точности и чувствительности. При этом активизация человеческих возможностей про-является инновациями в измерительной практике, создании эффективных моделей физических процессов, целостности технологии познания, развитии и реализации творческого потенциала исследователя. Знакомство с методиками подобных исследований и их использование на практике – одна из актуальных задач познания современной физики.

Программа учитывает особенности преподавания основ методов обработки результатов обработки экспериментальных данных будущим учителям физики и информатики, что выражается, прежде всего, в использовании многочисленных примеров практической реализации аналитических и графических методов обработки результатов измерений в физике и информатике. Последовательность изложения материала соответствует требованиям учебного плана специальности. В частности, к началу изучения общей физики студенты овладевают основными понятиями математического анализа: функция, производная и дифференциал, которые используются при об-работке результатов измерений в лабораторных практикумах по общей физике.

Учебная программа по учебной дисциплине «Методы обработки результатов измерений» разработана для учреждений высшего образования Республики Беларусь в соответствии с требованиями образовательного стандарта общего высшего образования по специальности 6-

05-0113-04 «Физико-математическое образование (математика и физика; физика и информатика)».

Целью учебной дисциплины «Методы обработки результатов измерений» является подготовка студентов к выполнению демонстрационного и лабораторного эксперимента по всем дисциплинам физического цикла.

Задачи:

- подготовка учителя физики для учреждений, обеспечивающих получение среднего образования;

- ознакомление студентов с типами измерений, видами погрешностей, приёмами вычислений, методами обработки результатов измерений;

- формирование у студентов умений по измерению физических величин в ходе выполнения лабораторных работ, а также совершенствование логических умений по проведению анализа и интерпретации полученных результатов;

- получение навыков самостоятельной работы как со стандартным заводским оборудованием, приборами, так и с изготовленными для определённых конкретных целей механизмами, конструкциями.

Изучение учебной дисциплины «Методы обработки результатов измерений» является теоретико-методической основой для освоения студентами всех учебных дисциплин физического цикла, в которых необходима обработка результатов демонстрационных и лабораторных экспериментов. Поэтому она тесно связана с содержанием всех дисциплин модуля

«Высшая математика».

В результате изучения учебной дисциплины студент **должен**

знать:

- виды измерений физических величин и оценок их погрешностей;

- законы распределения погрешностей;

- методы и алгоритмы обработки результатов прямых, косвенных н совместных измерений.

уметь:

- округлять, обрабатывать и интерпретировать результаты измерений физических величии;

- использовать методы оценки погрешностей измерений;

- использовать программные средства общего и специального назначения в сфере физического образования.

владеть:

— методами обработки результатов измерений;

— приёмами вычислений;

— умениями по измерению физических величин в ходе выполнения лабораторных работ;

— логическими умениями по проведению анализа и интерпретации полученных результатов;

— алгоритмами математической обработки результатов измерений.

Освоение учебной дисциплины «Методы обработки результатов измерений» должно обеспечить формирование **базовой профессиональ-**

ной компетенции: использовать методы и средства проведения измерений в обработки результатов физических экспериментов и основные законы механики для решения экспериментальных, расчётных и исследовательских задач, рассматриваемых на базовом и профильном уровнях обучения физике в учреждениях, обеспечивающих получение общего среднего образования.

Рекомендуемая форма текущей аттестации — зачёт.

Целями учебно-методического комплекса являются систематизация лекционного материала для его последующего использования на практических занятиях, повышение эффективности дистанционного обучения и возможность быстрой актуализации знаний при подготовке к зачёту.

Учебная программа предусматривает изучение дисциплины на первом курсе (первый семестр), что обусловлено необходимостью совершенствования студентами измерительных умений и их адаптации к условиям работы в физических лабораториях. Курс рассчитан на 108 часов (общее количество), 46 часов аудиторных, из них 6 лекционных часов и 40 часов практических занятий.

Учебно-методический комплекс имеет следующую структуру:
- основной раздел (лекционный материал, задания к практическим занятиям),
- раздел контроля знаний (тест),
- вспомогательный раздел (приложение, в котором содержатся справочные данные, необходимые при выполнении практических занятий, со-

держание учебного материала, выписка из учебно-методической карты учебной дисциплины).

Учебный комплекс составлен на основе учебной программы для специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование (физика и информатика) рег. № УД-17-009-23/уч. от 05.07.2023, а также учебного плана рег. № ФМ-6-002-23/уч. от 23.02.2023.

Содержание учебного материала

Структура содержания курса «Методы обработки результатов физических измерений» построена на основе следующих разделов: «Измерения и погрешности измерений», «Физические приборы и их точность», «Приёмы вычислений», «Методы обработки результатов измерений», «Измерения и алгоритмы математической обработки результатов измерений».

1. Измерения и погрешности измерений. Физические измерения. Цели и задачи измерений. Погрешности измерений и их причины. Систематические и случайные погрешности. Промахи. Виды оценок погрешностей. Вероятность случайного события. Вероятностные ошибки. Классификация случайных ошибок. Законы распределения ошибок. Неравенство Чебышева. Определение доверительного интервала и доверительной вероятности. Запись результата измерений.

2. Физические приборы и их точность. Виды средств измерений. Типы шкал отсчета. Оценка погрешности отсчета. Оценка инструментальных погрешностей. Класс точности физического прибора.

3. Приёмы вычислений. Точные и приближенные числа. Формы записи приближенных чисел. Правила округления. Округление погрешности и результата измерений. Использование вычислительной техники: калькулятор, персональный компьютер.

4. Методы обработки результатов измерений. Метод подсчета цифр. Метод границ. Метод границ погрешностей (дифференциальный).

Статистический метод. Графический метод. Метод наименьших квадратов.

5. Измерения и алгоритмы математической обработки результатов измерений. Алгоритмы математической обработки результатов измерений. Прямые измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов. Косвенные измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов. Совместные измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов.

Учебно-методическая карта учебной дисциплины

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов		Средства обучения (оборудование, учебно-наглядные пособия и др.)	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия		
1	2	3	4	5	6
Методы обработки результатов измерений (46 часов)		6	40	видеопроектор, ЭВМ, калькулятор	Контрольная работа, зачёт
1	Измерения и погрешности измерений	1	2	видеопроектор, ЭВМ	
2	Физические приборы и их точность	1	2	видеопроектор, ЭВМ	
3	Приёмы вычислений	1	2	видеопроектор, ЭВМ	
4	Методы обработки результатов измерений	2	8	видеопроектор, ЭВМ	
5	Измерения и алгоритмы математической обработки результатов измерений	1	8	видеопроектор, ЭВМ	Контрольная работа

1. Измерения и их погрешности

1.1. Виды измерений. Классификация погрешностей

Физический эксперимент предполагает проведение различных измерений. **Измерением** называется нахождение значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств (средств **измерений**) путем сравнения её с однородной физической величиной принятой за единицу. К средствам измерений относятся измерительные приборы, меры и состоящие из них измерительные системы и установки. **Измерительный прибор** - средство измерения, с помощью которого можно непосредственно отсчитывать значение измеряемой величины (линейка, штангенциркуль, секундомер и т.д. (рисунок 1)). **Меры** - средства измерений, служащие для воспроизведения физических величин заданных размеров (наборы гирь, магазины сопротивлений и т.д. (рисунок 2)).

Все измерения делятся на прямые, косвенные, совокупные, совместные, однако в учебных лабораториях используются,как правило, первые два вида измерений. Измерения, при которых искомое значение физической величины находится непосредственно опытным путем, называются **прямыми**. Например, длину физического маятника можно найти при помощи линейки, период колебаний данного маятника – секундомером.

Однако редко цель эксперимента заключается только в непосредственном измерении, так как большинство физических величин недоступно прямому измерению. К их числу можно отнести, в частности, коэффициент трения, ускорение, среднее значение длины свободного пробега молекул. Такого рода величины можно определить на основании использования расчетных формул, которые выражают определенные физические законы. Подставляя в рабочую формулу данные прямых измерений, вычисляют искомую физическую величину. Такие измерения называются **косвенными**.

Рисунок 1 – Примеры измерительных приборов

Всякое измерение сопровождается той или иной ошибкой. Большинство значений физических величин в справочниках, приведены с известной степенью точности. В зависимости от того, каков источник погрешностей, их принято подразделять на систематические, случайные и промахи.

Рисунок 2 – Примеры средств измерений

Систематической погрешностью измерений называют погрешность, которая остается неизменной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же физической величины в условиях данного опыта.

Источниками систематических ошибок являются, как правило, несовершенства измерительных приборов. Например, длину детали можно измерять при помощи миллиметровой линейки или штангенциркуля. Во втором случае значение систематической ошибки будет меньше, так как штангенциркуль является более точным прибором по сравнению с линейкой. Систематические погрешности появляются также в том случае, если в процессе измерений не учтены причины, односторонне влияющие на результат измерений. Например, при взвешивании на чувствительных весах не принята во внимание потеря веса тела в воздухе; при измерении сопротивления проводника пренебрегли сопротивлением соединительных проводов. Систематические ошибки могут быть учтены, если измерения одних и тех же величин провести различными методами и приборами с последующим анализом результатов.

Случайной погрешностью измерений называют погрешность, величина и знак которой изменяются случайным образом при повторных измерениях одной и той же физической величины в условиях данного опыта. Случайные ошибки в большинстве случаев обусловлены непостоянством условий измерений, несовершенством наших органов чувств, а также из-за непостоянства физической величины в процессе измерения. При этом результаты измерения изменяются беспорядочно, от случая к случаю. К примеру, причиной такого рода ошибок могут быть сотрясения измерительных приборов из-за хождения по лаборатории, колебания напряжения в городской сети и т.д.

Промах – грубая погрешность, сильно искажающая результаты измерения, которая возникает в большинстве случаев вследствие недосмотра, небрежности экспериментатора. Иногда промахи связаны с неумением пользоваться тем или иным прибором. Например, производя отсчет по микрометру, часто ошибаются ровно на полмиллиметра. Если установлено, что соответствующее измерение есть результат промаха, то его нужно отбрасывать и не учитывать при последующей обработке данных.

Класс точности прибора - выраженное в процентах отношение предельной абсолютной погрешности прибора $\Delta_{\text{а пред}}^{\text{прибор}}$ к максимальному значению измеряемой величины a_{max}:

$$K = \frac{\Delta_{\text{а пред}}^{\text{прибор}}}{a_{max}} \cdot 100\%$$

Классы точности бывают: (0,05 и 0,1) - контрольные, (0,2 и 0,5) - лабораторные, (1,0; 1,5 и 2,5) - технические и (4,0) - учебные более грубые приборы класса не имеют. Цифра, обозначающая класс точности, указывает на наибольшее допустимое значение основной погрешности прибора (в процентах).

Примеры отображения класса точности на шкале прибора указаны на рисунке 3.

Рисунок 3 – Пример отображения класса точности

По известному классу точности находится предельная абсолютная погрешность прибора:

$$\Delta^{\text{прибор}}_{\text{а пред}} = \frac{K}{100} \cdot a_{max}.$$

Для произвольной надежности абсолютная приборная погрешность может быть найдена из следующей формулы:

$$\Delta_a^{\text{прибор}} = \frac{t_\infty}{3,0} \cdot \Delta_{\text{а пред}}^{\text{прибор}} = \frac{t_\infty}{3,0} \cdot \frac{K}{100} \cdot a_{max}.$$

В указанной формуле t_∞ коэффициент Стьюдента для бесконечного количества измерений, значение которого для различных вероятностей приведено в приложении.

В частности для надежности 0,95 (достаточная надежность для учебных лабораторных измерений) $t_\infty \approx 2$ и

$$\Delta_a^{\text{прибор}} \approx \frac{2}{3,0} \cdot \frac{K}{100} \cdot a_{max}.$$

Относительная погрешность измерения, обусловленная прибором, равна:

$$\delta_a^{\text{прибор}} = \frac{\Delta_a^{\text{прибор}}}{a} \cdot 100 = \frac{t_\infty}{3,0} \cdot \frac{\Delta_a^{\text{прибор}}}{a} \cdot K.$$

Если предельная погрешность прибора и его класс точности не указанны в паспорте или на шкале, то в качестве абсолютной систематической погрешности допустимо брать половину цены наименьшего деления шкалы прибора. Строго говоря это даже не погрешность прибора, а погрешность округления, которую надо учитывать наряду с приборной. Если стрелка прибора перемещается "скачками"(например, у ручного секундомера), то приборную погрешность считают равной цене деления шкалы.

1.2. Абсолютная и относительная погрешности

Для получения количественных характеристик случайных и систематических ошибок используют понятия абсолютной и относительной погрешности.

Абсолютная величина разности между точным значением физической величины X и его приближенным (измеренным) значением x называется **абсолютной погрешностью** величины x.

$$\Delta x = |X - x|. \tag{0.1}$$

Возможны два случая: 1) Точное значение X известно. Тогда абсолютную погрешность величины x находят по формуле (0.1); 2) Точное значение x неизвестно, тогда вычислить абсолютную погрешность по формуле (0.1) нельзя. Поэтому используют понятие границы абсолютной погрешности, удовлетворяющей неравенству

$$|X - x| \leq \Delta x^*. \tag{0.2}$$

Граница абсолютной погрешности Δx^* называется предельной абсолютной погрешностью. Преобразуя неравенство (0.2), получим

$$x - \Delta x^* \leq X \leq x + \Delta x^*, \tag{0.3}$$

т.е. точное значение X находится на отрезке $\lfloor x-\Delta x^*; x+\Delta x^* \rfloor$, где значение
$x - \Delta x^*$ представляет собой приближение величины X по недостатку, а значение $x + \Delta x^*$ – приближение величины X по избытку. Выражение (0.3) можно представить в эквивалентной форме:

$$X = x \pm \Delta x^*. \tag{0.4}$$

Чтобы оценить качество проведенных измерений, необходимо знать, какую долю составляет абсолютная погрешность от измеряемой величины. Для этой цели используют понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью δ_x приближенного значения величины x называется отношение абсолютной погрешности Δx к модулю измеряемого значения x, т.е.

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|}. \tag{0.5}$$

В физической науке практически отсутствуют абсолютно точные значения измеряемых величин, поэтому в дальнейшем будем использовать только понятие предельной абсолютной погрешности. При этом в целях удобства слово «предельная» использовать не будем. Границу абсолютной погрешности будем обозначать символом Δx.

1.3. Оценка систематических и случайных погрешностей прямых измерений

Для определения значения случайной погрешности используют законы теории вероятностей и математической статистики. Здесь будут изложены соответствующие правила без выводов. В качестве наилучшего приближения измеряемой величины принимают среднее арифметическое значение из всех полученных результатов:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{0.6}$$

где n – число измерений величины α.

Абсолютное значение случайной погрешности рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta_x^{\text{случ.}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}. \tag{0.7}$$

Значение абсолютной погрешности $\Delta_x^{\text{случ.}}$ уменьшается с ростом числа измерений n. С целью уменьшения значения случайной погрешности, измерения физических величин следует повторять достаточно большое число раз. В реальных опытах присутствуют как систематические, так и случайные погрешности. При этом полная погрешность опыта вычисляется по формуле:

$$(\Delta_x^{\text{полн.}})^2 = (\Delta_x^{\text{сист.}})^2 + (\Delta_x^{\text{случ.}})^2. \tag{0.8}$$

Графически данное правило можно представить по аналогии с теоремой Пифагора в виде схемы, изображенной на рисунке 4.

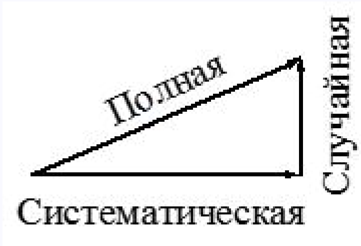


Рисунок 4 – Графическое отображение полной погрешности

Пусть в результате расчётов оказалось, что одна из погрешностей оказалась в 2 раза больше другой. Например, $\Delta_x^{\text{сист.}} = 2\Delta_x^{\text{случ.}}$. Тогда

$$\Delta^{\text{полн.}} = \sqrt{(\Delta^{\text{сист.}})^2 + (\Delta^{\text{случ.}})^2} \approx 1,12\Delta^{\text{сист.}}. \tag{0.9}$$

Меньшая погрешность, в этом случае - случайная, может рассматриваться в качестве малой поправки. То есть, если случайная погрешность опыта хотя бы вдвое меньше систематической, то не имеет смысла многократно проводить опыт, так как полная погрешность при этом практически определяется систематической ошибкой.

Пример. Пусть штангенциркулем с наименьшим делением нониуса 0,1 мм проведено 5 измерений диаметра d стеклянной трубки. Полученные результаты представлены в таблице 1. Вычислить полную, систематическую и случайную погрешности измерения.

Таблица 1 – Результаты измерений диаметра трубки

Номер опыта	1	2	3	4	5
Диаметр, мм	5,2	5,3	5,1	5,4	5,2

Так как все измерения проведены одним и тем же прибором, то

$$\Delta_d^{\text{сист.}} = \frac{1}{2}\cdot 0,1 = 0,05 \text{ (мм)}.$$

Для расчета $\Delta_d^{\text{случ.}}$ воспользуемся формулами (0.6) и (0.7). Получим:

$$\overline{d} = \frac{1}{5}(5,2+5,3+5,1+5,4+5,2) = 5,24 \text{ (мм)}.$$

Округляя значение $\overline{d}$, найдем $\overline{d} = 5,2$ мм. Следует учесть, что при измерении данным штангенциркулем достоверными являются только десятые доли миллиметра. Для округления используются известные арифметические правила.

Абсолютное значение случайной погрешности диаметра равно

$$\Delta_d^{\text{случ.}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\overline{d})^2} = \frac{1}{5}\sqrt{(0,0)^2+(0,1)^2+(0,1)^2+(0,2)^2+(0,0)^2} =$$

$0,05$ мм.

Полную погрешность $\Delta_d^{\text{полн.}}$ вычисляем по формуле (0.8):

$$\Delta_d^{\text{полн.}} = \sqrt{(\Delta_d^{\text{сист.}})^2 + (\Delta_d^{\text{случ.}})^2} = 0,07 \text{ (мм)}.$$

Округляя $\Delta_d^{\text{полн.}}$, получим $\Delta_d^{\text{полн.}} \approx 0,1$ мм.

Окончательно: $d = \overline{d} \pm \Delta_d^{\text{полн.}} = (5,2 + \pm 0,1)$ мм. Или $5{,}1 \le d \le 5{,}3$ мм.

В результате, можно сделать вывод, о том, что истинное значение диаметра d находится на отрезке $[5,1$ мм; $5,3$ мм$]$. Любое значение величины d на этом отрезке в условиях данного опыта считается правильным. Границы точного значения d изображены на рисунке 5.

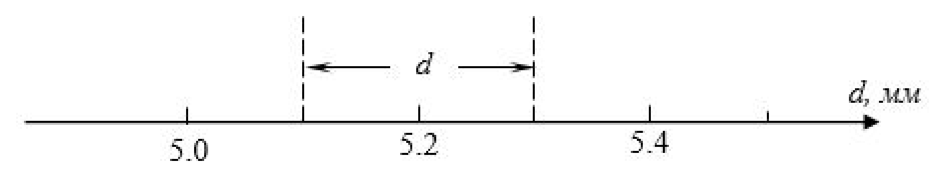


Рисунок 5 – Границы точного значения d

Для оценки качества проделанного опыта, рассчитаем относительную погрешность. Для этого используем формулу (0.5)

$$\delta_d = \frac{\Delta_d^{\text{полн.}}}{|\overline{d}|} = \frac{0,1}{5,2} = 0,019.$$

Относительная погрешность в процентах $\delta_d = 0,019 \cdot 100\% = 1,9\%$.

1.4. Оценка величин систематических и случайных погрешностей при косвенных измерениях

В большинстве работ физического практикума искомая величина y является функцией величин x_i

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n), \tag{0.10}$$

которые доступны прямым измерениям, или их значения приведены в физических справочниках. Так как истинные значения непосредственно измеренных величин x_i неизвестны, а известны только их средние значения $\overline{x_i}$ и их погрешности Δx_i, то, вычисляя значение величины y, получим только приближенное значение

$$\overline{y} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}). \tag{0.11}$$

Таким образом, необходимо вычислить погрешность косвенного измерения Δy, зная погрешности прямых измерений Δx_i.

В теории ошибок доказывается, что абсолютная погрешность какой-либо функции, аргументы которой заданы приближенно, может быть оценена с помощью дифференциала этой функции. При этом, с целью упрощения расчетов величины погрешности косвенного измерения Δy, используют искусственный прием, в основу которого положены строгие правила теории ошибок. Чтобы получить формулы для оценки величины абсолютной погрешности Δy при использовании данного метода необходимо проделать следующие операции.

1.Прологарифмировать функцию $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2.Определить дифференциал полученного выражения.
3.Заменить дифференциалы dx_i абсолютными погрешностями прямых измерений Δx_i и все знаки «минус» в числителях на знаки «плюс».

Пример 2. *Оценить абсолютную погрешность определения массы металлического цилиндра, диаметр σ и высота h которого непосредственно измерены, а плотность ρ взята из справочника.*

Величину массы определим по формуле $m = \dfrac{\pi\sigma^2}{4}h\rho$. Для определения значения Δm будем использовать вышеизложенные правила. А именно:

1. $ln m = ln\pi + 2ln\sigma - ln4 + ln h + ln\rho$.
2. $\dfrac{dm}{m} = \dfrac{d\pi}{\pi} + \dfrac{2d\sigma}{\sigma} + \dfrac{d\rho}{\rho}$.
3. $\dfrac{\Delta m}{|m|} = \dfrac{\Delta\pi}{|\pi|} + \dfrac{2\Delta\sigma}{|\sigma|} + \dfrac{\Delta h}{|h|} + \dfrac{\Delta\rho}{|\rho|}$.

Если в расчетах используются трансцендентные числа, в частности π, то при округлении появляется погрешность $\Delta\pi$. Для определения величины $\Delta\pi$ рекомендуется следующее правило: относительная ошибка округления $\dfrac{\Delta\pi}{\pi}$ должна быть на порядок меньше относительных ошибок $\dfrac{\Delta\sigma}{\sigma}$ и $\dfrac{\Delta h}{h}$ прямых измерений. Если значение какой-то величины берут из справочника, то в качестве абсолютной погрешности данной величины принимается половина следующего за последней цифрой разряда. Например, плотность алюминия ρ=2,6 г/см^3, следовательно, $\Delta\rho$=0,05 г/см^3. Следует отметить, что относительная погрешность справочных данных, как правило, на порядок меньше по сравнению с непосредственно измеренными. Поэтому в большинстве случаев ее вычислять не нужно.

Пример 3. *Получить формулу для вычисления абсолютной погрешности величины y, которая определяется следующим выражением:*

$$y = \frac{\left(z^2 - x^2\right) sin\phi}{(k\mu - 1)^3 \sqrt{tg\gamma}}.$$

$$1.\ lny = ln\left(z^2 - x^2\right) + ln(sin\phi) - ln(k\mu - 1) - \frac{1}{3}ln(tg\gamma)$$

$$2.\ \frac{dy}{y} = \frac{d\left(z^2 - x^2\right)}{z^2 - x^2} + \frac{d(sin\phi)}{sin\phi} - \frac{d(k\mu - 1)}{k\mu - 1} - \frac{1}{3}\frac{d(tg\gamma)}{tg\gamma}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2zdz - 2xdx}{z^2 - x^2} + \frac{cos\phi d\phi}{sin\phi} - \frac{\mu dk + kd\mu}{k\mu - 1} - \frac{1}{3}\frac{d\gamma}{cos^2\gamma tg\gamma}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2(zdz - xdx)}{z^2 - x^2} + \frac{d\phi}{tg\phi} - \frac{\mu dk + kd\mu}{k\mu - 1}\frac{2}{3}\frac{d\gamma}{sin^2\gamma}$$

$$3.\ \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{2(z\Delta z + x\Delta x)}{|z^2 - x^2|} + \frac{\Delta\phi}{|tg\phi|} + \frac{\mu\Delta k + k\Delta\mu}{|k\mu - 1|} + \frac{2}{3}\frac{\Delta\gamma}{|sin^2\gamma|}.$$

В заключение отметим следующее обстоятельство. Если при вычислении Δy в качестве величин Δx_i использовать абсолютные значения систематических погрешностей прямых измерений, то полученное значение Δy представляет собой систематическую ошибку косвенного измерения. Аналогично рассчитываются случайные и полные погрешности косвенных измерений.

Более строгое изложение дифференциального метода основано на следующем описании. Пусть косвенно измеряемая величина y является функцией от нескольких аргументов:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{0.12}$$

Величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получены в результате прямых равноточных измерений с абсолютными погрешностями $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$. Величина y будет найдена с некоторой абсолютной погрешностью Δy. Обычно $\Delta x_i << x_i, \quad \Delta y << y$.

Для отыскания абсолютной погрешности Δy воспользуемся выражением для полного дифференциала функции нескольких переменных:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k. \tag{0.13}$$

Величины $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ называют частными производными функции (0.12). Частная производная имеет смысл быстроты изменения функции y при изменении какой-либо одной из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{df}{dx_1}$ при $x_2 = const$, $x_3 = const, \ldots,$

Кафедра общей и теоретической физики

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

$x_n = const$. Частные производные вычисляют в окрестностях точки $y = \overline{y}$. При этом вместо величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ берут их средние арифметические значения $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$. Обозначим эти частные производные следующим образом:

$$K_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)). \tag{0.14}$$

Теперь выражение (0.13) примет вид

$$dy = K_1 dx_1 + K_2 dx_2 + \ldots + K_n dx_n. \tag{0.15}$$

Формула (0.15) выражает математическую связь между бесконечно малыми изменениями $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ аргументов вблизи $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ и бесконечно малым приращением dy вблизи $y = \overline{y}$.

Если в выражении (0.15) заменить справа бесконечно малые приращения
$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ на конечные приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, то тогда слева также будет конечное приращение величины y:

$$\Delta y = \pm K_1 \Delta x_1 \pm K_2 \Delta x_2 \pm \ldots \pm K_n \Delta x_n. \tag{0.16}$$

Так как знаки у слагаемых справа не определены, то Δy в выражении (0.16) также является неопределенным. Очевидно, что если все конечные приращения аргументов сложить по модулю, то получим максимальное значение погрешности

$$\Delta y_{\text{макс.}} = |K_1\Delta x_1| + |K_2\Delta x_2| + \ldots + |K_n\Delta x_n|. \qquad (0.17)$$

Однако вероятность получить при измерениях максимальное значение погрешности невелика. Более точная оценка ее величины задается соотношением:

$$\Delta y = \sqrt{(K_1\Delta x_1)^2 + (K_2\Delta x_2)^2 + \ldots + (K_n\Delta x_n)^2}. \qquad (0.18)$$

Относительная погрешность

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{\overline{y}}. \qquad (0.19)$$

Пример 4. *Пусть необходимо определить объём цилиндра* $V = \dfrac{\pi D^2 H}{4}$. *Относительная погрешность определяется выражением* $\delta_v = \dfrac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial \pi}\Delta\pi\right)^2 + \left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial \pi}\Delta D\right)^2 + \left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial \pi}\Delta H\right)^2}$. *Если в расчётах используют трансцендентные числа* (π), *то при округлении появляется погрешность* $\Delta\pi$, *причём рекомендуется, чтобы относительная ошибка округления* $\dfrac{\Delta\pi}{\pi}$ *была на порядок меньше относительных ошибок прямых измерений* $\left(\dfrac{\Delta D}{D}, \dfrac{\Delta H}{H}\right)$. *Это достигается путем* *выбором значения данной величины с соответствующей точностью. Так при* $\pi = 3,1$, $\Delta\pi = 0,05$. *При* $\pi = 3,14$, $\Delta\pi = 0,005$.

Если значение величины берут из справочника, то в качестве её абсолютной погрешности следует взять половину следующего за последней цифрой разряда (например, плотность железа $\rho = 7,8$ г/см^3, в этом случае $\Delta\rho = 0,05$ г/см^3). В большинстве случаев погрешностями трансцендентных чисел и справочных данных можно пренебречь.

В данном случае:

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{D^2 H}{4}; \ \frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi D H}{2}; \ \frac{\partial V}{\partial H} = \frac{\pi D^2}{4}; \text{ и } \frac{1}{v}\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{\pi}; \ \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{2}{D}; \ \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{1}{H};$$

Тогда $\delta_y = \sqrt{\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}$, $\Delta V = \delta_v V$.

1.5. Правила приближённых вычислений и округление полученных результатов

Точные и приближённые числа

При обработке результатов измерений нужно различать точные и приближённые числа и знать правила точных и приближенных вычислений.

Точные числа – это числовые коэффициенты; показатели степени в формулах; коэффициенты, отражающие кратность и дольность единиц измерения, и др.

Пример: в формуле $s = \frac{at^2}{2}$ коэффициент $1/2$ и показатель степени 2 – точные числа. В равенствах 3 км $= 3 \cdot 1000$ м, 1 с $= 1/60$ мин коэффициенты 1000, $1/60$ – точные числа.

Приближёнными числами являются результаты измерения величин, табличные значения величин, а также округленные значения точных чисел. Значения погрешностей тоже приближенные числа.

Пример: значение длины $l = 10{,}2$ см, измеренное линейкой; ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; значение абсолютной погрешности $\Delta m = 0{,}08$ кг; относительная погрешность $\varepsilon = 0,2~\%$ являются приближёнными числами.

Значащие цифры

Все цифры числа, кроме нулей, стоящих в начале числа, называются значащими.

Пример: в числах 8,31; 2709; 0,002 $= 2 \cdot 10^{-3}$ число значащих цифр соответственно равно: 3, 4 и 1. В точных числах число значащих цифр может быть бесконечно большим.

Пример: число 3 можно записать и как 3,0; 3,00; 3,000 и т.д. Все цифры в этих записях значащие.

При записи числа в стандартной форме первую значащую цифру ставят в разряд единиц, а остальные – в десятичные разряды после запятой.

Пример: 0,002 $= 2 \cdot 10^{-3}$; 0,00291 $= 2,91 \cdot 10^{-3}$; $1264 = 1,264 \cdot 10^{3}$. Абсолютная погрешность в окончательном виде записывается с одной значащей цифрой. Пример: $t = (112,48 \pm 0,02)$ с; $\Delta t =$ 0,02 с $= 2 \cdot 10^{-2}$ с.

Верные и сомнительные цифры

Результаты измерений и вычислений могут содержать разное количество значащих цифр, среди которых есть верные, сомнительные и неверные. Цифра приближённого числа считается верной, если его абсолютная погрешность не превышает одной единицы того разряда, в котором стоит данная цифра.

Пример 1: для измеренной длины $l = (73 \pm 2)$ мм абсолютная погрешность $2 < 10$, значит, цифра 7, стоящая в разряде десятков, верная. Цифра 3 стоит в разряде единиц. Погрешность $2 > 1$, значит, цифра 3, стоящая за верной цифрой, является сомнительной.

Пример 2: Пусть измеренная величина массы записана так: $m = (5,68 \pm 0,04)10^2$ кг. Абсолютная погрешность $0,04 < 1$ (5 — верная цифра), $0,04 < 0,1$ (6 — верная цифра), наконец, $0,04 > 0,01$, значит, цифра 8 — сомнительная. Цифры, стоящие за сомнительной, – неверные.

Пример: в приближённом числе $28,56 \pm 2$ цифры 5 и 6 – неверные. Неверные цифры следует отбросить и записать: 28 ± 2.

У точных чисел все значащие цифры верные, а погрешность точного числа всегда равна нулю.

Округление чисел

Точные и приближённые числа можно округлять, т.е. уменьшать количество значащих цифр. При округлении чисел руководствуются следующим правилом: если первая отбрасываемая цифра равна или больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу, если меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не изменяется.

Пример: округлить до десятых или до трёх значащих цифр числа: $22,483 \simeq 22,5$ (отбрасываемая цифра $8 < 5$); $22,463 \simeq 22,5$ (отбрасываемая цифра $6 < 5$); $22,423 \simeq 22,4$ (отбрасываемая цифра $2 < 5$).

Абсолютную погрешность округляют до одной значащей цифры.

Пример: $t = (86 \pm 3,1)$ с следует записать: $t = (86 \pm 3)$ с.

Математические операции над приближёнными числами

Сложение и вычитание

При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует оставить столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

Пример: $5,79 + 2,1 = 7,89 \simeq 7,9$.

Умножение и деление

При умножении и делении приближённых чисел в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в исходном данном с наименьшим количеством значащих цифр.

Пример: $35,2 \cdot 0,24 = 8,448 \simeq 8,4$ или $87,6779 : 7,1 = 12,349 \simeq 12$.

Возведение в степень и извлечение корня

При возведении в степень приближённого числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько значащих цифр имеет возводимое в степень число.

Пример: $0,46^2 = 0,2116 \simeq 0,21$.

При извлечении корня из приближённого числа в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько значащих цифр имеет подкоренное число.

Пример 1 : $\sqrt{5,0} \simeq 2,2$.

Пример 2 : $\sqrt[3]{9,4} \simeq 2,1$.

Пример 3 : $\sqrt[4]{16} = 2$.

Вычисление тригонометрической функции

При вычислении тригонометрической функции ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$), если значение угла α задано с точностью до 1°, в значении тригонометрической функции следует сохранить две значащие цифры.

Пример: $\sin 46^\circ \simeq 0{,}72$; $\cos 25^\circ \simeq 0{,}91$.

Кафедра общей и теоретической физики

2. Математические основы теории погрешностей

Теория погрешностей основана на выводах теории вероятности и методах математической статистики. Точный расчёт погрешностей невозможен. Их величину можно только оценить с некоторой определенной вероятностью. Теория ошибок позволяет оценить предельные значения ошибки при измерении, т.е. определить интервал, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение измеряемой величины.

Наличие случайно действующих факторов приводит к тому, что результаты отдельных измерений представляют собой случайные величины, колеблющиеся около некоторого среднего значения. В качестве результата измерений обычно принимают среднее арифметическое

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{0.20}$$

где x_i - результат i – го измерения, n –конечное число измерений.

Увеличение числа измерений позволяет получить более устойчивый средний результат, так как положительные и отрицательные погрешности результатов отдельных измерений в некоторой степени компенсируют друг друга. Если представить, что число измерений бесконечно, то средний результат будет устойчивым, то есть выраженным определенным, не случайным числом. Данное число называют математическим ожиданием (M) результата. В математической статистике данную величину принято называть генеральным средним значением случайной величины. Таким образом, **математическое ожидание** результата измерений - это среднее значение бесконечно большого числа результатов наблюдений.

Так как математическое ожидание – это результат свободный от случайных, но не от систематических погрешностей, то разность между математическим ожиданием результата и истинным значением измеряемой величины можно рассматривать в качестве **систематической** погрешности:

$$\Delta x_{\text{сист.}} = M - x. \tag{0.21}$$

Среднее значение конечного числа измерений $\overline{x}$ отличается от математического ожидания измеряемой величины. Разность между ними и есть **случайная** погрешность среднего арифметического результатов измерений:

$$\Delta x_{\text{случ.}} = \overline{x} - M. \tag{0.22}$$

Предположим, что в результате проведения n измерений некоторой физической величины, истинное значение которой x неизвестно, были получены результаты $x_1, x_2, \ldots x_n$. Тогда абсолютную ошибку результата i-го измерения можно выразить следующим образом: $\Delta x_i = x - x_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Соответствующие результаты измерений

$$x_i = x - \Delta x_i. \tag{0.23}$$

Если, используя понятие среднего арифметического (0.20), просуммировать левые и правые части выражений вида (0.23) и разделить полученное выражение на n, то получим

$$x = \overline{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i. \tag{0.24}$$

В основе статистической обработки результатов измерений лежит предположение о том, что при большом числе измерений случайные ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто. Тогда

$$\Delta\overline{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 0 \text{ и } x = \overline{x}. \tag{0.25}$$

Следовательно, случайная погрешность среднего арифметического $\Delta\overline{x}$ стремится к нулю. Поэтому случайная погрешность среднего арифметического $\Delta\overline{x}$ может быть принята в качестве оценочного значения абсолютной погрешности. Результат измерений записывают как $x = \overline{x} \pm \Delta x$. Относительная погрешность $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$. Величина $\overline{x} \pm \Delta x$ определяет интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится истинное значение измеряемой величины. Интервал от $\overline{x} - \Delta x$ до

$\overline{x} + \Delta x$ называют **доверительным**. Таким образом, в качестве истинного может быть принят любой результат отдельного измерения, попадающий в доверительный интервал, определенный с заданной доверительной вероятностью α.

Кривая распределения ошибок выражает зависимость плотности вероятности $p(\Delta x)$ появления случайной величины от величины погрешности. Описывающая данную кривую формула Гаусса может быть выведена на основании следующих предположений: 1) ошибки измерений принимают непрерывный ряд значений; 2) при большом числе измерений ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто; 3) малые ошибки встречаются реже, чем большие.

Математически распределение Гаусса или нормальное распределение описывается выражением:

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (0.26)$$

где $e = 2,71$ - основание натуральных логарифмов, σ^2 дисперсия, через которую определяется среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}. \qquad (0.27)$$

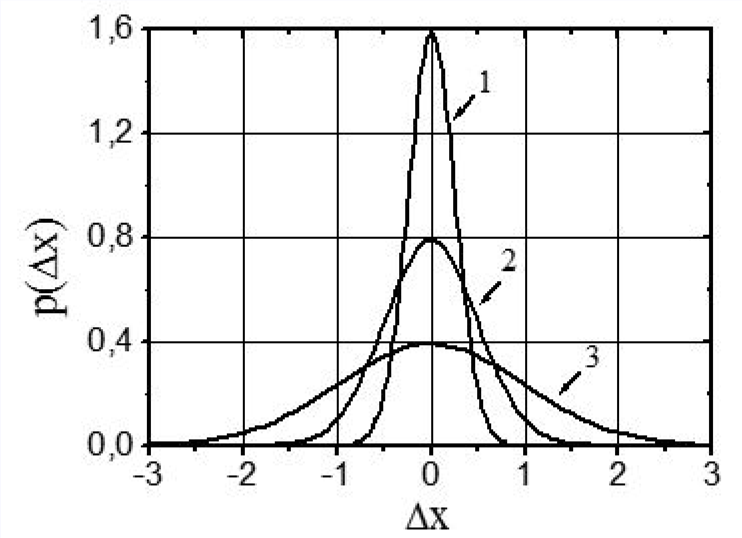


Рисунок 6 – График нормального распределения

График нормального распределения представлен на рисунке 6, где изображены кривые нормального распределения для трех значений σ (0,25 - кривая 1; 0,5 - кривая 2; и 1 - кривая 3). По оси абсцисс отложена случайная погрешность Δx, по оси ординат – плотность вероятности появления случайной величины $p(\Delta x)$.

Закон нормального распределения показывает, что наиболее вероятны ошибки, близкие к нулю. Ошибки, равные по величине, но противоположные по знаку, равновероятны. Вероятность получения результата случайной погрешности, которую удобно выражать в единицах σ, равна площади, ограниченной кривой распределения и двумя перпендикулярами к оси абсцисс. Интегралы от функции Гаусса для различных пределов интегрирования вычислены и заданы в виде подробных таблиц. Для проведения анализа распределения обычно используют симметричный относительно $\overline{x}$ доверительный интервал $\overline{x} - \Delta x$, $\overline{x} + \Delta x$.

Так как число измерений конечно, то вычисляют значение не величины σ, а ее приближенного значения S, которое находится в таком же отношении к σ, как средний результат к математическому ожиданию: чем больше число наблюдений, тем меньше S может отличаться от σ. Величину S называют выборочным средним квадратичным отклонением результата наблюдения. По определению

$$S = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}, \qquad (0.28)$$

где n - число измерений. Очевидно, что при $n \to \infty$, $S \to \sigma$. Отношение площади участка внутри которого находится случайная величина, ко всей площади, заключенной между осью абсцисс и кривой Гаусса, есть вероятность того, что погрешность определения случайной величины заключена в доверительном интервале. Если рассчитать вероятность появления погрешностей, заключенных в интервале от $-\sigma$ до $+\sigma$, то она окажется равной 0,68, т. е. примерно каждое третье измерение даст результат за пределами этого интервала. Интервалу от -2σ до $+2\sigma$ соответствует вероятность 0,95, и за его пределами окажется один результат из двадцати. Увеличение полуширины интервала значений погрешностей до $+3\sigma$ приводит к увеличению вероятности до 0,997, и лишь один результат из трехсот окажется за его пределами. Таким образом, интервал $\pm 3\sigma$ является почти достоверным, так как подавляющее большинство отдельных результатов многократного измерения случайной величины окажется в его границах. При дальнейшем увеличении ширины интервала допустимых значений погрешностей вероятность их появления будет стремиться к единице.

Тогда вероятность α появления погрешностей в заданном интервале их значений определяется выражением

$$\alpha = \int\limits_{\overline{x}-\Delta x}^{\overline{x}+\Delta x} \rho(\xi) d\xi, \tag{0.29}$$

где ξ текущая переменная. Другими словами, доверительная вероятность или коэффициент надежности α - это вероятность того, что истинное значение случайной величины находится в интервале от $\overline{x} - \Delta x$ до $\overline{x} + \Delta x$.

Для определения среднего значения $\overline{x}$ проводят n опытов, при этом границы погрешности единичного измерения x_i определяются доверительным интервалом. В качестве величины, характеризующей отклонение $\overline{x}$ от истинного значения искомой величины x, принимается среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{0.30}$$

Данное выражение строго доказывается в теории случайных погрешностей. Оно подтверждает принципиальную возможность уменьшения величин случайных погрешностей при увеличении числа опытов.

На практике число измерений конечно, поэтому при определении полуширины доверительного интервала используют не σ, а S. Понятно, что данному доверительному интервалу соответствует меньшая доверительная вероятность. С целью учета этого обстоятельства, вводят коэффициенты Стьюдента (псевдоним английского математика Госсета) $t_{\alpha n}$. Данный коэффициент позволяет по заданной надежности найти полуширину доверительного интервала, выраженную в долях S.

Коэффициенты Стьюдента определяются количеством измерений и значениями доверительной вероятности и обычно приводятся в виде таблиц. Тогда измеряемая величина в случае конечного числа измерений определяется выражением:

$$x = \overline{x} \pm \frac{t_{\alpha n} \cdot S}{\sqrt{n}}. \tag{0.31}$$

Методика обработки результатов измерений, предложенная Стьюдентом в настоящее время является общепризнанной. Ее обычно применяют при числе измерений $n \leq 50$. Она основана на введении дискретной функции распределения для случайной величины, подчиняющейся нормальному распределению в предположении, что систематические ошибки отсутствуют. Нормальное распределение проявляется тогда, когда суммарная погрешность есть результат неучтенного совместного воздействия целого ряда причин, каждая из которых дает малый вклад в погрешность. Причем совершенно неважно, по какому закону распределен каждый из вкладов в отдельности. Значения коэффициентов Стьюденты приведены в Приложении.

3. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) – это статистический метод, который используется для нахождения наилучшей линейной аппроксимации экспериментальных данных. Метод основан на минимизации суммы квадратов отклонений между исходными данными и прямой линией, наиболее близкой к этим данным.

Пусть имеется набор данных x и y. Необходимо найти уравнение линейной функции, которая наилучшим образом описывает эти данные.

Уравнение линейной функции имеет следующий вид: $y = ax + b$.

Чтобы найти наилучшую линейную аппроксимацию, необходимо определить значения a и b, которые минимизируют сумму квадратов отклонений между исходными данными и линией. Эта сумма квадратов отклонений выглядит следующим образом: $\sum(y_i - ax_i - b)^2 n$, где n – количество точек данных. Для минимизации этой суммы квадратов можно применить метод дифференциального исчисления и найти значения a и b, приравняв производные по a и b к нулю. Это приводит к следующим уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Решая эти уравнения относительно a и b, мы получаем следующие значения:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

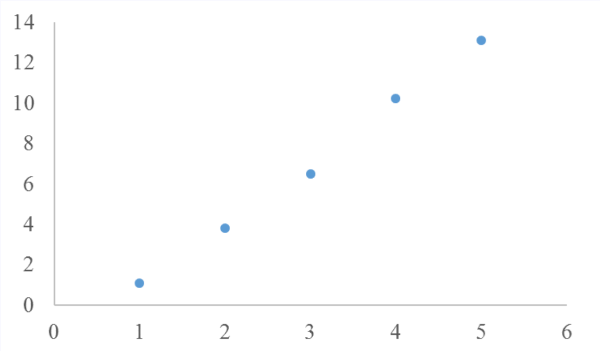
или

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} * \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Рассмотрим 2 примера.

Пример 1: пусть имеется набор значений x и y.



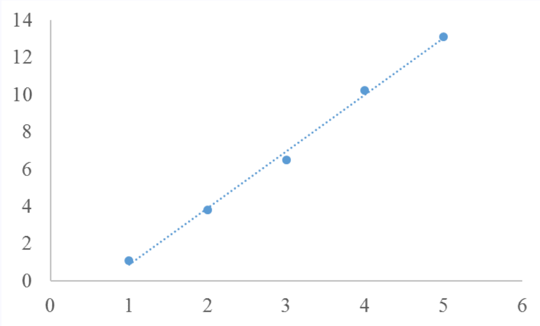
Для удобства запишем их в табличном виде:

	y	x	x^2	x*y
Значения	1,1	1	1	1,1
	3,8	2	4	7,6
	6,5	3	9	19,5
	10,2	4	16	40,8
	13,1	5	25	65,5
сумма	34,7	15	55	134,5
среднее	6,94	3	11	26,9

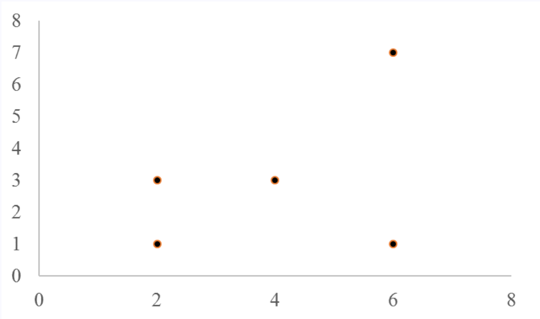
Найдём параметры a и b в зависимости $y = a + bx$: $a = 3,04$ и $b = -2,18$.

$y = 3,04x - 2,18$.

Начало
Содержание
Страница 50 из 113
Назад
На весь экран
Закрыть

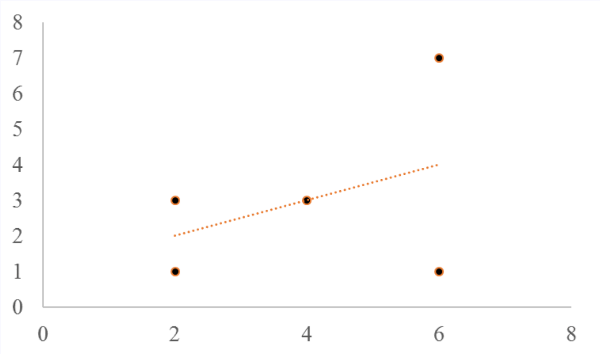


Пример 2: пусть имеется набор значений x и y.



	y	x	x^2	x*y
Значения	1	2	4	2
	3	2	4	6
	1	6	36	6
	3	4	16	12
	7	6	36	42
сумма	15	20	96	68
среднее	3	4	19,2	13,6

$$y = 0,5x + 1.$$



Таким образом, мы получаем уравнение линейной функции, которое наилучшим образом аппроксимирует исходные данные.

Одним из преимуществ метода наименьших квадратов является то, что он позволяет оценить точность вероятнейшего значения.

Метод наименьших квадратов может быть обобщен на другие типы функций, такие как полиномы и экспоненциальные функции.

Несмотря на все преимущества метода наименьших квадратов, следует помнить, что он предполагает линейную зависимость между переменными. Если зависимость не является линейной, результаты метода могут быть неточными или непригодными для использования.

1. Оценка погрешностей при прямых измерениях

Контрольные вопросы

1. Виды измерений, их отличия между собой.
2. Классификация погрешностей измерения.
3. Факторы, влияющие на каждый из видов погрешностей.

Задания

Задача 1. Секундомером с ценой деления 0,01 с было измерено время движения бруска по наклонной плоскости. Результаты десяти измерений оказались следующими: 2,62 с, 2,64 с, 2,66 с, 2,63 с, 2,63 с, 2,64 с, 2,65 с, 2,65 с, 2,68 с, 2,68 с. С вероятностью 0,95 определить среднее значение измеряемой величины, абсолютную и относительную погрешности измерения. Ответ записать в интервальной форме.

Ответ: $t = (2{,}65 \pm 0{,}02)$ *с, 0,8%.*

Задача 2. Линейкой с ценой деления 0,1 см измерили высоту цилиндра, при этом результаты измерений оказались следующими: 6,4 см, 6,6 см, 6,7 см, 6,5 см, 6,8 см, 6,2 см, 6,6 см и 6,6 см. С вероятностью 0,95 определить среднее значение высоты цилиндра, абсолютную и относительную погрешности измерения. Ответ записать в интервальной форме.

Ответ: $h = (6{,}6 \pm 0{,}2)$ *см, 3%.*

Задача 3. Температура воды в сосуде измерялась десять раз одним и тем же термометром с ценой деления 0,1°C. Значения температуры оказались следующими: 15,8°C, 14,9°C, 15,2°C,15,6°C ,15,3°C, 15,8°C, 14,9°C, 15,7°C, 15,9°C, 15,1°C. С вероятностью 0,95 определить среднее значение измеряемой величины, абсолютную и относительную погрешности измерения. Ответ записать в интервальной форме.

Ответ: $T = (15{,}4 \pm 0{,}3)^\circ C$, *2%.*

Задача 4. Миллиамперметром с ценой деления 0,1 мА была измерена сила тока через резистор, при этом результаты измерения оказались следующими: 12,3 мА, 12,4 мА, 12,5 мА, 12,5 мА, 12,6 мА, 12,4 мА, 12,5 мА, 12,3 мА, 12,6 мА и 12,3 мА. С вероятностью 0,95 определить среднее значение силы тока, абсолютную и относительную погрешности измерения. Ответ записать в интервальной форме.

Ответ: $I = (12{,}4 \pm 0{,}1)$ *мА, 0,8%.*

Контрольные вопросы

1. Что такое класс точности прибора?
2. Как, зная класс точности прибора, рассчитать абсолютную и относительную погрешности измерений?
3. Какие классы точности существуют и применяются на практике?
4. Приборы с каким классом точности предпочтительнее выбирать для проведения точных измерений? Для проведения демонстрационного эксперимента?

Задания

Задача 1. Вольтметром, рассчитанным на максимальное напряжение 150,00 мВ, измерили напряжение, при этом результат оказался следующим: U = (114,00 ± 2,00) мВ. Определить класс точности вольтметра, если известно, что абсолютная случайная погрешность оказалась равной 0,02.

Ответ: $K = 1$.

Задача 2. Чему равна абсолютная случайная погрешность погрешность амперметра классом точности 2,5 и максимальным значением тока 20,0 А, если по результатам измерений среднее значение тока оказалось равным 15,6 А, а относительная погрешность 3,0%?

Ответ: $\Delta_{сл} = 0{,}4$.

Задача 3. Определить, на какую максимальную силу тока рассчитан амперметр классом точности 0,2%, если сила тока, им измеренная, оказалась равной $(15{,}00 \pm 3{,}00)$ мкА, а абсолютная случайная погрешность оказалась равной 2,07.

Ответ: $I = 16{,}3$ *мкА.*

Задача 4. Чему равна абсолютная случайная погрешность микровольтметра классом точности 1% и максимальным значением 200,0 мкВ, если по результатам измерений среднее значение напряжения оказалось равным 155,6 мкВ, а относительная погрешность 1%.

Ответ: $\Delta_{сл} = 0{,}8$ *мкВ.*

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются косвенными? Привести примеры.
2. В чём суть дифференциального метода расчёта погрешностей?
3. В чём суть расчёта погрешностей методом нижних и верхних границ (метод границ)?

Задания

Задача 1. Сила тока на участке некоторой цепи I = (2,4 ± 0,3) мА, напряжение
U = (5,7 ± 1,3) В. Определить методом границ и дифференциальным методом сопротивление участка цепи и его погрешность.

Ответ: R = (2,5 ± 0,9) кОм, 36%.

Задача 2. Давление воздуха в колбе при температуре 8°С, измеренное пять раз, составило 757 мм.рт.ст., 740 мм.рт.ст., 749 мм.рт.ст., 755 мм.рт.ст. и 743 мм.рт.ст. При этом масса воздуха в колбе была равной 1,2 г, 1,0 г, 1,1 г, 1,1 г и 1,1 г. Объём колбы 700 см^3. Минимальное значение давления, которое можно измерить, 1 мм.рт.ст., массы – 0,1 г. С вероятностью 0,95 определить методом границ и дифференциальным методом значение универсальной газовой постоянной и её погрешность.

Ответ: R = (6,6 ± 1,4) Дж/моль·K, 21%.

Задача 3. При определении электрохимического эквивалента меди получены следующие результаты: масса катода до опыта $m_1 = (12380 \pm 5)$ мг; масса катода после опыта $m_2 = (12930 \pm 5)$ мг; сила тока I $= (2{,}1 \pm 0{,}1)$ А; время прохождения тока t $= (720 \pm 3)$ с. Применив метод границ и дифференциальный метод, рассчитать электрохимический эквивалент меди.

Ответ: k = (3,65 ± 0,25)·10-7 кг/А·с, 7%.

Задача 4. Длина медной проволоки измерялась семь раз линейкой (цена деления $h_{min} = 1$ мм), при этом её значение оказалось равной 2,3 см, 2,3 см, 2,4 см, 2,3 см, 2,5 см, 2,4 см, 2,5 см. Диаметр проволоки измерялся штангенциркулем (цена деления $h_{min} = 0{,}5$ мм), при этом его значение оказалось равным 7,5, 8,0, 7,5, 7,8, 7,8, 8,0, 8,2 мм. С вероятностью 0,95 определить методом границ и дифференциальным методом значение сопротивления проволоки, если её удельное сопротивление 170 мОм·м.

Ответ: R = (0,81 ± 0,11) мОм, 14%.

4. Принцип Крылова-Брадиса

Цель работы: изучить принцип Крылова-Брадиса, а также научиться применять этот принцип для правильной записи приближённого числа.

Краткая теория

Значащие цифры. Верные, сомнительные и неверные цифры

Приближённое число может быть целым или записываться в виде конечной десятичной дроби. При этом устанавливается такой способ записи приближённого числа, при котором по записи числа можно установить его погрешность. ***Значащими*** цифрами числа называют все цифры его десятичной записи, кроме нулей, стоящих *перед первой цифрой*, отличной от нуля. Значащей цифра называется потому, что она является представителем того или иного разряда. Например: в числе 3,57 цифра 3 означает разряд единиц; цифра 5 означает разряд десятых, цифра 7 – разряд сотых. Тысячные и другие более мелкие доли неизвестны, поэтому не означены никакими цифрами.

В точных числах, в отличие от приближённых, представители неозначенных разрядов известны – это нули.

Например, если числа 3,5 и 3,50 – точные, то записи эти равноценны, в противном случае они различны: первое содержит две значащие цифры (3 и 5), второе – три (3, 5 и 0).

От нулей, не являющихся значащими цифрами, можно избавиться, если число записать в стандартной форме. В стандартной форме записи приближенного числа *первую значащую цифру* ставят в разряд единиц, а остальные (общее их количество сохраняется) – в десятичные разряды после запятой. Полученное число умножается на 10^n, где n – положительное или отрицательное число. Например: $49860 \to 4,9860 \cdot 104$; $1263 \to 1,263 \cdot 103$; $0,0336 \to 3,36 \cdot 10-2$; $0,790 \to 7,90 \cdot 10-1$; $0,005 \to 5 \cdot 10-3$.

Приближенные числа, получаемые в результате измерений и вычислений, могут содержать разное количество значащих цифр, среди которых есть *верные, сомнительные и неверные.*

Цифра α приближенного числа называется *верной,* если его абсолютная погрешность не превышает *половины единицы* того разряда, в котором записана цифра α (определение в строгом смысле).

Принимается за правило: при десятичной форме записи писать только верные цифры (табличная форма записи, так как в такой форме записи приводятся данные в справочных таблицах), тогда по записи сразу можно определить абсолютную погрешность.

При решении задач и выполнении лабораторных работ по физике часто используют понятие верной цифры в широком смысле.

Цифра α приближенного числа называется верной, если его абсолютная погрешность не превышает единицы того разряда, в котором записана цифра ?. Например, в приближенном числе $b = (567 \pm 3)$ аб-

солютная погрешность равна 3. Найдём верные цифры. $\alpha = 5$ стоит в разряде сотен, $100 > 3$, поэтому $\alpha = 5$ верная; $\alpha = 6$ стоит в разряде десятков, $10 > 3$, поэтому $\alpha = 4$ верная; $\alpha = 7$ стоит в разряде единиц, $1 < 7$, поэтому $\alpha = 7$ неверная. Таким образом, в числе 567 верных цифр только
две: 5 и 6.

Из выше сказанного следует, что *абсолютная погрешность* приближенного числа *однозначно* определяет *количество его верных значащих цифр*. Поэтому необходимо научиться определять абсолютную погрешность измерений, проводимых при выполнении лабораторных работ по физике.

Цифра β, стоящая за последней верной, называется *сомнительной*.

В числе (347 ± 2) сомнительной является $\beta = 7$.

Цифры, стоящие за сомнительной называют неверными, поэтому они должны быть отброшены, как не содержащие верной информации.

Правило записи приближенного числа с сохранением всех верных и одной сомнительной цифры было сформулировано и обосновано В.М. Брадисом на основе идей А.Н. Крылова и носит название принципа Крылова-Брадиса.

Округление чисел.
Цифра 0 в последнем разряде приближённого числа

Очень часто число, точное или приближённое, содержит в своей записи больше цифр, чем это необходимо. В таких случаях производят округление, пользуясь следующими правилами.

1. Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры стоящие справа от n-ой значащей цифры.

2. Если первая *(при счете слева направо)* отбрасываемая цифра округляемого числа меньше 5, то последняя сохраняемая значащая цифра не изменяется. Например: число $b = 7{,}1824$ нужно округлить до трех значащих цифр. Последняя цифра в округленном числе 8 должна быть оставлена без изменения, так как первая отброшенная цифра 2 в разряде тысячных $<$ 5. Тогда $b \approx 7{,}18$.

3. Если первая отбрасываемая цифра округляемого числа ≥ 5, то последняя сохраняемая значащая цифра увеличивается на единицу. Например: $b = 0{,}3814$ нужно округлить до одной значащей цифры. Последняя цифра в округленном числе 3 должна быть увеличена на 1, так как первая отброшенная цифра $8 > 5$, $b \approx 0{,}4$.

Итак, в первом случае число округлено с недостатком: $7{,}18 < 7{,}1824$, а во втором случае с избытком: $0{,}4 > 0{,}3814$.

Примечание Округление целых чисел (или вместе с дробной частью) следует производить в два этапа: сначала записать его в стандартной форме, а затем отбросить соответствующие значащие цифры. При округлении чисел, записанных в стандартной форме, а затем отбросить соответствующие значащие цифры. При округлении чисел, записанных в стандартной форме и содержащих множитель 10^n, отбрасываются только значащие цифры числа, сам множитель 10^n сохраняется. Например, надо округлить числа 77142 и 25392 до трех значащих цифр:

$$77142 = 7,8142 \cdot 104; \qquad 7,71 \cdot 104; \qquad (4 < 5)$$
$$25392 = 1,6392 \cdot 104; \qquad 2,54 \cdot 104; \qquad (9 > 5)$$

При записи приближенных чисел, полученных при измерениях или вычислениях, в последнем разряде может оказаться цифра 0. В ряде случаев цифра 0 в последнем разряде приближённого числа отражает вполне определенную информацию о значении измеряемой или рассчитываемой физической величины. В этом смысле цифра 0 ничем не отличается от любой другой цифры.

В приближённых числах нужно указывать верные, а также сомнительную цифру и в тех случаях, когда они являются нулями.

Пример 5. *Пусть при измерении силы тока амперметром стрелка остановилась посередине между делениями шкалы 24 и 25. Записыва-*

ем $n = 24{,}5$. Если стрелка прибора остановилась точно на делении 24, т.е. половины деления в отсчете нет, то в записи это отражается цифрой 0 в разряде десятых. Отсчет записывается в виде: $n = 24{,}0$ деления. Ответ записывать в виде $n = 24$ нельзя, так как это число могло быть получено путём округления на глаз, например, $n_1 = 23{,}8$; $n_2 = 23{,}9$; $n_3 = 24{,}1$ и т.д. Таким образом, два числа 24,0 и 24 отличаются друг от друга: число 24,0 означает, что точно известны десятки, единицы, а десятые доли – их ноль; неизвестными являются более мелкие доли (сотые, тысячные и т.д.).

Пример 6. *Пусть длина проволоки 800 мм. Нельзя записать 0,8 м, т.к. потеряна информация о сотых и тысячных долях метра. Правильной будет запись 800 мм $=$ 80,0 см $=$ 0,800 м.*

При выражении результата в любых единицах измерения *сохраняется одинаковое количество значащих цифр* (в данном примере их три: 8,0,0).

Иногда, при измерениях приписывают дополнительные нули в конце приближенного числа, *после его сомнительной цифры,* что недопустимо.

Задания

1. Определить, сколько значащих цифр в каждом из приведённых значений плотностей различных веществ (ρ, кг/м^3): водород – 0,090; гелий – 0,179; азот – 1,251; хлор – 3,22; вода – $1,00 \cdot 10^3$; ртуть – $13,60 \cdot 10^3$; лёд – $0,92 \cdot 10^3$; железо – $7,90 \cdot 10^3$.
2. Скорость звука в различных веществах (км/с) составляет: в воздухе (при 0°C) – 0,0332; в воде – 1,5; в пробке – 0,5; в граните – 4,0; в стали – 5. Сколько значащих цифр в каждом числе? Сколько их будет, если соответствующие значения выразить (не изменяя точности каждого результата) в единицах СИ?
3. Почему при записи приближённого числа в стандартной форме количество значащих цифр следует оставлять без изменения? Привести примеры.
4. Записать в стандартной форме следующие числа:
а) отношение массы протона к массе электрона $m_p/m_e = 1836$;
б) поверхностное натяжение воды $\sigma = 0{,}0727$ Н/м.
5. Выразить в единицах СИ и записать в стандартной форме (без изменения точности) следующие приближенные числа: сила тока I = 32,5 мА; электроёмкость конденсатора C = 0,0038 мкФ.
6. Сформулировать принцип Крылова-Брадиса и определить верные и сомнительные цифры в следующих числах:
а) объём цилиндра V = (101 ± 3) см^3;
б) период колебаний маятника T = (2,5 ± 0,2) с;
в) коэффициент трения $\mu = 0{,}244 \pm 0{,}002$;

г) удельная теплоёмкость воды $c = (4{,}190 \pm 0{,}003) \cdot 103$ Дж/(кг·К).
7. Определить, сколько значащих и верных цифр в каждом результате:
а) фокусное расстояние линзы $F = (30{,}7 \pm 0{,}4)$ см;
б) масса тела $m = (12{,}3 \pm 0{,}2)$ г;
в) показатель преломления стекла $n = (1{,}56 \pm 0{,}04)$.
8. Какая разница между точным числом 2,5 и приближённым числом 2,5?
9. Расчёт показал, что вода на электроплитке должна закипеть через 10,35 мин. С избытком или с недостатком нужно округлить такой результат? Почему?
10. С избытком или с недостатком округляются нижняя и верхняя границы измеряемой или рассчитываемой физической величины? Почему?
11. Округлить до тысячных долей плотности (ρ, кг/м^3) следующих газов: водорода – 0,08988; неона – 0,8999; воздуха – 1,2928; углекислого газа – 1,9768. Округлить эти же значения до сотых долей.
12. Округлить до трех значащих цифр значения следующих величин: постоянной Планка $h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$Дж·с; постоянной Больцмана $k = 1{,}380622 \cdot 10^{-23}$Дж/К; нормального атмосферного давления $p_0 = 1{,}01325 \cdot 10^5$Па; скорость света в вакууме $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$м/с.
14. Может ли после округления точного числа получиться снова число точное?
15. Не округляя приближённых чисел, выразить значение длины 500 мм в сантиметрах и в метрах; массы 300 мг – в граммах; электрического

Кафедра общей и теоретической физики

напряжения 220В – в киловольтах; силы тока 250 mA – в амперах.

16. Выразить в единицах СИ следующие приближённые значения величин: 5,0 т; 6,3 кВ; 460 mA; 1,1 г/см^3; 10 мкФ; 0,27 кДж; 3,7·10^2 МОм.

17. Два студента измерили ширину аудитории и ответы записали в виде 8,2 м и 8,20 м. Какой из ответов более точный?

Цель работы: изучить классификацию погрешностей, причины их появления и способы устранения, а также научиться правильно оформлять результаты обработки данных эксперимента.

Краткая теория

Приближённые числа. Абсолютная и относительная погрешности

Приближённое значение имеет практическую ценность лишь тогда, когда мы можем определить, с какой степенью точности оно дано, т.е. оценить его погрешность.

Обозначим истинное значение величины через $x_{\text{ист}}$, а приближённое значение величины через x. Погрешностью приближённого значения величины называют разность между истинным значением. $x_{\text{ист}}$, величины и её приближённым значением x, т.е. $x_{\text{ист}} - \mathrm{x} = \Delta x$.

Так как истинное значение измеряемой величины неизвестно, то заранее установить знак Δx не представляется возможным, поэтому вводят понятие абсолютной погрешности Δx. Модуль разности между истинным значением величины и её приближенным значением называют абсолютной погрешностью, т.е. $|x_{\text{ист}} - x| = |\Delta x|$.

При повторных измерениях одной и той же величины в одинаковых условиях опыта, как правило, получают разные приближенные значения измеряемой величины $x_1, x_2, {}_3, \ldots, {}_n$. Это указывает на неодинаковые значения абсолютных погрешностей в разных опытах.

Результат измерения записывают в следующем виде: $x_{\text{ист}} = x_{\text{изм}} \pm \Delta x$. Такая форма записи приближённого значения чисел называется интервальной.

Знание абсолютной погрешности недостаточно для характеристики точности измерения или вычисления. Поэтому качество результата измерения принято характеризовать относительной погрешностью.

Относительной погрешностью ε называют отношение абсолютной погрешности x к значению измеряемой величины, т.е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{\text{изм}}} 100\%.$$

Виды измерений. Классификация погрешностей

Измерением называют нахождение значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств. Различают следующие виды измерений физических величин:

1) **прямые измерения** - это такие измерения, при которых значение искомой величины находится непосредственно из отсчета по прибору;

2) **косвенные измерения** - это такие измерения физической величины, при которых значение искомой величины находится по формуле как

функции других величин;
3) совместные измерения - это измерения, состоящие из прямых измерений
нескольких физических величин в изменяющихся условиях и последующего нахождения зависимости между ними;
4) измерения постоянной или мало изменяющейся физической величины называют **статическими измерениями;**
5) измерения переменной во времени величины называют **динамическими**
измерениями.

Равноточные и разноточные измерения

Равноточными измерениями называют такие измерения, которые проделаны одним и тем же методом в одинаковых условиях, с одинаковой тщательностью.

Разноточными измерениями называют такие измерения физической величины, при которых использовались различные методы; в различных условиях проводился эксперимент; использовался один и тот же метод, но с различной степенью точности и т.д. При любом измерении определяется не абсолютно точное, а приближенное значение искомой физической величины, т.е. в полученном результате измерения содержится некоторая неточность или погрешность.

Источников погрешностей много: несовершенство приборов, наших органов
чувств, влияние внешних факторов (толчки, изменение трения, температуры, электрические и магнитные поля и т.д.), изменение самого измеряемого объекта; неполнота теоретической модели; приближенный характер метода, округление при отсчетах и вычислениях и т.д. Причины, приводящие к погрешностям, неизбежны, а значит, неизбежны и сами погрешности. Поэтому цель экспериментатора состоит в том, чтобы: **1)** определить значение измеряемой величины; **2)** оценить эту погрешность; **3)** правильно округлить результат.

В лабораторном физическом практикуме различают следующие погрешности:

1) погрешность отсчета возникает при использовании измерительных приборов – $\Delta x_{\text{отс}}$;

2) инструментальная (приборная) погрешность, обусловлена устройством самого измерительного средства – $\Delta_{\text{инс}}$;

3) случайная погрешность – $\Delta_{\text{сл}}$;

4) систематические погрешности – $\Delta_{\text{сист}}$;

5) погрешность вычисления или погрешность округления – $\Delta_{\text{выч}}$;

6) промахи.

Поэтому полная погрешность измерения значения физической величины определяется суммой погрешностей: $\Delta = \Delta_{\text{отс}} + {}_{\text{сл}} + {}_{\text{приб}} + {}_{\text{выч}}$.

Рассмотрим влияние на результат измерения некоторых погрешностей.

Случайными погрешностями $\Delta x_{сл}$ называют погрешности, которые непредсказуемым (случайным) образом меняют свою *величину и знак* при проведении повторных опытов в *одинаковых* условиях. Случайные погрешности вызываются большим количеством одновременно действующих причин, характер и размер влияния которых на результат измерения со временем беспорядочно изменяется. Они возникают, например, при взвешивании из-за колебаний установки; неодинакового влияния трения; из-за несовершенства измерительных приборов и наших органов чувств; из-за неодинаковой тщательности измерений. Случайные погрешности могут быть связаны с самим измеряемым объектом, например, при измерении диаметра цилиндра, имеющего круглое основание и неодинаковое сечение в разных местах, результаты измерений будут содержать случайные погрешности.

В теории погрешностей эти ошибки трактуются как случайные величины, влияние которых на результат эксперимента может быть оценено методами математической статистики. Поэтому оценить случайную погрешность и уменьшить ее влияние на результат можно многократными измерениями значения физической величины. При достаточно большом числе повторных опытов происходит почти полная компенсация случайных погрешностей как завышающих результат, так и занижающих его.

Систематическими погрешностями называются такие погрешности, размер и знак которых во всех повторяющихся опытах остаются постоянными (при неизменных условиях). При изменении условий систематическая погрешность может изменяться по определенному закону. Систематические ошибки можно разделить на четыре группы:

а) погрешности, природа которых известна и может быть определена их величина. Например, погрешности, возникающие из-за теплового расширения линейки; температурной зависимости сопротивления резистора; использования приближенной теории явления и т.д. Такие погрешности учитываются введением соответствующих поправок;

б) погрешности известного происхождения, но неизвестной величины. В этом случае необходимо их либо заранее измерить и ввести поправки, либо использовать другой метод измерения, исключающий влияние внешних помех. Например, при измерении радиоактивности некоторого элемента, необходимо учитывать влияние естественного фона радиации;

в) погрешности неизвестного происхождения и неизвестной величины. В этом случае рекомендуется использовать другие методы (например, при определении плотности твердого тела, внутри которого имеются полости и т.д.);

г) приборные погрешности: всякий измерительный прибор и устройство дает показания с некоторой ошибкой, предельное значение которой гарантируется при его изготовлении. Приборные погрешности указываются на самом приборе или в его паспорте. Следует отметить, что повторными измерениями нельзя устранить систематические погрешности. Их влияние можно уменьшить путем совершенствования измерительной техники. На практике систематические погрешности учитываются при помощи коэффициентов.

Промахами называются грубые ошибки, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Промахи возникают вследствие небрежного отсчета по прибору, ошибочной записи результата измерений, неправильного включения прибора и т.д. Наличие промахов может быть обнаружено по резкому отличию значения отдельного наблюдения от среднего арифметического или положения одной точки от общего характера расположения остальных точек на графике. Измерения, содержащие промахи, отбрасываются, опыт повторяют.

Округление погрешностей и запись результатов эксперимента

Методы обработки результатов измерений приближенные, поэтому они позволяют оценить значение погрешностей приближенно. В учебных лабораториях абсолютную погрешность округляют до одной значащей цифры, при этом округление производят с избытком, чтобы оценить ее верхнюю границу. Аналогично поступают и с относительными погрешностями.

Правила записи результатов измерений в интервальной форме следующие:

1. Результат измерения записывается вместе с его погрешностью: $\mathrm{v} = (45 \pm 5)$ см^3.

2. Погрешность округляется с избытком до одной значащей цифры: Δt

= 0,6 с.
3. Конечный результат округляется так, чтобы его последняя цифра и значащая цифра абсолютной погрешности принадлежали к одному и тому же разряду:
l = (434,0 ± 0,4) см.
4. Если в ответе содержится множитель 10^n, то показатель степени и в результате и в его абсолютной погрешности должен быть одинаковым:
R = (2,57 ± 0,05) 10^3 Ом.
5. Измеряемая величина и её абсолютная погрешность выражаются в одних единицах: I = (1,440 ± 0,006) А.

Задания

1. Для определения удельного сопротивления проволоки собрали электрическую цепь, силу тока I в которой измерили амперметром, напряжение U на концах участка проволоки – вольтметром, длина проволоки L была измерена линейкой, а диаметр проволоки D – микрометром. Площадь поперечного сечения проволоки S определена по формуле $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, а удельное сопротивление ρ – по формуле $\rho = \dfrac{US}{IL}$. Какие измерения в этой работе прямые и какие косвенные?
2. Случайными или систематическими являются погрешности в следующих случаях:
а) при измерении времени вследствие замедленного хода часов;
б) при измерении объема мензуркой из-за использования горячей воды;
в) при расчете скорости движения тела по наклонной плоскости вслед-

ствие пренебрежения трением;
г) при измерении толщины оконного стекла в разных его местах;
д) при измерении времени из-за округления показаний секундомера.

3. При измерении сопротивления участка электрической цепи, оказавшегося равным R = 150 Ом, экспериментатор пренебрёг сопротивлением амперметра $R_A = 5$ Ом. Какую относительную погрешность он допустил? Случайная она ил

4. При измерении времени 20-ти колебаний маятника получены результаты: 12,8; 12,6; 12,2; 12,4; 15,8; 12,4 с. Имеются ли в этой серии измерений промахи?

5. При измерении микрометром диаметра проволоки d получены следующие результаты: 0,67; 0,68; 0,64; 0,69; 0,65; 0,63; 0,67; 0,68 мм. Определить среднее значение диаметра проволоки.

6. Правильно ли записан результат измерений: $g = (980 \pm 20)$ см/с^2?

7. Студент представил результат измерений в следующей форме: $P = 1,01 \cdot 10^5 \pm 3$ кПа. Записать ответ правильно.

8. Запишите в соответствии с принятыми правилами следующие результаты измерений: $1,28\textit{м} \pm 1\textit{см}$; $U = 0,450B \pm 5\textit{мB}$; $I = 240\textit{мA} \pm 0,002A$.

9. При измерении оказалось:
а) диаметр цилиндра d = 110,5 мм, абсолютная погрешность d = $2 \cdot 10^{-4}$м;
б) скорость движения ленты конвейера V = 0,033 м/с при возможной погрешности ΔV = 0,2 см/с. Записать эти результаты в интервальной форме.

6. Прямые измерения и методы их обработки

Цель работы: изучить методы обработки результатов прямых измерений.

Краткая теория
Прямые измерения и методы их обработки

В задачу прямого измерения входят:

1) определение наиболее достоверного значения измеряемой величины;
2) учёт поправок на систематическую погрешность;
3) оценка случайной погрешности;
4) оценка инструментальной (приборной) погрешности;
5) оценка погрешности отсчёта;
6) оценка погрешности вычисления (вследствие округления);
7) оценка полной погрешности измерения.

При самой высокой тщательности проведения измерений, случайных ошибок не избежать. Если количество измерений значения данной физической величины велико, то случайные погрешности разного знака будут встречаться одинаково часто и при суммировании результатов всех наблюдений они почти скомпенсируют друг друга.

Среднее арифметическое значение измеряемой величины в серии прямых измерений принимают за наиболее достоверное её значение:

$x_{\text{изм}} = < x > = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, где $x_{\text{изм}}$ – наиболее достоверное значение измеряемой величины; $< x >$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины; n –число измерений; x_i – значение измеряемой величины в i-м измерении.

Вычисление погрешностей при прямых измерениях

Погрешность отсчета $\Delta x_{\text{отс}}$ Показания приборов и мер при измерениях нередко округляются. В результате возникают погрешности отсчета. Это случайные погрешности. Вводится понятие интервала округления h. Если отсчет снимается с точностью до целого деления шкалы прибора, то интервал округления h равен цене деления шкалы прибора; если отсчет округляется до половины деления, то интервал округления h равен половине цены деления, т.е. h зависит от качества изготовления шкалы. Максимальная абсолютная погрешность отсчета не превышает половины интервала округления h, т.е. $\Delta x_{\text{отс}} = h/2$. Отметим, что отсчёт «на глаз» десятых долей деления не гарантирует должной точности. Поэтому в учебных лабораториях рекомендуется производить отсчёт с точностью не большей, чем до **половины цены деления.**

Приборные погрешности (инструментальные) $\Delta x_{\text{пр}}$ или $\Delta x_{\text{инс}}$ Приборные погрешности указываются на приборах и в их паспортах. Для некоторых мер и приборов задается предельная абсолютная погрешность, её и принимают за приборную абсолютную погрешность.

Точность электроизмерительных приборов (амперметров, вольтметров и т.д.), некоторых мер (магазинов сопротивлений, индуктивностей, ёмкостей) и др. приборов характеризуют *классом точности* k. Классы точности бывают: 0,05, 0,1, 0,2, 0,5, 1,0, 1,5, 2,5 и 4,0. Первые четыре класса являются прецизионными (высокоточными), остальные – техническими.

Класс точности k – это число, равное отношению предельной абсолютной погрешности прибора δ к максимальному значению измеряемой им величины, выражаемое в процентах $k = \dfrac{\delta}{x_{max}}100\%$. Зная k, можно найти абсолютную приборную погрешность: $\Delta x_{\text{пр}} = \delta = \dfrac{k}{100}x_{max}$. Относительная приборная ошибка измерения: $\varepsilon_{\text{пр}} = \dfrac{\Delta x_{\text{пр}}}{x_{\text{изм}}}100\%$ или $\varepsilon_{\text{пр}} = \dfrac{x_{max}}{x_{\text{изм}}}k$.

Из последней формулы видно, что для обеспечения хорошей точности, следует выбирать такой прибор, при котором $x_{\text{изм}}$ было близко к x_{max} (для стрелочных приборов отклонение стрелки было бы во второй половине шкалы или почти на всю шкалу). Более строгий учёт приборной погрешности дает для нее значение $\Delta x_{\text{пр}} = \dfrac{2}{3}\delta$. Если неизвестна погрешность прибора, то её можно оценочно принять равной **половине цены деления шкалы прибора.**

Случайные погрешности $\Delta x_{\text{сл}}$. Обозначим истинное значение измеряемой физической величины через $x_{\text{ист}}$, а результат отдельного измерения через x_i. Разность $|\Delta x_i| = |x_i - x_{\text{ист}}|$ называют абсолютным случайным отклонением отдельного измерения. Так как мы не можем найти $x_{\text{ист}}$, то наилучшей математической оценкой истинного значения является среднее арифметическое результатов измерений:

Кафедра общей и теоретической физики

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

$x_{\text{ист}} \approx x_{\text{изм}} =< x >= \dddot{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, где n – число изменений, x_i – значение измеряемой величины в i-м измерении, тогда $x_{\text{изм}} = x_{\text{ср}} = x_{\text{ист}}$.

В качестве **случайной абсолютной погрешности** принимают **среднюю** абсолютную погрешность $\Delta x_{\text{сл}} =< |\Delta x| >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$. Следует учесть, что данная формула даёт правильную оценку $\Delta x_{\text{сл}}$, если $n \geq 10$ (измерения равноточные).

Если $n < 10$, то для оценки верхней границы случайной погрешности поступают следующим образом:

1. $n = 5,\ \Delta x_{\text{сл}} = 3 < |\Delta x| >$.

2. $5 < n < 8,\ \Delta x_{\text{сл}} = 2 < |\Delta x| >$.

Величину $\Delta x_{\text{сл}}$ рассчитывают с учетом одной **запасной** значащей цифры, а затем округляют до одной значащей цифры. Если при повторении измерений нет разброса в показаниях прибора, это означает, что случайные погрешности меньше погрешностей прибора.

Погрешность вычислений $\Delta x_{\text{выч}}$. Этот вид погрешностей возникает при округлении результатов измерений. Все расчеты следует вести с такой точностью, чтобы они не вносили в результат измерений заметной дополнительной погрешности. С этой целью в промежуточных результатах вычислений сохраняют на одну «запасную» значащую цифру больше, чем это требуется правилами действия над приближенными числами. В окончательном результате запасную цифру отбрасывают.

Примечание 1. Если установлена причина какой-либо систематической погрешности и определена ее величина и знак, то такая погрешность устраняется введением поправки в результаты отдельных наблюдений или в среднее значение измеряемой величины $x_{\text{испр}} = x_{\text{изм}} \pm \Delta x_{\text{поправка}}$.

Полная погрешность прямого измерения определяется как сумма четырех погрешностей: $\Delta x = \Delta x_{\text{сл}} + \Delta x_{\text{пр}} + \Delta x_{\text{отс}} + \Delta x_{\text{выч}}$.

Примечание 2. Если одна из погрешностей в (10) окажется в два-три раза меньше других, то её просто отбрасывают; более строго, полная абсолютная погрешность определяется «квадратичным» суммированием: $\Delta x = \sqrt{\Delta x^2_{\text{сл}} + \Delta x^2_{\text{пр}} + \Delta x^2_{\text{отс}} + \Delta x^2_{\text{выч}}}$.

Обработка результатов равноточных прямых измерений. Метод среднего арифметического

1. Проводят несколько измерений искомой величины х при неизменных условиях опыта.

2. Определяют наиболее достоверное значение величины: $< x >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

3. Вычисляют модули отклонения каждого результата от среднего: $|\Delta x_i| = |< x > - x_i|$.

4. Определяют среднюю абсолютную погрешность: $< \Delta x >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} |\Delta x_i|$.

5. Оценивают случайную погрешность:

$\Delta x_{\text{сл}} =< \Delta x >$ при $n \geq 10$;

$\Delta x_{\text{сл}} = 3 < \Delta x >$ при $n = 5$;

$\Delta x_{\text{сл}} = 2 < \Delta x >$ при $n = 7; 8$.

6. Оценивают приборную погрешность: $\Delta x_{\text{пр}} = \delta$; или $\Delta x_{\text{пр}} = \dfrac{k}{100}x$.

7. Оценивают погрешность отсчета: $\Delta x_{\text{отс}} = \dfrac{h}{2}$.

8. Оценивают погрешность вычислений: $\Delta x_{\text{выч}} = |x_{\text{неокр}} - x_{\text{окр}}|$.

9. Оценивают полную погрешность: $\Delta x = \Delta x_{\text{сл}} + \Delta x_{\text{отс}} + \Delta x_{\text{выч}}$.

10. Оценивают относительную погрешность: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x}100\%$.

11. С учётом поправки на систематическую погрешность получаем: $x_{\text{испр}} =< x > \pm\Delta x_{\text{попр}}$.

12. Результат измерений записывают в интервальной форме: $X = (x_{\text{испр}} \pm \Delta x)$,

$\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x_{\text{испр}}}100\%$.

13. Более строго, полная абсолютная погрешность определяется «квадратичным» суммированием: $\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2 + \Delta x_{\text{отс}}^2 + \Delta x_{\text{вын}}^2}$.

Задания

1. Почему среднее арифметическое отклонений отдельных наблюдений от среднего с учётом их знака нельзя использовать как количественную меру случайной погрешности прямого измерения?

2. Милливольтметр рассчитан на максимальное напряжение $U_{max} = 500$ мВ, класс точности прибора К = 1,0%. Какова абсолютная приборная погрешность?

3. С помощью милливольтметра с классом точности 1,5% измерено напряжение на участке цепи. Оно оказалось равным 450 мВ. Определить относительную погрешность, если максимальное напряжение, которое может измерить прибор 500 мВ.

4. Какова погрешность отсчета при измерении напряжения вольтметром (цена деления 1,0 В/дел), если измерения проводились с точностью до одного деления шкалы? до половины деления?

5. С помощью механического секундомера (цена деления 0,2 с/дел) измерено время некоторого числа колебаний маятника, оно оказалось равным 12,4 с. Определить абсолютную и относительную погрешности отсчёта.

6. Найти интервал округления и максимальную абсолютную погрешность отсчета для следующих случаев:

а) измеряют длину L линейкой с миллиметровыми делениями. Отсчёт округляется до 1 мм;

б) стрелка прибора установилась точно на каком-то делении;

в) в механических секундомерах стрелка движется скачкообразно от штриха к штриху по шкале прибора. Остановка стрелки между штрихами невозможна. Цена деления такого секундомера 0,2 с. В этом случае $\Delta x_{\text{отс}} = 0,2$.

7. Было произведено девять измерений массы сосуда с водой: 53,6 г; 53,4 г; 53,8 г; 53,5 г; 53,4 г; 53,7 г; 53,6 г; 53,4 г; 53,8 г. Методом среднего арифметического оценить полную погрешность, относительную погрешность. Результат записать в интервальной форме. Минимальная разновеска – 10 мг.

Результат записать в интервальной форме. Минимальная разновеска – 10 мг.

7. Косвенные измерения и методы их обработки

Цель работы: изучить метод обработки результатов косвенных измерений (метод подсчета цифр, метод границ, дифференциальный метод).

Краткая теория

В ряде случаев при выполнении лабораторных работ приходится определять значение величины, как функцию нескольких величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые находятся путем прямых измерений: $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, найденных при помощи прямых измерений, определены с некоторыми погрешностями, $(x_1 \rightarrow \Delta x_1, x_2 \rightarrow \Delta x_2, \ldots, x_n \rightarrow \Delta x_n)$, которые определенным образом сформируют погрешность величины y, измеряемой при помощи косвенных измерений, т.е. $\Delta y = \phi(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

Задача методов обработки результатов косвенных измерений установить значение y и вид функции ϕ, т.е. формулы, позволяющие оценить абсолютную и относительную погрешность значения величины, полученной в результате косвенных измерений. Для этого существует ряд методов.

Метод подсчёта цифр

Метод обеспечивает получение результата в лабораторных работах с точностью, соответствующей точности исходных данных, полученных при равноточных измерениях. При использовании метода подсчёта цифр придерживаются следующих правил:

1. Проводят все прямые измерения и записывают в табличной форме, т.е. чтобы все их цифры были верными. Если есть возможность, то записывают все результаты с одной сомнительной цифрой, что несколько повысит точность окончательного результата.

2. Все вычисления выполняют по правилам действий над приближёнными числами. Погрешность результата оценивают в две-три единицы разряда последней цифры ответа.

Метод границ

Метод позволяет проводить обработку результатов косвенных измерений и определять величины погрешностей. При использовании метода границ придерживаются следующих правил:

1. Проводят прямые измерения всех величин $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ и записывают результаты в интервальной форме: $x_k =< x_k > \pm \Delta x_k$;

2. Находят нижнюю и верхнюю границы каждой из этих величин: $\text{НГ}(x_k) =< x_k > -\Delta x_k$, $\text{ВГ}(x_k) =< x_k > +\Delta x_k$

Вид функции y	НГ(y)	ВГ(y)
$y = x_1 + x_2$	$НГ(x_1) + НГ(x_2)$	$ВГ(x_1) + ВГ(x_2)$
$y = x_1 - x_2$	$НГ(x_1) - ВГ(x_2)$	$ВГ(x_1) - НГ(x_2)$
$y = x_1 * x_2$	$НГ(x_1) * НГ(x_2)$	$ВГ(x_1) * ВГ(x_2)$
$y = x_1 : x_2$	$НГ(x_1) : ВГ(x_2)$	$ВГ(x_1) : НГ(x_2)$
$y = x^n$	$(НГ(x))^n$	$(ВГ(x))^n$
$y = \sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{НГ(x)}$	$\sqrt[n]{ВГ(x)}$
$y = lg(x)$	$lg(НГ(x))$	$lg(ВГ(x))$
$y = sin(x)$	$sin(НГ(x))$	$sin(ВГ(x))$
$y = cos(x)$	$cos(ВГ(x))$	$cos(НГ(x))$
$y = tg(x)$	$tg(НГ(x))$	$tg(ВГ(x))$

3. Рассчитывают $НГ(y)$ и $ВГ(y)$ косвенно измеряемой величины. В результатах сохраняют запасную цифру.

4. Если значения границ приходится округлять, то НГ(y) округляют с недостатком, а ВГ(y) – с избытком, причём так, чтобы в них сохранились одна-две несовпадающие цифры.

5. Определяют значение измеряемой величины унзм как полусумму её границ: $y_{изм} = \dfrac{ВГ(y) + НГ(y)}{2}$.

6. Находят абсолютную погрешность косвенного измерения как полуразность границ величины y: $\Delta y = \dfrac{ВГ(y) - НГ(y)}{2}$.

7. Оценивают относительную погрешность измерения: $\varepsilon_y = \dfrac{\Delta y}{y_{\text{изм}}} 100\%$.

8. Результат измерения записывают в интервальной форме: $y = (y_{\text{изм}} \pm \Delta y)$.

Дифференциальный метод

Этот метод является более строгим методом оценки погрешностей косвенных измерений. Он основан на дифференцировании.

Пусть косвенно измеряемая величина y является функцией от нескольких аргументов: $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Величины $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ получены в результате прямых равноточных измерений с абсолютными погрешностями $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$, каждая из которых подсчитана по формуле:

$\Delta x_i = \Delta x_{\text{сл}} + \Delta x_{\text{пр}} + \Delta x_{\text{отс}} + \Delta x_{\text{выч}}$

Величина y будет найдена с некоторой абсолютной погрешностью Δy. Обычно $\Delta x_k << x_k$, $\Delta y < y$. Поэтому можно заменить $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ их дифференциалами $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots, dx_n$, Δy на dy соответственно. Тогда $\varepsilon(y) = \dfrac{dy}{y} = d\ lny$.

Отсюда следует, что относительная погрешность функции равна дифференциалу её натурального логарифма. Подставим вместо дифференциалов переменных величин их абсолютные погрешности, а вместо самих величин - их средние значения. Чтобы определить максимальное значение $\varepsilon(y)$ алгебраическое суммирование заменяют арифметическим. Зная относительную погрешность $\varepsilon(y)$, находят абсолютную погрешность: $\Delta y = \varepsilon(y)y$.

Все промежуточные расчеты выполняют по правилам приближенных вычислений с одной запасной (значащей) цифрой. Конечный результат и погрешность округляют по правилам. Ответ записывают в интервальном виде: $y = (y_{\text{изм}} \pm \Delta y)$.

Таким образом, чтобы найти относительную и абсолютную погрешности искомой величины, руководствуются правилами:

1. Проводят прямые измерения величин x_k, k = 1, 2, 3,..., n и записывают результат в интервальной форме: $x_k =< x_k > \pm\Delta x_k$.

2. Вычисляют среднее значение измеряемой величины.

3. Находят натуральный логарифм функции y.

4. Находят дифференциал натурального логарифма функции y.

5. В выражении $d(ln(y))$ дифференциалы переменных величин заменяют их абсолютными погрешностями, сами величины – их средними значениями, а алгебраическое суммирование погрешностей – арифметическим суммированием. Полученное значение и будет относительной погрешностью измерения: $\varepsilon(y) = \dfrac{\Delta y}{y_{\text{изм}}}$.

6. Определяют абсолютную погрешность: $\Delta н = \varepsilon(y)y_{\text{изм}}$.

7. Результат измерения записывают в интервальной форме.

Пример 7. $v = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 - m_2}$

$$ln v = ln m_1 + ln v_1 - ln(m_1 - m_2)$$

$$d(ln v) = d(ln m_1) + d(ln v_1) - d(ln(m_1 - m_2))$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dm_1}{m_1} + \frac{dv_1}{v_1} - \frac{d(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{\Delta v_1}{v_1} + \frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 - m_2} = \varepsilon_v; \ \Delta v = v\varepsilon_v$$

Задания

1. Определить объём цилиндра (метод подсчёта цифр), если его диаметр 44 мм и его высота 21,5 см.

2. При косвенных измерениях с применением метода подсчёта цифр получены следующие результаты: коэффициент трения $\mu = 0{,}22$; период колебаний маятника $\mathrm{T} = 1{,}8$ с; радиус кривизны трека α-частицы $\mathrm{R} = 17$ мм. Оценить абсолютные погрешности измерений.

3. Используя метод подсчёта цифр, определить коэффициент жесткости пружины, если к её концу подвешен груз. Масса груза 150 г и удлинение 3,0 см получены в результате прямых измерений. Оценить возможную погрешность.

4. Почему при использовании метода подсчета цифр каждая величина, распределяемая прямым методом, измеряется по несколько раз? Как при этом определяется конечный результат каждого измерения, если последние цифры результатов отдельных наблюдений несколько отличаются друг от друга?

5. Каковы преимущества и недостатки метода подсчета цифр?

6. При измерении линейных размеров бруска получены следующие результаты: длина a = (12,9 ± 0,3) см; ширина d = (11,1 ± 0,4) см; высота h = (6,5 ± 0,3) см. Определить объём бруска и его погрешность (расчёты выполнить методом границ).

7. В лабораторной работе по определению электрохимического эквивалента меди $k = \dfrac{m_2 - m_1}{Jt}$ получены следующие результаты: масса катода до опыта $m_1 = (33270 \pm 4)$ мг; масса катода после опыта $m_2 = (33292 \pm 5)$ мг; сила тока J = (1,3 ± 0,2) A; время прохождения тока t = (953 ± 2) c. Применив метод границ, рассчитать электрохимический эквивалент меди.

8. Вывести формулу относительной погрешности следующих зависимостей (дифференциальный метод):

1) $v = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 - m_2}$; **2)** $z = \dfrac{\sqrt[3]{x - y}}{cos\alpha \cdot sin\beta}$.

Краткая теория
Правила построения графиков

При построении графиков следует руководствоваться рядом правил:

1. График строят на бумаге с миллиметровой или с другой специальной сеткой. Размер бумаги определяется интервалом изменения измеряемых величин и выбранным для них масштабом.

2. По оси ординат (вертикальной) откладывают значения функции, по оси абсцисс (горизонтальной) – аргумента. На каждой из осей приводят только тот интервал измерения соответствующей физической величины, в котором велось исследование. Совсем не обязательно, чтобы на графике помещалось начало координат, т.е. точка (0,0).

3. Масштаб графика выбирают не произвольно. Он определяется абсолютными погрешностями тех величин, которые откладываются по осям. Погрешность представляется (в выбранном масштабе) отрезком заметной длины. Погрешности измерения на графиках изображают крестиками или прямоугольниками, размеры которых вдоль каждой из осей в соответствующем масштабе определяют величину этих погрешностей. Масштаб по каждой из осей выбирают независимо друг от друга.

4. На осях указывают обозначение физической величины и, через запятую, единицу ее измерения. Обозначения не следует наносить на поле графика. Точки на график наносят аккуратно, остро заточенным карандашом.

5. В случае очень больших или очень малых значений физических величин множители, определяющие порядок чисел, рекомендуется учитывать при обозначениях.

6. Кривую по нанесённым точкам проводят карандашом плавно без изломов и изгибов так, чтобы она располагалась как можно ближе ко всем точкам и по обе стороны оказалось приблизительно равное их количество. Как правило, графики подписывают (если нет соответствующей информации в тексте).

Нахождение параметров формул по опытным данным с помощью графиков

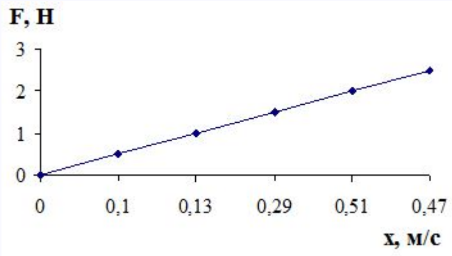
Для многих процессов и явлений известен вид формулы, выражающей связь между величинами. При помощи графиков, используя определенные методы, можно определить параметры, входящие в соответствующие формулы. Рассмотрим один из этих методов.

Линейное приближение. Пусть расположение опытных точек таково, что они лежат вблизи прямой. В этом случае зависимость будет линейной вида: $y = ax + b$. Необходимо найти параметры «a» и «b». **Способ натянутой нити:** строят точечный график на миллиметровой бумаге в достаточно крупном масштабе. Проводят прямую, близкую к опытным данным. Измеряют отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, это будет *«b»*. Находят тангенс угла между прямой и осью абсцисс, который определит *«a»*.

Задания

1. Почему при построении графиков часть экспериментальных точек не ложится точно на линию графика?

2. Какие ошибки допущены при построении графика зависимости нагрузки F на пружину от её удлинения x? Исправьте их. Используя график F(x), определить жёсткость пружины и её абсолютную погрешность.



3. Как поступить с результатом отдельного наблюдения, для которого точка на графике

Кафедра общей и теоретической физики

очень резко отклоняется от общей закономерности расположения всех остальных точек?

4. Изучалась зависимость силы тока I, текущего через резистор, от подаваемого на него напряжения U. Построить график зависимости I = f(U). Линейная ли это зависимость? С помощью графика определить сопротивление резистора R.

№ п/п	**U,В**	**I,А**	**№ п/п**	**U,В**	**I,А**
1	20,0	0,68	7	33,3	1,11
2	22,5	0,75	8	35,3	1,19
3	25,0	0,83	9	38,8	1,26
4	27,5	0,90	10	41,2	1,33
5	39,2	0,96	11	45,0	1,41
6	31,4	1,04	12	48,1	1,49

5. Построить график функции, определить её вид, найти параметры функции и рассчитать их погрешности.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	4	4,8	5	4,9	5	6	6

9. Нахождение вида эмпирических зависимостей методом наименьших квадратов

Цель работы: научиться определять вид эмпирических зависимостей методом наименьших квадратов.
Приборы и принадлежности: лабораторный компьютер, программа Origin.

Контрольные вопросы

1. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов? Чем отличается этот метод от метода интерполяции?
2. Каким образом задача построения эмпирических зависимостей в виде различных элементарных функций сводится к случаю линейной функции?
3. В чём состоит основная идея метода наименьших квадратов?
4. Почему используется принцип минимума суммы квадратов абсолютных величин, а не суммы самих абсолютных величин? Ответ обосновать и подтвердить примерами.

Краткая теория

Для нахождения вида аналитических зависимостей между измеряемыми величинами на основе корреляции между ними, часто используют способ наименьших квадратов. Сущность его заключается в нахождении параметров эмпирических формул, если известны результаты измерений величины y (функция), соответствующих различным значениям величины x (аргумент). Данные эксперимента, представленные в виде графика, в ряде случаев дают основание для выбора того или иного типа функциональной зависимости.

Пусть, например, возможной оказывается интерполяция экспериментальных значений линейной функцией типа $y = ax + b$. Тогда, учитывая множество вариантов построения прямой, нужно определить коэффициенты a,b таким образом, чтобы они наилучшим образом описывали имеющиеся экспериментальные данные. При этом предполагается, что измерения подчиняются нормальному закону распределения Гаусса. Допустим, что некоторая теоретическая модель допускает линейную зависимость одной из характеристик системы от других, т.е. $y = f(x, a_0, \ldots, a_n)$. При условии, что все измерения были выполнены с одинаковой точностью, величины параметров $a_0, \ldots, a_n$ определим из условия минимума суммы квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от вычисленных величин $f_i(x_i, a_0, \ldots, a_n)$.

$$S_{min} = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_n)]^2. \qquad (1)$$

Тогда для нахождения минимума функции $f_i(x_i, a_0, \ldots, a_n)$ необходимо исследовать ее на экстремум:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим в качестве примера функциональную зависимость в виде многочлена

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), получим

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n)]^2. \tag{4}$$

Тогда система уравнений (2) имеет вид (5)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n)] = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n)] x_i = 0; \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n)] x_i^n = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решая систему (5), определим параметры $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Рассмотрим, например, линейную функцию ($y = a+b\cdot x$). Пусть в результате измерений, был получен ряд значений величины y в зависимости от значений x (таблица 1). Первичный анализ данных дает основание предположить, что исследуемая зависимость может быть описана функцией $y = a + b \cdot x$. Задача состоит в определении величин a, b.

Таблица 1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,00	2,50	2,95	3,52	3,97	4,45	4,70	5,30	5,60	5,80	6,20

Для этого, запишем систему $n+1$ уравнений (6):

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (bx_i + a)]x_i = 0;\\ \sum_{i=1}^{n}[y_i - (bx_i + a)]x_i = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Для решения данной системы на основании данных таблицы 1 рассчитаем значения сумм.

$\sum\limits_{i=1}^{11} y_i = 46,99;$ $\sum\limits_{i=1}^{11} x_i = 55;$ $\sum\limits_{i=1}^{11} x_i^2 = 385;$ $\sum\limits_{i=1}^{11} x_i y_i = 281,39.$

Тогда систему (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} 385b + 55a &= 281.39 \\ 55b + 11a &= 46,99 \end{aligned} \tag{7}$$

Решая данную систему, получим a = 2.16, b = 0.42.
Аналогичным образом определяют величины a, b и c квадратичной функциональной зависимости $y = ax^2 + bx + c$. В этом случае

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i^2 &= 0; \\ \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i^2 &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Для этого предварительно на основании табличных данных необходимо рассчитать значения сумм
$\sum_{i=1}^{n} y_i$; $\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^4$; $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$.

Линейная зависимость

Задача № 1

В результате эксперимента получены пять значений искомой функции. Методом наименьших квадратов найти коэффициенты a и b уравнения $y = ax + b$.

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Ответ: $y = 0,425x + 1,175$

Задача № 2

На опыте получены значения x и y, сведенные в таблицу. Методом наименьших квадратов найти коэффициенты a и b уравнения $y = ax + b$.

x	1	2	3	4	5	6
y	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0

Ответ: $y = 0,98x + 4,3.$

Задача № 3 Экспериментально получены пять значений искомой функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	6,5	7,4	8,7

Ответ: $y = 3,17 + 1,09x.$

Задача № 4

В таблице приведены пять экспериментальных значений искомой функции $y = f(x)$. Аппроксимировать эту функцию линейной функцией $y = ax + b$ методом наименьших квадратов. Построить график аппроксимирующей функции и экспериментальные точки.

x	1	2	3	4	5
y	1,8	1,3	3,3	4,8	3,8

Ответ: $y = 0,75x + 0,75.$

Задача № 5

Пусть заданы результаты четырех измерений (рис.): y = 0 при x = 0; y = 1 при x = 1; y = 2 при x = 3; y = 5 при x = 4. Аппроксимировать эту функцию линейной функцией методом наименьших квадратов.

Ответ: $= -0,2 + 1,1x.$

Квадратичная зависимость

Задача № 1

Пусть функция задана таблицей значений. Необходимо определить коэффициенты a, b и c уравнения $y = ax^2 + bx + c$.

x	1	2	3	4	5
y	1,8	1,3	3,3	4,8	3,8

Ответ: $y = 0,75x + 0,75.$

Задача № 2

Пусть в результате эксперимента получены значения функции при различных значениях аргумента:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	2,130	2,153	2,161	2,151	2,128	2,080	2,026	1,859	1,875	1,772

Найти аналитическую зависимость переменной y от x наиболее правильно представляющую экспериментальные данные.

Ответ: $y = 2,09552 + 0,4433x - 0,7652x^2.$

Задача № 3

Функция $y = y(x)$ задана в виде таблицы значений:

x	-2	-1	0	1	2
y	-0,8	-1,6	-1,3	0,4	3,2

Применяя метод наименьших квадратов, приблизить функцию многочленами 1-ой и 2-ой степеней. Для каждого приближения определить величину среднеквадратичной погрешности. Построить точечный график функции и графики многочленов.

Ответ: $y = -0,8 + x - 0,49x^2$.

Задача № 4 Пусть функция задана таблицей своих значений. Необходимо определить коэффициенты a, b и c уравнения $y = ax^2 + bx + c$.

x	-3	-1	0	1	3
y	-4	-0,8	1,6	2,3	1,5

Ответ: $y = 1,23 + 0,98x - 0,28x^2$.

Вариант 1.

1. Термометром с ценой деления 0,5°C была измерена температура некоторого тела. Определить абсолютную и относительную погрешность измерений. Температура: 41,5°C, 41,5°C, 42,0°C, 41,0°C, 41,5°C, 42,0°C, 43,0°C, 41,0°C. Коэффициент Стьюдента равен 2,4.
2. Вольтметром, рассчитанным на максимальное напряжение 150,00 мВ, измерили напряжение на участке цепи, при этом результат оказался
   $U = (114{,}00 \pm 2{,}00)$ мВ. Определить класс точности вольтметра, если известно, что абсолютная случайная погрешность оказалась равной 0,02.
3. Тело массой $(15{,}7 \pm 0{,}2)$ кг движется со скоростью $(33{,}1 \pm 0{,}9)$ м/с. Определить методом нижних и верхних границ относительную и абсолютную погрешности кинетической энергии тела.
4. Тело начало движение с постоянным ускорением $(2{,}2 \pm 0{,}3)$ м/с^2. Определить дифференциальным методом пройденный им путь и его погрешность в тот момент, когда его скорость станет равной $(16{,}0 \pm 2{,}0)$ м/с.

Вариант 2.

1. Линейкой с ценой деления 1,0 мм была измерена длина тетради. Определить абсолютную и относительную погрешность измерений

Кафедра общей и теоретической физики

Начало
Содержание
Страница 107 из 113
Назад
На весь экран
Закрыть

длины. Измеренные значения: 17,5 мм 17,8 мм 17,8 мм, 18 мм, 17,6 мм, 17,5 мм, 17,9 мм, 17,7 мм. Коэффициент Стьюдента равен 2,4.

2. Чему равна абсолютная случайная погрешность амперметра классом точности 2,5 и максимальным значением тока 40,0 А, если по результатам измерений среднее значение тока оказалось равным 15,1 А, а относительная погрешность 3,0%.
3. Тело массой $(21{,}7 \pm 0{,}9)$ кг на некоторой высоте обладает потенциальной энергией $(234{,}0 \pm 23{,}0)$ Дж. Считая ускорение свободного падения $(9{,}8 \pm 0{,}1)$ м/с^2, определить дифференциальным методом высоту и её относительную и абсолютную погрешности.
4. Определить методом нижних и верхних границ модуль коэффициента жёсткости пружины и его относительную и абсолютную погрешности, если сила упругости в $(15{,}0 \pm 3{,}0)$ Н удлиняет пружину на $(1{,}6 \pm 0{,}5)$ см.

Вариант 3.

1. Секундомером с ценой деления 1 с было измерено время спуска лыжника со склона. Определить абсолютную и относительную погрешность измерений. Значения: 17 с,16 с,17 с, 18 с, 16 с, 18 с, 15 с, 15 с, 16 с, 18 с. Коэффициент Стьюдента равен 1,9.
2. Определить, на какое максимальное напряжение рассчитан амперметр классом точности 1 %, если сила тока, им измеренная, оказалась равной $(114{,}00 \pm 2{,}00)$ мкА, а абсолютная случайная погрешность оказа-

Кафедра общей и теоретической физики

лась
равной 0,02.

3. Определить дифференциальным методом объём параллелепипеда и его относительную и абсолютную погрешности, если известны три его стороны:
a = (12 ± 1) см, b = (23 ± 3) см, c = (67 ± 9) см.
4. Определить методом нижних и верхних границ скорость тела и её погрешность, если известно, что за время (62 ± 5) с оно преодолело путь (1345 ± 56) м.

Вариант 4.

1. Штангенциркулем с ценой деления 0,5 мм был измерен диаметр цилиндра. Определить абсолютную и относительную погрешность измерений. Значения: 13,5 мм, 14,8 мм, 14,8 мм, 15 мм, 13,6 мм, 13,5 мм, 13,9 мм, 14,7 мм. Коэффициент Стьюдента равен 2,4.
2. Чему равна абсолютная случайная погрешность микровольтметра классом точности 1 % и максимальным значением 200,0 мкВ, если по результатам измерений среднее значение напряжения оказалось равным 155,6 мкВ, а относительная погрешность 1%.
3. Сила тока через проводник равна (2,7 ± 0,2) А, а напряжение (225,1 ± 0,6) В. Определить методом нижних и верхних границ относительную и абсолютную погрешности сопротивления проводника.
4. Определить дифференциальным методом объём трёх молей идеального газа, находящегося под давлением (1116 ± 23) Па при абсолютной

температуре (211 ± 11) K.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Коэффициенты Стьюдента

Количество измерений	*Доверительная вероятность*			
n	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
2	6,3	12,7	31,8	63,7
3	2,9	4,3	7,0	9,9
4	2,4	3,2	4,5	5,8
5	2,1	2,8	3,7	4,6
6	2,0	2,6	3,4	4,0
7	1,9	2,4	3,1	3,7
8	1,9	2,4	3,0	3,5
9	1,9	2,3	2,9	3,4
10	1,8	2,3	2,8	3,3
15	1,8	2,1	2,6	3,0
20	1,7	2,1	2,5	2,9
бесконечность	1,6	2,0	2,3	2,6

Линеаризация некоторых функций

Исходная формула	**Преобразованная формула**	**Замена переменных**	**Линеаризованная формула**
$y = ax^b$	$lgy = b \cdot lgx + lga$	$lgy = y_1$ $lgx = x_1$ $lga = a_1$	$y_1 = bx_1 + a_1$
$y = a \cdot lgx + b$	—	$lgx = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = e^{bx+k}$	$lgy = b \cdot lge \cdot x + k \cdot lge$	$lgy = y_1$ $b \cdot lge = a$ $k \cdot lge = k_1$	$y_1 = ax + k_1$
$y = ae^{bx}$	$lgy = bx \cdot lge + lga$	$lgy = y_1$ $b \cdot lge = b_1$ $lga = a_1$	$y_1 = b_1x + a_1$

Примеры допустимых погрешностей наиболее часто встречающихся в школьном эксперименте средств измерения

Средства измерения	*Предел измерения*	*Цена деления*	*Допустимая погрешность*
линейка ученическая	до 50 см	1 мм	1 мм
линейка демонстрационная	100 см	1 см	0,5 см
лента измерительная	150 см	0,5 см	0,5 см
мензурка	до 250 мл	1 мл	1 мл
гири 10, 20, 50 мг			1 мг
гири 100, 200 мг			2 мг
гири 500 мг			3 мг
гири 1 г			4 мг
гири 2 г			6 мг
гири 5 г			8 мг
гири 10 г			12 мг
гири 20 г			20 мг
гири 50 г			30 мг
гири 100 г			40 мг
штангенциркуль	150 мм	0,1 мм	0,05 мм
микрометр	25 мм	0,01 мм	0,005 мм
динамометр	4 Н	0,1 Н	0,05 Н

весы учебные	200 г		0,1 г
секундомер	0-30 мин	0.2 с	1с за 30 мин
барометр-анероид	720-780 мм. рт.ст.	1 мм. рт.ст	3 мм. рт.ст
термометр лабораторный	0-100°C	1°C	1°C
амперметр школьный	2 А	0,1 А	0,08 А
вольтметр школьный	6 В	0,2 В	0,16 В

ТЕСТ

Тестовые задания.