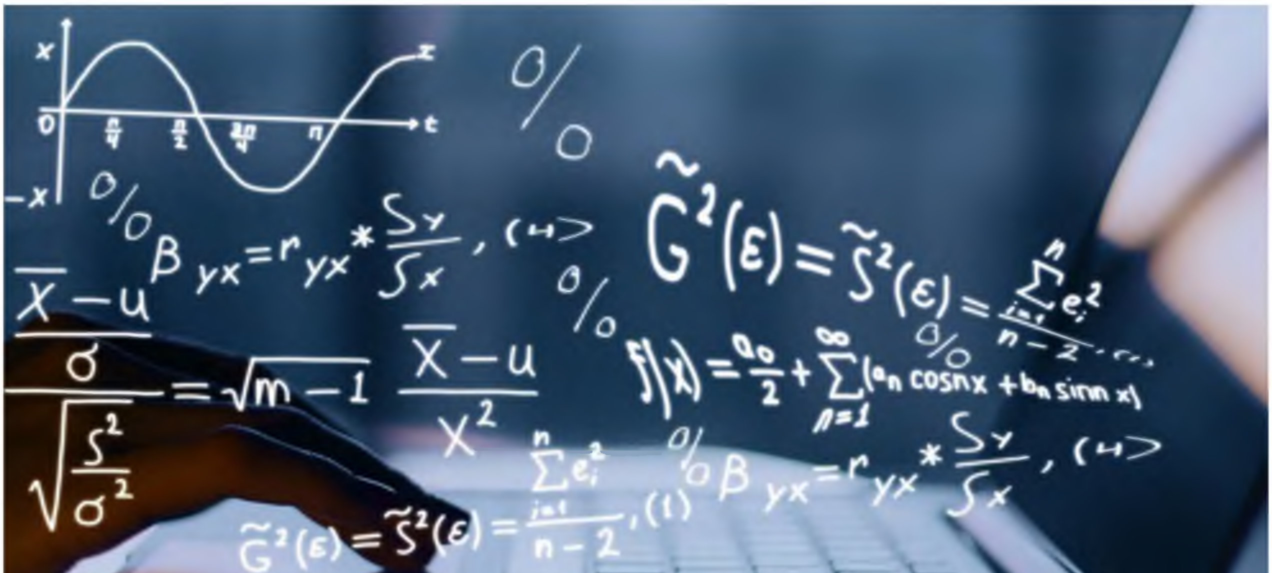
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯРФ
ФГБОУ ВО «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# «МУХТАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ:

# АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ, МЕТОДИКИ ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ»

## МАТЕРИАЛЫ

## МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ



МАХАЧКАЛА – 2024

УДК 517
ББК 22.16
М92

**Материалы международной научной конференции «Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы».** Махачкала: ДГТУ, 2024 г. 228 с.



**Редактор: Абилова Ф.В.**

В сборнике материалов представлены научные доклады и сообщения, включенные в программу научной конференции.

Основные научные и образовательные цели конференции – анализ и обобщение опыта научно-исследовательской работы в области перспективных и приоритетных направлений развития математики, смежных вопросов, связанных с методикой преподавания математики, физики и информатики, а также современные информационные и вычислительные технологии в прикладных задачах.

**ISBN 978-5-907837-35-5**

УДК 37.016:(514+52)

# ОБ ЭТАПАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ УГЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ НА СФЕРЕ

**А.И. Серый**
**БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь**

*Аннотация*: в статье предложены таблицы, в одной из которых отражены этапы решения задачи о нахождении угла пересечения двух окружностей на сфере, а в другой анализируются предельные случаи общей формулы. Таблицы могут найти применение в образовательном процессе при изучении сферической астрономии и сферической геометрии.

*Ключевые слова*: пересечение окружностей на сфере, методика преподавания астрономии, методика преподавания математики.

В вузовском курсе астрономии встречается, в частности, задача о нахождении угла $\psi$, под которым расположена по отношению плоскости математического горизонта линия, вдоль которой происходит видимое движение звезды, Луны или другого объекта (если считать склонение объекта постоянным в течение времени наблюдения). Следует отметить, что указанный угол в точности равен углу $\psi_0$ между плоскостями небесного экватора и математического горизонта только в том случае, если склонение объекта $\delta = 0$ (тогда он восходит в точке востока, а заходит в точке запада, а его небесная параллель находится в плоскости небесного экватора) [1,с.5,6]. Чем дальше от указанных точек наблюдаются восход и заход в действительности, тем заметнее различие между $\psi$ и $\psi_0$ либо $\pi - \psi_0$ (особенно заметным оно становится, например, если точки восхода и захода приближаются к точке севера, а тип объекта – к незаходящему). Поскольку точному решению этой задачи не уделяется достаточного внимания в учебной литературе по астрономии, представляет интерес разбор последовательности действий, необходимых для получения указанного решения.

С математической точки зрения задача сводится к задаче о нахождении угла между касательными к двум окружностям (в точках их пересечения) на поверхности сферы, где одна из окружностей находится на большом круге, а вторая – вообще говоря, на малом, и при этом наклонена к первой под произвольным углом $\psi_0$. Пусть радиус сферы $R$, склонение точек малой окружности $\delta$, географическая широта пункта наблюдения $\varphi$, и тогда $\psi_0 = 90^\circ - \varphi$. Будем считать, что большая окружность находится в плоскости $z = 0$, а малая – в плоскости $z' = 0$. Штрихованная система координат повернута на угол $\psi_0$ относительно оси $y$ (т.е. оси $y$ и $y'$ совпадают) против часовой стрелки при $\psi_0 > 0$ (с точки зрения наблюдения вдоль положительных направлений осей $y$ и $y'$), после чего смещена вдоль оси $z'$. Поясняющий рисунок приведен ниже.

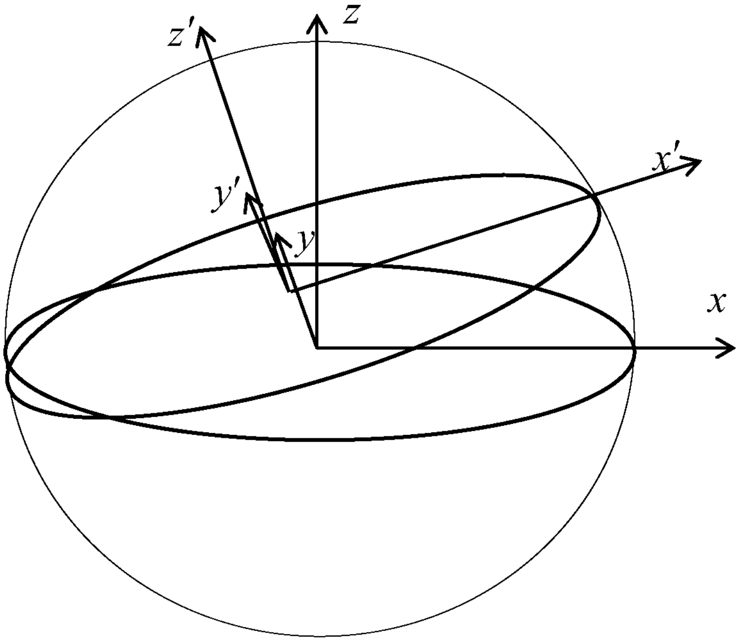



Рисунок – Пояснение к условию задачи

Этапы решения задачи отражены ниже в таблице 1. Составление подобных таблиц можно предлагать учащимся в качестве самостоятельных творческих заданий для развития алгоритмического и структурного мышлений.

Таблица 1 – Этапы решения задачи

| Содержание этапа | | Результат |
|---|---|---|
| 1. Уравнение большой окружности | | $x^2 + y^2 = R^2$ |
| 2. Уравнение малой окружности | в штрихованных координатах | $(x')^2 + (y')^2 = R^2 \cos^2 \delta$ |
| | взаимосвязь между координатами | $x' = x \cos(90^\circ - \varphi) + z \sin(90^\circ - \varphi)$, $z' = -x \sin(90^\circ - \varphi) + z \cos(90^\circ - \varphi) - R \sin\delta = 0$, $y' = y$ [2, с. 71] |
| | в нештрихованных координатах | $(x \sin\varphi + z \cos\varphi)^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \delta$ |

<table>
<tr><td colspan="2">3. Поиск точек пересечения ($x_0$, $y_0$) как решения системы уравнений двух окружностей</td><td>$x_0 = -R\,sin\delta / cos\varphi,\ x_0 \ge -R$,<br>$y_0 = \pm R\sqrt{1 - sin^2\delta / cos^2\varphi}$,<br>$sin^2\delta / cos^2\varphi \le 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4. Уравнения касательны х к окружност ям в точках ($x_0$, $y_0$)</td><td>исходный вид</td><td>$xx_0 + yy_0 = R^2,\ z = 0$;<br>$x'x_0' + yy_0' = R^2 cos^2\delta,\ z' = 0$</td></tr>
<tr><td>уравнение касательной к большой окружности в каноническом виде [2, с. 80]</td><td>$x/l_1 = (y - \tilde{y}_0)/m_1,\ l_1 = R\,cos\varphi / sin\delta$,<br>$m_1 = \tilde{y}_0 = \pm R / \sqrt{1 - sin^2\delta / cos^2\varphi}$,<br>$n_1 = 0$</td></tr>
<tr><td>система уравнений для касательной к малой окружности [2, с. 80]</td><td>$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,<br>$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,<br>$A_1 = -R\,sin\delta \dfrac{sin^2\varphi}{cos\varphi}$,<br>$B_1 = \pm R\sqrt{1 - \dfrac{sin^2\delta}{cos^2\varphi}}$,<br>$C_1 = -R\,sin\delta\,sin\varphi,\ D_1 = -R^2 cos^2\delta$,<br>$A_2 = -cos\varphi,\ B_2 = 0,\ C_2 = sin\varphi$,<br>$D_2 = -R\,sin\delta$</td></tr>
<tr><td>компоненты направляющего вектора касательной к малой окружности [2, с. 80]</td><td>$l_2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ m_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$,<br>$n_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Нахождение косинуса угла между касательными [2, с. 82]</td><td>$cos\psi = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} =$<br>$= \pm \dfrac{sin\varphi}{cos\delta}$</td></tr>
</table>

Результаты исследования предельных случаев общей формулы отражены в таблице 2.

Таблица 2 – Предельные случаи общей формулы

| Случай | Смысл | Результат |
|---|---|---|
| $\delta \to 0$ | видимое движение объекта происходит по небесному экватору | $cos\psi \to \pm sin\varphi$, т.е. $\psi = 90^\circ \pm \varphi$ |
| $\delta \to 90^\circ - \varphi$ | объект занимает предельное положение между незаходящими и восходяще-заходящими | $cos\psi \to \pm 1$, т.е. $\psi = 0^\circ$ или $180^\circ$ |

ЛИТЕРАТУРА

1. Клищенко А.П., Шупляк В.И. Астрономия: Учеб. пособие. М.: Новое знание, 2004. 224 с.: ил.

2. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: справочник; под ред. Ю.С. Богданова. Минск: Вышэйшая школа, 1995. 380 с.