ISSN 2218-0303

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Серыя 4

ФІЗІКА
МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

№ 2 / 2023

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 05.01.2023 № 2 (са змяненнямі, унесенымі загадам
ад 23.06.2023 № 152) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны
ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2023 г.
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

◊ ◊ ◊

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU
і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 года

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

ISSN 2218-0303

Vesnik

of Brest University

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»

№ 2 / 2023

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 05, 2023 nr 2 (with the amendments made by the order of Supreme Certification Commission from June 23, 2023 nr 152) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» has been included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in 2023 in physics-mathematical sciences (Physics)

◊ ◊ ◊

According to the agreement between Educational Establishment «Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020) the journal « Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» is placed on the platform eLIBRARY.RU and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS

ФІЗІКА

УДК 539.12

Pavel Andrusevich[1], Viktor Red'kov[2]
[1]*Teacher of Brest State College of Communication*
[2]*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher*
of Fundamental Interaction and Astrophysics Center of B. I. Stepanov Institute of Physics
of National Academy of Sciences of Belarus
Павел Петрович Андрусевич[1], Виктор Михайлович Редьков[2]
[1]*преподаватель Брестского государственного колледжа связи*
[2]*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник*
Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
e-mail: [1]ppavel485@mail.ru; [2]v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Intrinsic Symmetries for the Generalized Majorana Fields in Electromagnetic and Gravitational Fields

We start with the generalized multicomponent matrix equation $(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$, *and introduce the concept of the intrinsic symmetry. These symmetries should preserve the form of the basic equation, this leads to the commutation relation* $[Q, \Gamma_\mu]_- = 0$. *The relevant Lagrangian should be invariant under the intrinsic symmetries, which gives the restriction* $Q^+ \eta Q = \eta$ *for the matrix of the bilinear form* η. *We impose the additional requirement: such symmetries should preserve the Majorana nature of the field. This means that if the function* Ψ_A *is real (imaginary) part of the complete wave function, then while transforming the function* $\Psi'_A = Q_{AB}\Psi_B$ *remains real (imaginary). The main accent is given to multicomponent Majorana fields, which can be related to one, two, three and four Dirac fields; these are closely related to the Dirac – Kähler field.*

First we examine the case of classical fields, and find the generators for the corresponding intrinsic symmetries. Finally, we take into account the presence of external electromagnetic fields, also we extend this approach to Riemannian space-time geometry. Additionally, we consider in detail the relations between performed symmetry analysis for the system 4 Dirac fields and the Dirac – Kähler field. In the end, t we take into account the presence of external electromagnetic and gravitational fields.

Key words: *the systems of Dirac fields, intrinsic symmetry, Majorana fields, Lagrangian formalism, external electromagnetic fields, the Riemannian space-time geometry, Dirac – Kähler particle.*

ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ ОБОБЩЕННЫХ МАЙОРАНОВСКИХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ И ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЯХ

Рассмотрим обобщенное многокомпонентное матричное уравнение $(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$ *и введем понятие внутренних симметрий. Эти симметрии должны сохранять форму основного уравнения, что приводит к коммутационному соотношению* $[Q, \Gamma_\mu]_- = 0$. *Соответствующий лагранжиан должен быть инвариантен относительно преобразований симметрии, что дает ограничение* $Q^+ \eta Q = \eta$ *на матрицу билинейной формы* η. *Мы накладываем дополнительное требование, чтобы такие симметрии сохраняли майорановский характер поля. Это означает, что если функция* Ψ_A *является вещественной (мнимой) частью полной волновой функции, то после преобразований* $\Psi'_A = Q_{AB}\Psi_B$ *она должна оставаться вещественной (мнимой). Основной акцент делается на многокомпонентных майорановских полях, которые могут быть связаны с одним, двумя, тремя и четырьмя дираковскими полями; последние тесно связаны с полем Дирака – Келера.*

Сначала мы рассматриваем случай классических полей и находим генераторы для соответствующих внутренних симметрий. В конце мы учитываем наличие внешних электромагнитных полей, а также распространяем этот подход на риманову геометрию пространства – времени. Кроме того, мы подробно рассматриваем связи между проведенным анализом симметрий и полем Дирака – Келера.

Ключевые слова: *система дираковских полей, внутренняя симметрия, Майорановские поля, Лагранжев формализм, внешние электромагнитные поля, Риманова геометрия, частица Дирака – Кэлера.*

1. Introduction

The theory of relativistic wave equations gives the base for describing the elementary particles and their interactions. It started with investigations of P. A. M. Dirac [1], W. Pauli [2], and M. Fierz [3]. These studies were proceeded by H. J. Bhabha [4; 5] and Harish-Chandra [6; 7]. They proposed for description of any particle to apply the systems of first order differential equations in matrix form

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0, \tag{1}$$

where Ψ stands for the multicomponent wave functions, Γ_μ designates square matrices, m is the mass parameter. Invariant properties of these matrices can be associated with physical characteristics of the particles.

In this field, very important investigations were performed by I. M. Gelfand and A. M. Yaglom [8] in which the general method for constructing the wave equations in matrix form (1) was developed, for particles with any sets of spin and mass states. They derived general restrictions on the matrices Γ_μ, and several examples of application of this general theory.

Substantial contribution in this theory was made by F. I. Fedorov [9–17]. In particular, he elaborated the method of projective operators [9], which permits to perform complicated calculations without the use of explicit form of the matrices Γ_μ. Important contribution in study of the algebras of the matrices Γ_μ and development of the methods of calculation was done by L. A. Shelepin [18].

Substantial contribution in this field was given by V. I. Fuschich and A. G. Nikitin [19]. They proved the existence of intrinsic symmetries for many relativistic wave equations.

There exists one special way for describing the intrinsic degrees of freedom and additional characteristics of the particles within the general theory of relativistic wave equations. It is based on the use of extended (repeated) sets of representations of the Lorentz group [20] when constructing generalized wave equations for particles.

The known example of such a wave equation is the Dirac – Kähler system referring to the particle with two spin states ($s = 0,1$) and degeneration in intrinsic parities [21–24]. Firstly, the Dirac – Kähler equation was formulated in tensor form by C. G. Darwin [25]. He proposed for describing the electron in external magnetic field to apply the complicated tensor system of equations. In this way, he derived the energy spectrum in presence of external Coulomb field, which coincides with that in the Dirac theory. Later on, this Darwin equation was rediscovered by many researchers. The best known is the paper by E. Kähler [26], where the formalism of differential forms was used. In the papers of V. I. Strazhev with coauthors [27; 28], this system was studied in detail within the conventional theory relativistic wave equations. In the literature, in different mathematical approaches [29–31], they discuss intrinsic symmetries of the Dirac equation, which differ from space-time symmetries.

2. Basic Definitions

Let us consider an arbitrary relativistic wave equation for a particle with nonzero mass in the standard form

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0, \tag{2}$$

where Ψ is multicomponent wave function, Γ_μ stands for squared matrices, m is the mass parameter. For this equation, there exists the Lagrangian

$$L = -\psi^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi. \tag{3}$$

Under the intrinsic symmetry we mean the linear transformation

$$\Psi'_{A} = Q_{AB}\Psi_{B}, \tag{4}$$

which obeys a number of conditions.

First, they should preserve the form of the basic equation (2). Acting by the matrix Q on eq. (2), if the commutator is valid

$$[Q, \Gamma_{\mu}]_{-} = 0, \tag{5}$$

we obtain

$$(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)Q\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi' = 0.$$

Restriction (5) ensues invariance of eq. (2) under the transformation (4). Second, the Lagrangian (3) should be invariant under the transformation (4) as well:

$$\begin{aligned} L' = -(\psi^{+})'\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi' = -(Q\psi)^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)Q\psi \\ = -\psi^{+}Q^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)Q\psi = L, \end{aligned}$$

whence it follows $\psi^{+}Q^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)Q\psi = \psi^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi,$ or differently

$$Q^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)Q = \eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m).$$

Thus, the intrinsic symmetry transformations are to obey the constraints

$$Q^{+}\eta\Gamma_{\mu}Q = \eta\Gamma_{\mu}, \quad Q^{+}\eta Q = \eta. \tag{6}$$

Bearing in mind (5), we can conclude that two relations in (6) coincide

$$Q^{+}\eta\Gamma_{\mu}Q = Q^{+}\eta Q\Gamma_{\mu} = \eta\Gamma_{\mu} \quad \Rightarrow \quad Q^{+}\eta Q = \eta. \tag{7}$$

We will impose an additional requirement on symmetry transformations. Such transformations should preserve the Majorana nature of the fields. This means that if the function Ψ_{A} is real (imaginary) part of the complete wave function, then after symmetry transformation the function $\Psi'_{A} = Q_{AB}\Psi_{B}$ remains real (imaginary). In the following, this requirement is called the Majorana condition.

Now let us specify the massless case

$$\Gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0. \tag{8}$$

Requirement of invariance of this equation leads to two alternative restrictions

$$\Gamma_{\mu}\partial_{\mu}Q_{1}\psi = 0 \Rightarrow [Q_{1}, \Gamma_{\mu}]_{-} = 0; \tag{9}$$

$$-\Gamma_{\mu}\partial_{\mu}Q_{2}\psi = 0 \Rightarrow [Q_{2}, \Gamma_{\mu}]_{+} = 0. \tag{10}$$

Additional requirement of the Lagrangian invariance also leads to two possibilities. The first is

$$L' = L, \quad \left[Q_{1}, \Gamma_{\mu}\right]_{-} = 0; \tag{11}$$

it coincides with the yet known constraint (7), which appears when considering the massive case. The second possibility is

$$L' = -L, \quad \left[Q_2, \Gamma_\mu\right]_+ = 0; \tag{12}$$

whence we obtain

$$-\psi^+ Q_2^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu Q_2 \psi = +\psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \psi,$$

or $Q_2^+ \eta \Gamma_\mu Q_2 = -\eta \Gamma_\mu$. Bearing in mind the relation $\left[Q_2, \Gamma_\mu\right]_+ = 0$, we conclude that the last relation is equivalent to the known restriction (7). Thus, the Lagrangian invariance with respect to intrinsic symmetry both for massive and massless cases assumes one the same constraint (7):

$$Q^+ \eta Q = \eta.$$

For infinitesimal one-parametric symmetry transformations

$$Q = 1 + \omega J \tag{13}$$

relation (7) takes on the form

$$(\omega J)^+ \eta = -\eta \, \omega J. \tag{14}$$

3. One Dirac Equation in Electromagnetic Field

Let us take into account the presence of external electromagnetic field

$$(\gamma_\mu \partial_\mu - ie\gamma_\mu A_\mu + m)\psi = 0, \tag{15}$$

where e stands for electric charge, and $A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ is an electromagnetic 4-potential, $(A_4 = i\varphi)$. Let us separate in the wave function real and imaginary parts:

$$\gamma_i^* = \gamma_i, \gamma_4^* = -\gamma_4, \partial_i^* = \partial_i, \partial_4^* = -\partial_4, A_i^* = A_i, A_4^* = -A_4$$

so we have two equations

$$\begin{gathered} (\gamma_\mu \partial_\mu - ie\gamma_\mu A_\mu + m)\psi = 0, \\ (\gamma_\mu \partial_\mu + ie\gamma_\mu A_\mu + m)\psi^* = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Summing and subtracting them, for 8-component function Ψ (19) we obtain an equation in the standard matrix form

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu - ieG_\mu A_\mu + m)\Psi = 0, \tag{17}$$

where $\Gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu$, and additional matrices G_μ are

$$G_\mu = \sigma_1 \otimes \gamma_\mu. \tag{18}$$

Note that the last equation contains two sets of matrices, Γ_μ and G_μ.

Now we will search for restrictions on intrinsic symmetries Q, in presence of electromagnetic fields they may differ from previously established for a free particle. Such transformations $\Psi' = Q\Psi$ should preserve the form of the main equation (17):

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu - ieG_\mu A_\mu + m)Q\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Gamma_\mu \partial_\mu - ieG_\mu A_\mu + m)\Psi' = 0.$$

So, there arise two constraints

$$[Q, \Gamma_\mu]_- = 0, \tag{19}$$

$$[Q, G_\mu]_- = 0. \tag{20}$$

The Lagrangian for the case under consideration has the structure

$$L = -\Psi^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ieG_{\mu}A_{\mu} + m)\Psi. \tag{21}$$

Let this structure be invariant with respect to transformation (4):

$$L' = -(\Psi')^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ieG_{\mu}A_{\mu} + m)Q\Psi' = (Q\Psi)^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ieG_{\mu}A_{\mu} + m)Q\Psi =$$
$$= -\Psi^{+}Q^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ieG_{\mu}A_{\mu} + m)Q\Psi = -\Psi^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ieG_{\mu}A_{\mu} + m)\Psi = L,$$

so we derive

$$\Psi^{+}Q^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ieG_{\mu}A_{\mu} + m)Q\Psi = \Psi^{+}\eta(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ieG_{\mu}A_{\mu} + m)\Psi,$$

whence (bearing in mind (19) and (20)) it follows

$$Q^{+}\eta Q = \eta. \tag{22}$$

The last condition coincides with the previously established in absence of external fields; its consequences were studied in the above.

Thus, the presence of external electromagnetic fields leads to one additional constraint (20). For infinitesimal transformations $Q = 1 + \omega J$ it takes the form

$$[J, G_{\mu}]_{-} = 0, \tag{23}$$

where J stands for any generator related to intrinsic symmetries.

Now we should verify which generators from established in the above (in the case of one Dirac field) satisfy the constraint (23). In Majorana basis ψ^{r}, ψ^{i} (17), there exists only one generator which satisfy restrictions (19) and (22):

$$J_1 = \sigma_1 \otimes I_4. \tag{24}$$

By direct calculation, we can verify that р J_1 obeys the above additional constrain (23). In other words, the intrinsic symmetry in presence of external field is the same as in the case of a free particle.

4. The Case of n Dirac Fields

Let us consider n Dirac fields in presence of electromagnetic fields

$$(\gamma_{\mu}\partial_{\mu} - ie\gamma_{\mu}A_{\mu} + m)\psi_{k} = 0, \quad k = 1, ..., n. \tag{25}$$

The conjugate equation is

$$(\gamma_{\mu}\partial_{\mu} + ie\gamma_{\mu}A_{\mu} + m)\psi_{k}^{*} = 0; \tag{26}$$

further we obtain

$$\begin{aligned} &\gamma_{\mu}\partial_{\mu}(\psi_{k} + \psi_{k}^{*}) - ie\gamma_{\mu}A_{\mu}(\psi_{k} - \psi_{k}^{*}) + m(\psi_{k} + \psi_{k}^{*}) = 0, \\ &\gamma_{\mu}\partial_{\mu}(\psi_{k} - \psi_{k}^{*}) - ie\gamma_{\mu}A_{\mu}(\psi_{k} + \psi_{k}^{*}) + m(\psi_{k} - \psi_{k}^{*}) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Thus, we have $(n + n)$ new equations

$$
\begin{gathered}
\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1^r - ie\gamma_\mu A_\mu \psi_1^i + m\psi_1^r = 0, \\
\dots \\
\gamma_\mu \partial_\mu \psi_n^r - ie\gamma_\mu A_\mu \psi_n^i + m\psi_n^r = 0; \\
\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1^i - ie\gamma_\mu A_\mu \psi_1^r + m\psi_1^i = 0, \\
\dots \\
\gamma_\mu \partial_\mu \psi_n^i - ie\gamma_\mu A_\mu \psi_n^r + m\psi_n^i = 0.
\end{gathered}
\tag{28}
$$

With the use of the $2n$-component wave function Ψ with the structure

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \dots, \psi_n^r; \psi_1^i, \psi_2^i, \dots, \psi_n^i) = (\psi^r, \psi^i) \text{ the column,} \tag{29}$$

we can present the above system (28) as follows

$$\begin{vmatrix} \gamma_\mu & \\ & \gamma_\mu \end{vmatrix} \partial_\mu \begin{vmatrix} \psi^r \\ \psi^i \end{vmatrix} - ie \begin{vmatrix} & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & \end{vmatrix} A_\mu + m \begin{vmatrix} \psi^r \\ \psi^i \end{vmatrix} = 0, \tag{30}$$

or in the matrix form

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu - ieG_\mu A_\mu + m)\Psi = 0, \tag{31}$$

where

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes (I_n \otimes \gamma_\mu), \quad G_\mu = \sigma_1 \otimes (I_n \otimes \gamma_\mu). \tag{32}$$

Now, we should find restrictions on the intrinsic symmetries Q imposed by the requirements (19) and (20).

From the constraint $[Q, \Gamma_\mu]_- = 0$ (see (19)), taking into account the structure of Γ_μ (32), we get the possible structure of the transformation Q:

$$Q = A \otimes (B \otimes I_4), \tag{33}$$

where A and B are complex matrices with dimensions 2×2 and $n \times n$ respectively. Indeed, we readily prove the identity (it is valid for any A and B)

$$
\begin{gathered}
[Q, \Gamma_\mu]_- = [A \otimes B \otimes I_4, I_2 \otimes I_n \otimes \gamma_\mu]_- = (A \otimes B \otimes I_4)(I_2 \otimes I_n \otimes \gamma_\mu) - \\
-(I_2 \otimes I_n \otimes \gamma_\mu)(A \otimes B \otimes I_4) = A \otimes (B \otimes I_4)(I_n \otimes \gamma_\mu) - \\
-A \otimes (I_n \otimes \gamma_\mu)(B \otimes I_4) = A \otimes (B \otimes \gamma_\mu) - A \otimes (B \otimes \gamma_\mu) = 0.
\end{gathered}
$$

Substituting (33) into (20):

$$
\begin{gathered}
[Q, G_\mu]_- = [A \otimes B \otimes I_4, \sigma_1 \otimes I_n \otimes \gamma_\mu]_- = (A \otimes B \otimes I_4)(\sigma_1 \otimes I_n \otimes \gamma_\mu) - \\
-(\sigma_1 \otimes I_n \otimes \gamma_\mu)(A \otimes B \otimes I_4) = \sigma_1 A \otimes (I_n \otimes \gamma_\mu)(B \otimes I_4) - A\sigma_1 (B \otimes I_4)(I_n \otimes \gamma_\mu) = \\
= \sigma_1 A \otimes (B \otimes \gamma_\mu) - A\sigma_1 \otimes (B \otimes \gamma_\mu) = (\sigma_1 A - A\sigma_1) \otimes (B \otimes \gamma_\mu) = 0,
\end{gathered}
$$

we get the restriction on the matrix A:

$$[\sigma_1, A]_- = 0; \tag{34}$$

for the matrix B no restrictions arise.

Thus the intrinsic symmetry Q should have the structure (33) with additional constraint (34). It is evident that the corresponding generators should obey the structure similar to (33):

$$J = a \otimes (b \otimes I_4), \tag{35}$$

where a and b are complex matrices of dimensions 2×2 and $n\times n$ respectively besides, they should satisfy the constraint

$$[\sigma_1, a]_- = 0. \tag{36}$$

For the case of one Dirac equation (15), there exists only one generator (24); $a = \sigma_1$ and eq. $[\sigma_1, a]_- = 0$ is satisfied, and $b = 1$.

5. Two Dirac Fields in Electromagnetic Fields

In the case of two Dirac fields, the matrices Γ_μ and G_μ have the form

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes (I_2 \otimes \gamma_\mu), \quad G_\mu = \sigma_1 \otimes (I_2 \otimes \gamma_\mu). \tag{37}$$

The intrinsic symmetry generators for free fields were found in the above

$$\begin{aligned} &J_1 = \gamma_1 \otimes I_4, \quad J_3 = \gamma_3 \otimes I_4, \quad J_{11} = i\gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, \\ &J_7 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes I_4, \quad J_9 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes I_4, \quad J_{14} = i\gamma_2\gamma_4 \otimes I_4. \end{aligned} \tag{38}$$

It is convenient to present them differently. To this end, we take into account eq. (16), $\gamma_5 = -\sigma_2 \otimes I_2$ and the multiplication rule $\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}$. Then we obtain

$$\gamma_3\gamma_1 = (\sigma_1 \otimes \sigma_3)(\sigma_1 \otimes \sigma_1) = \sigma_1\sigma_1 \otimes \sigma_3\sigma_1 = iI_2 \otimes \varepsilon_{312}\sigma_2 = iI_2 \otimes \sigma_2,$$

similarly

$$\gamma_2\gamma_5 = i\sigma_1 \otimes I_2, \quad \gamma_2\gamma_4 = i\sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \gamma_4\gamma_5 = -i\sigma_3 \otimes \sigma_2.$$

With the last relations in mind, the generators (48) are presented as follows

$$\begin{aligned} &J_1 = \sigma_1 \otimes (\sigma_1 \otimes I_4), J_3 = \sigma_1 \otimes (\sigma_3 \otimes I_4), J_{11} = -I_2 \otimes (\sigma_2 \otimes I_4), \\ &J_7 = -\sigma_1 \otimes (I_2 \otimes I_4), J_9 = \sigma_3 \otimes (\sigma_2 \otimes I_4), J_{14} = -\sigma_2 (\otimes \sigma_2 \otimes I_4). \end{aligned} \tag{39}$$

All six generators have the structure $J = a \otimes (b \otimes I_4)$, where

$$a, b \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I_2\}. \tag{40}$$

Evidently, the additional condition $[a, \sigma_1]_= 0$ is satisfied only for generators of the type $a \in \{\sigma_1, I_2\}$; so remain only 4 generators

$$J_1, J_3, J_{11}, J_7, \tag{41}$$

note that J_1, J_3, J_{11} obey the Lie algebra $su(2)$. The generator J_7 commutes with J_1, J_3, J_{11}.

Thus, we have 4-parametric group with the structure $SU(2)\otimes U(1)$. Taking in mind the explicit form of the J_7

$$J_7 = -\sigma_1 \otimes (I_2 \otimes I_4) = -\sigma_1 \otimes I_8,$$

we readily find expression for corresponding finite transformation Q_7:

$$Q_7 = e^{i\sigma_1\Omega} \otimes I_8 = (\cos\Omega + i\sin\Omega\,\sigma_1) \otimes I_8. \tag{42}$$

6. Three Dirac Equations in Electromagnetic Fields

For three Dirac equations fields (64), (65) in presence of external electromagnetic field, the matrices Γ_μ and G_μ in (31) take the form

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes I_3 \otimes \gamma_\mu, \quad G_\mu = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_\mu. \tag{43}$$

The intrinsic symmetry generators in absence of electromagnetic fields were found in the above, they are

$$J_1 = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes I_4, \quad J_9 = (I_2 \otimes \alpha_6) \otimes I_4, \quad J_{10} = (I_2 \otimes \alpha_7) \otimes I_4,$$
$$J_{11} = (I_2 \otimes \alpha_8) \otimes I_4, \quad J_{12} = (\sigma_1 \otimes \alpha_1) \otimes I_4, \quad J_{13} = (\sigma_1 \otimes \alpha_2) \otimes I_4,$$
$$J_{14} = (\sigma_1 \otimes \alpha_3) \otimes I_4, \quad J_{15} = (\sigma_1 \otimes \alpha_4) \otimes I_4, \quad J_{16} = (\sigma_1 \otimes \alpha_5) \otimes I_4,$$
$$J_{25} = (\sigma_2 \otimes \alpha_6) \otimes I_4, \quad J_{26} = (\sigma_2 \otimes \alpha_7) \otimes I_4, \quad J_{27} = (\sigma_2 \otimes \alpha_8) \otimes I_4,$$
$$J_{33} = (\sigma_3 \otimes \alpha_6) \otimes I_4, \quad J_{34} = (\sigma_3 \otimes \alpha_7) \otimes I_4, \quad J_{35} = (\sigma_3 \otimes \alpha_8) \otimes I_4.$$

All these generators have the structure $J = a \otimes (b \otimes I_4)$, where $a \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I_2\}$, and 3-dimensional matrices b are Gell-Mann matrices, $b \in \{\alpha_1, ..., \alpha_8, I_3\}$.

Additional condition (34) is satisfied only for generators of the type $a \in \{\sigma_1, I_2\}$:

$$J_1, J_9, J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{16}; \tag{44}$$

they make up a 9-parametric group, in which we can separate two noncommuting subgroups with the structure SU(2): J_9, J_{13}, J_{14} and J_{10}, J_{12}, J_{15}. On the matrices b no restrictions arise.

7. Four Dirac Fields

For the case of 4 Dirac fields, the matrices Γ_μ and G_μ have the structure

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes (I_4 \otimes \gamma_\mu), \quad G_\mu = \sigma_1 \otimes (I_4 \otimes \gamma_\mu). \tag{45}$$

The generators of the intrinsic symmetry in absence of external fields were found in the above. Let us transform these generators to the structure $J = a \otimes (b \otimes I_4)$, and find the relevant matrices a:

$$J_1 \to a = \sigma_1, \quad J_3 \to a = \sigma_3, \quad J_7 \to a = \sigma_1, \quad J_9 \to a = \sigma_3,$$
$$J_{11} \to a = I_2, \quad J_{14} \to a = \sigma_2, \quad J_{16} \to a = \sigma_1, \quad J_{18} \to a = \sigma_1,$$
$$J_{20} \to a = \sigma_3, \quad J_{22} \to a = \sigma_1, \quad J_{24} \to a = \sigma_1, \quad J_{26} \to a = \sigma_1,$$
$$J_{29} \to a = \sigma_1, \quad J_{32} \to a = \sigma_3, \quad J_{34} \to a = \sigma_1, \quad J_{36} \to a = \sigma_1,$$
$$J_{38} \to a = \sigma_3, \quad J_{40} \to a = \sigma_3, \quad J_{42} \to a = \sigma_3, \quad J_{44} \to a = \sigma_2,$$
$$J_{46} \to a = I_2, \quad J_{48} \to a = I_2, \quad J_{50} \to a = \sigma_2, \quad J_{53} \to a = I_2,$$
$$J_{55} \to a = \sigma_2, \quad J_{57} \to a = \sigma_2, \quad J_{59} \to a = I_2, \quad J_{62} \to a = I_2.$$

Evidently, the additional condition $[a, \sigma_1]_- = 0$ will be satisfied only for generators of the type $a \in \{\sigma_1, I_2\}$; they are the following 15 generators

$$J_1, J_7, J_{11}, J_{16}, J_{18}, J_{22}, J_{24}, J_{26}, J_{34}, J_{36}, J_{46}, J_{48}, J_{53}, J_{59}, J_{62}. \tag{46}$$

On the matrices b no additional restrictions in presence of external electromagnetic fields arise.

The study of the explicit structure of generators (46) permits to get the following conclusions:

1. Among these generators we can see 16 triples, each of them obeys the commutative relations of the group $SU(2)$

$$\begin{gathered}(J_1, J_{22}, J_{46}), (J_1, J_{24}, J_{48}), (J_1, J_{26}, J_{53}), (J_{11}, J_{16}, J_{22}),\\ (J_{11}, J_{18}, J_{24}), (J_{11}, J_{53}, J_{59}), (J_{16}, J_{18}, J_{62}), (J_{16}, J_{36}, J_{59}),\\ (J_{18}, J_{34}, J_{59}), (J_{22}, J_{24}, J_{62}), (J_{22}, J_{36}, J_{53}), (J_{24}, J_{34}, J_{53}),\\ (J_{26}, J_{34}, J_{48}), (J_{26}, J_{36}, J_{46}), (J_{34}, J_{36}, J_{62}), (J_{46}, J_{48}, J_{62}).\end{gathered} \tag{47}$$

2. Among these triples (47), there exist 6 pairs, commuting with each other:

$$\begin{gathered}(J_1, J_{22}, J_{46}), (J_{18}, J_{34}, J_{59});\\ (J_1, J_{24}, J_{48}), (J_{16}, J_{36}, J_{59});\\ (J_1, J_{26}, J_{53}), (J_{16}, J_{18}, J_{62});\\ (J_{11}, J_{16}, J_{22}), (J_{26}, J_{34}, J_{48});\\ (J_{11}, J_{18}, J_{24}), (J_{26}, J_{36}, J_{46});\\ (J_{11}, J_{53}, J_{59}), (J_{46}, J_{48}, J_{62}).\end{gathered} \tag{48}$$

3. The triples

$$(J_{22}, J_{24}, J_{62}), \quad (J_{22}, J_{36}, J_{53}), \quad (J_{24}, J_{34}, J_{53}), \quad (J_{34}, J_{36}, J_{62})$$

do not have such pairs.

8. Dirac Equation in Riemannian Space-Time

Initial Dirac equation in Minkowski space (x_1, x_2, x_3, ict)

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{49}$$

in presence of a curved space-time background has the form

$$[i\gamma'^{\alpha}(x)(\partial_\alpha + B_\alpha(x)) - m]\psi(x) = 0, \tag{50}$$

where

$$\gamma'^{\alpha}(x) = \gamma'^{a} e^{\alpha}_{(a)}, \quad e^{\alpha}_{(a)} \text{isatetrad},$$

$$B_\alpha(x) = \frac{1}{2}\sigma^{ab} e^{\beta}_{(a)} \nabla_\alpha (e_{(b)\beta}), \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma'^{a}\gamma'^{b} - \gamma'^{b}\gamma'^{a}),$$

or

$$B_\alpha(x) = \frac{1}{4}\gamma'^{\beta}(x)\nabla_\alpha \gamma'_\beta(x);$$

∇_α stands for the covariant derivative, the metrical signature is $g_{ab} = (1, -1, -1, -1)$. The Dirac matrices in metrical representation γ' relate to the matrices (16) as follows

$$\gamma'^{0} = \gamma_4, \quad \gamma'^{1} = i\gamma_1, \quad \gamma'^{2} = i\gamma_2, \quad \gamma'^{3} = i\gamma_3. \tag{51}$$

In metrical representation, the Dirac matrices in Majorana basis are determined by the formulas

$$\gamma'^1 = \left| \begin{array}{cccc} & & & i \\ & & i & \\ & i & & \\ i & & & \end{array} \right|, \gamma'^2 = \left| \begin{array}{cccc} i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{array} \right|,$$
$$\gamma'^3 = \left| \begin{array}{cccc} & & i & \\ & & & -i \\ i & & & \\ & -i & & \end{array} \right|, \gamma'^0 = \left| \begin{array}{cccc} & & & -i \\ & & i & \\ & -i & & \\ i & & & \end{array} \right|, \tag{52}$$

they are imaginary, under the Hermitian conjugation they behave as follows

$$(\gamma'^0)^+ = \gamma'^0, \quad (\gamma'^1)^+ = -\gamma'^1, \quad (\gamma'^2)^+ = -\gamma'^2, \quad (\gamma'^3)^+ = -\gamma'^3. \tag{53}$$

In accordance with the above definitions, the wave operator in the Dirac equation (50) in Majorana basis is real; this means that there exist two types of Majorana fermions in Riemannian space as well as in Minkowski space.

The Lagrangian for Dirac field in Riemannian space is determined as follows

$$L = -\psi^+ \eta (i\gamma'^\mu(x) D_\mu - m)\psi, \eta = \gamma'^0, \eta^+ = \eta, D_\mu = \partial_\mu + B_\mu(x); \tag{54}$$

note the commutation rule

$$D_\mu \gamma'^\mu(x) = \gamma'^\mu(x) D_\mu. \tag{55}$$

It is evident that in presence of gravitational fields (in presence of any curved space-time background), the basic relations which determine the properties of the intrinsic symmetries, preserve their form

$$[Q, \gamma'^\mu(x)]_- = 0, \quad Q^+ \eta Q = \eta. \tag{56}$$

Therefore, all above established properties of intrinsic symmetries and their classification are valid in Riemannian space-time models as well, when considering 1, 2, 3, and 4 Dirac fields, both for massive and massless particles.

9. System of 4 Dirac fields, relation to the Dirac – Kähler particle, the metric g_{ab}=diag(1, -1, -1 -1)

In this section, we will use the metric tensor with the signature $(1,-1,-1,-1)$; then the Dirac equation in Majorana basis reads

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{57}$$

now the Dirac matrices are imaginary

$$\gamma^0 = \sigma_1 \otimes \sigma_2, \quad \gamma^1 = i\sigma_1 \otimes \sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_3 \otimes I_2, \quad \gamma^3 = i\sigma_1 \otimes \sigma_3. \tag{58}$$

Let us turn to four Dirac-like equations

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_k = 0, \quad k = 1,2,3,4; \tag{59}$$

it is convenient to present these 4 bispinor functions as the columns of the 4×4 matrix

$$(\psi_k) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} & \psi_{31} & \psi_{41} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_{32} & \psi_{42} \\ \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} & \psi_{43} \\ \psi_{14} & \psi_{24} & \psi_{34} & \psi_{44} \end{vmatrix}. \tag{60}$$

Consider conjugate equations

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_k^* = 0. \tag{61}$$

After summing and subtracting functions in relevant pairs

$$\psi_k^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k + \psi_k^*), \ \psi_k^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k - \psi_k^*), \tag{62}$$

we get the system in the standard form

$$(i\Gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \tag{63}$$

where Ψ is a 32-component wave function

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_3^r, \psi_4^r; \psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i, \psi_4^i); \tag{64}$$

and the matrices Γ^μ are determined as follows

$$\Gamma^\mu = I_8 \otimes \gamma^\mu. \qquad 5)$$

The above performed study may be repeated again with minor modifications; in this way we can verify that the intrinsic symmetry transformations are determined by 28 generators to which there correspond imaginary parameters.

Let us detail the one triple of generators

$$J_1 = i\gamma^1 \otimes I_8, \quad J_3 = i\gamma^3 \otimes I_8, \quad J_{11} = i(\gamma^3\gamma^1) \otimes I_8, \tag{66}$$

they obey the $su(2)$ algebra. The corresponding finite transformations read

$$\Psi' = Q\Psi, \quad Q = \omega_0 I + \omega_1 J_1 + \omega_3 J_3 + \omega_{11} J_{11}, \quad I = I_{32\times 32}; \tag{67}$$

where parameter ω_0 is real-valued, and $\omega_1, \omega_3, \omega_{11}$ are imaginary. In initial components of the complete wave function (60), it is presented differently

$$\begin{aligned}
\psi'_{11} &= \psi_{11}^r + \psi_{11}^i = -i\omega_{11}\psi_{31}^r + \omega_0\psi_{11}^r - \omega_3\psi_{11}^i - \omega_1\psi_{31}^i - i\omega_{11}\psi_{31}^i + \omega_0\psi_{11}^i - \omega_3\psi_{11}^r - \omega_1\psi_{31}^r, \\
\psi'_{12} &= \psi_{12}^r + \psi_{12}^i = -i\omega_{11}\psi_{32}^r + \omega_0\psi_{12}^r - \omega_3\psi_{12}^i - \omega_1\psi_{32}^i - i\omega_{11}\psi_{32}^i + \omega_0\psi_{12}^i - \omega_3\psi_{12}^r - \omega_1\psi_{32}^r, \\
\psi'_{13} &= \psi_{13}^r + \psi_{13}^i = -i\omega_{11}\psi_{33}^r + \omega_0\psi_{13}^r - \omega_3\psi_{13}^i - \omega_1\psi_{33}^i - i\omega_{11}\psi_{33}^i + \omega_0\psi_{13}^i - \omega_3\psi_{13}^r - \omega_1\psi_{33}^r, \\
\psi'_{14} &= \psi_{14}^r + \psi_{14}^i = -i\omega_{11}\psi_{34}^r + \omega_0\psi_{14}^r - \omega_3\psi_{14}^i - \omega_1\psi_{34}^i - i\omega_{11}\psi_{34}^i + \omega_0\psi_{14}^i - \omega_3\psi_{14}^r - \omega_1\psi_{34}^r,
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
\psi'_{21} &= \psi_{21}^r + \psi_{21}^i = -i\omega_{11}\psi_{41}^r + \omega_0\psi_{21}^r - \omega_3\psi_{21}^i - \omega_1\psi_{41}^i - i\omega_{11}\psi_{41}^i + \omega_0\psi_{21}^i - \omega_3\psi_{21}^r - \omega_1\psi_{41}^r, \\
\psi'_{22} &= \psi_{22}^r + \psi_{22}^i = -i\omega_{11}\psi_{42}^r + \omega_0\psi_{22}^r - \omega_3\psi_{22}^i - \omega_1\psi_{42}^i - i\omega_{11}\psi_{42}^i + \omega_0\psi_{22}^i - \omega_3\psi_{22}^r - \omega_1\psi_{42}^r, \\
\psi'_{23} &= \psi_{23}^r + \psi_{23}^i = -i\omega_{11}\psi_{43}^r + \omega_0\psi_{23}^r - \omega_3\psi_{23}^i - \omega_1\psi_{43}^i - i\omega_{11}\psi_{43}^i + \omega_0\psi_{23}^i - \omega_3\psi_{23}^r - \omega_1\psi_{43}^r, \\
\psi'_{24} &= \psi_{24}^r + \psi_{24}^i = -i\omega_{11}\psi_{44}^r + \omega_0\psi_{24}^r - \omega_3\psi_{24}^i - \omega_1\psi_{44}^i - i\omega_{11}\psi_{44}^i + \omega_0\psi_{24}^i - \omega_3\psi_{24}^r - \omega_1\psi_{44}^r,
\end{aligned} \tag{69}$$

$$
\begin{aligned}
\psi'_{31} &= \psi^r_{31} + \psi^i_{31} = i\omega_{11}\psi^r_{11} + \omega_0\psi^r_{31} + \omega_3\psi^i_{31} - \omega_1\psi^i_{11} + i\omega_{11}\psi^i_{11} + \omega_0\psi^i_{31} + \omega_3\psi^r_{31} - \omega_1\psi^r_{11},\\
\psi'_{32} &= \psi^r_{32} + \psi^i_{32} = i\omega_{11}\psi^r_{12} + \omega_0\psi^r_{32} + \omega_3\psi^i_{32} - \omega_1\psi^i_{12} + i\omega_{11}\psi^i_{12} + \omega_0\psi^i_{32} + \omega_3\psi^r_{32} - \omega_1\psi^r_{12},\\
\psi'_{33} &= \psi^r_{33} + \psi^i_{33} = i\omega_{11}\psi^r_{13} + \omega_0\psi^r_{33} + \omega_3\psi^i_{33} - \omega_1\psi^i_{13} + i\omega_{11}\psi^i_{13} + \omega_0\psi^i_{33} + \omega_3\psi^r_{33} - \omega_1\psi^r_{13},\\
\psi'_{34} &= \psi^r_{34} + \psi^i_{34} = i\omega_{11}\psi^r_{14} + \omega_0\psi^r_{34} + \omega_3\psi^i_{34} - \omega_1\psi^i_{14} + i\omega_{11}\psi^i_{14} + \omega_0\psi^i_{34} + \omega_3\psi^r_{34} - \omega_1\psi^r_{14},
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi'_{41} &= \psi^r_{41} + \psi^i_{41} = i\omega_{11}\psi^r_{21} + \omega_0\psi^r_{41} + \omega_3\psi^i_{41} - \omega_1\psi^i_{21} + i\omega_{11}\psi^i_{21} + \omega_0\psi^i_{41} + \omega_3\psi^r_{41} - \omega_1\psi^r_{21},\\
\psi'_{42} &= \psi^r_{42} + \psi^i_{42} = i\omega_{11}\psi^r_{22} + \omega_0\psi^r_{42} + \omega_3\psi^i_{42} - \omega_1\psi^i_{22} + i\omega_{11}\psi^i_{22} + \omega_0\psi^i_{42} + \omega_3\psi^r_{42} - \omega_1\psi^r_{22},\\
\psi'_{43} &= \psi^r_{43} + \psi^i_{43} = i\omega_{11}\psi^r_{23} + \omega_0\psi^r_{43} + \omega_3\psi^i_{43} - \omega_1\psi^i_{23} + i\omega_{11}\psi^i_{23} + \omega_0\psi^i_{43} + \omega_3\psi^r_{43} - \omega_1\psi^r_{23},\\
\psi'_{44} &= \psi^r_{44} + \psi^i_{44} = i\omega_{11}\psi^r_{24} + \omega_0\psi^r_{44} + \omega_3\psi^i_{44} - \omega_1\psi^i_{24} + i\omega_{11}\psi^i_{24} + \omega_0\psi^i_{44} + \omega_3\psi^r_{44} - \omega_1\psi^r_{24}.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

We may rewrite these formulas in a more symmetrical form

$$
\begin{aligned}
\psi'_{11} &= (\omega_0 - \omega_3)\psi^r_{11} + (\omega_0 - \omega_3)\psi^i_{11} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi^r_{31} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi^i_{31} =\\
&= (\omega_0 - \omega_3)(\psi^r_{11} + \psi^i_{11}) - (\omega_1 + i\omega_{11})(\psi^r_{31} + \psi^i_{31}),
\end{aligned}
$$

whence, bearing in mind $\psi^r_{11} + \psi^i_{11} = \psi_{11}, \psi^r_{31} + \psi^i_{31} = \psi_{31}$, we obtain

$$\psi'_{11} = (\omega_0 - \omega_3)\psi_{11} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi_{31}.$$

Similar expressions we get for the variables $\psi'_{12}, \psi'_{13}, \psi'_{14}$:

$$
\begin{aligned}
\psi'_{12} &= (\omega_0 - \omega_3)\psi_{12} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi_{32},\\
\psi'_{13} &= (\omega_0 - \omega_3)\psi_{13} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi_{33},\\
\psi'_{14} &= (\omega_0 - \omega_3)\psi_{14} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi_{34}.
\end{aligned}
$$

The last 4 relations may be written with the use of one formula (we add similar formulas for remaining columns)

$$
\begin{aligned}
\psi'_{1k} &= (\omega_0 - \omega_3)\psi_{1k} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi_{3k},\\
\psi'_{2k} &= (\omega_0 - \omega_3)\psi_{2k} - (\omega_1 + i\omega_{11})\psi_{4k},\\
\psi'_{3k} &= (\omega_0 + \omega_3)\psi_{3k} + (\omega_1 - i\omega_{11})\psi_{1k},\\
\psi'_{4k} &= (\omega_0 + \omega_3)\psi_{4k} + (\omega_1 - i\omega_{11})\psi_{2k}.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Thus, for four Dirac fields (60), the symmetry transformations (67) are written as follows

$$
\begin{vmatrix} \Psi'_{1k} \\ \Psi'_{2k} \\ \Psi'_{3k} \\ \Psi'_{4k} \end{vmatrix} =
\begin{vmatrix}
(\omega_0 - \omega_3) & 0 & (\omega_1 - i\omega_{11})^* & 0 \\
0 & (\omega_0 - \omega_3) & 0 & (\omega_1 - i\omega_{11})^* \\
(\omega_1 - i\omega_{11}) & 0 & (\omega_0 - \omega_3)^* & 0 \\
0 & (\omega_1 - i\omega_{11}) & 0 & (\omega_0 - \omega_3)^*
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} \Psi_{1k} \\ \Psi_{2k} \\ \Psi_{3k} \\ \Psi_{4k} \end{vmatrix}.
$$

This transformation $\Psi' = Q\Psi$ may be decomposed in the linear combination of 4×4 matrices (recall that $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0$)

$$Q = \omega_0 I_4 + \omega_3 \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \omega_1 \begin{vmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{vmatrix} +$$

$$+ i\omega_{11} \begin{vmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{vmatrix} = \omega_0 I_4 + i\omega_3 \gamma^2 - \omega_1 \gamma^5 - \omega_{11} \gamma^2 \gamma^5 . \qquad (73)$$

Let us introduce new notations

$$\Omega_1 = 2\omega_3, \quad \Omega_2 = -2\omega_1, \quad \Omega_3 = -2\omega_{11},$$
$$G_1 = \frac{i}{2}\gamma^2, \quad G_2 = \frac{1}{2}\gamma^5, \quad G3 = \frac{1}{2}\gamma^2\gamma^5,$$

then the Q transformation is presented as follows

$$Q = \omega_0 I_4 + i\omega_3 \gamma^2 - \omega_1 \gamma^5 - \omega_{11} \gamma^2 \gamma^5 = \omega_0 I_4 + \Omega_1 G_1 + \Omega_2 G_2 + \Omega_3 G_3 .$$

The generators G_i obey the following commutative relations

$$[G_1, G_2]_- = iG_3, \quad [G_3, G_1]_- = iG_2, \quad [G_2, G_3]_- = -iG_1; \qquad (74)$$

in modified notations, $G_1 \to K_3, G_2 \to K_1, G_3 \to K_2$, they read

$$[K_1, K_2]_- = -iK_3, \quad [K_2, K_3]_- = iK_1, \quad [K_3, K_1]_- = iK_2, \qquad (75)$$

which refers to $su(1,1)$ algebra.

Let us consider relations between the four Dirac fields and the Dirac – Kähler theory. As known, the Dirac – Kähler particle may be described in terms of tensor variables $(\varphi, \varphi_i, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_i, \varphi_{mn})$, and the corresponding equations read [32]

$$\partial_l \varphi + m\varphi_l = 0, \quad \partial_l \tilde{\varphi} + m\tilde{\varphi}_l = 0,$$
$$\partial_l \varphi + \partial_a \varphi_{la} - m\varphi_l = 0, \quad \partial_l \tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\varepsilon_l^{\ amn} \partial_a \varphi_{mn} - m\tilde{\varphi}_l = 0, \qquad (76)$$
$$\partial_m \varphi_n - \partial_n \varphi_m + \varepsilon_{mn}^{\ \ ab} \partial_a \tilde{\varphi}_b - m\varphi_{mn} = 0;$$

pseudotensor quantities are marked by tilde. Equivalent description is possible with the use of the 2-rank bispinor U, then the system of equations is presented as follows

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)U = 0, \qquad (77)$$

were we assume the use of the Dirac matrices γ^μ in spinor basis

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} & I_2 \\ I_2 & \end{vmatrix}, \gamma^1 = \begin{vmatrix} & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \end{vmatrix}, \gamma^2 = \begin{vmatrix} & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & \end{vmatrix}, \gamma^3 = \begin{vmatrix} & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & \end{vmatrix}.$$

Relations between two sets of variables are determined by the formulas [55]:

$$\varphi=-\frac{1}{4i}\mathrm{Sp}(EU),\quad \varphi_l=\frac{1}{4}\mathrm{Sp}(E\gamma_l U),\quad \tilde{\varphi}=\frac{1}{4}\mathrm{Sp}(E\gamma_5 U),$$
$$\tilde{\varphi}_l=\frac{1}{4i}\mathrm{Sp}(E\gamma_5\gamma_l U),\quad \varphi_{mn}=-\frac{1}{2i}\mathrm{Sp}(E\sigma_{mn}U), \tag{78}$$

where

$$E=\begin{vmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{vmatrix},\quad \sigma^{ab}=\frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b-\gamma^b\gamma^a). \tag{79}$$

Let us transform relations (78) to Majorana basis:

$$\psi_s=S\psi_m,\quad \gamma_s^a=S\gamma_m^a S^{-1},$$
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & -i & 1 & -1 \\ i & i & 1 & 1 \\ -i & -i & 1 & 1 \\ i & -i & -1 & 1 \end{vmatrix}, S^{-1}=S^{+}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -i & -i & i & -i \\ i & -i & i & i \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{80}$$

The transformation rule is

$$U=(S\otimes S)U'=SU'S^T,\quad U'=(S^{-1}\otimes S^{-1})U=S^{-1}U'(S^{-1})^T.$$

Further we find explicit expressions for scalar components

$$\varphi'=-\frac{1}{4i}\mathrm{Sp}(SE'S^{-1}SU'S^T)=-\frac{1}{4i}\mathrm{Sp}(SE'U'S^T), \tag{81}$$

where $E'=S^{-1}ES$. Similarly, we get expressions for remaining tensor components

$$\varphi_l'=\frac{1}{4}\mathrm{Sp}(SE'\gamma_l'U'S^T),\quad \tilde{\varphi}'=\frac{1}{4}\mathrm{Sp}(SE'\gamma_5'U'S^T),$$
$$\tilde{\varphi}_l'=\frac{1}{4i}\mathrm{Sp}(SE'\gamma_{5'}\gamma_l'U'S^T),\quad \varphi_{mn}'=-\frac{1}{2i}\mathrm{Sp}(SE'\sigma_{mn}'U'S^T). \tag{82}$$

We consider the matrix U' as a set of 4 columns (These columns do not behave as bispinors under the Lorentz group)

$$U'=(\Psi_{1k}',\Psi_{2k}',\Psi_{3k}',\Psi_{4k}'); \tag{83}$$

the prime indicates on Majorana basis. Because the Dirac – Kähler equation may be presented a set of 4 unlinked Dirac-like equations (however it is not so in Riemannian space-time), the intrinsic symmetries for four Dirac fields should be the symmetries for Dirac – Kähler field as well.

Intrinsic symmetry transformation $\bar{\Psi}'=Q\Psi'$ explicitly reads

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_1'&=(\omega_0-\omega_3)\Psi_1'+(\omega_1-i\omega_{11})^*\Psi_3',\\
\bar{\Psi}_2'&=(\omega_0-\omega_3)\Psi_2'+(\omega_1-i\omega_{11})^*\Psi_4',\\
\bar{\Psi}_3'&=(\omega_0-\omega_3)^*\Psi_3'+(\omega_1-i\omega_{11})\Psi_1',\\
\bar{\Psi}_4'&=(\omega_0-\omega_3)^*\Psi_4'+(\omega_1-i\omega_{11})\Psi_2'.
\end{aligned} \tag{84}$$

Corresponding tensor components are determined by relations

$$\bar{\varphi}' = -\frac{1}{4i}\mathrm{Sp}(SE'\bar{U}'S^T),$$
$$\bar{\varphi}'_l = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(SE'\gamma'_l\bar{U}'S^T), \quad \bar{\tilde{\varphi}}' = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(SE'\gamma'_5\bar{U}'S^T), \tag{85}$$
$$\bar{\tilde{\varphi}}'_l = \frac{1}{4i}\mathrm{Sp}(SE'\gamma_{5'}\gamma'_l\bar{U}'S^T), \quad \bar{\varphi}'_{mn} = -\frac{1}{2i}\mathrm{Sp}(SE'\sigma'_{mn}\bar{U}'S^T).$$

For example, let us write down the relevant formulas for pseudo-quantities

$$\bar{\varphi}' = \frac{1}{4i}\{\omega_0[(\psi'_{43}-\psi'_{34})+(\psi'_{12}-\psi'_{21})]+\omega_3[(\psi'_{43}-\psi'_{34})-(\psi'_{12}-\psi'_{21})]+$$
$$+\omega_-(\psi'_{23}-\psi'_{14})+\omega_+(\psi'_{41}-\psi'_{32})\},$$
$$\bar{\varphi}'_1 = -\frac{1}{4i}[(\omega_0+\omega_3)(\psi'_{42}-\psi'_{31})+(\omega_0-\omega_3)(\psi'_{13}-\psi'_{24})+$$
$$+\omega_-(\psi'_{14}+\psi'_{22})+\omega_+(\psi'_{44}-\psi'_{31})],$$
$$\bar{\varphi}'_2 = -\frac{1}{4i}[(\omega_0-\omega_3)(\psi'_{12}-\psi'_{21})+(\omega_0+\omega_3)(\psi'_{34}-\psi'_{43})-$$
$$-\omega_+(\psi'_{32}-\psi'_{41})+\omega_-(\psi'_{14}-\psi'_{23})],$$
$$\bar{\varphi}'_3 = -\frac{1}{4i}[(\omega_0+\omega_3)(\psi'_{32}+\psi'_{41})-(\omega_0-\omega_3)(\psi'_{23}+\psi'_{14})+$$
$$+\omega_-(\psi'_{12}+\psi'_{21})+\omega_+(\psi'_{43}+\psi'_{34})],$$
$$\bar{\varphi}'_0 = -\frac{1}{4i}[(\omega_0-\omega_3)(\psi'_{24}+\psi'_{13})-(\omega_0+\omega_3)(\psi'_{42}+\psi'_{31})-$$
$$-\omega_+(\psi'_{44}+\psi'_{33})+\omega_-(\psi'_{22}-\psi'_{11})].$$

The author is grateful to V. M. Red'kov for encouraging help and advice.

REFERENCES

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. – 1936. – Vol. A155. – P. 447–459.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Nr 173. – P. 211–232.
3. Fierz, M. Über die relativistische theorie kräftefreier teilchen mit beliebigem spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.
4. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17. – P. 200–216.
5. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21. – P. 451–462.
6. Harish-Chandra. On relativistic wave equations / Harish-Chandra // Phys. Rev. – 1947. – Vol. 71, nr 11. – P. 793–805.
7. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. – 1948. – Vol. A192. – P. 195–218.
8. Gelfand, I. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group / I. M. Gelfand, A. M. Yaglom // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1948. – Vol. 18, nr 8. – P. 703–733.

9. Fedorov, F. I. Projective operators in the theory of elementary particles / F. I. Fedorov // JETP. – 1958. – Vol. 35. – P. 495–498.

10. Bogush, A. A. Covariant description of spin properties of the particles and its aplication / A. A. Bogush, F. I. Fedorov // Vesti AN BSSR. Ser. fiz.-techn. – 1962. – Nr 2. – P. 26–38.

11. Fedorov, F. I. On transformation of 4-dimensional vectors / F. I. Fedorov, A. A. Bogush // Dokl. AN BSSR. – 1962. – Vol. 6, nr 11. – P. 690–693.

12. Bogush, A. A. General calculation of the matrix elements for polarized vector particles / A. A. Bogush, A. I. Bolsun // Dokl. AN USSR. – 1964. – Vol. 155, nr 5. – P. 1046–1049.

13. Bogush, A. A. General calculation of matrix elements for vector particle with different masses / A. A. Bogush, A. I. Bolsun, L. G. Moroz // Ves. AN BSSR. Ser. fiz.-mat. – 1966. – Nr 4. – P. 120–122.

14. Fedorov, F. I. Vector-parameter and covariant theory of spin / F. I. Fedorov, E. E. Txarev // Yadernaya Fizika – 1968. – Vol. 7 – P. 189–191.

15. Bogush, A. A. Intoduction to the theory of classical fields. / A. A. Bogush, L. G. Moroz – Minsk : Science and Technics, 1968. – 386 p.

16. Gronskiy, V. K. Covariant methods of calculation polarization effects for vector particle / V. K. Gronskiy // Vesti AN BSSR. Ser. fiz.-techn. – 1976. – Nr 5. – P. 75–84.

17. Fedorov, F. I. The Lorentz group / F. I. Fedorov – M. : Science, 1979. – 384 p.

18. Shelepin, L. A. Covariant theory of relativistic weave equations for particles with arbitrary spin / L. A. Shelepin // FIAN Proceedings. – 1964. – Vol. 30. – P. 253–321.

19. Fuschich, V. I. On new and old symmetries of the Maxwell and Dirac equations / V. I. Fuschich, A. G. Nikitin // Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. – 1983. – Vol. 14, nr 1. – P. 5–57.

20. Pletukhov, V. A. Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom / V. A. Pletukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Belarus. Science, 2015. – 328 p.

21. Red'kov, V. M. On equations for the Dirac – Kähler field and bosons with different parities in a Riemannian space / V. M. Red'kov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Ser. fiz.-mat. – 2000. – Nr 1. – P. 90–95.

22. Red'kov, V. M. Dirac – Kähler field and 2-potential approach to electrodynamics with two charges. Chapter I / V. M. Red'kov // Progress in Relativity, Gravitation, Cosmology / ed.: V. V. Dvoeglazov, A. Molgado. – Mexico : Universidad de Zacatecas ; Nova Science Publishers. Inc. ; New York, 2012. – P. 23–37.

23. Ovsiyuk, E. Some Consequences from the Dirac-Kähler Theory: on Intrinsic Spinor Sub-structure of the Different Boson Wave Functions / E. Ovsiyuk, O. Veko, V. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Nr 1. – P. 13–23.

24. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol. I. General Theory / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Physical Problems : Nova Science Publishers Inc, 2018.

25. Darwin, C.G. The electron as a vector wave / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. – 1927. – A116. – P. 227–253.

26. Kähler, E. Der innere Differentialkul / E. Kähler // Rendiconti di math. (Roma). – 1962. – Ser. 5. Vol. 21, nr 3, 4. – P. 425–523.

27. Strazhev, V. I. The Dirac – Kähler equation. Classical field. / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Tsionenko. – Minsk : BSU, 2007. – 195 p.

28. Strazhev B. I. On Dirac like relativistic wave equations / V. I. Strazhev, V. A. Pletyuchov // Russian Physics Journal. – 1983. – Nr 12. – P. 38–41.

29. Fuschich, V. I. Symmetry of equations in quantum mechanics. / V. I. Fuschich, A. G. Nikitin. – M. : Science, 1990. – 400 p.

30. Niederle, J. Non-Lie and discrete symmetries of the Dirac equation / J. Niederle, A. Nikitin // Nonlinear Mathematical Physics. – 1997. – Vol. 4, nr 3–4. – P. 436–444.

31. Pauli, W. On the conservation of the lepton charge / W. Pauli // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 6. – P. 204–214.

32. Red'kov, V. V. Fields of particles in Riemannian space-time and the Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarus. Science, 2009. – 400 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.11.2023

УДК 539.12...17; 539.128.2

Алиса Евгеньевна Дроздова[1], Роман Георгиевич Шуляковский[2]
[1]студент 5 курса физического факультета Белорусского государственного университета
[2]канд. физ.-мат. наук, доц., ведущий науч. сотрудник Института прикладной физики Национальной академии наук Беларуси,
ведущий науч. сотрудник Института ядерных проблем Белорусского государственного университета
Alisa Drazdova[1], Roman Shulyakovsky[2]
[1]5th Year Student of the Faculty of Physics of of Belarusian State University
[2]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Lead Researcher of Institute of Applied Physics of of National Academy of Sciences of Belarus,
Lead Researcher of Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University
e-mail: [1]alisadrozdova1706@gmail.com; [2]shulyakovsky@iaph.bas-net.by

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ O(3) МОДЕЛИ И В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ХИГГСА*

Приведены точные аналитические инстантонные решения для нелинейной O(3) модели в двумерном евклидовом пространстве, которые описывают в пространстве Минковского (1+1) туннельные переходы между классически вырожденными вакуумами. Вычислена вероятность с экспоненциальной точностью. Получены приближенные инстантонные решения для абелевой модели Хиггса в двух измерениях.

Ключевые слова: *инстантон, нелинейная O(3) модель, абелева модель Хиггса.*

Analytical Instanton Solutions in the Nonlinear O(3) Model and in the Abelian Higgs Model

Exact analytical instanton solutions for the nonlinear O(3) model in 2-dimensional Euclidean space are presented. They describe tunnel transitions between classically degenerate vacua in Minkowski space (1+1). The probability is calculated with exponential accuracy. Approximate instanton solutions for the Abelian Higgs model in two dimensions are obtained.

Key words: *instanton, nonlinear O(3) model, Abelian Higgs model.*

Введение

Нелинейная O(3) модель в двумерном и трехмерном пространстве детально изучалась из-за присутствия в ней важных эффектов, свойственных намного более сложным неабелевым калибровочным теориям в четырехмерном пространстве. Также такая модель описывает ряд нетривиальных эффектов в ферромагнетаках. Статические солитонные решения нелинейной O(3) модели были найдены и изучены А. А. Белавиным и А. М. Поляковым в 1975 г. [1] в контексте исследования спиновых корреляций и возможности фазовых переходов в плоских ферромагнетиках в (1 + 2) измерениях. В обзоре [2] детально рассмотрены различные представления нелинейной O(3) модели (матричные, спинорные, а также подходы, связанные с введением аналога векторного калибровочного поля). Модифицированная нелинейная O(3) теория в (1 + 1) измерениях рассматривалась при ненулевых температурах как модель электрослабого сектора Стандартной Модели для изучения возможности инстантон-индуцированного нарушения барионного и лептонного чисел [3]. Рассматривались и другие двумерные скалярные теории для моделирования магнитных явлений. Так, инстантонные решения в скалярной модели синус-Гордона на пространственной окружности [4] рассматривались

**Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ Ф22МЦ-003 «Поиск процессов, индуцированных КХД-инстантонами, на Большом адронном коллайдере» (руководитель – Р. Г. Шуляковский).*

для иллюстрации когерентного туннелирования доменных стенок в ферромагнитной двухосно-анизотропно-спиновой цепочке [5]. В недавней работе [6] топологические решения нелинейной O(3) модели детально изучались с использованием методов Монте-Карло на решетках взаимодействующих спинов.

Неабелева SU(2) модель Хиггса в пространстве-времени (3 + 1) на классическом уровне находит применение для описания нитей Абрикосова в сверхпроводниках 2-го рода. Абелев U(1) аналог модели в пространстве-времени (2 + 1) содержит вихревые решения с конечной энергией – вортексы Нильсена – Олесена [7]. Это решение обладает конечной энергией, локализовано в пространстве, т. е. это солитон. Любое статическое солитонное решение в (D + 1) пространстве-времени автоматически является инстантоном в D-мерном евклидовом пространстве. Квантовое рассмотрение модели открывает не существующие в классическом варианте туннельные переходы, которые удобно описывать методом фейнмановских функциональных интегралов во мнимом времени с использованием инстантонных решений. Известно, что такие решения существуют, но аналитический вид не известен. В данной работе решения найдены приближенно. Подробно о нелинейных теоретико-полевых моделях изложено в монографиях [8; 9].

Инстантонные решения в нелинейной O(3) модели

Рассмотрим теорию вещественного свободного скалярного поля в пространстве-времени (D + 1):

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi^a(t,x)\partial^\mu \varphi^a(t,x). \tag{1}$$

Рассматривается трехкомпонентное поле: a = 1, 2, 3 – групповой индекс, по которому предполагается суммирование; μ = 0,1 – лоренцев индекс, по которому идет суммирование с метрикой $g_{\mu\nu}$ = diag(1, –1,...). Будем считать постоянную Планка и скорость света равными единице, как общепринято в теории поля. Модель (1) релятивистски инвариантна и инвариантна относительно преобразований группы вращений O(3) в трехмерном внутреннем пространстве.

Уравнения поля (Лагранжа – Эйлера), соответствующие лагранжиану (1), есть безмассовые уравнения Клейна – Фока – Гордона для каждого *a*:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^a = 0. \tag{2}$$

Энергия поля, соответствующая лагранжиану (1) (точнее, лагранжевой плотности), получаемая согласно теореме Нётер,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi^a}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi^a}{\partial x}\right)^2 \right). \tag{3}$$

Заметим, что скалярная полевая теория (1) может, в принципе, рассматриваться как экстраполяция ***одномерной классической модели Гейзенберга*** на несчетное число степеней свободы (значения «спинов», роль которых играют векторы $\vec{\varphi}_i = (\varphi_i^a)$, произвольны). Для нормировки таких векторов в теорию можно ввести ограничение (условие связи):

$$\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = \varphi^a \varphi^a = 1_3. \tag{4}$$

В этом случае теория носит название ***нелинейной O(3) – модели***. Учет условия (4) осуществляется, как и в теоретической механике, введением в теорию множителя Лагранжа $\lambda(t,x)$:

$$L=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^a\partial^\mu\varphi^a+\frac{1}{2}\lambda\cdot(\varphi^a\varphi^a-1). \quad (5)$$

Уравнения поля с учетом множителя Лагранжа примут вид:

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi^a+\lambda\varphi^a=0. \quad (6)$$

Отсюда

$$\lambda=-\varphi^a\partial_\nu\partial^\nu\varphi^a. \quad (7)$$

Таким образом, уравнения поля для системы (6) станут нелинейными в отличие от уравнений (2):

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi^a-\varphi^b(\partial_\nu\partial^\nu\varphi^b)\varphi^a=0. \quad (8)$$

Уравнения допускают точные аналитические солитонные решения в (2 + 1) пространстве-времени:

$$\varphi^a_{sol}=2\frac{x^a r_0}{r^2+r_0^2},\quad a=1{,}2;\qquad \varphi^3_{sol}=\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2}. \quad (9)$$

Это решение с единичным топологическим зарядом. Решения с произвольным топологическим зарядом впервые найдены в работе [1] и детально многократно обсуждались в дальнейшем [2]. Здесь r_0 – произвольный положительный параметр, $r^2=\sqrt{x^2+y^2}$. Решение обладает симметрией окружности на плоскости (*x, y*). Энергия для статических решений

$$E=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dxdy\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{a=1}^{3}\partial_\sigma\varphi^a\partial_\sigma\varphi^a \quad (10)$$

имеет бесконечный непрерывный набор вакуумов (решений, минимизирующих функционал энергии (10). Это все не зависящие от координат (и, разумеется, статические) поля.

Решения (11) переводят вакуумное состояние системы $\varphi^a=-\delta^{a3}$ на пространственной бесконечности в вакуумное состояние $\varphi^a=+\delta^{a3}$ в начале координат. Вакуумы выбраны произвольно из соображений удобства, что не ограничивает общность рассмотрения задачи. Энергия для решения (9) называется массой солитона:

$$M_{sol}=E[\varphi^a_{sol}(r)]=4\pi. \quad (11)$$

Плотность энергии максимальна в окрестности окружности радиуса r_0. Таким образом, система является моделью плоского ферромагнетика. Трехмерные векторы $\vec{\varphi}(x,y)$ соответствуют классическим спинам, равным единице по модулю (нормировка может быть любой). Решение (11) можно интерпретировать как домен, слой в окрестности окружности радиуса r_0 имеет смысл ***доменной стенки***. Кроме этого, благодаря спонтанному нарушению симметрии O(3), в вакууме системы могут появляться голдстоуновские моды – бесщелевые флуктуации, соответствующие одновременному повороту всех спинов, не меняющие энергию системы. Это модель спиновых волн в ферромагнетиках. В ***квантовом*** варианте теории поля такие флуктуации соответствуют появлению частицеподобных состояний (голдстоуновских бозонов) – магнонов.

Изучим нелинейную O(3) модель в пространстве времени (1 + 1), соответствующую одномерной скалярной теории Гейзенберга. Для нахождения инстантонных решений нужно перейти от пространства Минковского к пространству Евклида (или от действительного времени t к мнимому τ):

$$t = i\tau\ . \tag{12}$$

Действие исходной задачи после замены (12) примет вид:

$$S = \int dtdxL = iS_E = \int d\tau dxL_E. \tag{13}$$

Евклидово действие:

$$S = iS_E;\ S_E \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dxd\tau\partial_\mu\varphi^a\partial_\mu\varphi^a\ . \tag{14}$$

Евклидово действие формально совпадает со статической энергией (10). Суммирование по μ в (14) проводится в евклидовом пространстве с метрикой $\eta_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu}$, верхние и нижние индексы неразличимы, группа Лоренца в двумерном пространстве – времени преобразуется в группу вращений $SO(2)$.

Инстантоном данной задачи является:

$$\varphi^1_{inst}(\tau, x) = \frac{2\tau\, r_0}{r^2 + r_0^2},\ \varphi^2_{inst}(\tau, x) = \frac{2x\, r_0}{r^2 + r_0^2},\ \varphi^3_{inst}(\tau, x) = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}\ . \tag{15}$$

Здесь $r^2 = \sqrt{\tau^2 + x^2}$. Евклидово действие на инстантоне совпадает с массой солитона:

$$S_E[\varphi^a_{inst}(r)] = 4\pi. \tag{16}$$

В полярных координатах решения могут быть представлены в виде:

$$\Phi_{inst}(r,\theta) = \frac{2\exp(i\theta)\, r_0}{r^2 + r_0^2},\ \Phi^3_{inst}(r,\theta) = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}, \tag{17}$$

При обратном переходе от двумерного пространства Евклида к пространству–времени Минковского размерности (1 + 1) можно считать, что радиальная координата соответствует действительному времени, а полярная – пространственной координате:

$$\begin{aligned} &r \to t, && 0 \le r < \infty \to -\infty \le t < \infty, \\ &\theta \to l, && 0 \le \theta < 2\pi \to 0 \le l < 2\pi. \end{aligned} \tag{18}$$

Одноинстантонный переход переводит замкнутую ферромагнитную цепочку из состояния «спин вниз» в состояние «спин вверх». Переход можно считать пространственно–однородным. Размер инстантона r_0 соответствует характерному времени туннелирования (одна из коллективных координат). Центр инстантона может быть любым (еще одна коллективная координата). Решение (17) соответствует центру в нуле на временной оси.

Лагранжиан (1) и действие (13) можно модифицировать, добавив в знаменатель «константу связи» g^2. Выражения формально станут похожими на соответствующие выражения в теории Янга – Миллса. При рассмотрении теории при конечных температурах g^2 будет иметь смысл температуры (постоянная Больцмана считается единичной и безразмерной).

Вероятность туннелирования с экспоненциальной точностью:

$$<\uparrow|\exp(-\hat{H}T)|\downarrow> \propto \exp(-S_E[\Phi_{inst}(r,\theta)]) = \exp(-8\pi / g^2). \tag{19}$$

Для вычисления предэкспоненциального множителя необходимо вычислить вторую вариацию действия, что приводит к корню из детерминанта в знаменателе:

$$<\uparrow|\exp(-\hat{H}T)|\downarrow>\approx\left[\det(6\varphi^a_{inst}\Delta\varphi^a_{inst}+\Delta)\right]^{-1/2}\exp(-4\pi/g^2). \tag{20}$$

Вычисление предэкспоненциального фактора сводится к произведению собственных значений соответствующего оператора. В реалистичных физических теориях это величина, близкая к единице.

Приближенные инстантонные решения в двумерной абелевой модели Хиггса

Рассмотрим лагранжиан абелевой модели Хиггса:

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+(D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi)-V(\varphi); \tag{21}$$

где $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля, φ – комплексное скалярное поле, A_μ – векторный потенциал, $D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$ – ковариантная производная, $V(\varphi)$ – потенциал Хиггса:

$$V(\varphi)=\lambda(|\varphi|^2-\rho^2)^2, \tag{22}$$

где λ и ρ – константы, определяющие форму потенциала.

Как хорошо известно, лагранжиан (21) в пространстве Минковского (3 + 1) имеет нетривиальное решение – струну Абрикосова. Решение от координаты z не зависит, локализовано, имеет бесконечную энергию, солитоном не является. Соответствующая задача в пространстве (2 + 1) имеет решение: статический солитон – вихрь Нильсена – Олесена [7]. Формально оно совпадает с инстантоном в пространстве Евклида (2 + 0), так, что любое приближенное аналитическое решение для вихря есть приближенное аналитическое решение для инстантона. Это инстантонное решение соответствует туннелированию в пространстве Минковского (1 + 1), то есть в рассматриваемой двумерной абелевой модели Хиггса.

Решение для статического солитона имеется решение в виде:

$$\varphi(r,\alpha)=\rho e^{i\alpha}F(r), \qquad A_i(r,\alpha)=-\frac{1}{er}\varepsilon_{ij}\frac{x_i}{r}A(r), \tag{23}$$

$$\begin{array}{lll} F(r)\to 1, & A(r)\to 1, & r\to\infty, \\ F(r)\to 0, & A(r)\to 0, & r\to 0. \end{array} \tag{24}$$

То есть решение не известно аналитически, но хорошо известно численно. Известны также асимптотики.

Будем искать решение для инстантона $\varphi(\vec{r})$ в виде

$$\varphi(\vec{r})\approx\rho e^{i\theta(\vec{r})}, \qquad A_i(\vec{r})\to 0 \tag{25}$$

для немалых $\boldsymbol{r}$ (т. е. больших, чем характерный обратный масштаб массы хиггсовского поля $m_H\sim\sqrt{\lambda}\rho$). Векторный потенциал A_μ равен нулю с точностью до калибровочных преобразований. При подстановке анзатца (25) в уравнения движения получим уравнения и приближенные решения:

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}e^{i\theta}-2\lambda\rho^2e^{-i\theta}=0, \qquad e^{i\theta}=a\,\mathrm{sech}(m_H\,|\,z\,|); \tag{26}$$

$$\varphi(\vec{r}) \approx \rho\,\mathrm{sech}(m_H\,|z|), \quad A_i(\vec{r}) \approx 0, \tag{27}$$

где введена комплексная координата $z = x^1 + ix^2$.

Действие на инстантоне есть формально масса солитона (энергия его основного состояния):

$$S_E = \int d^2x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) + V(\varphi) \right) \sim \lambda. \tag{28}$$

Как и в предыдущем разделе, действие определит показатель подавляющей туннелирование экспоненты.

Заключение

В работе детально рассмотрена нелинейная O(3) модель в пространстве Минковского и в евклидовом пространстве. Рассмотрены солитонные решения в трехмерном варианте теории и приведены аналитические инстантонные решения в двумерном варианте модели. Дана оригинальная интерпретация инстантонных решений как решений, отвечающих за поворот спинов в одномерной замкнутой ферромагнитной цепочке. Для абелевой модели Хиггса получено приближенное аналитическое инстантонное решение, что актуально с точки зрения понимания и моделирования эффектов в теории электрослабых взаимодействий, отвечающих за нарушение барионной симметрии в видимой части Вселенной, а также для понимания явления спонтанного нарушения киральной инвариантности в сильных взаимодействиях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белавин, А. А. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика / А. А. Белавин, А. М. Поляков // Письма в ЖЭТФ. –1975. – Т. 22, № 10. – С. 503–506.

2. Переломов, А. М. Решения типа инстантонов в киральных моделях / А. М. Переломов // УФН. – 1981. – Т. 134. – С. 577–609.

3. Mottola, E. Unsuppressed fermion-number violation at high temperature: An O(3) model / E. Mottola, A. Wipf // Phys. Rev. D. – 1989. – Vol. 39. – P. 588–602.

4. Шуляковский, Р. Г. Аналитические инстантонные решения в 2-мерных полевых моделях / Р. Г. Шуляковский // Письма в ЭЧАЯ. – 2008. – № 5. – С. 704–708.

5. Zheng, G.-P. Instantons in a ferromagnetic spin chain with biaxial anisotropy / G.-P. Zheng, J.-Q. Liang, W. M. Liu // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – P. 014415-1–014415-6.

6. Schenk, S. Exploring instantons in nonlinear sigma models with spin-lattice systems / S. Schenk, M. Spannowsky // Phys. Rev. B. – 2021. – Vol. 103. – P. 144436-1–014415-10.

7. Nielsen, H. Vortex-line models for dual strings / B. Nielsen, P. Olesen // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 61. – P. 45–61.

8. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М. : Мир, 1985. – 416 с.

9. Рубаков, В. А. Классические калибровочные поля / В. А. Рубаков. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 336 с.

REFERENCES

1. Bielavin, A. A. Mietastabl’nyje sostojanija dvukhmiernogo izotropnogo fierromagnietika / A. A. Bielavin, A. M. Poliakov // Pis’ma v ZhETF. – 1975. – T. 22, № 10. – P. 503–506.

2. Pierielomov, A. M. Riesheninja tipa instagonov v kiral'nykh modeliakh / A. M. Perelomov // UFN. – 1981. – T. 134. – S. 577–609.

3. Mottola, E. Unsuppressed fermion-number violation at high temperature: An O(3) model / E. Mottola, A. Wipf // Phys. Rev. D. – 1989. – Vol. 39. – P. 588–602.

4. Shuliakovskij, R. G. Analitichieskije instantonnyje rieshenija v 2-miernykh polievykh modeliakh / R. G. Shuliakovskij // Pis'ma v EChAJa. – 2008. – № 5. – S. 704–708.

5. Zheng, G.-P. Instantons in a ferromagnetic spin chain with biaxial anisotropy / G.-P. Zheng, J.-Q. Liang, W. M. Liu // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – P. 014415-1–014415-6.

6. Schenk, S. Exploring instantons in nonlinear sigma models with spin-lattice systems / S. Schenk, M. Spannowsky // Phys. Rev. B. – 2021. – Vol. 103. – P. 144436-1–014415-10.

7. Nielsen, H. Vortex-line models for dual strings / B. Nielsen, P. Olesen // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 61. – P. 45–61.

8. Radzharaman, R. Solitony i instantony v kvantovoj tieorii polia / R. Radzharaman. – M. : Mir, 1985. – 416 s.

9. Rubakov, V. A. Klassichieskije kalibrovochnyje polia / V. A. Rubakov. – M. : Editorial URSS, 1999. – 336 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.09.2023

УДК 539.12

***Vasily Kisel*[1], *Olga Semenyuk*[2], *Anton Bury*[3], *Viktor Red'kov*[4]**
[1]*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,*
Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physic
of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
[2]*3-d Postgraduate Student of the Department of General and Theoretical Physics*
of Brest State A. S. Pushkin University
[3]*3-d Postgraduate Student of Fundamental Interaction and Astrophysics Center*
of B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus
[4]*Doctor of Physical and Mathematical Sciences,*
Chief Researcher of Fundamental Interaction and Astrophysics Center
of B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus
***Василий Васильевич Кисель*[1], *Ольга Александровна Семенюк*[2],**
***Антон Васильевич Бурый*[3], *Виктор Михайлович Редьков*[4]**
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физики*
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
[2]*аспирант 2-го года обучения каф. общей и теоретической физики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[3]*аспирант 3-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики*
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
[4]*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник*
центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
e-mail: [1]vasiliy_bspu@ mail.ru; [2]olya.vasiluyk.97@yandex.by; [3]anton.buryy.97@mail.ru;
[4]v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Spin 3/2 Particle in External Uniform Magnetic Field, the Method of Projective Operators

In the present paper, an algebraic method for solving the system of equations describing the spin 3/2 particle in the presence of uniform magnetic field has been elaborated. The method is based on decomposition of 16-components wave function with transformation properties of vector-bispinor in the sum of four constitutes, which are determined by four projective operators. With the use of formalism of elements of complete matrix algebra the system is transformed to the form, in which only projective constituents $\Psi_{\pm 1/2}(x), \Psi_{\pm 3/2}(x)$ *enter. This system of equations is transformed to cylindric coordinates. On the wave functions three operators are digitalized: of energy, third projection of linear momentum, third projection of the total angular momentum. After separating the variables, we derive 4 linked subsystems of equations for 16-component functions* $\Psi_{\pm 1/2}(r),\ \Psi_{\pm 3/2}(r)$. *After performing needed calculations, the problem reduces to four independent second order equations for four primary functions. These equations are solved in terms of confluent hypergeometric functions, four different energy spectra are found.*

Key words: *spin 3/2 particle, magnetic field, projective operators, exact solutions, energy spectra.*

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 3/2 ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, МЕТОД ПРОЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей работе развит алгебраический метод анализа системы уравнений, описывающей частицу со спином 3/2 во внешнем однородном магнитном поле. Метод основан на разложении 16-компонентной волновой функции с трансформационными свойствами вектора биспинора в сумму 4-х составляющих, которые определяются действием 4-х проективных операторов на полную волновую функцию. С использованием формализма элементов полной матричной алгебры и свойств матриц Дирака система уравнений приведена к виду, когда в ней присутствует только 4 проективные составляющие $\Psi_{\pm 1/2}(x), \Psi_{\pm 3/2}(x)$. *Полученная система уравнений записывается в цилиндрической системе координат. На волновых функциях диагонализируются операторы энергии, третьей проекции импульса и третьей проекции полного углового момента. С учетом соответствующей подстановки для волновой функции из системы уравнений исключается зависимость от переменных* (t, z, ϕ); *в результате получены 4 связанные между собой подсистемы, в которые входят зависящие от полярной координаты r функции* $\Psi_{\pm 1/2}(r), \Psi_{\pm 3/2}(r)$. *Задача приводится к раздельным дифференциальным урав-нениям второго порядка для некоторых 4-х основных функций. Эти уравнения решаются в терминах вырож-денных гипергеометрических функций. Получены 4 различных спектра энергий.*

Ключевые слова: *частица со спином 3/2, магнитное поле, проективные операторы, точные решения, спектры энергий.*

1. Initial equation and projective operators

The basic equation for the 16-component wave function has the form ([1–3], also see [4–14])

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + M)\Psi = 0\,. \qquad (1)$$

The third projection of the spin operator is $\Sigma_3 = -iJ_{12} = Y;$ its explicit form is given by the formula

$$Y = -i\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \otimes I + I \otimes (e^{1,2} - e^{2,1})\}, \qquad (2)$$

where γ_μ designates the Dirac matrices, $e^{\mu,\nu}$ stands for the elements of the complete matrix algebra $(e^{\mu,\nu})_{\varrho\lambda} = \delta_{\mu\varrho}\delta_{\nu\lambda}$, obeying the following multiplication rule $e^{\mu,\nu}e^{\varrho,\lambda} = \delta_{\nu\varrho}e^{\mu,\lambda}$. We can verify that the minimal equation for the matrix Y has the form

$$(Y^2 - \frac{1}{4})(Y^2 - \frac{9}{4}) = 0. \qquad (3)$$

The last equation permits us to define four projective operators

$$\begin{aligned} P_{-1/2} &= \frac{1}{2}(Y-1/2)(Y^2-9/4), \quad P_{+1/2} = -\frac{1}{2}(Y+1/2)(Y^2-9/2),\\ P_{+3/2} &= \frac{1}{6}(Y^2-1/4)(Y-3/2), \quad P_{-3/2} = -\frac{1}{6}(Y^2-1/4)(Y-3/2). \end{aligned} \qquad (4)$$

Correspondingly, the complete wave function can be decomposed into the sum of four constituents

$$\begin{gathered} P_{-1/2}\Psi = \Psi_{-1/2}, \quad P_{+1/2}\Psi = \Psi_{+1/2}, \quad P_{+3/2}\Psi = \Psi_{+3/2}, \quad P_{-3/2}\Psi = \Psi_{-3/2},\\ \Psi_{-1/2} + \Psi_{+1/2} + \Psi_{+3/2} + \Psi_{-3/2} = \Psi. \end{gathered} \qquad (5)$$

We will study the basic equation (1) in presence of the uniform magnetic field

$$B = (0,0,B), \quad A_1 = -\frac{1}{2}Bx_2, \quad A_2 = \frac{1}{2}Bx_1, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0.$$

In the cylindric coordinates (r,ϕ,z) the basic equation reads

$$\begin{aligned} &(\Gamma_3\partial_3 + \Gamma_4\partial_4 + M)\Psi + (\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})\Gamma_1\Psi +\\ &+(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})\Gamma_2\Psi + \frac{ieB}{2}r\sin\phi\,\Gamma_1\Psi - \frac{ieB}{2}r\cos\phi\,\Gamma_2\Psi = 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

With the use of projective operators (5), we can transform eq. (6) to the form of four linked equations in which only projective constituents enter (for shortness we perform the change in notation $eB \to B$):

$$\begin{aligned} &(\Gamma_3\partial_3 + \Gamma_4\partial_4 + M)\Psi_{+3/2} + 2e^{-i\phi}\{\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\}(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\Psi_{+3/2} +\\ &+\frac{1}{2}e^{-i\phi}\{\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\}(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\Psi_{+1/2} - \frac{1}{2}e^{i\phi}\{\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\}(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\Psi_{-3/2} -\\ &-iBe^{-i\phi}(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\Psi_{+3/2} - \frac{B}{4}re^{-i\phi}(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\Psi_{+1/2} - \frac{B}{4}re^{i\phi}(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\Psi_{-3/2} = 0, \end{aligned} \qquad (7)$$

$$(\Gamma_3\partial_3+\Gamma_4\partial_4+M)\Psi_{+1/2}-$$
$$-3e^{-i\phi}\{\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\}(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}+\frac{1}{2}e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}+$$
$$+\frac{1}{2}e^{-i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{-1/2}+2e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}+$$
$$+\frac{3}{2}Bre^{-i\phi}(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}+\frac{1}{4}Bre^{i\phi}(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}-$$
$$-\frac{1}{4}Bre^{-i\phi}(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{-1/2}+Bre^{+i\phi}(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}=0, \qquad (8)$$

$$(\Gamma_3\partial_3+\Gamma_4\partial_4+M)\Psi_{-1/2}+$$
$$+2e^{-i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}+\frac{1}{2}e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{+1/2}-$$
$$-3e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}+\frac{1}{2}e^{-i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}-$$
$$-Bre^{-i\phi}(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}+\frac{Br}{4}e^{i\phi}(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{+1/2}-$$
$$-\frac{3}{2}Bre^{i\phi}(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}-\frac{Br}{4}e^{-i\phi}(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}=0, \qquad (9)$$

$$(\Gamma_3\partial_3+\Gamma_\mu\partial_\mu+M)\Psi_{-3/2}-\frac{1}{2}e^{-i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}+$$
$$+\frac{1}{2}e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-1/2}+2e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi})(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}+$$
$$+\frac{B}{4}re^{-i\phi}(\Gamma_1+i\Gamma_2)\Psi_{+3/2}+\frac{B}{2}re^{i\phi}(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-1/2}+Bre^{i\phi}(\Gamma_1-i\Gamma_2)\Psi_{-3/2}=0. \qquad (10)$$

We will use the following substitutions (they correspond to diagonalization of operators of energy, linear momentum along the axis x_3, and the third projection of the total angular momentum)

$$\begin{aligned}\Psi_{+3/2}&=e^{ip_4x_4}e^{ip_3x_3}e^{i(m-3/2)\phi}f_{+3/2}(r), \qquad \Psi_{+1/2}=e^{ip_4x_4}e^{ip_3x_3}e^{i(m-1/2)\phi}f_{+1/2}(r),\\ \Psi_{-1/2}&=e^{ip_4x_4}e^{ip_3x_3}e^{i(m+1/2)\phi}f_{-1/2}(r), \qquad \Psi_{-3/2}=e^{ip_4x_4}e^{ip_3x_3}e^{i(m+3/2)\phi}f_{-3/2}(r),\end{aligned} \qquad (11)$$

where $f_{\pm3/2}(r), f_{\pm1/2}(r)$ stands for 16-component radial columns. After separating the variables we get 4 linked equations (for convenience, we mark them by symbols $S_3=\pm3/2,\ \pm1/2$)

$$\begin{aligned}&S_3=+3/2, \qquad (iP+M)f_{+3/2}+a_{m-1/2}\Gamma_+f_{+1/2}=0,\\ &S_3=-3/2, \qquad (iP+M)f_{-3/2}-b_{m+1/2}\Gamma_-f_{-1/2}=0,\\ &S_3=+1/2, \qquad (iP+M)f_{+1/2}-b_{m-3/2}\Gamma_-f_{+3/2}+a_{m+1/2}\Gamma_+f_{-1/2}=0,\\ &S_3=-1/2, \qquad (iP+M)f_{-1/2}-b_{m-1/2}\Gamma_-f_{+1/2}+a_{m+3/2}\Gamma_+f_{-3/2}=0,\end{aligned} \qquad (12)$$

where the special notations are used

$$a_{m-1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}(m-\frac{1}{2})-\frac{Br}{2}), \quad b_{m+1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}(m+1/2)-\frac{Br}{2});$$

$$a_{m+3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}(m+\frac{3}{2}) - \frac{Br}{2}), \quad b_{m-3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}(m-3/2) - \frac{Br}{2});$$

$$b_{m-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{d}{dr} + \frac{m-1/2}{r} - \frac{Br}{2}); \; \Gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 \pm i\Gamma_2), \quad P = p_3\Gamma_3 + p_4\Gamma_4, \quad p = p_3\gamma_3 + p_4\gamma_4.$$

Let us detail the structure of 16-dimensional columns $f_{\pm 1/2}(r), f_{\pm 3/2}(r)$. For this we should take into account expressions for the projective operators:

$$P_{+3/2} = \frac{1}{4}(1 - i\gamma_1\gamma_2) \otimes [e^{1,1} + e^{2,2} - i(e^{1,2} - e^{2,1})], \quad P_{-3/2} = \frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2) \otimes [e^{1,1} + e^{2,2} + i(e^{1,2} - e^{2,1})],$$

$$P_{+1/2} = \frac{1}{4}\{2(1 - i\gamma_1\gamma_2) \otimes (e^{3,3} + e^{4,4}) + (1 + i\gamma_1\gamma_2) \otimes [e^{1,1} + e^{2,2} - i(e^{1,2} - e^{2,1})]\},$$

$$P_{-1/2} = \frac{1}{4}\{2(1 + i\gamma_1\gamma_2) \otimes (e^{3,3} + e^{4,4}) + (1 - i\gamma_1\gamma_2) \otimes [e^{1,1} + e^{2,2} + i(e^{1,2} - e^{2,1})]\};$$

after performing the needed calculations we get

$$f_{+3/2} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} (1 - i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2) \\ i(1 - i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad f_{-3/2} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} (1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ -i(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$f_{+1/2} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} (1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2) \\ i(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2) \\ 2(1 - i\gamma_1\gamma_2) f_3 \\ 2(1 - i\gamma_1\gamma_2) f_4 \end{vmatrix}, \quad f_{-1/2} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} (1 - i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ -i(1 - i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ 2(1 + i\gamma_1\gamma_2) f_3 \\ 2(1 + i\gamma_1\gamma_2) f_4 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

where f_1, f_2, f_3, f_4 designate 4-dimensional columns. Below we will apply the notations

$$\Psi_{A\mu} = \begin{vmatrix} \Psi_{A1} \\ \Psi_{A2} \\ \Psi_{A3} \\ \Psi_{A4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{function}(t, z, \phi) f_1(r) \\ \text{function}(t, z, \phi) f_2(r) \\ \text{function}(t, z, \phi) f_3(r) \\ \text{function}(t, z, \phi) f_4(r) \end{vmatrix}, \tag{14}$$

A is a bispinor index, and μ is a vector index.

2. Equation related to $S_3 = +3/2$

Let us find the 4-component structure of the first equation in (12), related to $S_3 = +3/2$. Starting with the identity

$$(iP + M)\Phi|_A = (ip_3\Gamma_3 + ip_4\Gamma_4 + M)\Phi|_A = iP\delta_{A,\rho}\Phi_\rho + \frac{i}{\sqrt{3}} p_\mu\gamma_\rho[\delta_{A,\rho}\Phi_\mu - \delta_{A,\mu}\Phi_\rho] + M\delta_{A,\rho}\Phi_\rho,$$

depending on the value of A we get

$$(iP + M)\Phi|_1 = (ip + M)\frac{1}{4}(1 - i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2), \; (iP + M)\Phi|_2 = (ip + M)\frac{1}{4}(1 - i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2),$$

$$(iP+M)\Phi|_3=\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_3 p_\mu \Phi_\mu-\frac{i}{\sqrt{3}}p_3\gamma_\mu\Phi_\mu=-\frac{i}{\sqrt{3}}p_3(\gamma_1+i\gamma_2)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)=0,$$

$$(iP+M)\Phi|_4=\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_3 p_\mu \Phi_\mu-\frac{i}{\sqrt{3}}p_4\gamma_\mu\Phi_\mu=-\frac{i}{\sqrt{3}}p_4(\gamma_1+i\gamma_2)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)=0.$$

Thus, we arrive at

$$(iP+M)f_{+3/2}=\left|\begin{matrix}(ip+M)(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)/4\\ i(ip+M)(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)/4\\ 0\\ 0\end{matrix}\right|.$$

Let us find expression for $\Gamma_+ f_{+1/2}$. Starting with

$$\Gamma_+\Phi|_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\delta_{A,\rho}\Phi_\rho+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\rho[\delta_{A,\rho}\Phi_1-\delta_{A,1}\Phi_\rho+i(\delta_{A,\rho}\Phi_2-\delta_{A,2}\Phi_\rho)]\},$$

we obtain

$$\Gamma_+\Phi|_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\Phi_1+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_1\Phi_1-\gamma_\rho\Phi_\rho+i\gamma_1\Phi_2)]\},$$

whence it follows

$$\Gamma_+\Phi|_1=\frac{1}{2\sqrt{6}}\{(\sqrt{3}-1)(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)-(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)\}.$$

Similarly, we get

$$\Gamma_+\Phi|_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\Phi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_2\Phi_1+i\gamma_2\Phi_2-i\gamma_p\Phi_p]\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\{(\sqrt{3}-1)(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)-(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)\};$$

$$\Gamma_+\Psi|_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_3+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_3\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)-\gamma_3\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)]\}=0;$$

$$\Gamma_+\Psi|_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_4+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_4\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)-\gamma_4\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)]\}=0.$$

Thus, we arrive at the formula

$$\Gamma_+ f_{+1/2}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left|\begin{matrix}(\sqrt{3}-1)(\partial_1+i\partial_2)(f_1-if_2)-(1-i\partial_1\partial_2)(\partial_3 f_3+\partial_4 f_4)\\ i[(\sqrt{3}-1)(\partial_1+i\partial_2)(f_1-if_2)-(1-i\partial_1\partial_2)(\partial_3 f_3+\partial_4 f_4)]\\ 0\\ 0\end{matrix}\right|.$$

Therefore, the first 16-component equation in (12) gives two 4-component equations:

$$(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m-1/2}[(\sqrt{3}-1)(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)-(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]=0, \quad (15)$$
$$i(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+$$
$$+\frac{i}{2\sqrt{6}}a_{m-1/2}[(\sqrt{3}-1)(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)-(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]=0,$$

where the second equation coincides with the first. Equation (15) may be transformed to other form. To this end, bearing in mind the identities

$$(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)=\gamma_1 f_1-i\gamma_1 f_2+i\gamma_2 f_1+\gamma_2 f_2,$$
$$(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2)=\gamma_1 f_1-i\gamma_1 f_2+i\gamma_2 f_1+\gamma_2 f_2,$$

we derive $(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)=(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2),$ whence it follows

$$(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=$$
$$=(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2+\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu f_\mu). \quad (16)$$

Thus, eq. (15) is presented as follows

$$(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m-1/2}[\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)-(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu f_\mu)]=0. \quad (17)$$

3. Additional constraint

As known, in absence of external fields, from the initial system follows the constraint $\gamma_\mu\Psi_\mu=0$. Let us consider an analog of such a constraint in the presence of external fields. To this end, we turn to the equation (1) in tensor form

$$\hat{D}\Psi_\nu+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\nu(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{\sqrt{3}}D_\nu(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_\nu=0, \quad \hat{D}=\gamma_\mu D_\mu. \quad (18)$$

First, we act on this equation by the operator D_ν, and perform the convolution in the index ν:

$$D_\mu\hat{D}\Psi_\mu+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{D}(uD_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{\sqrt{3}}D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\mu\Psi_\mu)=0. \quad (19)$$

With the use of the identities

$$D_\mu D_\nu-D_\nu D_\mu=-ieF_{[\mu\nu]}, \quad \hat{D}\hat{D}=D^2-\frac{ie}{4}F_{[\varrho\lambda]}(\gamma_\varrho\gamma_\lambda-\gamma_\lambda\gamma_\varrho), \quad D^2=D_\mu D_\mu,$$

eq. (19) transforms to other form

$$\{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{D}+M\}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{\sqrt{3}}D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)-ieF_{[\mu\nu]}\gamma_\nu\Psi_\mu=0. \quad (20)$$

Similarly, let us multiply eq. (18) by γ_ν which after convolution in index ν leads to

$$\{-\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{D}+M\}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}(D_\mu\Psi_\mu)=0. \tag{21}$$

Let us act by operator $(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{D}+M)$ on eq. (21), this results in

$$[\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{D}+M][-\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{D}+M](\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}[-\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{D}+M](D_\mu\Psi_\mu)=0, \tag{22}$$

whence bearing in mind (20) we obtain

$$\{1+\frac{(1+\sqrt{3})^2}{12}\frac{ie}{M^2}F_{[\varrho\lambda]}(\gamma_\varrho\gamma_\lambda-\gamma_\lambda\gamma_\varrho)\}(\gamma_\mu\Psi_\mu)=-\frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}\frac{ie}{M^2}F_{[\mu\nu]}\gamma_\nu\Psi_\mu. \tag{23}$$

We note that in absence of the external field, relation (23) reduces to the well-known constraint for the free particle, $\gamma_\mu\Psi_\mu=0$.

In what follows, we will take into account the presence of the uniform magnetic field, $F_{[12]}=B$, then expression (23) takes on the form

$$\{1+\frac{(1+\sqrt{3})^2}{3}\frac{B}{M^2}(i\gamma_1\gamma_2)\}(\gamma_\mu\Psi_\mu)=-\frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}\frac{iB}{M^2}(\gamma_2\Psi_1-\gamma_1\Psi_2). \tag{24}$$

Using the temporary notation

$$R=\frac{3M^2}{9M^4-(1+\sqrt{3})^4B^2}\{3M^2-(1+\sqrt{3})^2B\ \ (i\gamma_1\gamma_2)\}; \tag{25}$$

we readily verify that the following identity holds

$$R\{1+\frac{(1+\sqrt{3})^2}{3}\frac{B}{M^2}(i\gamma_1\gamma_2)\}=1.$$

Therefore, from (24) it follows the new expression for $\gamma_\mu\Psi_\mu$:

$$\gamma_\mu\Psi_\mu=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2B}{9M^4-(1+\sqrt{3})^4B^2}\{3M^2(i\gamma_1\gamma_2)-(1+\sqrt{3})^2B\}(\gamma_1\Psi_1+\gamma_2\Psi_2), \tag{26}$$

whence bearing in mind the substitution for the wave function $\Psi_\mu=e^{i(p_3x_3+p_4x_4)}\Phi_\mu(x_1,x_2)$, we obtain

$$\gamma_\mu\Phi_\mu=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2B}{9M^4-(1+\sqrt{3})^4B^2}\{3M^2(i\gamma_1\gamma_2)-(1+\sqrt{3})^2B\}(\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2). \tag{27}$$

After multiplying the last relation by $(1-i\gamma_1\gamma_2)$, we get

$$(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu\Phi_\mu)=-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2B}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2B}(\gamma_1+i\gamma_2)(\Phi_1-i\Phi_2). \tag{28}$$

Allowing for the identity $(\gamma_1 + i\gamma_2)(\Phi_1 - i\Phi_2) = (1 - i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)$, from (28) we arrive at the radial relation

$$(\gamma_1 + i\gamma_2)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(\Phi_1 - i\Phi_2) + \gamma_3\frac{1}{2}(1 - i\gamma_1\gamma_2)\Phi_3 + \gamma_4\frac{1}{2}(1 - i\gamma_1\gamma_2)\Phi_4 =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1 + i\gamma_2)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(\Phi_1 - i\Phi_2). \qquad (29)$$

Bearing in mind the substitution from (29), we derive

$$(1 - i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu f_\mu) = -\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1 + i\gamma_2)(f_1 - if_2). \qquad (30)$$

Taking into account relation (30), from (17) we can eliminate the combination $\gamma_\mu f_\mu$, so we get

$$S_3 = +3/2, \quad (ip + M)\frac{1}{2}(1 - i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2) + a_{m-1/2}\frac{3M^2}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}\gamma_+(f_1 - if_2) = 0, \qquad (31)$$

where $\gamma_+ = 1/\sqrt{2}(\gamma_1 + i\gamma_2)$. We will consider the function $(f_1 - if_2)$ is the primary one

$$(1 - i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4) = -\frac{3M^2 + 2(1+\sqrt{3})B}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1 + i\gamma_2)(f_1 - if_2). \qquad (32)$$

4. Equation related to $S = -3/2$

Let us consider the second equation in (12):

$$(iP + M)f_{-3/2} - b_{m+1/2}\Gamma_- f_{-1/2} = 0.$$

For the term

$$(iP + M)f_{-3/2} = ip\delta_{A,p}\Phi_p + \frac{i}{\sqrt{3}}p_\mu\gamma_p[\delta_{A,p}\Phi_\mu - \delta_{A,\mu}\Phi_p] + M\delta_{A,p}\Phi_p,$$

depending on the value of A we get:

$$A = 1, \quad (ip + M)\Phi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_1 p_\mu\Phi_\mu - p_1\gamma_p\Phi_p] = (ip + M)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2);$$

$$A = 2, \quad (ip + M)\Phi_2 + \frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_2 p_\mu\Phi_\mu - p_2\gamma_\mu\Phi_\mu] = (ip + M)(-\frac{i}{4})(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2);$$

$$A = 3, \quad (ip + M)\Phi_3 + \frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_3 p_\mu\Phi_\mu - p_3\gamma_\mu\Phi_\mu] = -\frac{i}{\sqrt{3}}p_3(\gamma_1 - i\gamma_2)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) = 0;$$

$$A = 4, \quad (ip + M)\Phi_4 + \frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_4 p_\mu\Phi_\mu - p_4\gamma_\mu\Phi_\mu] = -\frac{i}{\sqrt{3}}p_4(\gamma_1 - i\gamma_2)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) = 0.$$

Thus, we find

$$(iP + M)f_{-3/2} = \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} (ip + M)(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ -i(ip + M)(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|. \qquad (33)$$

Now consider the term $\Gamma_- f_{-1/2}$; starting with

$$\Gamma\_\Phi|_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\delta_{A,p}\Phi_p + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_p[\delta_{A,p}\Phi_1 - \delta_{A,1}\Phi_p - i(\delta_{a,p}\Phi_2 - \delta_{A,2}\Phi_p)]\},$$

depending on the value of A we find:

$$A = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_1\Phi_1 - \gamma_p\Phi_p - i\gamma_1\Phi_2]\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\{(\sqrt{3}-1)(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) - (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4)\};$$

$$A = 2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_2\Phi_1 - i\gamma_2\Phi_2 + i\gamma_p\Phi_p]\} =$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{6}}\{(\sqrt{3}-1)(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) - (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4)\};$$

$$A = 3, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_3\Phi_1 - i\gamma_3\Phi_2]\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\frac{1}{2}(1 + i\gamma_1\gamma_2) f_3\} = 0;$$

$$A = 4, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_4 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_4\Phi_1 - i\gamma_4\Phi_2]\} = 0.$$

Thus, we derive the formula

$$\Gamma_- f_{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{vmatrix} (\sqrt{3}-1)(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) - (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4) \\ -i[(\sqrt{3}-1)(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) - (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4)] \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Therefore, the radial equations related to $S_3 = -3/2$ are

$$(ip + M)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m+1/2}\{(\sqrt{3}-1)(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) - (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4)\} = 0, \tag{35}$$

$$-i(ip + M)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) +$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{6}}b_{m+1/2}\{(\sqrt{3}-1)(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) - (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4)\} = 0; \tag{36}$$

the second equation coincides the first one. Bearing in mind the identities

$$(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) = (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2),$$

$$(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) + (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4) = (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu f_\mu),$$

we can present eq. (35) differently

$$(ip + M)\frac{1}{4}(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) - \frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m+1/2}\{\sqrt{3}(\gamma_1 - i\gamma_2)(f_1 + if_2) - (1 + i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu f_\mu)\} = 0. \tag{37}$$

We are to eliminate the combination $\gamma_\mu f_\mu$. To this end, let us turn to eq. (27), acting on it by the matrix $(1+i\gamma_1\gamma_2)$, so we get

$$(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu\Phi_\mu)=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1-i\gamma_2)(\Phi_1+i\Phi_2). \tag{38}$$

The last equation can be presented differently

$$(\gamma_1-i\gamma_2)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(\Phi_1+i\Phi_2)+\gamma_3\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)\Phi_3+\gamma_4\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(\Phi_4)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1-i\gamma_2)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(\Phi_1+i\Phi_2). \tag{39}$$

Whence, bearing in mind the substitution for the wave function, we derive the radial relation

$$(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)f_3+\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)f_4=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2).$$

Further, allowing for the identity

$$(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu f_\mu),$$

we get

$$(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_\mu f_\mu)=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2). \tag{40}$$

With the help of the last relation, we can eliminate from (37) the combination $\gamma_\mu f_\mu$, so we obtain

$$S_3=-3/2,\quad (ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)-\frac{3M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}b_{m+1/2}\gamma_-(f_1+if_2)=0, \tag{41}$$

where $\gamma_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1-i\gamma_2)$. The function $(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)$ will be considered as the secondary one; from (40) it follows

$$(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=\frac{-3M^2+2(1+\sqrt{3})B}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2). \tag{42}$$

5. Equation related to $S=+1/2$

Let us turn to the third equation in (12):

$$S=+1/2,\quad (iP+M)f_{+1/2}-b_{m-3/2}\Gamma_- f_{+3/2}+a_{m+1/2}\Gamma_+ f_{-1/2}=0. \tag{43}$$

From relation

$$(iP+M)\Phi|_A=(ip+M)\delta_{A,p}\Phi_p+\frac{i}{\sqrt{3}}p_\mu\gamma_p[\delta_{A,p}\Phi_\mu-\delta_{A,\mu}\Phi_p],$$

depending on the value A we get:

$$A=1,\quad (ip+M)\Phi_1+\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_1 p_\mu\Phi_\mu-\frac{i}{\sqrt{3}}p_1\gamma_\mu\Phi_\mu=$$

$$=(ip+M)\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+\frac{i}{2\sqrt{3}}(\gamma_1-i\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4).$$

$$A=2,\quad (ip+M)\Phi_2+\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_2 p_\mu\Phi_\mu-\frac{i}{\sqrt{3}}p_2\gamma_\mu\Phi_\mu=$$

$$=i(ip+M)\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\gamma_1-i\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4).$$

$$A=3,\quad (ip+M)\Phi_3+\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_3 p_\mu\Phi_\mu-\frac{i}{\sqrt{3}}p_3\gamma_\mu\Phi_\mu=$$

$$=(ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3\{(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3f_3+\gamma_4f_4)\}.$$

$$A=4,\quad (ip+M)\Phi_4+\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_4 p_\mu\Phi_\mu-\frac{i}{\sqrt{3}}p_4\gamma_\mu\Phi_\mu=$$

$$=(ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4\{(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3f_3+\gamma_4f_4)\}.$$

Thus, we obtain

$$(iP+M)f_{+1/2}=\left|\begin{array}{l}(ip+M)\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+\frac{i}{2\sqrt{3}}(\gamma_1-i\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)\\ \hline i(ip+M)\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\gamma_1-i\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)\\ \hline (ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)-\\ -\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3\{(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3f_3+\gamma_4f_4)\}\\ \hline (ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)-\\ -\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4\{(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3f_3+\gamma_4f_4)\}\end{array}\right| \tag{44}$$

(four matrix rows are divided by lines). Now consider expression for $\Gamma_- f_{+3/2}$:

$$\Gamma_-\Phi\to\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1-i\gamma_2)\delta_{A,p}\Phi_p+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_p[\delta_{A,p}\Phi_1-\delta_{A,1}\Phi_p-i(\delta_{A,p}\Phi_2-\delta_{A,2}\Phi_p)]\}.$$

Depending on the value A we find:

$$A=1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1-i\gamma_2)\Phi_1+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_1\Phi_1-\gamma_p\Phi_p-i\gamma_1\Phi_2]\}=\frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{3}+1)(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2);$$

$$A=2,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1-i\gamma_2)\Phi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_2\Phi_1-i\gamma_2\Phi_2+i\gamma_p\Phi_p]\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\frac{i}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}})(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2)\}=\frac{i}{2\sqrt{6}}(\sqrt{3}+1)(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2);$$

$$A=3,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1-i\gamma_2)\Phi_3+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_3\Phi_1-i\gamma_3\Phi_2]\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\gamma_3\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)=\frac{1}{2\sqrt{6}}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2);$$

$$A=4,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1-i\gamma_2)\Phi_4+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_4\Phi_1-i\gamma_4\Phi_2]\}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2).$$

Therefore, we obtain the following relation

$$-b_{m-3/2}\Gamma_- f_{+3/2}=-b_{m-3/2}\frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{vmatrix}(\sqrt{3}+1)(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2)\\ i(\sqrt{3}+1)(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2)\\ \gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)\\ \gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)\end{vmatrix}. \tag{45}$$

Now consider the term $\Gamma_+ f_{-1/2}$, from

$$\Gamma_+\Phi|_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\delta_{A,p}\Phi_p+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_p[\delta_{A,p}\Phi_1-\delta_{A,1}\Phi_p+i(\delta_{A,p}\Phi_2-\delta_{A,2}\Phi_p)]\};$$

depending on the value A we get:

$$A=1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\Phi_1+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_1\Phi_1-\gamma_p\Phi_p+i\gamma_1\Phi_2]\}=-\frac{1}{2\sqrt{6}}(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4);$$

$$A=2,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\Phi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_2\Phi_1+i\gamma_2\Phi_2-i\gamma_p\Phi_p]\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}(\gamma_2+i\gamma_1)(f_1+if_2)-\frac{i}{2\sqrt{6}}(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{6}}(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=-\frac{i}{2\sqrt{6}}(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4);$$

$$A=3,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\Phi_3+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_3\Phi_1+i\gamma_3\Phi_2]\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\{2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2)f_3+\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)\};$$

$$A=4,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1+i\gamma_2)\Phi_4+\frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_4\Phi_1+i\gamma_4\Phi_2]\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\{2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2)f_4+\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)\}.$$

Thus, we find the identity

$$a_{m+1/2}\Gamma_{+} f_{-1/2} = a_{m+1/2}\,\frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{vmatrix} -(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4) \\ -i(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4) \\ 2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2) f_3+\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2) \\ 2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2) f_4+\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2) \end{vmatrix}. \tag{46}$$

Therefore, we have four equations:

$$S_3=+1/2,\quad (ip+M)\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+\frac{i}{2\sqrt{3}}(\gamma_1-i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}b_{m-3/2}(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2)-\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+1/2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=0, \tag{47}$$

$$i(ip+M)\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\gamma_1-i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{6}}(1+\sqrt{3})b_{m-3/2}(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2)-\frac{i}{2\sqrt{6}}a_{m+1/2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=0 \tag{48}$$

(eq. (48) coincides with (47)),

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2) f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3[(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-3/2}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2) f_3+\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)]=0, \tag{49}$$

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2) f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4[(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-3/2}\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2) f_4+\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)]=0. \tag{50}$$

So we have only 3 different equations.

6. Equation related to $S=-1/2$

Let us consider the fourth equation in (12):

$$(iP+M) f_{-1/2}-b_{m-1/2}\Gamma_{-} f_{+1/2}+a_{m+1/2}\Gamma_{+} f_{-3/2}=0.$$

For the term $(iP+M)\Phi|_A$, depending on the value A we get:

$$A=1, \quad (ip+M)\Phi_1+\frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_1 p_\mu \Phi_\mu - p_1\gamma_\mu\Phi_\mu]=$$

$$=(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)+\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_1\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4);$$

$$A=2, \quad (ip+M)\Phi_2+\frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_2 p_\mu \Phi_\mu - p_2\gamma_\mu\Phi_\mu]=$$

$$=-i(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)+\frac{1}{2\sqrt{3}}(\gamma_1+i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4);$$

$$A=3, \quad (ip+M)\Phi_3+\frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_3 p_\mu \Phi_\mu - p_3\gamma_\mu\Phi_\mu]=$$

$$=(ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3[(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)];$$

$$A=4, \quad (ip+M)\Phi_4+\frac{i}{\sqrt{3}}[\gamma_4 p_\mu \Phi_\mu - p_4\gamma_\mu\Phi_\mu]=$$

$$=(ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4[(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)].$$

So we arrive at the formula

$$(iP+M)f_{-1/2}=\left|\begin{array}{l}(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)+\frac{i}{2\sqrt{3}}(\gamma_1+i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)\\ \hline -i(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)+\frac{1}{2\sqrt{3}}(\gamma_1+i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)\\ \hline (ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-\\ -\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3\{(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)\}\\ \hline (ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-\\ -\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4\{(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)\}\end{array}\right|. \qquad (51)$$

Consider the term

$$\Gamma_- f_{+1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\delta_{A,p}\Phi_p + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_p[\delta_{A,p}\Phi_1 - \delta_{A,1}\Phi_p - i(\delta_{A,p}\Phi_2 - \delta_{A,2}\Phi_p)]\};$$

depending on the value A we obtain:

$$A=1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_1\Phi_1 - \gamma_p\Phi_p - i\gamma_1\Phi_2]\} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}(1 - i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4);$$

$$A=2,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_2\Phi_1 - i\gamma_2\Phi_2 + i\gamma_p\Phi_p]\} = \frac{i}{2\sqrt{6}}(1 - i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4);$$

$$A=3,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_3\Phi_1 - i\gamma_3\Phi_2]\} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\{2\sqrt{3}(\gamma_1 - i\gamma_2) f_3 + \gamma_3(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2)\};$$

$$A=4,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 - i\gamma_2)\Phi_4 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_4\Phi_1 - i\gamma_4\Phi_2]\} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\{2\sqrt{3}(\gamma_1 - i\gamma_2) f_4 + \gamma_4(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2)\}.$$

Thus, we have the formula

$$\Gamma_- f_{+1/2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left|\begin{matrix} -(1 - i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4) \\ i(1 - i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4) \\ 2\sqrt{3}(\gamma_1 - i\gamma_2) f_3 + \gamma_3(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2) \\ 2\sqrt{3}(\gamma_1 - i\gamma_2) f_4 + \gamma_4(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 - if_2) \end{matrix}\right|.$$

Consider the term $\Gamma_+ f_{-3/2}$:

$$\Gamma_+\Phi|_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 + i\gamma_2)\delta_{A,\wp}\Phi_\wp + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\wp[\delta_{A,\wp}\Phi_1 - \delta_{A,1}\Phi_\wp + i(\delta_{A,\wp}\Phi_2 - \delta_{A,2}\Phi_\wp)]\}.$$

Depending on the value A we get:

$$A=1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 + i\gamma_2)\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_1\Phi_1 - \gamma_p\Phi_p + i\gamma_1\Phi_2]\} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{3}+1)(\gamma_1 + i\gamma_2)(f_1 + if_2);$$

$$A=2,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 + i\gamma_2)\Phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_2\Phi_1 + i\gamma_2\Phi_2 - i\gamma_p\Phi_p]\} = -\frac{i}{2\sqrt{6}}(\sqrt{3}+1)(\gamma_1 + i\gamma_2)(f_1 + if_2);$$

$$A=3,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 + i\gamma_2)\Phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_3\Phi_1 + i\gamma_3\Phi_2]\} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\gamma_3(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2);$$

$$A=4,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\gamma_1 + i\gamma_2)\Phi_4 + \frac{1}{\sqrt{3}}[\gamma_4\Phi_1 + i\gamma_4\Phi_2]\} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\gamma_4(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2).$$

Thus, we obtain the formula

$$\Gamma_+ f_{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left|\begin{matrix} (\sqrt{3}+1)(\gamma_1 + i\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ -i(\sqrt{3}+1)(\gamma_1 + i\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ \gamma_3(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \\ \gamma_4(1 + i\gamma_1\gamma_2)(f_1 + if_2) \end{matrix}\right|.$$

Therefore, we get 4 equations:

$$S_3 = -1/2, \quad (ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)+\frac{i}{2\sqrt{3}}(\gamma_1+i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-1/2}(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}a_{m+3/2}(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1+if_2)=0; \qquad (52)$$

$$-i(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)+\frac{1}{2\sqrt{3}}(\gamma_1+i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{6}}b_{m-1/2}(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)-i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}a_{m+3/2}(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1+if_2)=0 \qquad (53)$$

(they differ only in the multiplier i),

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3[(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1-i\gamma_2)f_3+\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_4)]+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+3/2}\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)=0; \quad (54)$$

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4[(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1-i\gamma_2)f_4+\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_4)]+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+3/2}\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)=0. \quad (55)$$

So, we have only 3 different equations.

7. The system of equations in the variable r

Let us collect together equations (31), (41), (47)–(50), (52)–(55). We divide 8 equations into two groups. The first group is as follows:

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+a_{m-1/2}\frac{3M^2}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2 B}\gamma_+(f_1-if_2)=0,$$

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)-\frac{3M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}b_{m+1/2}\gamma_-(f_1+if_2)=0,$$

or shortly

$$(ip+M)F_1+\frac{3M^2}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2 B}a_{m-1/2}\gamma_+F_2=0, \qquad (56)$$

$$(ip+M)F_4-\frac{3M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}b_{m+1/2}\gamma_-F_3=0; \qquad (57)$$

the third equation

$$(ip+M)\frac{1}{4}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+\frac{i}{2\sqrt{3}}(\gamma_1-i\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$
$$-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}b_{m-3/2}(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1-if_2)-\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+1/2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)=0$$

is transformed to other form (with the use of the above constraint)

$$\{(ip+M)\frac{3M^2-2B}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2 B}-\frac{2BM}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2 B}\}F_2-b_{m-3/2}\gamma_- F_1-\frac{2B\,a_{m+1/2}\gamma_-}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}F_3=0; \quad (58)$$

the fourth equation

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$
$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4[(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1-i\gamma_2)f_4+\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_4)]+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+3/2}\gamma_4(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)=0$$

is transformed to the form (again with the use of the known constraint)

$$\{(ip+M)\frac{3M^2+2B}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}+\frac{2BM}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2 B}\}F_3+a_{m+3/2}\gamma_+ F_4-\frac{2B\,b_{m-1/2}\gamma_+}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2 B}F_2=0. \quad (59)$$

In equations in eqs.(56)–(59) we use the notations

$$F_1=\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2), \quad F_2=\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2),$$
$$F_3=\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2), \quad F_4=\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2), \quad (60)$$

Below we write down the remaining 4 equations:

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$
$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3[(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-3/2}\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2)f_3+\gamma_3(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)]=0, \quad (61)$$
$$(ip+M)\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)f_4+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(p_3 f_3+p_4 f_4)-$$
$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_4[(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1-if_2)+(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3 f_3+\gamma_4 f_4)]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-3/2}\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_2)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1+i\gamma_2)f_4+\gamma_4(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)]=0; \quad (62)$$

$$(ip+M)\frac{1}{4}(1-i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)+\frac{i}{2\sqrt{3}}(\gamma_1+i\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-1/2}(1-i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3f_3+\gamma_4f_4)+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}a_{m+3/2}(\gamma_1+i\gamma_2)(f_1+if_2)=0, \quad (63)$$

$$(ip+M)\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)f_3+\frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(p_3f_3+p_4f_4)-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{3}}p_3[(\gamma_1-i\gamma_2)(f_1+if_2)+(1+i\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3f_3+\gamma_4f_4)]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}b_{m-1/2}[2\sqrt{3}(\gamma_1-i\gamma_2)f_3+\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1-if_4)]+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{6}}a_{m+3/2}\gamma_3(1+i\gamma_1\gamma_2)(f_1+if_2)=0. \quad (64)$$

Let us act on eq. (56) by the matrix $(M-ip)$, this gives

$$F_1=-\frac{1}{p^2+M^2}\frac{3M^2}{3M^2-(1+\sqrt{3})B}a_{m-1/2}(M-ip)\gamma_+F_2. \quad (65)$$

Taking into account this expression for F_1, we transform eq. (58) to the form

$$\frac{1}{3M^2-(1+\sqrt{3})B}\{(ip+M)[3M^2-2B+\frac{6M^2b_{m-3/2}a_{m-1/2}}{p^2+M^2}]-2MB\}F_2-\frac{2Ba_{m+1/2}\gamma_-}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}F_3=0. \quad (66)$$

Similarly, from eq. (57) it follows

$$F_4=\frac{1}{p^2+M^2}\frac{3M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}b_{m+1/2}(M-ip)\gamma_-F_3; \quad (67)$$

so from eq. (59) we derive

$$\frac{1}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}\{(ip+M)[3M^2+2B+\frac{6M^2a_{m+3/2}b_{m+1/2}}{p^2+M^2}]+2BM\}F_3-\frac{2Bb_{m-1/2}\gamma_+}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2B}F_2=0. \quad (68)$$

Thus, we have the system of two linked equations (66), (68) for the variables F_2, F_3. Let us apply the exclusion method. To this end, we act on eq. (68) by the operator $a_{m+1/2}\gamma_-$, which results in

$$\frac{1}{2B}\{(-ip+M)[(3M^2+2B)+\frac{6M^2}{p^2+M^2}(a_{m+1/2}b_{m-1/2}-B)]+2BM\}\times$$

$$\times\frac{2B}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}a_{m+1/2}\gamma_-F_3-\frac{4B}{3M^2-(1+\sqrt{3})B}a_{m+1/2}b_{m-1/2}F_2=0. \quad (69)$$

Equation (69), with the use of (66), is transformed to the 4-order equation for F_2:

$$\{(-ip+M)[(3M^2+2B)+\frac{6M^2}{p^2+M^2}(a_{m+1/2}b_{m-1/2}-B)]+2BM\}\times$$

$$\times\{(ip+M)[(3M^2-2B)+\frac{6M^2}{p^2+M^2}(a_{m+1/2}b_{m-1/2}+B)]-2BM\}F_2-8(B)^2a_{m+1/2}b_{m-1/2}F_2=0; \quad (70)$$

we have taken into account the identity $b_{m-3/2}a_{m-1/2}-a_{m+1/2}b_{m-1/2}=B$.

Similarly, let us act on eq. (66) by the operator $b_{m-1/2}\gamma_+$, this gives

$$\{(-ip+M)[(3M^2-2B)+\frac{6M^2}{p^2+M^2}(b_{m-1/2}a_{m+1/2}+B)]-2BM\}\times$$

$$\times\frac{2B}{3M^2-(1+\sqrt{3})^2B}b_{m-1/2}\gamma_+F_2-\frac{8(B)^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}b_{m-1/2}a_{m+1/2}F_3=0.$$

Using eq. (66), we can eliminate the variable F_2:

$$\{(-ip+M)[(3M^2-2B)+\frac{6M^2}{p^2+M^2}(b_{m-1/2}a_{m+1/2}+B)]-2BM\}\times$$

$$\times\{(ip+M)[(3M^2+2B)+\frac{6M^2}{p^2+M^2}(b_{m-1/2}a_{m+1/2}-B)]+2BM\}F_3-8(B)^2b_{m-1/2}a_{m+1/2}F_3=0. \quad (71)$$

Thus, we have two 4-order differential equations, (70) and (71), for functions F_2 and F_3; after regrouping the terms they take on the form:

$$\{(-ip+M)[3M^2(1+\frac{2a_{m+1/2}b_{m-1/2}}{p^2+M^2})+2B(1-\frac{3M^2}{p^2+M^2})]+2BM\}\times$$

$$\times\{(ip+M)[3M^2(1+\frac{2a_{m+1/2}b_{m-1/2}}{p^2+M^2})-2B(1-\frac{3M^2}{p^2+M^2})]-2BM\}F_2=8B^2a_{m+1/2}b_{m-1/2}F_2, \quad (72)$$

$$\{(-ip+M)[3M^2(1+\frac{2b_{m-1/2}a_{m+1/2}}{p^2+M^2})-2B(1-\frac{3M^2}{p^2+M^2})]-2BM\}\times$$

$$\times\{(ip+M)[3M^2(1+\frac{2b_{m-1/2}a_{m+1/2}}{p^2+M^2})+2B(1-\frac{3M^2}{p^2+M^2})]+2BM\}F_3=8B^2b_{m-1/2}a_{m+1/2}F_3. \quad (73)$$

From equations (72) and (73), we derive

$$\{9M^4\beta^2+12BM^3ip\beta-4B^2(p^2+M^2)\beta+12B^2p^2M^2\}F_2=0, \quad (74)$$

$$\{9M^4\lambda^2-12eBM^3ip\lambda-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}F_3=0, \quad (75)$$

where the notations β and λ are used:

$$\beta=p^2+M^2+2a_{m+1/2}b_{m-1/2}, \quad \lambda=p^2+M^2+2b_{m-1/2}a_{m+1/2}. \quad (76)$$

Below we need the explicit form of the matrices

$$\gamma_1=\begin{vmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{vmatrix},\gamma_2=\begin{vmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix},\gamma_3=\begin{vmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{vmatrix},\gamma_4=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix},$$

$$i\gamma_1\gamma_2=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix},\frac{1}{2}(1+i\gamma_1\gamma_2)=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix},\frac{1}{2}(1-i\gamma_1\gamma_2)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$ip=\begin{vmatrix}0&0&p_3+ip_4&0\\0&0&0&-p_3+ip_4\\-p_3+ip_4&0&0&0\\0&p_3+ip_4&0&0\end{vmatrix}.$$

Bearing in mind these expressions, we find the explicit structure of F_2 and F_3:

$$F_2(r)=\begin{vmatrix}0\\f_{1,2}-if_{2,2}\\0\\f_{1,4}-if_{2,4}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\\chi_2\\0\\\chi_4\end{vmatrix},\quad F_3(r)=\begin{vmatrix}f_{1,1}+if_{2,1}\\0\\f_{1,3}+if_{2,3}\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_1\\0\\\varphi_3\\0\end{vmatrix}. \tag{77}$$

Correspondingly, eqs. (75) reduce to two linked equations

$$\begin{gathered}\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_1-12BM^3(+p_3+ip_4)\lambda\varphi_3=0,\\\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_3-12BM^3(-p_3+ip_4)\lambda\varphi_1=0.\end{gathered} \tag{78}$$

Let us multiply the first equation in (78) by $(-p_3+ip_4)$, then we get

$$\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}(-p_3+ip_4)\varphi_1+12BM^3p^2\lambda\varphi_3=0,$$

whence it follows

$$\lambda\varphi_3=-\frac{1}{12BM^3p^2}\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}(-p_3+ip_4)\varphi_1. \tag{79}$$

Acting on the second equation in (78) by operator λ, we get

$$\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}\lambda\varphi_3-12BM^3(-p_3+ip_4)\lambda^2\varphi_1=0.$$

Further, bearing in mind (79), we obtain the 4-order equation for function φ_1:

$$\begin{gathered}\{(9M^4)^2\lambda^4-72M^4B^2(p^2+M^2)\lambda^3+16B^4(p^2+M^2)^2\lambda^2+360M^6B^2p^2\lambda^2-\\-96B^4p^2M^2(p^2+M^2)\lambda+144B^4(p^2)^2M^4\}\varphi_1=0.\end{gathered}$$

The 4-order operator is factorized in the product of two commuting multipliers

$$\begin{gathered}\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\times\\\times\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_1=0.\end{gathered} \tag{80}$$

We should find solutions of both 2-order equations

$$\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_1=0, \tag{81}$$

$$\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_1=0. \tag{82}$$

Similarly we can derive equations for the variable φ_3. To this end, let us multiply the second equation in (78) by $(-p_3-ip_4)$, this gives

$$\lambda\varphi_1=-\frac{1}{12BM^3p^2}\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}(p_3+ip_4)\varphi_3.$$

This expression for $\lambda\varphi_1$ should be taken into account in (78), in this way we arrive at 4-order equation for the variable φ_3, which also is factorized as follows

$$\begin{aligned}&\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\times\\&\times\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_3=0.\end{aligned} \tag{83}$$

There exist two equations for φ_3:

$$\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_3=0, \tag{84}$$

$$\{9M^4\lambda^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_3=0. \tag{85}$$

Let us derive the 2-order differential equations for the variables φ_1 and φ_3. To this end, first consider equation (see (81)), presented in the form

$$\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda\}\varphi_1=\{12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,\lambda-12B^2p^2M^2\}\varphi_1,$$

and take it into account in the first equation in (78):

$$\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_1-12BM^3(+p_3+ip_4)\lambda\varphi_3=0,$$

in this way we obtain

$$\lambda\{\sqrt{-B^2p^2}\,\varphi_1-B(p_3+ip_4)\varphi_3\}=0. \tag{86}$$

Now let us turn to eq. (84), presented in the form

$$\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda\}\varphi_3=\{12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,\lambda-12B^2p^2M^2\}\varphi_3, \tag{87}$$

and take it into account in the second equation in (78):

$$\{9M^4\lambda^2-4B^2(p^2+M^2)\lambda+12B^2p^2M^2\}\varphi_3-12BM^3(-p_3+ip_4)\lambda\varphi_1=0,$$

so we obtain

$$\lambda\{-B(-p_3+ip_4)\varphi_1+\sqrt{-B^2p^2}\,\varphi_3\}=0. \tag{88}$$

Let us joint equations (86) and (88) into one system:

$$\lambda\{\sqrt{-B^2p^2}\,\varphi_1-B(p_3+ip_4)\varphi_3\}=0,\ \lambda\{-B(-p_3+ip_4)\varphi_1+\sqrt{-B^2p^2}\,\varphi_3\}=0. \tag{89}$$

We may conclude that both functions φ_1 and φ_3 satisfy one and the same structure

$$\lambda\varphi_1 = 0, \quad \lambda\varphi_3 = 0, \; \lambda F_1 = 0. \tag{90}$$

The same is valid for function F_3. Indeed, let us turn to eq. (82) for function φ_1, presented in the form

$$[9M^4\lambda^2 - 4B^2(p^2+M^2)\lambda]\varphi_1 = -12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,\lambda\varphi_1 - 12B^2p^2M^2\varphi_1;$$

taking into account this equality, from eq. (78) we derive

$$\lambda[\sqrt{-B^2p^2}\,\varphi_1 + B(p_3 + ip_4)\varphi_3] = 0. \tag{91}$$

Similarly, using eq. (85) in the form

$$[9M^4\lambda^2 - 4B^2(p^2+M^2)]\varphi_3 = -12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,\lambda\varphi_3 - 12B^2p^2M^2\varphi_3$$

we derive from eq. (78) the following result

$$\lambda[B(-p_3 + ip_4)\varphi_1 + \sqrt{-B^2p^2}\,\varphi_3] = 0. \tag{92}$$

Considering eqs. (91) and (92) as a system, we conclude that functions φ_1, φ_3, F_3 satisfy one of the same equation $\lambda\varphi_1 = 0, \quad \lambda\varphi_3 = 0, \quad F_3 = 0.$

8. Solutions for functions $F_3 - \{\varphi_1, \varphi_3\}$

Let us study equation $\lambda F_3 = 0$. Explicitly, it reads

$$\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m+1/2)^2}{r^2} + B(m-1/2) - (\frac{Br}{2})^2 - (p^2+M^2)\}F_3 = 0. \tag{93}$$

In the variable $x = |B_0|\, r^2$, where $B_0 = \dfrac{B}{2}$; this equation reads

$$\{x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - [\frac{(m+1/2)^2}{4x} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m-1) + \frac{x}{4} + \frac{p^2+M^2}{4|B_0|}]\}F_3 = 0. \tag{94}$$

We search solutions in the form $F_3(x) = x^A e^{-Cx} g_3(x)$; for function $g_3(x)$ we get the equation

$$\{x\frac{d^2}{dx^2} + (2A+1-2Cx)\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}[A^2 - \frac{(m+1/2)^2}{4}] + (C^2 - 1/4) -$$
$$-[2AC + C - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m-1) + \frac{p^2+M^2}{4|B_0|}]\}g_3 = 0.$$

Fixing parameters as follows $A = |m+1/2|/2, C = 1/2,$ we get

$$\{x\frac{d^2}{dx^2} + (|m+1/2|+1-x)\frac{d}{dx} - [\frac{|m+1/2|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m-1) + \frac{p^2+M^2}{4|B_0|}]\}g_3 = 0, \tag{95}$$

which is the confluent hypergeometric equation with parameters

$$\gamma = |m+1/2|+1, \quad \alpha = \frac{|m+1/2|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m-1) + \frac{p^2+M^2}{4|B_0|}.$$

The quantization rule is $\alpha=-n$, which leads to

$$\varepsilon^2-p_3^2-M^2=4|B_0|n+2|B_0|(|m+1/2|+1)-B_0(2m-1); \tag{96}$$

this spectrum corresponds to the functions $\{\varphi_1,\varphi_3\}-F_3$.

9. Equations for $F_2-\{\chi_2,\chi_4\}$

Let us consider eq. (74):

$$\{9M^4\beta^2+12BM^3ip\beta-4B^2(p^2+M^2)\beta+12B^2p^2M^2\}F_2=0. \tag{97}$$

From (97) it follows the system of two linked equations

$$\{9M^4\beta^2-4B^2(p^2+M^2)\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_2+12BM^3(-p_3+ip_4)\beta\chi_4=0, \tag{98}$$

$$12BM^3(p_3+ip_4)\beta\chi_2+\{9M^4\beta^2-4B^2(p^2+M^2)\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_4=0. \tag{99}$$

From eq. (98) we can express $\beta\chi_4$:

$$\beta\chi_4=\frac{1}{12BM^3p^2}\{9M^4\beta^2-4B^2(p^2+M^2)\beta+12B^2p^2M^2\}(p_3+ip_4)\chi_2. \tag{100}$$

With this in mind, from eq. (99) we derive

$$\{(9M^4)^2\beta^4-72M^4B^2(p^2+M^2)\beta^3+16B^4(p^2+M^2)^2\beta^2+$$
$$+360M^6B^2p^2\beta^2-96B^4p^2M^2(p^2+M^2)\beta+144B^4(p^2)^2M^4\}\chi_2=0.$$

The fourth order operator is factorized in the product of two commuting multipliers

$$\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\beta+12B^2p^2M^2\}\times$$
$$\times\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_2=0, \tag{101}$$

we should find solutions of both equations

$$\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_2=0, \tag{102}$$

$$\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_2=0. \tag{103}$$

Let us derive similar equations for function χ_4. To this end, we should start with eq. (99) written in the form

$$\beta\chi_2=\frac{1}{12BM^3p^2}\{9M^4\beta^2-4B^2(p^2+M^2)\beta+12B^2p^2M^2\}(-p_3+ip_4)\chi_4. \tag{104}$$

Taking into account (104), from eq. (98) we derive

$$\{(9M^4)^2\beta^4-72M^4B^2(p^2+M^2)\beta^3+16B^4(p^2+M^2)^2\beta^2+$$
$$+360M^6B^2p^2\beta^2-96B^4p^2M^2(p^2+M^2)\beta+144B^4(p^2)^2M^4\}\chi_4=0.$$

The fourth order operator is factorized into the product of two commuting multipliers

$$\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\beta+12B^2p^2M^2\}\times$$
$$\times\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}\,]\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_4=0. \tag{105}$$

We should find solutions of both equations

$$\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)-12M^3\sqrt{-B^2p^2}]\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_4=0, \tag{106}$$

$$\{9M^4\beta^2+[-4B^2(p^2+M^2)+12M^3\sqrt{-B^2p^2}]\beta+12B^2p^2M^2\}\chi_4=0. \tag{107}$$

By analogy with previous section, we can prove that the functions χ_2,χ_4,F_2 obey one and the same equation

$$\beta\chi_4=0,\quad \beta\chi_2=0,\quad \beta F_2=0. \tag{108}$$

10. Solutions for functions $F_2-\{\chi_2,\chi_4\}$

Let us consider eq. (108)

$$\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{(m-1/2)^2}{r^2}+B(m+1/2)-(\frac{Br}{2})^2-(p^2+M^2)\}F_2=0. \tag{109}$$

In the variable $x=|B_0|r^2$, it reads

$$\{x\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}-[\frac{(m-1/2)^2}{4x}-\frac{B_0}{4|B_0|}(2m+1)+\frac{x}{4}+\frac{p^2+M^2}{4|B_0|}]\}F_2=0. \tag{110}$$

We search solutions in the form $F_2(x) = x^Ae^{-Cx}g_2(x)$, where $A=\frac{|m-1/2|}{2}$, $C=1/2$, further we get

$$\{x\frac{d^2}{dx^2}+(|m-1/2|+1-x)\frac{d}{dx}-[\frac{|m-1/2|}{2}+\frac{1}{2}-\frac{B_0}{4|B_0|}(2m+1)+\frac{p^2+M^2}{4|B_0|}]\}g_2=0, \tag{111}$$

which is the confluent hypergeometric equation with parameters

$$\gamma=|m-1/2|+1,\quad \alpha=\frac{|m-1/2|}{2}+\frac{1}{2}-\frac{B_0}{4|B_0|}(2m+1)+\frac{p^2+M^2}{4|B_0|}.$$

The quantization rule $\alpha=-n$ leads to

$$\varepsilon^2-p_3^2-M^2=4|B_0|n+2|B_0(|m-1/2|+1)-B_0(2m+1); \tag{112}$$

this spectrum corresponds to the functions $\{\chi_2,\chi_4\}-F_2$.

11. Equations for concomitant components F_1 and F_4

Let us consider eq. (67):

$$F_4=\frac{1}{p^2+M^2}\frac{3M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}b_{m+1/2}(M-ip)\gamma_-F_3.$$

Acting on it by operator $(M-ip)a_{m+3/2}\gamma_+$, we obtain

$$(M-ip)a_{m+3/2}\gamma_+F_4=\frac{6M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}[b_{m-1/2}a_{m+1/2}-B]F_3=$$

$$=\frac{6M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}\{\frac{1}{2}[\lambda-(p^2+M^2)]-B\}F_3=-\frac{3M^2}{3M^2+(1+\sqrt{3})^2B}[(p^2+M^2)+2B]F_3,$$

where $\lambda F_3 = 0$ is taken into account. Consequently, we get equation for the variable F_3 in the form

$$F_3 = -\frac{3M^2 + (1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2[(p^2 + M^2) + 2B]}(M - ip)a_{m+3/2}\gamma_+ F_4. \quad (113)$$

With the use of (113), equation (57) is transformed to the following form

$$\{(p^2 + M^2) + 2B + 2b_{m+1/2}a_{m+3/2}\}F_4 = 0;$$

or explicitly

$$\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m+3/2)^2}{r^2} + B(m-3/2) - (\frac{Br}{2})^2 - (p^2 + M^2)\}F_4 = 0;$$

in the variable $x = |B_0| r^2$, it reads

$$\{x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - [\frac{(m+3/2)^2}{4x} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m-3) + \frac{x}{4} + \frac{p^2 + M^2}{4|B_0|}]\}F_4 = 0. \quad (114)$$

Let us search solutions in the form $F_4(x) = x^A e^{-Cx} f_4(x)$, where $A = \frac{|m+3/2|}{2}$, $C = 1/2$; for the variable g_4 we find an equation of the confluent hypergeometric type

$$\{x\frac{d^2}{dx^2} + (|m+3/2| + 1 - x)\frac{d}{dx} - [\frac{|m+3/2|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m-3) + \frac{p^2 + M^2}{4|B_0|}]\}g_4 = 0 \quad (115)$$

with parameters

$$\gamma = |m+3/2| + 1, \alpha = \frac{|m+3/2|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m-3) + \frac{p^2 + M^2}{4|B_0|}.$$

The quantization rule is $\alpha = -n$ gives

$$\varepsilon^2 - p_3^2 - M^2 = 4|B_0|n + 2|B_0|(|m+3/2| + 1) - B_0(2m-3); \quad (116)$$

this spectrum corresponds to the function F_4.

Let us find equation for the variable F_1:

$$F_1 = \frac{1}{p^2 + M^2}\frac{3M^2}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}a_{m-1/2}(M - ip)\gamma_+ F_2.$$

Acting on this by operator $(M - ip)b_{m-3/2}\gamma_-$, we obtain

$$(M - ip)b_{m-3/2}\gamma_- F_1 =$$

$$= -\frac{6M^2}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}b_{m-3/2}a_{m-1/2}F_2 = -\frac{6M^2}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}[a_{m+1/2}b_{m-1/2} + B]F_2 =$$

$$= -\frac{6M^2}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}\{\frac{1}{2}[\beta - (p^2 + M^2)] + B\}F_2 = \frac{3M^2}{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}[(p^2 + M^2) - 2B]F_2,$$

where eq. $\lambda F_2 = 0$ is taken into account. Thus, we have the expression for the variable F_2:

$$F_2 = \frac{3M^2 - (1+\sqrt{3})^2 B}{3M^2[(p^2+M^2)-2B]}(M-ip)b_{m-3/2}\gamma_- F_1. \tag{117}$$

With this in mind, from eq. (56) we obtain the equation

$$\{2a_{m-1/2}b_{m-3/2} + p^2 + M^2 - 2B\}F_1 = 0. \tag{118}$$

Explicitly, it reads

$$\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m-3/2)^2}{r^2} + B(m+3/2) - (\frac{Br}{2})^2 - (p^2+M^2)\}F_1 = 0. \tag{119}$$

In the variable $x = |B_0| r^2$, we have

$$\{x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - [\frac{(m-3/2)^2}{4x} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m+3) + \frac{x}{4} + \frac{p^2+M^2}{4|B_0|}]\}F_1 = 0.$$

Its solutions are searching in the form $F_1(x) = x^A e^{-Cx} g_1(x)$, where $A = \frac{|m-3/2|}{2}$, $C = 1/2$:

$$\{x\frac{d^2}{dx^2} + (|m-3/2|+1-x)\frac{d}{dx} - [\frac{|m-3/2|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m+3) + \frac{p^2+M^2}{4|B_0|}]\}g_1 = 0;$$

which is an equation of the confluent hypergeometric type with the parameters

$$\gamma = |m-3/2|+1, \alpha = \frac{|m-3/2|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{B_0}{4|B_0|}(2m+3) + \frac{p^2+M^2}{4|B_0|}.$$

The quantization rule is $\alpha = -n$ leads to

$$\varepsilon^2 - p_3^2 - M^2 = 4|B_0|n + 2|B_0|(|m-3/2|+1) - B_0(2m+3); \tag{120}$$

this spectrum corresponds to the variable F_1.

12. Conclusion

Thus, we have found 4 possible energy spectra for the spin 3/2 particle in external uniform magnetic field (assume that $B_0 > 0$)

$$\begin{aligned}
&F_3, \quad \varepsilon^2 - p_3^2 - M^2 = 2B_0\{2n+1+|m-\frac{3}{2}|-(m+\frac{3}{2})\};\\
&F_2, \quad \varepsilon^2 - p_3^2 - M^2 = 2B_0\{2n+1+|m+\frac{3}{2}|-(m-\frac{3}{2})\};\\
&F_4, \quad \varepsilon^2 - p_3^2 - M^2 = 2B_0\{2n+1+|m-\frac{1}{2}|-(m+\frac{1}{2})\};\\
&F_1, \quad \varepsilon^2 - p_3^2 - M^2 = 2B_0\{2n+1+|m+\frac{1}{2}|-(m-\frac{1}{2})\}.
\end{aligned} \tag{121}$$

It may be proved that equations from the second group (61)–(64) lead to the one same energy spectra.

REFERENCES

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. – 1936. – Vol. 155, № 886. – P. 447–459. – doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Fierz, M. Über die relativistische theorie KraftefreierTeilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helvetica Physica Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.

3. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli // Helvetica Physica Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.

4. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. S. Schwinger // Physical Review. – 1941. – Vol. 60, nr 1. – P. 61–64. – doi.org/10.1103/physrev.60.61

5. Gelfand, I. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group / I. M. Gelfand, A. M. Yaglom // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1948. – Vol. 18, nr 8. – P. 703–733 (in Russian).

6. Fedorov, F. I. Generalized relativistic wave equations / F. I. Fedorov // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. – 1952. – Vol. 82, nr 1. – P. 37–40 (in Russian).

7. Feinberg, V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields / V. Ya. Feinberg // Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR. – 1955. – Vol. 6. – P. 269–332 (in Russian).

8. Bogush, A. A. Equation for a 3/2 particle with anomalous magnetic moment / A. A. Bogush, V. V. Kisel // Russian Physics Journal. – 1984. – Vol. 1. – P. 23–27 (in Russian).

9. Pletyukhov, V. A. To the theory of particles of spin 3/2 / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Russian Physics Journal. – 1985. – Vol. 28, nr 1. – P. 91–95 (in Russian).

10. Pletyukhov, V. A. On the relationship between various formulations of particle theory with spin 3/2 / V. A. Pletyukhov, V. I . Strazhev // Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics Series. – 1985. – Vol. 5. – P. 90–95 (in Russian).

11. Red'kov, V. M. Particle fields in the Riemann space and the Lorents group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belaruskaya navuka, 2009. – 486 p. (in Russian).

12. Pletyukhov, V. A. Relativistic wave equations and internal degrees of freedom / V. A. Pletyukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Belaruskaya navuka, 2015. – 328 p. (in Russian).

13. Elementary particles with internal structure in external fields / V. V. Kisel [et al.] // I. General theory, II. Physical Problems. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. – 1936. – Vol. 155, № 886. – P. 447–459. – doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Fierz, M. Über die relativistische theorie KraftefreierTeilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helvetica Physica Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.

3. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli // Helvetica Physica Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.

4. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. S. Schwinger // Physical Review. – 1941. – Vol. 60, nr 1. – P. 61–64. – doi.org/10.1103/physrev.60.61

5. Гельфанд, И. М. Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

6. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. Акад. наук СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.

7. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитными и мезонными полями / В. Я. Файнберг // Тр. ФИ АН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

8. Богуш, А. А. Уравнение для частицы со спином 3/2, обладающей аномальным магнитным моментом / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

9. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Изв. вузов. Физика. – 1985. – № 1. – С. 91–95.

10. Плетюхов, В. А. О взаимосвязи между различными формулировками теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. Акад. навук БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1985. – № 5. – С. 90–95.

11. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 486 с.

12. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

13. Elementary particles with internal structure in external fields / V. V. Kisel [et al.] // I. General theory, II. Physical Problems. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.10.2023

УДК 539.12:530.145

Владимир Анестиевич Плетюхов
д-р физ-мат. наук, проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Vladimir Pletyukhov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: pletyukhov@yandex.by

НОТОФ ОГИЕВЕЦКОГО – ПОЛУБАРИНОВА И ПОЛЕ КАЛЬБА – РАМОНДА

Обсуждаются тензорная и матричная формулировки релятивистского волнового уравнения для микрообъекта, который известен в литературе как нотоф (согласно Огиевецкому и Полубаринову) и поле Кальба – Рамонда. Показано, что данное уравнение действительно описывает нотоф, т. е. безмассовую векторную частицу с нулевой спиральностью. Таким образом, трактовка обсуждаемого микрообъекта как безмассового скалярного мезона (по Кальбу и Рамонду) является ошибочной.
Ключевые слова: *нотоф, поле Кальба – Рамонда, векторная частица, спиральность, скалярная частица.*

Ogievetsky – Polybarinov Notoph and Kalb – Ramond Field

The tensor and matrix formulations of the relativistic wave eguation for microobject wich are krown in literature both as the notoph (by Ogievetsky and Polybarinov) and Kalb – Ramond field are discussed. It is shown that this eguation actually describes the notof – the massless vector particle with zero helicity. So, the interpretation of this object as the massless scalar meson (by Kalb and Ramond) is wrong.
Key words: *notoph, Kalb – Ramond field, vector particle, helicity, scalar particle.*

Введение

Как хорошо известно, фотон, обладающий двумя состояниями поляризации (спиральностью ±1), описывается вектор-потенциалом A_μ, подчиняющимся уравнению второго порядка [1, с.161].

$$\Box \mathrm{A}_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \mathrm{A}_\nu = -j_\mu. \tag{1}$$

Здесь j_μ – четырехмерный вектор плотности тока $(\mu, \nu = 1 \div 4; x_4 = ict, j_4 = ic\rho)$; $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$ – оператор Даламбера, по повторяющемуся индексу в произведении подразумевается суммирование.

Уравнение (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований второго рода

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda(x), \tag{2}$$

где $\Lambda(x)$ – скалярная калибровочная функция. Напряженностью, инвариантной относительно преобразований (2), служит антисимметричный тензор второго ранга

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3}$$

В 1966 г. В. Огиевецкий и И. Полубаринов [2] показали, что теорию безмассовой частицы со спином 1 можно строить на основе тензор-потенциала $\Phi_{\mu\nu} (\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu})$, удовлетворяющего уравнению второго порядка

$$\Phi_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\lambda \Phi_{\lambda\nu} + \partial_\nu \partial_\lambda \Phi_{\lambda\mu} = -j_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $j_{\mu\nu}$ – тензор плотности тока $(j_{\nu\mu} = -j_{\mu\nu}, \partial_\mu j_{\mu\nu} = 0)$.

Уравнение (4) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\delta\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_\mu(x), \tag{5}$$

где $\Lambda_\mu(x)$ – векторная калибровочная функция. Используя преобразования (5), уравнение (4) для случая свободного поля $(j_{\mu\nu} = 0)$ можно привести к более простой системе

$$\Box\Phi_{\mu\nu} = 0, \tag{6}$$
$$\partial_\nu \Phi_{\mu\nu} = 0, \tag{7}$$

в которой уравнение (7) играет роль дополнительного условия для уравнения (6). При этом в выборе калибровочной функции все еще остается произвол, ограниченный условием

$$\Box\Lambda_\mu(\mathrm{x}) - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu(x) = 0. \tag{8}$$

Дополнительное условие (7) приводит к тому, что из шести компонент тензор-потенциала $\Phi_{\mu\nu}$ независимыми являются только две. Остающийся в выборе калибровочной функции произвол (8) позволяет исключить еще одну компоненту в качестве независимой. В результате остается лишь одна независимая компонента тензор-потенциал $\Phi_{\mu\nu}$, которая, по мнению авторов [2], обладает нулевой спиральностью (строгого доказательства при этом не приводится), но во взаимодействиях переносит спин 1.

Описываемая уравнением (4) безмассовая частица была названа в [2] нотофом. Это название отражает дополнительность свойств нотофа и фотона как в смысле спиральности, так и в отношении лоренцевских трансформационных свойств потенциалов.

В 1974 г. М. Кальб и П. Рамонд [3] «переоткрыли» нотоф, предложив использовать тензор-потенциал $\Phi_{\mu\nu}$ для описания взаимодействия замкнутых струн, редуцированного на четырехмерное пространство−время. В качестве напряженности в [3] рассматривается полностью антисимметричный тензор третьего ранга $F_{\mu\nu\alpha}$. Предлагаемая система уравнений первого порядка

$$\partial_\mu F_{\mu\nu\alpha} = j_{\nu\alpha}, \tag{9}$$

$$\partial_\mu \Phi_{\nu\alpha} + \partial_\alpha \Phi_{\mu\nu} + \partial_\nu \Phi_{\alpha\mu} + F_{\mu\nu\alpha} = 0 \tag{10}$$

приводит к уравнению второго порядка (4) и к системе (6), (7) в случае свободного поля. Другими словами, теории Огиевецкого – Полубаринова и Кальба – Рамонда математически эквиваленты.

Физическая же трактовка, предлагаемая в [3], отличается от трактовки [2]. Кальб и Рамонд интерпретируют сопоставляемую тензор-потенциалу $\Phi_{\mu\nu}$ безмассовую частицу с одной степенью свободы как ***скалярный*** безмассовый мезон, который по определению не может во взаимодействиях переносить спин 1 или какой-либо еще спин.

В дальнейшем в литературе утвердилась именно эта трактовка [4; 5]. В научный обиход был введен даже термин «spin jumping» (спиновый скачок), смысл которого заключается в том, что при переходе к безмассовому пределу в теории массивного векторного поля может получится теория безмассового поля со спином 0. Также закрепилось и название безмассового микрообъекта, описываемого системой (9), (10): «поле Кальба – Рамонда».

Основная часть

Для того чтобы установить, какая из двух приведенных выше физических трактовок безмассового микрообъекта, сопоставляемого тензор-потенциалу $\Phi_{\mu\nu}$, является правильной, применим подход, используемый в работе [6] при рассмотрении безмассового поля Штюкельберга. При этом достаточно ограничиться случаем свободного (без источников) поля, описываемого системой первого порядка

$$\partial_\mu F_{\mu\nu\alpha} = 0, \tag{11}$$

$$F_{\mu\nu\alpha} = -\partial_\mu \Phi_{\nu\alpha} - \partial_\alpha \Phi_{\mu\nu} - \partial_\nu \Phi_{\alpha\mu}, \tag{12}$$

ассоциированной с уравнением второго порядка для потенциала

$$\Box\Phi_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha\Phi_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial_\alpha\Phi_{\alpha\mu} = 0. \tag{13}$$

Будем искать решения уравнений (11) – (13) в виде плоских волн

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \mathring{\psi}_{\mu\nu} e^{-i\kappa_\lambda x_\lambda}, \tag{14}$$

$$\psi_{\mu\nu\alpha}(x) = \mathring{\psi}_{\mu\nu\alpha} e^{-i\kappa_\lambda x_\lambda}, \tag{15}$$

где $\mathring{\psi}_{\mu\nu}$, $\mathring{\psi}_{\mu\nu\alpha}$ – амплитуды, κ_λ – четырехмерный волновой вектор ($\kappa_4 = i\omega$). Сначала подставим (14) в (13). Получим

$$\kappa_\lambda^2 \mathring{\psi}_{\mu\nu} + \kappa_\mu\kappa_\lambda \mathring{\psi}_{\nu\lambda} - \kappa_\nu\kappa_\lambda \mathring{\psi}_{\mu\lambda} = 0. \tag{16}$$

Расписывая (16) покомпонентно, придем к следующей системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд:

$$\begin{gathered}
(\kappa_2^2 + \kappa_3^2)\mathring{\psi}_{14} - \kappa_1\kappa_2\mathring{\psi}_{24} - \kappa_1\kappa_3\mathring{\psi}_{34} + i\omega\kappa_3\mathring{\psi}_{31} - i\omega\kappa_2\mathring{\psi}_{12} = 0,\\
-\kappa_1\kappa_2\mathring{\psi}_{14} + (\kappa_1^2 + \kappa_3^2)\mathring{\psi}_{24} - \kappa_2\kappa_3\mathring{\psi}_{34} - i\omega\kappa_3\mathring{\psi}_{23} - i\omega\kappa_1\mathring{\psi}_{12} = 0,\\
-\kappa_1\kappa_3\mathring{\psi}_{14} - \kappa_2\kappa_3\mathring{\psi}_{24} + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\mathring{\psi}_{34} + i\omega\kappa_2\mathring{\psi}_{23} - i\omega\kappa_1\mathring{\psi}_{31} = 0,\\
-i\omega\kappa_3\mathring{\psi}_{24} + i\omega\kappa_2\mathring{\psi}_{34} + (\kappa_1^2 - \omega^2)\mathring{\psi}_{23} + \kappa_1\kappa_2\mathring{\psi}_{31} + \kappa_1\kappa_3\mathring{\psi}_{12} = 0,\\
i\omega\kappa_3\mathring{\psi}_{14} - i\omega\kappa_1\mathring{\psi}_{34} + \kappa_1\kappa_2\mathring{\psi}_{23} + (\kappa_2^2 - \omega^2)\mathring{\psi}_{31} + \kappa_2\kappa_3\mathring{\psi}_{12} = 0,\\
-i\omega\kappa_2\mathring{\psi}_{14} + i\omega\kappa_1\mathring{\psi}_{24} + \kappa_1\kappa_3\mathring{\psi}_{23} + \kappa_2\kappa_3\mathring{\psi}_{31} + (\kappa_3^2 - \omega^2)\mathring{\psi}_{12} = 0.
\end{gathered} \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что первые три уравнения системы (17) являются линейными комбинациями трех последних, рассмотрением которых достаточно и ограничиться. Перепишем их в виде:

$$\begin{gathered}
i\omega\left(-\kappa_3\mathring{\psi}_{24} + \kappa_2\mathring{\psi}_{34} + i\omega\mathring{\psi}_{23}\right) + \kappa_1(\kappa_1\mathring{\psi}_{23} + \kappa_2\mathring{\psi}_{31} + \kappa_3{}^\circ\mathring{\psi}_{12}) = 0,\\
i\omega\left(\kappa_3\mathring{\psi}_{14} - \kappa_1\mathring{\psi}_{34} + i\omega\mathring{\psi}_{31}\right) + \kappa_2(\kappa_1\mathring{\psi}_{23} + \kappa_2\mathring{\psi}_{31} + \kappa_3\mathring{\psi}_{12}) = 0,\\
i\omega\left(-\kappa_2\mathring{\psi}_{14} + \kappa_1\mathring{\psi}_{24} + i\omega\mathring{\psi}_{12}\right) + \kappa_3(\kappa_1\mathring{\psi}_{23} + \kappa_2\mathring{\psi}_{31} + \kappa_3\mathring{\psi}_{12}) = 0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Введем обозначение:

$$g = \kappa_1\mathring{\psi}_{23} + \kappa_2\mathring{\psi}_{31} + \kappa_3\mathring{\psi}_{12}. \tag{19}$$

Тогда система (18) перепишется как

$$\begin{gathered}
-\kappa_3\mathring{\psi}_{24} + \kappa_2\mathring{\psi}_{34} + i\omega\mathring{\psi}_{23} = i\frac{\kappa_1}{\omega}g,\\
-\kappa_1\mathring{\psi}_{34} + \kappa_3\mathring{\psi}_{14} + i\omega\mathring{\psi}_{31} = i\frac{\kappa_2}{\omega}g,\\
-\kappa_2\mathring{\psi}_{14} + \kappa_1\mathring{\psi}_{24} + i\omega\mathring{\psi}_{12} = i\frac{\kappa_3}{\omega}g.
\end{gathered} \tag{20}$$

Теперь подставим (15) в уравнение (12). Получим выражения для амплитуд напряженности через амплитуды потенциала:

$$\begin{gathered}\mathring{\psi}_{234} = i\left(-\kappa_3\mathring{\psi}_{24} + \kappa_2\mathring{\psi}_{34} + i\omega\mathring{\psi}_{23}\right),\\ \mathring{\psi}_{341} = i\left(\kappa_1\mathring{\psi}_{34} - \kappa_3\mathring{\psi}_{14} - i\omega\mathring{\psi}_{31}\right),\\ \mathring{\psi}_{412} = i\left(-\kappa_2\mathring{\psi}_{14} + \kappa_1\mathring{\psi}_{24} + i\omega\mathring{\psi}_{12}\right),\\ \mathring{\psi}_{123} = i\left(\kappa_1\mathring{\psi}_{23} + \kappa_2\mathring{\psi}_{31} + \kappa_3\mathring{\psi}_{12}\right).\end{gathered} \tag{21}$$

Сопоставляя (21) с (20) и учитывая обозначение (19), будем окончательно иметь:

$$\mathring{\psi}_{234} = -\frac{\kappa_1}{\omega}g,\ \mathring{\psi}_{341} = \frac{\kappa_2}{\omega}g,\ \mathring{\psi}_{412} = -\frac{\kappa_3}{\omega}g,\ \mathring{\psi}_{123} = ig. \tag{22}$$

Соотношения (22) показывают, что наблюдаемые характеристики безмассового поля, описываемого системой первого порядка (11), (12), могут быть выражены через единственную линейную комбинацию компонент тензор-потенциала (19). Эта комбинация является скаляром относительно преобразований группы трехмерных вращений, из чего следует, что система (11), (12) действительно описывает безмассовую частицу с нулевой спиральностью.

Однако нулевая спиральность свободного безмассового микрообъекта еще не означает, что речь идет обязательно о скалярной частице. Последняя, по определению, во взаимодействиях не переносит спин. Векторная же безмассовая частица со спиральностью 0 (продольно поляризованное безмассовое поле) во взаимодействиях переносит спин 1, поскольку ее виртуальный аналог обладает массой и всеми тремя значениями спиральности 0, ±1, как и виртуальный фотон.

Ответ на вопрос о спиновом статусе безмассового микрообъекта, описываемого уравнениями (11) – (13), можно получить, обратившись к положениям теории релятивистских волновых уравнений первого порядка [1]. Система (11), (12) может быть записана в стандартной матричной форме, которую использует данная теория:

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0)\Psi = 0. \tag{23}$$

Здесь Γ_μ, Γ_0 – квадратные матрицы размерности 10×10, причем матрица Γ_0 – особенная; Ψ – 10-компонентная волновая функция вида

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Phi_{\mu\nu}\\ F_{\mu\nu\alpha}\end{pmatrix}. \tag{24}$$

Схема зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$(0,1) - \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)' - (1,0), \tag{25}$$

соответствующая системе (11), (12), содержит псевдовекторное представление $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$, тождественное представлению тензора $F_{\mu\nu\alpha}$, а также представление $[(0,1) \oplus (1,0)]$ тензора $\Phi_{\mu\nu}$.

Матрицы Γ_4, Γ_0 в каноническом базисе имеют вид [1]:

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & \\ & C^1 \times I_3\end{pmatrix},\ \Gamma_0 = \begin{pmatrix} I_4 & \\ & O_6\end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$C^0 = 0,\ C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{27}$$

где C^0, C^1 – спиновые блоки, отвечающие спинам $s = 0, 1$, в том смысле, что если блок C^s имеет ненулевые корни, то частица обладает спином s; если же блок C^s имеет только нулевые корни или вообще отсутствует в структуре матрицы Γ_4, то спин s не присущ частице. Роль матрицы Γ_0 в безмассовом случае сводится к «вырезанию» тех или иных значений проекции спина, которым обладает массивный аналог данного безмассового поля.

Так, например, для электромагнитного поля матрица Γ_4 имеет спиновую структуру (26). Однако матрица Γ_0 равна

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} O_4 & \\ & I_6 \end{pmatrix} \tag{28}$$

и вырезает состояние с нулевой проекцией спина. Матрица же Γ_0 (26) вырезает состояния с проекциями спина ±1, оставляя спиральность 0 в спиновом блоке C^1. И поскольку спиновый блок C^0 при этом равен нулю, можно сделать однозначный вывод: нотоф (поле Кальба – Рамонда) является безмассовым ***векторным*** микрообъектом с ***нулевой*** спиральностью. Так что никакого спинового скачка здесь нет и быть не может.

Векторный характер нотофа будет проявляться во взаимодействиях, в которых он играет роль переносчика взаимодействия. Виртуальный нотоф обладает массой и переносит спин s =1, так же как и виртуальный фотон.

Заключение

Проведенный анализ тензорной системы первого порядка (11), (12) в рамках алгебраического и матрично-дифференциального подходов позволяет сделать следующие выводы:

1. Описываемый этой системой свободный безмассовый микрообъект, который известен в литературе под двумя названиями (нотоф Огиевецкого – Полубаринова и поле Кальба – Рамонда), имеет нулевую спиральность.

2. При восстановлении в уравнении (11) массового члена получается система уравнений, которая описывает массивную частицу со спином 1 с тремя значениями проекции спина 0, ±1.

3. Во взаимодействиях, в которых нотоф принимает участие в качестве виртуального переносчика взаимодействия, он, приобретая массу, переносит спин 1.

4. Способность нотофа переносить во взаимодействиях спин 1 придает ему статус безмассовой ***векторной*** частицы с ***нулевой*** спиральностью, или, другими словами, продольно поляризованного безмассового векторного поля.

5. Таким образом, распространенная в литературе трактовка [3; 4] обсуждаемого микрообъекта как безмассового скалярного мезона и вытекающая отсюда возможность «спинового скачка» при переходе к безмассовому пределу в теории массивного поля является ошибочной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.

2. Огивецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов // ЯФ. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.

3. Kalb, M. Classical direct interesting / M. Kalb, P. Ramond, // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.

4. Aurilia, A. Generalized Maxwell eguations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

5. Pletyukhov, V. A. Kalb – Ramond field and Dirac – Kähler eguation / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Einstein and Hilbert: Dark Matter. – Contemporary Fundamental Physics. – Valeri Dvoeglazov. – Series Editor. Nova Science Publishers, Inc. – 2011. – P. 77–86.

6. Безмассовый предел в уравнении Штюкельберга. Декартовые координаты / О. А. Семенюк [и др.] // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2023. – № 1. – С. 45–52.

REFERENCES

1. Plietiukhov, V. A. Rieliativistskije volnovyje uravnienija b vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietiukhov, V. M. RFied'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielarus. navuka, 2015. – 326 s.

2. Ogijevieckij, V. I. Notof i jego vozmozhnyje vzaimodiejstvija / V. I. Ogijevieckij, I. V. Polubarinov // JaF. – 1966. – T. 4, vyp. 1. – S. 216–223.

3. Kalb, M. Classical direct interesting / M. Kalb, P. Ramond, // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.

4. Aurilia, A. Generalized Maxwell eguations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

5. Pletyukhov, V. A. Kalb – Ramond field and Dirac – Kähler eguation / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Einstein and Hilbert: Dark Matter. – Contemporary Fundamental Physics. – Valeri Dvoeglazov. – Series Editor. Nova Science Publishers, Inc. – 2011. – P. 77–86.

6. Biezmassovyj priediel v uravnienii Shtiukhiel'berga. Diekartovyje koordinaty / O. A. Siemieniuk [i dr.] // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2023. – № 1. – S. 45–52.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.09.2023

МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

Наталья Витальевна Артёменко
магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Natalia Artemenko
Master Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
email: artemenkonatasha@outlook.com

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ТОТАЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ*

Длину самого короткого нормального ряда группы G с абелевыми факторами называют производной длиной группы G и обозначают $d(G)$. Установлена зависимость производной длины конечной факторизуемой группы от производной длины тотально перестановочных сомножителей.

Ключевые слова: *производная длина, тотально перестановочные подгруппы, факторизуемые группы.*

On the Derived Length of Finite Groups Factorized by Totally Permutable Subgroups

The length of the shortest normal series of a group G with Abelian factors is called the derived length of the group G and is denoted by $d(G)$. The dependence of the derived length of a finite factorizable group on the derived length of totally permutable factors was established.

Key words: *derived length, totally permutable subgroups, factorizable groups.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Группа G называется *факторизуемой* подгруппами A и B, если она представима в виде их произведения, т. е. $G = AB$. Сами подгруппы A и B в произведении $G = AB$ в дальнейшем будем называть *сомножителями*.

Разница между произведением подгрупп и прямым произведением велика: если взять два элемента x и y (или две подгруппы X и Y) из сомножителей произведения, то между ними может и не быть непосредственной связи. Однако в прямом произведении они перестановочны. Поэтому для создания промежуточной ситуации представляется целесообразным рассматривать произведение подгрупп, в которых элементы (или подгруппы) различных сомножителей связаны определенными соотношениями.

Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Подгруппы A и B группы G называются *тотально перестановочными* [2], если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B.

В 1989 г. М. Асаад и А. Шаалан [3] изучили факторизуемые группы $G = AB$ такие, что A и B тотально перестановочны. В частности, ими была установлена сверхразрешимость таких групп G при условии, что сомножители A и B сверхразрешимы. Дальнейшее исследование произведений тотально перестановочных подгрупп проводилось многими авторами. В полной мере результаты их исследований отражены в монографии А. Баллестера-Болинше с соавторами [4].

**Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № госрегистрации 20211467).*

Характерной особенностью изучения конечных факторизуемых групп является их тесная связь с теорией числовых инвариантов (под числовыми инвариантами группы понимают такие ее числовые характеристики, как производная длина, нильпотентная длина и др.

Ф. Гросс [5] доказал, что производная длина $d(G/\Phi(G))$ группы $G = AB$, где A и B нильпотентны, ограничена суммой ступеней нильпотентности A и B. Л. С. Казарин [6] установил, что если разрешимая группа $G = AB$ является произведением двух подгрупп A и B взаимно простых порядков, то производная длина группы G ограничена сверху выражением $2d(A)d(B)+d(A)+d(B)$.

Установление зависимостей между числовыми инвариантами факторизуемых групп и числовыми инвариантами сомножителей, подгруппы из которых связаны между собой некоторыми условиями перестановочности, относится к кругу актуальных проблем современной теории конечных групп. Так, например, Дж. Косси [7] актуализировал для исследования следующую задачу: *Можно ли оценить производную длину разрешимой факторизуемой группы через числовые инварианты ее сомножителей?* В этом направлении также стоит выделить работы Дж. Косси и И. Ли [8], Е. Джабары [9].

В данной работе найдена зависимость между производной длиной конечной факторизуемой группы и производной длиной тотально перестановочных сомножителей. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $G = AB$, где A и B – тотально перестановочные разрешимые подгруппы группы G. Тогда* $d(G/\Phi(G)) \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия и обозначения, существенные для данной работы.

Через Z_n обозначим циклическую группу порядка n.

Для группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G \supseteq G' \supseteq (G')' \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \ldots .$$

Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$. Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то группа G называется *разрешимой*. Наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)} = 1$, называется *производной длиной* группы G и обозначается через $d(G)$.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций. [1].

Класс $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно фактор-групп,* или *гомоморфом,* когда выполняется требование: если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, когда выполняется требование: если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формацией называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной,* если из $G/F(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$*-корадикал* группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп обозначаются через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$. Очевидно, что $G \in \mathfrak{A}^k$ тогда и только тогда, когда $d(G) \le k$.

Напомним, что подгруппы A *и* B называются *взаимно перестановочными*, если A перестановочна с каждой подгруппой из B, а B перестановочна с каждой подгруппой из A.

Лемма 1. [4, теорема 4.1.15] *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– взаимно перестановочные подгруппы группы* G. *Если* A *и* B *– разрешимые, то* G *так же разрешима.*

Лемма 2. [4, теорема 4.1.10] *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– взаимно перестановочные подгруппы группы* G. *Если* N *нормальная подгруппа группы* G, *то* G/N *представима в виде произведения взаимно перестановочных подгрупп* AN/N *и* BN/N.

Лемма 3. [4, теорема 4.3.3] *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– взаимно перестановочные подгруппы группы* G. *Тогда:*

(1) Если N *– минимальная нормальная подгруппа группы* G, *то* $\{N \cap B, N \cap A\} = \{1, N\}$.

(2) Если N *минимальная нормальная подгруппа группы* G, N *содержится в* A *и* $B \cap N = 1$, *то* $N \le C_G(A)$ *или* $N \le C_G(B)$. *Если* N *не является циклической, то* $N \le C_G(B)$.

Лемма 4. [4, теорема 4.3.9] *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– взаимно перестановочные подгруппы* G. *Если* N *– минимальная нормальная подгруппа группы* G *и* $N \cap A = N \cap B = 1$, *то* $|N| = p$, *где* p *– простое,* $N \le C_G(A)$ *или* $N \le C_G(B)$.

Лемма 5. [1, лемма 4.7 (4)] *Пусть* G *– группа,* $A, B \le G$. *То* $[A,B] \le A$ *тогда и только тогда, когда* $B \le N_G(A)$.

Лемма 6. [10, следствие 2] *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– тотально перестановочные подгруппы группы* G. *Тогда* $[A,B] \le F(G)$.

Лемма 7. [4, теорема 4.2.10] *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– тотально перестановочные подгруппы группы* G. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая формацию* $\mathfrak{U}$. *Если* A *и* B *принадлежат* $\mathfrak{F}$, *то* G *принадлежит* $\mathfrak{F}$.

Лемма 8 [11, лемма 7] *Пусть* G *– разрешимая группа и* k *– натуральное число. Тогда и только тогда* $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^{k+1}$, *когда* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^k$.

Лемма 9. *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– тотально перестановочные подгруппы группы* G. *Если* A *и* B *метабелевы, то* $d(G/\Phi(G)) \le 2$.

Доказательство.

Условие $d(G/\Phi(G)) \le 2$ равносильно тому, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^2$ или $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ по лемме 8. Так как $A, B \in \mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то по лемме 7 $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, т. к. $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы

Так как A и B разрешимы, то по лемме 1 группа G разрешима.

Пусть $\Phi(G) \ne 1$. Рассмотрим фактор-группу $(G/\Phi(G))/(\Phi(G/\Phi(G)))$. По лемме 2 можно утверждать, что

$$d((G/\Phi(G))/(\Phi(G/\Phi(G)))) \le \max\{2, d(A\Phi(G)/\Phi(G)), d(B\Phi(G)/\Phi(G))\}.$$

Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то $(G/\Phi(G))/(\Phi(G/\Phi(G))) \simeq G/\Phi(G)$. Тогда

$$d(G/\Phi(G)) \le \max\{2, d(A\Phi(G)/\Phi(G)), d(B\Phi(G)/\Phi(G))\}.$$

По свойству производной длины $d(G/N) \le d(G)$. Поэтому $d(A\Phi(G)/\Phi(G)) \le d(A)$ и $d(B\Phi(G)/\Phi(G)) \le d(B)$. Тогда получаем, что $d(G/\Phi(G)) \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Поэтому будем считать, что $\Phi(G) = 1$, и докажем, что $d(G) \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Предположим, что в группе G существует две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. Тогда $G \simeq G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе группы $G/N_1 \times G/N_2$. Тогда

$$d(G/N_1) \le \max\{2, d(AN_1/N_1), d(BN_1/N_1)\} \le \max\{2, d(A), d(B)\}.$$

Аналогично, $d(G/N_2) \le \max\{2, d(AN_2/N_2), d(BN_2/N_2)\} \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Получаем $d(G) \le \max\{d(G/N_1), d(G/N_2)\} \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Таким образом, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = F(G)$. Получаем $d(G/N) \le \max\{2, d(AN/N), d(BN/N)\}$.

По лемме 3 (1), $\{N \cap B, N \cap A\} = \{1, N\}$.

Если $N \le A$ и $N \cap B = 1$ ($N \le B$ и $N \cap A = 1$), то по лемме 3 (2) $N \le C_G(B)$ ($N \le C_G(A)$) при условии, что $|N| \ne p$. Тогда $B \le C_G(N) = N$ (или $A \le C_G(N) = N$). Противоречие. Если $|N| = p$, то G/N изоморфна подгруппе группы Z_{p-1}. Следовательно, G – метабелева и $d(G) \le 2 \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Если $N \cap A = 1$ и $N \cap B = 1$, то по лемме 4 $|N| = p$. По доказанному выше, G – метабелева и $d(G) \le 2 \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Если $N \le A \cap B$, то $d(G/N) \le max\{2, d(A/N), d(B/N)\}$.

По лемме 6 $[A, B] \le F(G) = N \le A$. Тогда по лемме 5 $B \le N_G(A)$. Так как $G = AB$, то $A \lhd G$. Аналогично, $B \lhd G$.

Пусть $d(A) = s$ и $d(B) = k$. Тогда существует нормальный ряд $1 = A^{(s)} < A^{(s-1)} < \cdots < A' < A$. Так как $A \lhd G$ и $A' char A$, то $A' \lhd G$. Очевидно, что $A^{(s-1)} \lhd G$. Так как $(A^{(s-1)})' = A^{(s)} = 1$, то $A^{(s-1)} \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, $A^{(s-1)} \le F(G) = N$. Можно сделать вывод, что $A^{(s-1)} = N$. Тогда

$$d(A/N) = d(A/A^{(s-1)}) \le s - 1 = d(A) - 1.$$

Рассуждая аналогично, получим

$$d(B/N) = d(B/B^{(k-1)}) \le k - 1 = d(B) - 1.$$

Таким образом, $d(G/N) \le \max\{2, d(A/N), d(B/N)\} \le \max\{2, d(A)-1, d(B)-1\}$.

Предположим, что $d(A) > 2$ или $d(B) > 2$. Пусть $d(A) > 2$. Тогда $d(A) - 1 \ge 2$. Если $d(B) \le d(A)$, то $d(B) - 1 \le d(A) - 1$. Тогда

$$d(G/N) \le \max\{2, d(A)-1, d(B)-1\} = \max\{2, d(A)-1\} = d(A) - 1 = \max\{2, d(A), d(B)\} - 1.$$

Если $d(B) > d(A)$, то $d(B) - 1 > d(A) - 1$. Тогда

$$d(G/N) \le \max\{2, d(A)-1, d(B)-1\} = \max\{2, d(B)-1\} = d(B) - 1 = \max\{2, d(A), d(B)\} - 1.$$

Таким образом, в этом случае можно считать $d(G/N) \le \max\{2, d(A), d(B)\} - 1$.

Предположим, что $d(A) \le 2$ и $d(B) \le 2$. Тогда подгруппы A *и* B – метабелевы и по лемме 9 $d(G) \le 2 \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Таким образом, $d(G) \le d(N) + d(G/N) = 1 + \max\{2, d(A), d(B)\} - 1$, а, следовательно, $d(G) \le \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – С. 207.
2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
3. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
4. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Esteban-R. Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – P. 334.
5. Gross, F. Finite groups which are the product of two nilpotent subgroups / F. Gross // Bull. Aust. Math. Soc. – 1973. – Vol. 9. – P. 267–274.
6. Kazarin, L. S. Soluble products of groups / L. S. Kazarin // Infinite Groups 94 (Ravello), 1996.
7. Cossey, J. Soluble products of finite groups / J. Cossey // Note Mat. – 2010. – Vol. 30. – P. 1–7.
8. Cossey, J. On the p-length of the mutually permutable product of two p-soluble groups / J. Cossey, Y. Li // Arch. Math. – 2018. – Vol. 110. – P. 533–537.
9. Jabara, E. The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hungar. – 2019. – Vol. 159. – P. 206–210.
10. Beidleman, J. C. Totally permutable torsion groups / J. C. Beidleman, H. Heineken // J. Group Theory. – 1999. – Vol. 2. – P. 377–392.
11. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – S. 207.
2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
3. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
4. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Esteban-R. Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – P. 334.
5. Gross, F. Finite groups which are the product of two nilpotent subgroups / F. Gross // Bull. Aust. Math. Soc. – 1973. – Vol. 9. – P. 267–274.
6. Kazarin, L. S. Soluble products of groups / L. S. Kazarin // Infinite Groups 94 (Ravello), 1996.
7. Cossey, J. Soluble products of finite groups / J. Cossey // Note Mat. – 2010. – Vol. 30. – P. 1–7.
8. Cossey, J. On the p-length of the mutually permutable product of two p-soluble groups / J. Cossey, Y. Li // Arch. Math. – 2018. – Vol. 110. – P. 533–537.
9. Jabara, E. The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hungar. – 2019. – Vol. 159. – P. 206–210.
10. Beidleman, J. C. Totally permutable torsion groups / J. C. Beidleman, H. Heineken // J. Group Theory. – 1999. – Vol. 2. – P. 377–392.
11. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. мat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 1123–1137.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.11.2023

519.652

Дмитрий Владимирович Грицук
канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Dmitry Gritsuk
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ, СВЯЗАННЫХ С ОЦЕНКАМИ ПРОИЗВОДНОЙ π-ДЛИНЫ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Приводится обзор основных результатов, связанных с оценками производной π-длины π-разрешимой группы. В разделе 1 собраны результаты, устанавливающие оценки производной π-длины π-разрешимой группы с заданными ограничениями на силовские подгруппы. Раздел 2 посвящен оценкам производной π-длины π-разрешимой группы, у которой заданы в π-холловы подгруппы. В разделе 3 приводятся результаты, связанные с оценками производной π-длины π-разрешимой группы с ограниченными n-максимальными подгруппами холловых π-групп. В разделе 4 содержится информация о влиянии нормального ранга силовской p-подгруппы p-разрешимой группы на ее производную p-длину.

Ключевые слова: *производная π-длина, π-разрешимая группа, холлова π-группа, силовская p-подгруппа.*

Overview of Results Related to Estimates of the Derivative π-Length of A π-Solvable Group

This article provides an overview of the main results related to estimates of the derivative π-length of a π-solvable group. Section 1 contains results establishing estimates for the derivative π-length of a π-solvable group with given restrictions on Sylow subgroups. Section 2 is devoted to estimates for the derivative π-length of a π-solvable group whose π-Hall subgroups are given. Section 3 presents results related to estimates of the derivative π-length of a π-solvable group with bounded n maximal subgroups of Hall π-groups. Section 4 contains information on the influence of the normal rank of a Sylow p-subgroup p of a solvable group on its derivative p-length

Key words: *derivative π-length, π-solvable group, Hall π-group, Sylow p-subgroup.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в книгах [1; 2].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_m = G \quad (1)$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1}. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, что число m называется длиной ряда.

Производная длина группы G определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми факторами. Эта длина обозначается через $d(G)$. Ясно, что нильпотентная длина не превышает производную длину для любой разрешимой группы. В работе [3] В. С. Монаховым были установлены оценки производной длины разрешимой группы, порядок которой не делится на $(n + 1)$-е степени простых чисел.

Пусть p – простое число. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо p-фактором, либо p'-фактором. Наименьшее число p-факторов среди всех таких субнормальных рядов называется p-длиной p-разрешимой группы и обозначается через $l_p(G)$. Данное понятие предложили Ф. Холл и Г. Хигмэн [4] в 1956 г. и установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы.

В 2006 г. В. С. Монахов [5] предложил аналог производной длины для π-разрешимой группы – понятие производной π-длины π-разрешимой группы. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевым π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется абелевой π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G. Оценкам производной π-длины π-разрешимой группы посвящены работы [6–10].

1. Влияние строения силовских подгрупп на оценки производной π-длины π-разрешимой группы

Теорема 1.1 [6].

1. Если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 2$.

2. Если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \leq |\pi(G_\pi)|$.

В 2012 г. в работе [8] была исследована производная π-длина π-разрешимой группы, у которой силовские p-подгруппы бициклические для всех $p \in \pi$.

Теорема. Пусть G – π-разрешимая группа с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$;

2) если $2 \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 6$.

С учетом того, $d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G)$ при $\pi = \pi(G)$, из теоремы 1.1 получаем два следствия.

Следствие 1.2. Если G – разрешимая группа с бициклическими силовскими подгруппами, то $d(G) \leq 6$.

Следствие 1.3. Если G – группа нечетного порядка с метациклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G) \leq 3$.

Напомним, что число n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов.

В. С. Монахов [3] установил, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$.

Вполне естественно развить эти результаты на случай π-разрешимой группы. Так, в работе [7, теорема 1] показано, что производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой являются абелевыми для всех $p \in \pi$, не превышает $|\pi(G_\pi)|$, где G_π – π-холлова подгруппа. Таким образом, если у π-разрешимой группы порядок π-холловой подгруппы G_π свободен от кубов, то ее производная π-длина не превышает $|\pi(G_\pi)|$. В работе [11] получен ряд теорем, устанавливающих оценки производной π-длины π-разрешимой группы, G порядок π-холловой подгруппы которой свободен от n-ых степеней, как в случае произвольного n, так и в случае малых его значений.

Теорема 1.4. Если порядок π-холловой подгруппы π-разрешимой группы G свободен от квадратов, то $l_\pi^a(G) \leq 2$.

Теорема 1.5. Пусть G – π-разрешимая группа. Если порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 4$. В частноси, если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.

Теорема 1.6. Пусть G – π-разрешимая группа. Если небициклические силовские p-подгруппы π-холловой подгруппы группы G, $p \in \pi$, имеют порядки 2^3, 3^3, 2^4, 2^5, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 6$. В частности, если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.

Теорема 1.7. Пусть G – π-разрешимая группа такая, что порядок любой силовской p-подгруппы P, $p \in \pi$ свободен от n-ых степеней. Тогда, если $\{2,3\} \notin \pi$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq |\pi(G_{\pi})| \frac{n+1}{2}$ и, если $\{2,3\} \in \pi$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq |\pi(G_{\pi})| \left(\frac{n}{2} + 1\right)$.

2. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы производной π-длины в зависимости от строения π-холловой подгруппы

В работе [6] были исследованы основные свойства производной π-длины π-разрешимой группы и получены некоторые оценки в зависимости от строения π-холловой подгруппы. В частности, рассмотрены случаи, когда π-холлова подгруппа является абелевой либо и метабелевой.

Теорема 2.1 [6]. Пусть G – π-разрешимая группа, G_{π} – ее π-холлова подгруппа.

1. Если G_{π} абелева, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 1$.
2. Если $(G_{\pi})' \subseteq Z(G_{\pi})$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта перечислены, например, в [1, III. 5]. Группа называется дедекиндовой, если все ее подгруппы нормальны.

Следствие 2.2. Если в π-разрешимой группе G – π-холлова подгруппа дедекиндова, то $l_{\pi}(G) \leq 1$ и $l_{\pi}^{a}(G) \leq 2$.

Следствие 2.3. Если в π-разрешимой группе G π-холлова подгруппа является группой Шмидта, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.

Напомним, что метабелевой называют группу, у которой коммутант абелев.

Теорема 2.4 [6]. Пусть G – π-разрешимая группа с метабелевой π-холловой подгруппой. Если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.

Напомним, что t-группой называют группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Строение разрешимых t-групп описал В. Гашюц [12]. В частности, разрешимая t-группа сверхразрешима. $\mathfrak{H}$ – класс всех нильпотентных групп, $G^{\mathfrak{H}}$ – $\mathfrak{H}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{H}$. Известно, что если G является t-группой, то $G^{\mathfrak{H}}$ – абелева холлова подгруппа нечетного порядка, все подгруппы из $G^{\mathfrak{H}}$ – нормальны в G, $G^{\mathfrak{H}}$ – дедекиндова.

Теорема 2.5 Если π-холлова подгруппа π-разрешимой группы является t-группой, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.

Теорема 2.6 Пусть G – π-разрешимая группа и G_{π} – π-холлова подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если G_{π} является группой Миллера – Морено, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 2$;

2) если G_{π} является группой Шмидта, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.

3. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы с ограниченными n-максимальными подгруппами холловых π-групп

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы π и структурой группы G исследовалась многими авторами. Наиболее ранние результаты в данном направлении получили Редеи [13], описавший неразрешимые группы с абелевыми 2-максимальными подгруппами, и Хупперт [14], установивший сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты породили многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [15] и Янко [16] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В. А. Белоноговым в работе [17].

В работе [10] были установлены оценки инвариантов π-разрешимых групп с ограниченной максимальной подгруппой π-холловой подгруппы, а в работе [18] получены оценки производной π-длины и нильпотентной π-длины π-разрешимой группы G, у которой 2-максимальная подгруппа в π-холловой подгруппе группы G абелева (нильпотентна).

Группой Миллера – Морено называют неабелеву группу, все собственные подгруппы которой абелевы.

Теорема 3.1. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M абелева или является группой Миллера – Морено, то $l_\pi^n(G) \le 3$ и $l_\pi^a(G) \le 4$.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Теорема 3.2. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M нильпотентна или является группой Шмидта, то $l_\pi^n(G) \le 1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G)$ и $l_\pi^a(G) \le max_{r\in\pi}\, d\,(G_r)\big(1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G)\big)$.

Теорема 3.3. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M абелева, то $l_\pi^n(G) \le 3$ и $l_\pi^a(G) \le 4$.

Теорема 3.4. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M нильпотентна, то

$$l_\pi^n(G) \le 1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \le max_{r\in\pi}\, d\,(G_r)\big(1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G)\big).$$

4. Строение частично разрешимых групп с ограниченным нормальным рангом силовских подгрупп

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X / \Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в т. ч. и P. Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X. Из теоремы Бернсайда о базисе (теорема III.3.15) [2] следует, что нормальный ранг $r_n(P)$ есть наименьшее натуральное число k такое, что любая нормальная подгруппа p-группы P порождается не более, чем k элементами.

В. С. Монаховым в [19] было установлено, что если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга не выше 3, то p-длина не превышает 2. В частности, если p является нечетным, то p-длина не превышает 1. В работе [20] была исследована производная p-длина p-разрешимой группы в зависимости от строения силовской p-подгруппы. В частности, установлено, что производная p-длина p-разрешимой группы, у которой силовская p-подгруппа абелева, не превышает 1. Если же силовская p-подгруппа является метабелевой и $p > 2$, то производная p-длина не превышает 3.

В работе [8] доказано, что если силовская p-подгруппа p-разрешимой группы бициклическая, то $l_p^a(G) \leq 3$. В частности, $l_p^a(G) \leq 2$ для $p > 2$.

Возникает вопрос о влиянии нормального ранга силовской p-подгруппы p-разрешимой группы на ее производную p-длину. Ответ на данный вопрос был получен в работе [21].

Теорема 4.1 Если нормальный ранг силовской p-подгруппы p-разрешимой группы G не превышает некоторого натурального числа k, то$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2+k+2}{4}$ для $p \notin \{2,3\}$ и $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2+k+4}{4}$ для $p \in \{2,3\}$.

Очевидно, что p-группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P – циклическая. Из теоремы III.11.5 [2] следует, что нормальный ранг примерной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S) = 2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, можно показать, что всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Из теоремы 4.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 4.2. Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 2, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Следствие 4.3. Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 3, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.

3. Монахов, В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

4. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.

5. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

6. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

7. Monakhov, V. S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.

8. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.

9. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.

10. Монахов, В. С. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.

11. Грицук, Д. В. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы, у которой π-холловы подгруппы свободны от n-ых степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук,

Т. А. Артюшеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.

12. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.

13. Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.

14. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

15. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, nr 4. – P. 686–695.

16. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko// Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

17. Белоногов, В. А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В. А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.

18. Грицук, Д. В. Конечные π-разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π-подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вест. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.

19. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

20. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.

21. Грицук, Д. В. Производная p-длина p-разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовской p-подгруппы ограничен / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. В. Бондарук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 1. – С. 59–65.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.

3. Monakhov, V. S. Ob indeksakh maksimal'nykh podgrupp koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov // Algiebra i logika. – 2004. – T. 43, № 4. – S. 411–424.

4. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.

5. Monakhov, V. S. Koniechnyje gruppy s polunormal'noj khollovoj podgruppoj / V. S. Monakhov // Mat. zamietki. – 2006. – T. 80, № 4. – S. 573–581.

6. Gricuk, D. V. O proizvodnoj π-dlienie π-razrieshimoj gruppy / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Viestn. BGU. Sier. 1. – 2012. – № 3. – S. 90–95.

7. Monakhov, V.S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 233–241.

8. Gricuk, D. V. O koniechnykh π-razrieshimykh gruppakh s biciklichieskimi silovskimi podgruppami / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2013. – № 1 (15). – S. 61–66.

9. Gricuk, D. V. Zavisimost' proizvodnoj p-dliny p-razrieshimoj gruppy ot poriadka jejo silovskoj p-podgruppy / D. V. Gricuk // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2014. – № 3 (20). – S. 58–60.

10. Monakhov, V. S. O proizvodnoj π-dlinie koniechnoj π-razrieshimoj gruppy s zadannoj π-khollovoj podgruppoj / V. S. Monakhov, D. V. Gricuk // Tr. In-ta matiematiki i miekhaniki UrO RAN. – 2013. – T. 19, № 3. – S. 215–223.

11. Gricuk, D. V. Ocenki proizvodnoj π-dliny gruppy, u kotoroj π-kholovy podgruppy svobodny ot n-ykh stiepieniej / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. A. Artiushenia // Viestn. Vitieb. gos. un-ta im. P. M. Masherova. – 2018. – № 1 (98). – S. 11–15.

12. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.

13. Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.

14. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

15. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, nr 4. – P. 686–695.

16. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko// Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

17. Bielonogov, V. A. Koniechnyje razrieshimyje gruppy s nil'potentnymi 2-maksimal'nymi podgruppami / V. A. Bielonogov // Mat. zamietki. – 1968. – T. 3, № 1. – S. 21–32.

18. Gricuk, D. V. Koniechnyje π-razrieshimyje gruppy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh π-podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Briest. gos. tiekhn. un-ta. Fizika, matiematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.

19. Monakhov, V. S. O razrieshimykh koniechnykh gruppakh s silovskimi podgruppami malogo ranga / V. S. Monakhov // Dokl. Nac. akad. nauk Bielarusi. – 2002. – T. 46, № 2. – S. 25–28.

20. Gricuk, D. V. Zavisimost' proizvodnoj p-dliny p-razrieshimoj gruppy ot poriadka jejo silovskoj p-podgruppy / D. V. Gricuk // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2014. – № 3 (20). – S. 58–60.

21. Gricuk, D. V. Proizvodnaja p-dlina p-razrieshimoj gruppy, u kotoroj normal'nyj rang silovskoj p-podgruppy ogranichien / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. V. Bondaruk // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2018. – № 1. – S. 59–65.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.11.2023

УДК 519.652

Екатерина Ивановна Качаловская[1], Дмитрий Владимирович Грицук[2]
[1]*ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Ekaterina Kachalouskaya[1], Dmitry Gritsuk[2]
[1]*Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science*
of Brest State A. S. Pushkin University
[2]*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,*
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: [1]katerina.kulgun@gmail.com; [2]dmitry.gritsuk@gmail.com

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА

Интерполирование функций матричного аргумента широко применяется в нелинейной динамике, квантовой физике. В теории интерполяции функций матричных переменных наиболее полно рассмотрена задача алгебраического интерполирования. Построены интерполяционные алгебраические матричные многочлены разных структур: лагранжева, ньютонова, эрмитова, Эрмита – Биркгофа и других типов.

Ключевые слова: *интерполирование, многочлен, матрица.*

Algebraic and Trigonometric Interpolation Polynomials for Matrix Argument Functions

Interpolation of matrix argument functions is widely used in nonlinear dynamics and quantum physics. In the theory of interpolation of functions of matrix variables, the problem of algebraic interpolation is most fully considered. Interpolation algebraic matrix polynomials of different structures are constructed: Lagrangian, Newtonian, Hermitian, Hermite – Birkhoff, and other types.

Key words: *interpolation, polynomial, matrix.*

Введение

В теории интерполирования функций скалярных аргументов построены интерполяционные многочлены относительно произвольных чебышевских систем функций и их частных случаев: тригонометрических, экспоненциальных, дробно-рациональных и других классов систем.

Такого вида интерполяционные формулы, так же как и формулы алгебраического типа, находят применение в ряде областей математики и ее приложениях.

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов.

Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

1. Алгебраическое интерполирование

Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$, для которых производная $A^{(m)}(t) = \left[a_{ij}^{(m)}(t)\right]$ порядка m непрерывна на отрезке [a, b], и матричный многочлен первой степени вида

$$P_1(A) = B + \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j + \sum_{k=0}^{m} \int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds, \tag{1}$$

где $t_0, t_1, \dots, t_n$ – фиксированные точки отрезка $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_j = C_j(t)(j = \overline{0,n})$, $P_k(t,s)(k = \overline{0,m})$ – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$.

Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента А. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для формулы*

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)]\,[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)]\,d\tau, \tag{2}$$

где $A_0 = A_0(t)$, $A_1 = A_1(t)$ *– узлы интерполирования,*

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i), \tag{3}$$
$$H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i), \tag{4}$$

выполняются условия

$$L_1(A_i) = F(A_i)(i = 0{,}1), \tag{5}$$

и она точна для матричных многочленов вида (1).

Доказательство. Покажем, что матричный многочлен (2) удовлетворяет интерполяционным условиям (5). Равенство $L_1(A_0) = F(A_0)$ имеет место, т. к. второе и третье слагаемые в правой части (2) обращаются в нуль. Так как $L_1(A)$ при $A = A_1$ принимает вид

$$L_1(A_1) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)]\,d\tau,$$

то, учитывая, что $\delta F[x + \tau h; h] = \frac{d}{d\tau}F[x + \tau h]$, получим

$$L_1(A_1) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} F(\sigma_{1i}) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \frac{d}{d\tau}F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot))]\,d\tau = F(A_1).$$

Докажем инвариантность формулы (2) относительно многочленов вида (1). Проведем доказательство для каждой из трех групп слагаемых в (1).

Очевидно, что $L_1(A) = F(A)$ для $F(A) = B$.

Пусть $F(A) = \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j$.

Так как $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)]\sum_{j=0}^{n} C_j$,

а $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = \sum_{j=0}^{n}\big(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\big)\,C_j$, то после несложных вычислений получим

$$L_1(A) = \sum_{j=0}^{n} A_0(t_j)C_j + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)]\sum_{j=0}^{n} C_j +$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\big(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\big)\, C_j = \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j \equiv F(A).$$

Пусть $F(A) = \sum_{k=0}^{m}\int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds$. Так как для $k \geq 1$ $\sigma_{1i}^{(k)}(s) = A_0^{(k)}(s)$, а $H_i^{(k)}(s) = A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)$, то будем иметь

$$F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)]\int_T P_0(t,s)ds,$$
$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] =$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\int_T\Big(A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)\Big)P_k(t,s)ds - [A(t_i) - A_0(t_i)]\int_T P_0(t,s)ds.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2), после некоторых преобразований будем иметь $L_1(A) = \sum_{k=0}^{m}\int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds \equiv F(A)$.

В силу линейного вхождения в формулу (2) функции $F(A)$, данная формула точна также для многочленов вида (1). Теорема 1 доказана.

В частности, если узлы интерполирования A_i имеют вид $A_i = H + \alpha_i I$, где $H = H(t)$ – фиксированная матрица, $\alpha_i = \alpha_i(t)(i = 0{,}1)$ – заданные числовые функции, причем $\alpha_0(t_i) \neq \alpha_1(t_i)(i = \overline{0,n})$, I – единичная матрица, то формула (2) примет вид

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{A(t_i)-A_0(t_i)}{\alpha_1(t_i)-\alpha_0(t_i)}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)]\, d\tau,$$

где

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + (\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I = H(t) + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I,$$
$$H_i(t) = A(t) - A(t_i) - H(t) + H(t_i) - (\alpha_0(t) - \alpha_0(t_i))I.$$

Построим аналогичную формулу второго порядка. Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\tilde{P}_1(A) = B + \sum_{j_1,j_2=0}^{n} C_{j_1j_2}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]D_{j_1j_2} +$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2} P_k(t,s_1,s_2)\big[A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)\big]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2\,; \tag{6}$$
$$\tilde{P}_2(A) = \tilde{P}_1(A) + \sum_{j=0}^{n} C_{3,j}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]C_{4,j}\big[A(t_{j_3}) - A(t_{j_4})\big]C_{5,j} + \tag{7}$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4} P_{k,3}(t,s)\big[A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)\big]P_{k,4}(t,s)\big[A^{(k)}(s_3) -$$
$$-A^{(k)}(s_4)\big]P_{k,5}(t,s)ds,$$

где $t_0, t_1, \dots, t_n$ – те же фиксированные точки отрезка $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_{j_1j_2} = C_{j_1j_2}(t), D_{j_1j_2} = D_{j_1j_2}(t)$, $C_{i,j} = C_{i,j}(t)(i = 3{,}4{,}5), \big(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = \overline{0,n}\big)$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t,s_1,s_2)$, $Q_k(t,s_1,s_2)$, $P_{k,i}(t,s)$ $(i = 3{,}4{,}5)$, $\big(k = \overline{0,m}\big)$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s = (s_1,s_2,s_3,s_4), ds = ds_1ds_2ds_3ds_4$.

Заметим, что формула (2) инвариантна также относительно многочленов вида (6). Действительно, очевидно, что $\sigma_{1i}\big(t_{j_1}\big) - \sigma_{1i}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - A_0(t_{j_2})$ и $\sigma_{1i}^{(k)}(s_1) - \sigma_{1i}^{(k)}(s_2) = A_0^{(k)}(s_1) - A_0^{(k)}(s_2)$, поэтому для

$$F(A) = \sum_{j_1,j_2=0}^{n} C_{j_1j_2}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]D_{j_1j_2} \tag{8}$$

и

$$F(A) = \sum_{k=0}^{m}\int_{T^2} P_k(t,s_1,s_2)\,\big[A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)\big]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2 \tag{9}$$

при $i = 0{,}1,\dots,n$ справедливы равенства $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = 0$.

Для функций (8), (9) и любых матриц $A(t)$ и $H(t)$ из пространства $C^m[T]$ по определению дифференциала Гато справедливы, соответственно, равенства

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)] = \sum_{j_1,j_2=0}^{n} C_{j_1 j_2}\left[H(t_{j_1}) - H(t_{j_2})\right]D_{j_1 j_2}, \tag{10}$$

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)] = \sum_{k=0}^{m} \int_{T^2} P_k(t,s_1,s_2)\left[H^{(k)}(s_1) - H^{(k)}(s_2)\right]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1 ds_2. \tag{11}$$

Из (10) и (11) при $A(t) = \sigma_{1i}(t) + \tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))$ и $H(t) = H_i(t)$ для функций (8), (9) будем иметь

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = F(A) - F(A_0).$$

Следовательно, $L_1(A) \equiv F(A)$ при $F(A) = \tilde{P}_1(A)$, т. е. формула (2) точна также и для многочленов первой степени вида (6).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A \in C^m[a,b]$. Введем следующие обозначения:

$$l_{21}(A) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_1(t_i)]\,[A(t_i) - A_0(t_i)][A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times$$
$$\times\Big(\left[A_1(t_i) - A_2(t_i)\right]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2)\right] + \left[A_0(t_i) - A_1(t_i)\right]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0)\right]\Big),$$

$$l_{22}(A) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1 \tau\delta^2 F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) +$$
$$+\tau s(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)); H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)]d\tau ds, \tag{12}$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t) = A_1(t) + A_2(t_i) - A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t) = A_2(t) + A_1(t_i) - A_2(t_i)$, $H_{i0}(t) = H_i(t)$, $H_{i1}(t) = A(t) - A_1(t) - A(t_i) + A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (3), (4). Имеет место

Теорема 2. *Если существуют матрицы* $[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$, *то для формулы*

$$L_2(A) = L_1(A) + l_{21}(A) + l_{22}(A), \tag{13}$$

где $A_i = A_i(t)$ $(i = \overline{0,2})$ *– узлы интерполирования,* $L_1(A)$ *– многочлен, определенный формулой* (2), *выполняются условия*

$$L_2(A_i) = F(A_i)(i = \overline{0,2}), \tag{14}$$

и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (7).

Доказательство. Так как $l_{21}(A_0) = l_{21}(A_1) = 0$, $H_{i0}(t) = 0$ при $A = A_0$, $H_{i1}(t) = 0$ при $A = A_1$, то с учетом (5) имеем, что $L_2(A_i) = F(A_i)(i = 0,1)$. Проверим далее выполнение условия $L_2(A_2) = F(A_2)$. Введем обозначения

$$l_{11}(A) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)]\,[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)],$$

$$l_{12}(A) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)]d\tau. \tag{15}$$

Справедливо равенство

$$l_{11}(A_2) + l_{21}(A_2) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}([A_2(t_i) - A_1(t_i) + A_1(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times$$
$$\times [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] - F(\sigma_{1i}^{21}) + F(A_2) + [A_2(t_i) - A_0(t_i) + A_0(t_i) - A_1(t_i)] \times$$
$$\times [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)]) = F(A_2) - F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[F(\sigma_{1i}^{01}) - F(\sigma_{1i}^{21})].$$

При $A = A_2$ направления $H_{i0}(t)$ и $H_{i1}(t)$ примут вид $H_{i0}(t) = A_2(t) - \sigma_{1i}^{02}(t)$, $H_{i1}(t) = A_2(t) - \sigma_{1i}^{12}(t)$, где $\sigma_{1i}^{02}(t) = A_0(t) + A_2(t_i) - A_0(t_i)$, поэтому, используя формулу $\delta F[\tilde{A} + s\tau\tilde{H}; \tilde{H}] = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial s}F[\tilde{A} + s\tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A} = \sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot))$ и $\tilde{H} = A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)$, будем иметь

$$l_{22}(A_2) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\delta F\Big[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)\big) + \tau s\big(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)\big);\ A_2(\cdot) -$$

$$-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)]d\tau ds = -l_{12}(A_2) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{02}(\cdot)); A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{02}(\cdot)]d\tau.$$

Аналогично, пользуясь соотношением $\delta F[\tilde{A} + \tau\tilde{H}; \tilde{H}] = \frac{d}{d\tau}F[\tilde{A} + \tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A} = \sigma_{1i}^{01}(\cdot)$и $\tilde{H} = A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{02}(\cdot)$,получим

$$l_{22}(A_2) = -l_{12}(A_2) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[F(\sigma_{1i}^{21}) - F(\sigma_{1i}^{01})].$$

Тогда $L_2(A_2) = F(A_0) + l_{11}(A_2) + l_{12}(A_2) + l_{21}(A_2) + l_{22}(A_2) = F(A_2)$.

Таким образом, интерполяционные условия (15) выполняются.

Покажем, что формула (14) точна для многочленов вида (7). Пусть $F(A) = \tilde{P}_1(A)$. Тогда, как показано было раньше, $L_1(A) \equiv \tilde{P}_1(A)$. Так как $\sigma_{1i}^{01}(t_{j_1}) - \sigma_{1i}^{01}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - -A_0(t_{j_2})$ и $\frac{d^k}{dt^k}\{\sigma_{1i}^{01}(t)\}\Big|_{t=s_1} - \frac{d^k}{dt^k}\{\sigma_{1i}^{01}(t)\}\Big|_{t=s_2} = = A_0^{(k)}(s_1) - A_0^{(k)}(s_2)$, то $F(\sigma_{1i}^{01}) - -F(A_0) = 0$ для $F(A) = \tilde{P}_1(A)$. Аналогично можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2) = 0$. Следовательно, $l_{21}(A) = 0$.

Для любых квадратных функциональных матриц $\tilde{A}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ соответствующего порядка и любой матричной функции $F(A)$, дважды дифференцируемой по Гато в точке $\tilde{A}$, выполняется соотношение

$$\delta^2 F[\tilde{A}; \tilde{H}_2\tilde{H}_1] = \lim_{\lambda_1,\lambda_2\to 0}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\big(F[\tilde{A} + \lambda_1\tilde{H}_1 + \lambda_2\tilde{H}_2] - \\ -F[\tilde{A} + \lambda_1\tilde{H}_1] - F[\tilde{A} + \lambda_2\tilde{H}_2] + F[\tilde{A}]\big). \qquad (16)$$

Тогда из (16) при $F(A) = \tilde{P}_1(A)$ после несложных преобразований будем иметь $\delta^2\tilde{P}_1[\tilde{A}; \tilde{H}_2\tilde{H}_1] \equiv 0$. Таким образом, $l_{22}(A) = 0$, и, значит, $L_2(A) \equiv \tilde{P}_1(A) = F(A)$.

Введем в рассмотрение функцию двух матричных переменных

$$\Phi(A,B) = \sum_{j=0}^{n} C_{3,j}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]C_{4,j}\big[B(t_{j_3}) - B(t_{j_4})\big]C_{5,j}.$$

Очевидно, что функция $\Phi(A,B)$ обладает свойствами

$$\Phi(A+B,D) = \Phi(A,D) + \Phi(B,D), \Phi(A,B+D) = \Phi(A,B) + \Phi(A,D), \\ \Phi(\lambda A,B) = \Phi(A,\lambda B) = \lambda\Phi(A,B), A,B,D \in C^m[a,b], \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (17)$$

Пусть $F(A) = \Phi(A,A)$, что совпадает со вторым слагаемым в (7). В силу того, что $\sigma_{1i}^{01}(t_{j_k}) - \sigma_{1i}^{01}(t_{j_{k+1}}) = A_0(t_{j_k}) - A_0(t_{j_{k+1}})(k = 1,3)$, для этой функции справедливо равенство $F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0) = 0$. Аналогично показывается, что $F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2) = 0$. Таким образом, учитывая, что $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$, будем иметь

$$l_{11}(A) = l_{21}(A) = 0. \qquad (18)$$

Используя определение дифференциала Гато первого порядка и свойства (17) функции $\Phi(A,B)$, которыми, в частности, обладает и $F(A)=\Phi(A,A)$, получим

$$\delta F[\tilde{A};\widetilde{H}]=\Phi(\tilde{A},\widetilde{H})+\Phi(\widetilde{H},\tilde{A}). \tag{19}$$

Нетрудно показать, что выполняются равенства

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))&=\Phi(A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot));\\ \Phi(H_i(\cdot),\sigma_{1i}(\cdot))&=\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_0(\cdot));\\ \Phi(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))&=\Phi(A_1(\cdot)-A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot));\\ \Phi(H_i(\cdot),A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot))&=\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_1(\cdot)-A_0(\cdot)).\end{aligned} \tag{20}$$

Тогда из (19) при $\tilde{A}=\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)), \widetilde{H}=H_i(\cdot)$и (7), учитывая свойства (17), будем иметь

$$\begin{gathered}\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot));H_i(\cdot)]=\Phi(\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))+\Phi(H_i(\cdot),\sigma_{1i}(\cdot))+\\ +\tau[\Phi(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))+\Phi(H_i(\cdot),A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot))]=\\ =\Phi(A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot))+\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_0(\cdot))+\\ +\tau[\Phi(A_1(\cdot)-A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot))+\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_1(\cdot)-A_0(\cdot))].\end{gathered}$$

Таким образом, вычисляя интеграл в (15) и проводя преобразования, получим

$$\begin{gathered}l_{12}(A)=\tfrac{1}{2}(\Phi(A_0,A)-2\Phi(A_0,A_0)+\Phi(A_1,A)-\\ -\Phi(A_1,A_0)+\Phi(A,A_0)+\Phi(A,A_1)-\Phi(A_0,A_1)).\end{gathered} \tag{21}$$

При $F(A)=\Phi(A,A)$ равенство (16) принимает вид

$$\delta^2F[\tilde{A};\widetilde{H}_2\widetilde{H}_1]=\Phi(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2)+\Phi(\widetilde{H}_2,\widetilde{H}_1).$$

В частности, при $\widetilde{A}=\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\big)+\tau s\big(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\big)$, $\widetilde{H}_1=H_{i0}(\cdot)$и $\widetilde{H}_2=H_{i1}(\cdot)$будем иметь

$$\begin{gathered}\delta^2F\Big[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\big)+\tau s\big(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\big);H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)\Big]=\Phi\big(H_{i0}(\cdot),H_{i1}(\cdot)\big)+\\ +\Phi(H_{i1}(\cdot),H_{i0}(\cdot))=\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A(\cdot)-A_1(\cdot))+\Phi(A(\cdot)-A_1(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot)).\end{gathered}$$

Аналогично предыдущему, вычисляя интеграл в (12), после преобразований будем иметь

$$\begin{gathered}l_{22}(A)=\tfrac{1}{2}(2\Phi(A,A)-\Phi(A_0,A)-\Phi(A,A_1)+\\ +\Phi(A_0,A_1)-\Phi(A_1,A)-\Phi(A,A_0)+\Phi(A_1,A_0)).\end{gathered} \tag{22}$$

Так как $L_1(A)=F(A_0)+l_{11}(A)+l_{12}(A)$, то из равенств (15), (18), (21), (22) следует, что

$$L_2(A)=F(A_0)+\Phi(A,A)-\Phi(A_0,A_0)=F(A). \tag{23}$$

Переобозначим функцию $\Phi(A,B)$ следующим образом

$$\begin{gathered}\Phi(A,B)=\textstyle\sum_{k=0}^m\int_{T^4}P_{k,3}(t,s)\big[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\big]\times\\ \times P_{k,4}(t,s)\Big[B^{(k)}(s_3)-B^{(k)}(s_4)\Big]P_{k,5}(t,s)ds.\end{gathered}$$

Пусть $F(A)=\Phi(A,A)$, что совпадает с третьим слагаемым в (7). Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0$, следовательно, $l_{11}(A)=l_{21}(A)=0$. Очевидно, что переобозначенная функция $\Phi(A,B)$ также удовлетворяет свойствам (17) и соотношениям вида (20), поэтому для

$F(A) = \Phi(A, A)$ выполняются равенства (19), (21), (22) и, следовательно, (23). Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (7). Теорема 2 доказана.

2. Вычислительный эксперимент

Пример 1. Рассмотрим интерполяционную формулу (2) в случае узлов

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix},\ A_1(t) = \begin{bmatrix} -t^3 + \alpha & t^2 + \beta \\ t^2 + \gamma & -t + \delta \end{bmatrix}$$

для функции $F(A) = e^{A(t)}$, заданной на множестве матриц вида $A(t) = \theta A_0(t) + (1 - -\theta)A_1(t), \theta \in \mathbb{R}$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные числа.

Нетрудно заметить, что при $A(t) = \theta A_0(t) + (1 - \theta)A_1(t)$ матрицы $\sigma_{1i}(t) + +\tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))$ и $H_i(t)$ являются перестановочными, поэтому для $F(A) = e^{A(t)}$ справедливы равенства

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)+\tau(A_1(t)-\sigma_{1i}(t))}.$$

Кроме того, т. к. матрицы $A_1(t) - \sigma_{1i}(t) = (t_i + t_i^3 - t - t^3)I$, где I – единичная матрица второго порядка, являются скалярными, то имеют место соотношения

$$e^{\sigma_{1i}(t)+\tau(A_1(t)-\sigma_{1i}(t))} = e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}e^{\sigma_{1i}(t)}.$$

Следовательно

$$\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)]d\tau = \int_0^1 e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}d\tau H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)} =$$
$$= \frac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}(A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t))e^{\sigma_{1i}(t)}.$$

Тогда, сделав замену $\alpha_i(t) = \frac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}$, будем иметь

$$L_1(A) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)]\,[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] +$$
$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \alpha_i(t)(A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t))e^{\sigma_{1i}(t)} =$$
$$= A(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A(t_i)B_i(t) + C(t),$$

где

$$B(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)},$$
$$B_i(t) = \frac{1}{n+1}\left([A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] - \alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}\right),$$
$$C(t) = e^{A_0(t)} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\left(A_0(t_i)[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] + \right.$$
$$\left. +\alpha_i(t)(A_0(t) - A_0(t_i))e^{\sigma_{1i}(t)}\right).$$

Проверим выполнение интерполяционных условий для формулы $F(A) = e^{[A+B]^{-1}}$. При $A = A_0(t)$ получим

$$L_1(A_0) = A_0(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A_0(t_i)B_i(t) + C(t) = e^{A_0(t)} = F(A_0),$$

а при $A = A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A_1) = A_1(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A_1(t_i)B_i(t) + C(t) =$$
$$= e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\left(\alpha_i(t)[A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)]e^{\sigma_{1i}(t)} + \right.$$
$$\left. +[A_1(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right]\right).$$

Далее, т. к.

$$\alpha_i(t)[A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)] = \left(e^{t_i + t_i^3 - t - t^3} - 1\right)I = e^{A_1(t) - \sigma_{1i}(t)} - I,$$

то

$$L_1(A_1) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[e^{A_1(t)} - e^{\sigma_{1i}(t)} + e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] = e^{A_1(t)} = F(A_1).$$

Таким образом, интерполяционные условия выполняются.

Заключение

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М., 1975. – 632 с.

REFERENCES

1. Kalitkin, N. N. Chisliennyje mietody / N. N. Kalitkin – M. : Nauka, 1978. – 512 s.
2. Bakhvalov, N. S. Chisliennyje mietody / N. S. Bakhvalov. – M., 1975. – 632 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.11.2023

УДК 517.9

Марина Геннадьевна Кот
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Marina Kot
*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modelling of Brest State A. S. Pushkin University*
e-mail: mtorkaylo@mail.ru

РЕЗОНАНСЫ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения и системы, записываемые в виде $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, *возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Входящее в это уравнение произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части уравнения, т. е. фактически построение оператора, который соответствует данному формальному выражению. Это достигается с помощью специальных аппроксимаций оператора умножения на δ-функцию. Для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами применяется подход, основные этапы которого: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса, когда предельный оператор не совпадает с –Δ; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Цель данной работы заключается в нахождении резонансов для систем уравнений с дельта-образными коэффициентами.*

Ключевые слова: *обобщенная функция, асимптотика, резонанс, оператор.*

Resonances for Systems of Equations with Delta-Shaped Coefficients

The equations can be written as $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, *there are in different applications and studied intensively. In this equation work δu not determined in the classical theory of generalized functions, so one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left side of the equation, that is, the actual construction of the operator, which corresponds to a given formal expression. This is achieved by special approximations multiplication by δ-function. For the study of equations with δ-shaped coefficients an approach is used, the main steps of which are: the construction of approximations considered expressions with operators of finite rank; finding the explicit form approximating the resolvent family; resolvent limit of determination and allocation of cases of resonance; description of the spectrum constructed limit operators; study of the behavior of the eigenvalues of approximating operators. The purpose of this work is the origin of resonances for mathematical systems with delta-shaped coefficients.*

Key words: *generalized function, asymptotic behavior, resonance, operator.*

Введение

Уравнения, записываемые в виде

$$L_0 u \equiv -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \tag{1}$$

возникают в разных приложениях [1] и интенсивно изучаются. Входящее в (1) произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, соответствующего формальному выражению (1).

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(L_\varepsilon - \lambda I \right)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda)=\left(-\Delta-\lambda I\right)^{-1}.$, но возможны случаи резонанса, когда $R(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от –Δ [2; 3]. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f=E_\lambda * f,$$

где * – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta-\lambda I$, заданное формулой

$$E_\lambda(x)=\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2=-\lambda, \operatorname{Re}\mu>0.$ Отметим, что $E_\lambda\in L_2(\mathbb{R}^3).$

Основная часть

Исследование систем с дельта-образными коэффициентами сводится к рассмотрению матрично-значных функций, представимых в виде $F(\mu,\varepsilon)=R(\varepsilon)+b(\varepsilon,\mu)I.$ Задача заключается в получении условий на

$$R(\varepsilon)=\begin{pmatrix} R_{11}(\varepsilon) & R_{12}(\varepsilon) \\ R_{21}(\varepsilon) & R_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

при которых существует конечный ненулевой предел обратных матриц. В случае матриц размерности 2 обратная матрица-функция задается формулой

$$\left[F(\mu,\varepsilon)\right]^{-1}=\frac{1}{\det F(\mu,\varepsilon)}\begin{pmatrix} f_{22}(\mu,\varepsilon) & -f_{12}(\mu,\varepsilon) \\ -f_{21}(\mu,\varepsilon) & f_{11}(\mu,\varepsilon) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Проанализируем эту формулу в зависимости от вида $R(\varepsilon).$ Возникает несколько качественно различных случаев.

I. Пусть разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$R(\varepsilon)=R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon}+R^{(0)}+R^{(1)}\varepsilon+...,$$

где $R^{(-1)}\neq 0.$ Тогда

$$F(\mu,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}F^{(k)}(\mu)\varepsilon^k,$$

где

$$F^{-1}=R^{(-1)}+M_{-1}I,\, F^0(\mu)=R^{(0)}-\frac{\mu}{4\pi}I,\, F^1(\mu)=R^{(1)}+M_1\mu^2 I,$$

$$M_k=\frac{1}{4\pi}\int\left(\int\varphi(y)\varphi(x-y)dy\right)|x|^k\,dx.$$

Выпишем первые члены разложения определителя

$$\det F(\mu,\varepsilon)=\sum_{k=-2}^{\infty}\Delta_k(\mu)\varepsilon^k.$$

Имеем

$$\Delta_{-2}=\det F^{(-1)}=\left(R_{11}^{(-1)}+M_{-1}\right)\left(R_{22}^{(-1)}+M_{-1}\right)-R_{12}^{(-1)}R_{21}^{(-1)}$$

$$\Delta_{-1}(\mu)=\left(R_{11}^{(-1)}+M_{-1}\right)\left(R_{22}^{(0)}-\frac{\mu}{4\pi}\right)+\left(R_{22}^{(-1)}+M_{-1}\right)\left(R_{11}^{(0)}-\frac{\mu}{4\pi}\right)-R_{12}^{(-1)}R_{21}^{(0)}-R_{12}^{(0)}R_{21}^{(-1)}.$$

Заметим, что Δ_{-2} не зависит от μ, а $\Delta_{-1}(\mu)$ является линейной функцией переменной μ, за исключением случая, когда

$$\left(R_{11}^{(-1)}+M_{-1}\right)+\left(R_{22}^{(-1)}+M_{-1}\right)=0.$$

Если $\Delta_{-2}\neq 0$, то разложение знаменателя (2) начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$ и искомый предел есть нуль.

Если $\Delta_{-2}=0$ и $\Delta_{-1}(\mu)\neq 0,$ то разложение знаменателя (2) начинается с $\frac{1}{\varepsilon}.$ Если при этом $F^{-1}(\mu)\neq 0,$ то в числителе также имеются члены, содержащие $\frac{1}{\varepsilon}$, и в этом случае предел $D(\mu)$ отличен от нуля.

Здесь возникает особый случай, когда $F^{-1}=0,$ т. е. когда $R_{11}^{(-1)}+M_{-1}=0,\ R_{22}^{(-1)}+M_{-1}=0, R_{12}^{(-1)}=R_{21}^{(-1)}=0.$ В этом случае получаем, что $\Delta_{-1}(\mu)\equiv 0,$ откуда следует, что в (2) разложения членов числителя и разложение знаменателя начинаются с нулевой степени ε, и в этом случае предел также отличен от нуля.

Получаем следующее утверждение.

Теорема. Пусть

$$R(\varepsilon)=R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon}+R^{(0)}+R^{(1)}\varepsilon+...,$$

где $R^{(-1)}\neq 0.$ Резонанс имеет место в следующих случаях:

1) Если $\Delta_{-2}=0,\Delta_{-1}(\mu)\neq 0,\mathrm{F}^{(-1)}\neq 0,$ то

$$\mathrm{D}(\mu):=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R(\varepsilon)+b(\varepsilon,\mu)\mathrm{I}\right]^{-1}=\frac{1}{\Delta_{-1}(\mu)}\begin{pmatrix}R_{22}^{(-1)}+M_{-1} & -R_{12}^{(-1)}\\ -R_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)}+M_{-1}\end{pmatrix}\neq 0.$$

2) Если $\Delta_{-2}=0,\Delta_{-1}=0,\mathrm{F}^{(-1)}=0,\Delta_0(\mu)\neq 0,$ то

$$\mathrm{D}(\mu):=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R(\varepsilon)+b(\varepsilon,\mu)\mathrm{I}\right]^{-1}=\frac{1}{\Delta_0(\mu)}\begin{pmatrix}R_{22}^{(0)}-\dfrac{\mu}{4\pi} & -R_{12}^{(0)}\\ -R_{21}^{(0)} & R_{11}^{(0)}-\dfrac{\mu}{4\pi}\end{pmatrix}\neq 0.$$

II. Пусть разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)}\frac{1}{\varepsilon^2} + R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + \ldots,$$

где $R^{(-2)} \neq 0.$ Тогда разложение определителя начинается с $\frac{1}{\varepsilon^4}$

$$\det F(\mu,\varepsilon) = \sum_{k=-4}^{\infty} \Delta_k(\mu)\varepsilon^k.$$

Так как в матрицу (2) входят члены, разложение которых начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$, для существования конечного ненулевого предела необходимо и достаточно, чтобы разложение знаменателя также начиналось с $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{-2}(\mu) = 0, \Delta_{-3}(\mu) = 0, \Delta_{-2}(\mu) \neq 0.$$

Заметим, что здесь $\Delta_{-4} = \det R^{(-2)}$, а Δ_{-3} от μ и выражается через $R^{(-2)}, R^{(-1)}, M_{-1}$. Поэтому требуемые равенства есть условия на матрицу $R(\varepsilon)$.

Теорема. Пусть

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)}\frac{1}{\varepsilon^2} + R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + \ldots,$$

где $R^{(-2)} \neq 0.$ Резонанс имеет место только при условиях

$$\Delta_{-4} = 0, \Delta_{-3} = 0, \Delta_{-2}(\mu) \neq 0,$$

и тогда

$$\mathrm{D}(\mu) = \frac{1}{\Delta_{-2}(\mu)}\begin{pmatrix} R_{22}^{(-2)} & -R_{12}^{(-2)} \\ -R_{21}^{(-2)} & R_{11}^{(-2)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, условия резонанса записаны как условия на матрицу $R(\varepsilon)$. Поскольку в исходное уравнение входит матрица коэффициентов $A(\varepsilon)$, рассмотрим, какие $A(\varepsilon)$ соответствуют $R(\varepsilon)$, описанным выше.

Фактически это частный случай задачи: имея разложение $R(\varepsilon)$ по степеням ε, найти разложение обратных матриц $A(\varepsilon)$.

Если

$$R(\varepsilon) = \begin{pmatrix} R_{11}(\varepsilon) & R_{12}(\varepsilon) \\ R_{21}(\varepsilon) & R_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

тогда

$$A(\varepsilon) = \left(R(\varepsilon)\right)^{-1} = \frac{1}{\det R(\varepsilon)}\begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

1. Пусть разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)}\varepsilon + \ldots,$$

тогда запишем разложения коэффициентов $R_{11}(\varepsilon), R_{12}(\varepsilon), R_{21}(\varepsilon), R_{22}(\varepsilon)$ по степеням ε.

$$R_{11}(\varepsilon) = R_{-1}^{1}\frac{1}{\varepsilon} + R_0^1 + R_1^1\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$R_{12}(\varepsilon) = R_{-1}^{2}\frac{1}{\varepsilon} + R_0^2 + R_1^2\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$R_{21}(\varepsilon) = R_{-1}^{3}\frac{1}{\varepsilon} + R_0^3 + R_1^3\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$R_{22}(\varepsilon) = R_{-1}^{4}\frac{1}{\varepsilon} + R_0^4 + R_1^4\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Вычислим определитель матрицы $R(\varepsilon)$:

$$\det R(\varepsilon) = R_{11}(\varepsilon)R_{22}(\varepsilon) - R_{12}(\varepsilon)R_{21}(\varepsilon) = \left(R_{-1}^1R_{-1}^4 - R_{-1}^2R_{-1}^3\right)\frac{1}{\varepsilon^2} +$$

$$+\left(R_{-1}^1R_0^4 + R_{-1}^4R_0^1 - R_{-1}^2R_0^3 - R_{-1}^3R_0^2\right)\frac{1}{\varepsilon} + \left(R_{-1}^1R_1^4 + R_0^4R_0^1 + R_{-1}^4R_1^1 - R_{-1}^2R_1^3 - R_0^3R_0^2 - R_{-1}^3R_1^2\right) + o(1) =$$

$$= r_{-2}^1\frac{1}{\varepsilon^2} + r_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + r_0^1 + o(1),$$

где

$$r_{-2}^1 = \det[R^{(-1)}] = R_{-1}^1R_{-1}^4 - R_{-1}^2R_{-1}^3,$$

$$r_{-1}^1 = R_{-1}^1R_0^4 + R_{-1}^4R_0^1 - R_{-1}^2R_0^3 - R_{-1}^3R_0^2,$$

$$r_0^1 = R_{-1}^1R_1^4 + R_0^4R_0^1 + R_{-1}^4R_1^1 - R_{-1}^2R_1^3 - R_0^3R_0^2 - R_{-1}^3R_1^2.$$

В результате данных вычислений можем описать различные случаи поведения коэффициента $A(\varepsilon)$.

1) Если $r_{-2}^1 \neq 0,$ то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены с $\frac{1}{\varepsilon}$ и более высокими степенями, а разложение определителя начинается с члена, содержащего $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Поэтому (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

2) Если $r_{-2}^1 = 0,$ а $r_{-1}^1 \neq 0,$ то выражения, входящие в числители и знаменатель (3), начинается с членов $\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

3) Если $r_{-2}^1 = 0$, а $r_{-1}^1 = 0$, то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены с $\frac{1}{\varepsilon}$, а разложение знаменателя в (3) начинается с нулевой степени ε. Тогда (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_{-1}\frac{1}{\varepsilon} + A_0 + A_1\varepsilon + o(\varepsilon).$$

2. Пусть теперь разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)}\frac{1}{\varepsilon^2} + R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + \ldots,$$

тогда запишем разложения коэффициентов $R_{11}(\varepsilon), R_{12}(\varepsilon), R_{21}(\varepsilon), R_{22}(\varepsilon)$ из (3) по степеням ε.

$$R_{11}(\varepsilon) = R_{-2}^1\frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + R_0^1 + o(\varepsilon),$$

$$R_{12}(\varepsilon) = R_{-2}^2\frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + R_0^2 + o(\varepsilon),$$

$$R_{21}(\varepsilon) = R_{-2}^3\frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^3\frac{1}{\varepsilon} + R_0^3 + o(\varepsilon),$$

$$R_{22}(\varepsilon) = R_{-2}^4\frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^4\frac{1}{\varepsilon} + R_0^4 + o(\varepsilon).$$

Вычислим определитель матрицы $R(\varepsilon)$:

$$\det R(\varepsilon) = R_{11}(\varepsilon)R_{22}(\varepsilon) - R_{12}(\varepsilon)R_{21}(\varepsilon) = \left(R_{-2}^1R_{-2}^4 - R_{-2}^2R_{-2}^3\right)\frac{1}{\varepsilon^4} +$$

$$+\left(R_{-1}^1R_{-2}^4 + R_{-1}^4R_{-2}^1 - R_{-1}^2R_{-2}^3 - R_{-1}^3R_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^3} + \left(R_{-2}^1R_0^4 + R_{-1}^4R_{-1}^1 + R_{-2}^4R_0^1 - R_{-2}^2R_0^3 - R_{-1}^3R_{-1}^2 - R_{-2}^3R_0^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} +$$

$$+\left(R_{-2}^1R_1^4 + R_0^4R_{-1}^1 + R_{-1}^4R_0^1 + R_1^1R_{-2}^4 - R_{-2}^2R_1^3 - R_0^3R_{-1}^2 - R_{-1}^3R_0^2 - R_{-2}^3R_1^2\right)\frac{1}{\varepsilon} =$$

$$= r_{-4}^2\frac{1}{\varepsilon^4} + r_{-3}^2\frac{1}{\varepsilon^3} + r_{-2}^2\frac{1}{\varepsilon^2} + r_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon}),$$

где

$$r_{-4}^2 = \det[R^{(-2)}] = R_{-2}^1R_{-2}^4 - R_{-2}^2R_{-2}^3,$$
$$r_{-3}^2 = R_{-1}^1R_{-2}^4 + R_{-1}^4R_{-2}^1 - R_{-1}^2R_{-2}^3 - R_{-1}^3R_{-2}^2,$$
$$r_{-2}^2 = R_{-2}^1R_0^4 + R_{-1}^4R_{-1}^1 + R_{-2}^4R_0^1 - R_{-2}^2R_0^3 - R_{-1}^3R_{-1}^2 - R_{-2}^3R_0^2,$$
$$r_{-1}^2 = R_{-2}^1R_1^4 + R_0^4R_{-1}^1 + R_{-1}^4R_0^1 + R_{-2}^4R_1^1 - R_{-2}^2R_1^3 - R_0^3R_{-1}^2 - R_{-1}^3R_0^2 - R_{-2}^3R_1^2.$$

В результате данных вычислений можем описать различные случаи поведения ко-эффициента $A(\varepsilon)$.

1) Если $r_{-4}^2 \neq 0,$ то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а разложение определителя начинается с члена $\frac{1}{\varepsilon^4}$. Тогда (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_2\varepsilon^2 + A_3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3).$$

2) Если $r_{-4}^2 = 0,$ а $r_{-3}^2 \neq 0,$ то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а разложение определителя начинается с члена $\frac{1}{\varepsilon^3}$. Поэтому (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

3) Если $r_{-4}^2 = 0,$ $r_{-3}^2 = 0,$ а $r_{-2}^2 \neq 0,$ то выражения, входящие в числители и знамена-тель (3), начинаются с членов $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Следовательно, (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

4) Если $r_{-4}^2 = 0,$ $r_{-3}^2 = 0,$ $r_{-2}^2 = 0,$ а $r_{-1}^2 \neq 0,$ то выражения, полученные для элементов, входящих в числители из (3), содержат члены с $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а разложение знаменателя (3) начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_{-1}\frac{1}{\varepsilon} + A_0 + A_1\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Заключение

Таким образом, получены условия резонанса. Получен общий вид условий резонанса для семейства матриц-функций, зависящих от двух переменных, на основе приведения их к нормальной форме. Выявлены отличия от скалярного случая. В частности, в случае систем имеется качественное отличие: условия резонанса могут быть выполнены для матриц коэффициентов $A(\varepsilon)$, имеющих ненулевые пределы при $\varepsilon \to 0$ и даже для $A(\varepsilon)$, неограниченно возрастающих при $\varepsilon \to 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.] ; пер. с англ. В. А. Гейлера [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 566 с.
2. Антоневич, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.
3. Антоневич, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций // А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен : LAP LAMBERT, 2012.
4. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.

5. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. БГУ. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.

6. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.

7. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.

8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод. указания / И. С. Кащенко. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

REFERENCES

1. Rieshajemyje modeli v kvantovoj miekhanikie / S. Al’beverio [i dr.] ; pier. s angl. V. A. Gejliera [i dr.]. – M. : Mir, 1991. – 556 s.

2. Antonievich, A. B. Approksimacii opieratorov s delta-obraznymi koafficijentami / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // Aktual’nyje probliemy matiematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly ; riedkol.: Ye. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008, – S. 11–28.

3. Antonievich, A. B. Uravnienija s delta-obraznymi koafficijentami: mietod koniechnomiernykh approksimacij / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk. – Saarbriukken : LAP LAMBERT, 2012.

4. Bieriezin, F. A. Zamiechanije ob uravnienii Shredingiera s singuliarnym potencialom / F. A. Bieriezin, L. D. Faddiejev // Dokl. AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.

5. Kot M. G. O riezolvientnoj skhodimosti opieratorov, approksimirujushchikh systiem uravnienij s δ-obraznymi koafficijentami / M. G. Kot // Viestn. BGU. Fizika. Matiematika. In-formatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.

6. Kot, M. G. Asimptotika sobstviennykh viector-funkcij opieratorov, approksimirujushchihkh diffieriencial’nyje uravnienija s δ-obraznymi koafficijentami / M. G. Kot // Vies. Nac. acad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.

7. Romanchuk, T. A. Javlienije riezonansa dlia matrichno-znachnykh funkcij / T. A. Romanchuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.

8. Kashchienko, I. S. Asimptotichieskoje razlozhenije rieshenij uravnienij : mietod. ukazanija / I. S. Kashchienko. – Jaroslavl’ : JarGU, 2011. – 44 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.11.2023

УДК 519.6 + 517.983.54

Олег Викторович Матысик
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Oleg Matysik
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: matysikoleg@mail.ru

АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЯВНОЙ СХЕМЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для решения операторных уравнений первого рода с линейным непрерывным оператором в банаховом пространстве предлагается явная итерационная схема. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного выбора числа итераций при точной и приближенной правых частях уравнения, получены оценка погрешности и априорный момент останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: *некорректное уравнение первого рода, явная итерационная схема, банахово пространство, линейный непрерывный оператор, априорный момент останова.*

A priori Choice of the Regularization Parameter in the Explicit Iteration Scheme for Solving Ill-Posed Problems with a Linear Continuous Operator

An explicit iterative scheme is proposed to solve operator equations of the first kind with a linear continuous operator in a Banach space. The convergence of the iterative method is investigated in the case of a priori choice of the number of iterations with the exact and approximate right sides of the equation, an error estimate and an a priori stopping moment are obtained. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

Key words: *ill-posed equation of the first kind, explicit iteration scheme, Banach space, linear continuous operator, a priori stopping moment.*

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y, X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение. *Задачу отыскания решения* $x \in X$ *уравнения* (1) *называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части* $y = y_0 \in Y$ *уравнения* (1) *его решение*:

а) существует в пространстве X *;*

б) определено в пространстве X *однозначно;*

в) устойчиво в пространстве X *, т. е. непрерывно зависит от правой части* $y \in Y$ *. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.*

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир.

О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались.

Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи.

К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Рассмотрим хорошо известные примеры некорректно поставленных задач.

Пример 1. *Задача дифференцирования функции* $u(t)$*, известной приближенно.*

Пусть $z_1(t)$ есть производная функции $u_1(t)$. Функция $u_2(t) = u_1(t) + N\sin\omega t$. В метрике C отличается от $u_1(t)$ на величину $\rho_c(u_1, u_2) = |N|$ при любых значениях ω. Однако производная $z_2(t) = u_2'(t)$ отличается от $z_1(t)$ в метрике C на величину $|N\omega|$, которая может быть произвольно большой при достаточно больших значениях $|\omega|$.

Заметим, что задача нахождения производной n-го порядка от функции $u(t)$ сводится к решению интегрального уравнения первого рода: $\int\limits_0^1 \frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} z(\tau)d\tau = u(t)$.
Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости, что приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных.

Пример 2. *Численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике* l_2.

Пусть $f_1(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos t.$ Если вместо a_n брать коэффициенты $c_n = a_n + \varepsilon / n$ для $n \geq 1$ и $c_0 = a_0$, получим ряд $f_2(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt.$

Коэффициенты этих рядов отличаются (в метрике l_2) на величину $\varepsilon_1 = \left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$, которую выбором числа ε можно сделать сколь угодно малой. Вместе с этим разность $f_2(t) - f_1(t) = \varepsilon \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$ может быть сколь угодно большой (при $t = 0$ последний ряд расходится).

Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике C, суммирование ряда Фурье не является устойчивым.

Пример 3. *Задача Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае.*

Она состоит в нахождении решения уравнения $\Delta u(x,y)=0$ по начальным данным, т. е. в нахождении решения, удовлетворяющего условиям

$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=\varphi(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные функции.

Если взять $f_1(x)\equiv 0,\quad \varphi_1(x)=\frac{1}{a}\sin ax,$ то решением задачи Коши будет функция $u_1(x,y)=\frac{1}{a^2}\sin ax\times \operatorname{sh} ay,\ a>0.$ (Здесь $\operatorname{sh} ay\ =\frac{(ay)^z-(ay)^{-z}}{2}$ – гиперболический синус). Если же взять $f_2(x)=\varphi_2(x)\equiv 0,$ то решением такой задачи Коши будет функция $u_2(x,y)\equiv 0.$ Если уклонения начальных данных и решений оценивать в метрике *C*, то имеем $\rho_C(f_1,f_2)=\sup\limits_x|f_1(x)-f_2(x)|=0,\quad \rho_C(\varphi_1,\varphi_2)=\sup\limits_x|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|=\frac{1}{a}.$ Последняя величина при достаточно больших значениях *a* может быть сделана сколь угодно малой. Однако уклонения решений

$$\rho_C(u_1,u_2)=\sup_x|u_1(x,y)-u_2(x,y)|=\sup_x\left|\frac{1}{a^2}\sin ax\times \operatorname{sh} ay\right|=\frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ay$$

при любом фиксированном $y>0$ может быть произвольно большим при достаточно больших значениях *a* (т. к. при $a\to\infty$ $\operatorname{sh} ay\to\infty$ быстрее, чем $\frac{1}{a^2}\to 0$). Таким образом, задача неустойчива и, следовательно, некорректна.

Пример 4. *Задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область.*

Пусть *D* – конечная область, *E* – дуга кривой, принадлежащая области *D*. Тогда задача аналитического продолжения функции, заданной на дуге кривой *E*, на всю область *D* является неустойчивой.

В самом деле, пусть z_0 – точка на границе области *D*, расстояние которой до *E* равно $d>0$ и $f_1(z)$ – аналитическая в *D* функция. Функция $f_2(z)=f_1(z)+\frac{\varepsilon}{z-z_0}$, где ε – заданное положительное число, также аналитична в *D*. На множестве *E* эти функции отличаются одна от другой на величину $\varepsilon/(z-z_0)$, модуль которой не превосходит ε/d, т. е. $|f_2(z)-f_1(z)|\le\varepsilon/d$ на множестве *E*. Величина ε/d может быть сделана произвольно малой путем выбора соответствующего значения числа ε. Однако в области разность функций $f_2(z)-f_1(z)=\varepsilon/(z-z_0)$ не ограничена по модулю.

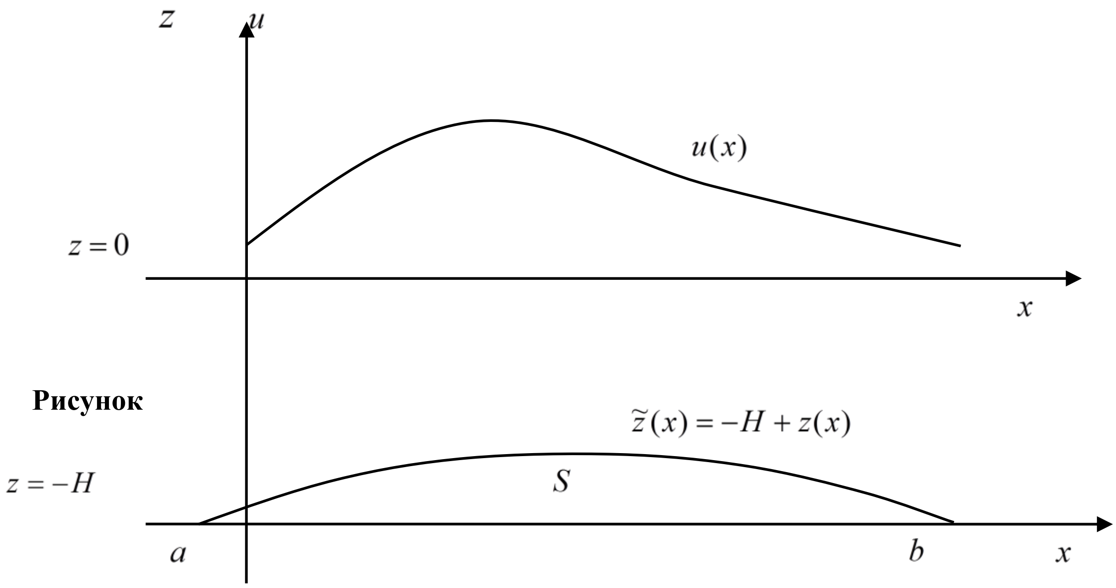
Пример 5. *Обратная задача гравиметрии.*

Пусть имеется тело, плотность которого отлична от плотности окружающей среды. Определить форму тела по аномалии напряжения силы тяжести, создаваемой им на поверхности земли.

Предложим, что среда, находящаяся под поверхностью земли ($z=0$), состоит из масс с известными плотностями ρ_1 и ρ_2, разделенных границей $z(x)$ (рисунок).

Пусть $\tilde{z}(x) = -H$ всюду, кроме отрезка $a \le x \le b,$ на котором $\tilde{z}(x) = -H + z(x).$

Такая конфигурация масс создает на поверхности земли аномалию напряжения силы тяжести



Рисунок

$\Delta g = -\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}$, где V – потенциал масс с плотностью $\rho = \rho_2 - \rho_1$, заполняющих область S (рисунок). Так как $V = \int\limits_S \frac{\rho}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta,$ где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2}$, то

$$\Delta g = -\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_a^b \int\limits_{-H}^{-H+z(\xi)} -\frac{\partial}{\partial \eta} \ln\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\Big|_{z=0} = \frac{\rho}{2\pi}\int\limits_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi.$$

Аномалия напряжения силы тяжести на поверхности земли может быть измерена. Таким образом, задача определения функции $z(x)$ сводится к решению нелинейного интегрального уравнения первого рода $Az = \int\limits_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi = u(x),$ где $u(x) = \frac{2\pi}{\rho}\Delta g.$

Здесь A – нелинейный интегральный оператор. Нетрудно показать неустойчивость решения этого уравнения к малым изменениям правой части $u(x)$.

Пример 6. *Рассмотрим задачу об изучении спектрального состава светового излучения (задача спектроскопии).*

Пусть наблюдаемое излучение неоднородно и распределение плотности энергии по спектру характеризуется функцией $z(s)$, где s – частота (или энергия).

Пропуская это излучение через измерительную аппаратуру, мы получаем экспериментальный спектр $u(x)$.

Здесь x может быть частотой, а может выражаться также в терминах напряжений и силы тока измерительной аппаратуры.

Если измерительная аппаратура линейна, то функциональная связь между $z(s)$ и $u(x)$ дается формулой

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds = u(x),$$

где $K(x,s)$ – аппаратная функция, предполагаемая известной. Она представляет экспериментальный спектр (как функция x), если на прибор падает монохроматическое излучение частоты единичной интенсивности (это и есть δ – функция $\delta(s-x)$). Здесь a и b – границы спектра.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–13].

В настоящей статье в банаховом пространстве исследуется *явный метод итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}),\quad x_{0,\delta} = 0$ решения операторных уравнений первого рода с линейным непрерывным оператором.

Метод итерации [2] для решения некорректных задач подробно изучен в гильбертовом пространстве. Этому методу посвящены работы А. С. Апарцина, В. К. Иванова, А. С. Крянева, М. М. Лаврентьева, В. А. Морозова, М. А. Красносельского и И. В. Емелина, А. Б. Бакушинского, В. Н. Страхова, О. А. Лисковца, С. М. Оганесяна, В. Ч. Старостенко, Г. В. Хромовой и др. Различные схемы итерационных методов решения некорректных задач в гильбертовых пространствах изучаются в монографиях М. М. Лаврентьева [3], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [4], А. А. Самарского и П. Н. Вабищевича [5], В. Ф. Савчука и О. В. Матысика [6–7; 9].

Однако практически отсутствуют работы, в которых исследуется сходимость метода итераций решения некорректных задач в банаховом пространстве. В настоящей статье изучен априорный выбор числа итераций для этого метода в банаховом пространстве: доказана сходимость метода, получены априорная оценка погрешности и априорный момент останова.

Рассмотренный в статье итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии).

Основная часть

1. Постановка задачи.

В банаховом пространстве E исследуется операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве E. Нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением, следовательно, задача (1) некорректна и имеет единственное решение. Приведем уравнение (1) к виду, удобному для итераций. Для этого уравнение $Ax - y = 0$ умножим на параметр $(-\alpha)$ и к обеим частям уравнения добавим x, получим $x - \alpha(Ax - y) = x$; $x = (I - \alpha A)x + \alpha y$, где I – единичный оператор. Обозначим $B = I - \alpha A$, $f = \alpha y$. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$x = Bx + f\,. \tag{2}$$

Для отыскания решения уравнения (1) используем итерационный процесс

$$x_{n+1} = Bx_n + f\,,\ (n = 0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

Однако на практике часто точная правая часть уравнения (1) неизвестна, а вместо нее известно δ – приближение $f_\delta :\| f - f_\delta \| \le \delta$. Тогда метод (3) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + f_\delta,\ (n = 0,1,2,\ldots). \tag{4}$$

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения.

Изложение материала раздела 2 аналогично [14; 15].

Изучим уравнение

$$x = Bx. \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = Bx_{n-1}. \tag{6}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть оператор B преобразует в себя замкнутое множество* $M \subset E$ *и является оператором сжатия* $\| Bx - By \| \le q \| x - y \|$, $(x, y \in M,\ 0 < q < 1)$. *Тогда итерационный процесс* (6) *при любом начальном приближении* $x_0 \in M$ *сходится к единственному решению* x^* *уравнения* (5).

Верно неравенство

$$\| x_n - x^* \| \le \frac{q^n}{1-q} \| x_0 - Bx_0 \|,\ (n = 1,2,\ldots). \tag{7}$$

Теорема 1 и неравенство (7) вытекают из принципа сжимающих отображений [16, с. 75]. Уравнение (5) имеет, очевидно, решение $x^* = 0$.

Оценка (7) не может быть улучшена в общем случае, однако при дополнительных предположениях можно гарантировать более быструю сходимость.

Вернемся к уравнению (2). Если $\| B \| < 1$, то из теоремы 1 следует, что последовательные приближения (3) сходятся. Докажем более точное утверждение.

Теорема 2. *Пусть спектральный радиус* $\rho(B)$ *оператора B удовлетворяет неравенству* $\rho(B) < 1$. *Тогда последовательные приближения* (3) *сходятся к решению* x^* *уравнения* (2) *и для каждого* ε, $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, *справедлива оценка*

$$\| x_n - x^* \| \le c(\varepsilon) \left[\rho(B) + \varepsilon \right]^n \| x_0 - Bx_0 - f \|.$$

Доказательство. Введем в банаховом пространстве *E* такую эквивалентную норму $\| \cdot \|_*$, при которой норма линейного оператора *B* сколь угодно близка к его спектральному радиусу, т. е.

$$m(\varepsilon) \| x \| \le \| x \|_* \le M(\varepsilon) \| x \|,\ (x \in E), \tag{8}$$

$$\| Bx \|_* \le \left[\rho(B) + \varepsilon \right] \| x \|_*,\ (x \in E). \tag{9}$$

Покажем, как построить такую эквивалентную норму (8), (9).

Известно, что спектральный радиус $\rho(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| B^n \|}$ и $\rho(B) \le \| B \|$. Определим такое *n*, что $\sqrt[n]{\| B^n \|} \le \rho(B) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число.

Положим

$$\| x \|_* = [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} \| x \| + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-2} \| Bx \| + \ldots + \| B^{n-1} x \| .$$

Очевидно,

$$[\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} \| x \| \le \| x \|_* \le \left\{ [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-2} \| B \| + \ldots + \| B^{n-1} \| \right\} \| x \| ,$$

т. е. нормы $\| \cdot \|$ и $\| \cdot \|_*$ эквивалентны. $\| B \|_* = \sup\limits_{\|x\|_* \le 1} \| Bx \|_* \le \rho(B)+\varepsilon$ [14, с. 16]. Так как в любой норме $\rho(B) \le \| B \|_*$, то $\rho(B) \le \| B \|_* \le \rho(B)+\varepsilon$. Таким образом, норму $\| \cdot \|_*$ из (8), (9) можно построить.

Из (9) вытекает, что уравнение (2) можно рассматривать как уравнение (5) со сжимающим оператором. Поэтому приближения (3) сходятся к x^*. Из (9) и (7) вытекает оценка $\left\| x_n - x^* \right\|_* \le \dfrac{[\rho(B)+\varepsilon]^n}{1-\rho(B)-\varepsilon} \| x_0 - Bx_0 - f \|_*$. Из этой оценки и из (8) следует

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le c(\varepsilon) [\rho(B)+\varepsilon]^n \| x_0 - Bx_0 - f \| ,$$

где $c(\varepsilon) = \dfrac{1}{m(\varepsilon)[1-\rho(B)-\varepsilon]}$. Теорема 2 доказана.

3. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения.

Покажем, что итерационный метод (4) можно сделать сходящимся, если разумным образом согласовывать число итераций n с уровнем погрешности δ.

Ниже, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (4) сходится, если $\lim\limits_{\delta \to 0} \left(\inf\limits_n \left\| x^* - x_{n,\delta} \right\| \right) = 0$.

Рассмотрим $\left\| x^* - x_{n,\delta} \right\| \le \left\| x^* - x_n \right\| + \left\| x_n - x_{n,\delta} \right\|$.

В разделе 3 показано, что $\left\| x^* - x_n \right\| \to 0,\ n \to \infty$. Докажем, что $\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\| \to 0$.

Из (2) при $x_0 = f$ получаем $x_1 = Bf + f$, $x_2 = B(Bf+f) + f = B^2 f + Bf + f$.

Предположим, что при $n = k$ $x_k = B^k f + B^{k-1} f + \ldots + Bf + f$ и, используя (2), найдем $x_{k+1} = Bx_k + f = B(B^k f + B^{k-1} f + \ldots + Bf + f) + f = B^{k+1} f + B^k f + \ldots + Bf + f$.

Итак, по индукции доказано, что $x_n = B^n f + B^{n-1} f + \ldots + Bf + f$.

Аналогично имеем, что $x_{n,\delta} = B^n f_\delta + B^{n-1} f_\delta + \ldots + Bf_\delta + f_\delta$. Отсюда

$$\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\| = B^n (f - f_\delta) + B^{n-1}(f - f_\delta) + \ldots + B(f - f_\delta) + (f - f_\delta) . \qquad (10)$$

Пусть $\rho(B) < 1$ и для $\forall \varepsilon$ выполняется $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, тогда $\| B \|_* \le \rho(B) + \varepsilon < 1$

и
$$\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\|_* \le \left\| B^n (f - f_\delta) \right\|_* + \left\| B^{n-1}(f - f_\delta) \right\|_* + \ldots + \left\| B(f - f_\delta) \right\|_* + $$
$$+ \| f - f_\delta \|_* \le (n+1) \| f - f_\delta \|_* \le M(\varepsilon)(n+1)\delta ,$$

т. к. $\|f - f_\delta\| \le \delta$. Следовательно, $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le d(\varepsilon)(n+1)\delta$, где $d(\varepsilon) = \dfrac{M(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}$.

$$\|x^* - x_{n,\delta}\| \le c(\varepsilon)[\rho(B)+\varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| + d(\varepsilon)(n+1)\delta \cdot \tag{11}$$

Из оценки (11) следует, что если выбирать n зависящим от δ так, чтобы $n\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то метод итерации (4) сходится.

Итак, доказана

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\rho(B) < 1$ *и для каждого* ε $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$. *Тогда последовательные приближения* (4) *сходятся к решению* x^* *уравнения* (2), *если число итераций n выбирать в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Оценку погрешности (11) можно уточнить, если воспользоваться неравенством (9), по которому $\|B(f - f_\delta)\|_* \le [\rho(B)+\varepsilon]\|f - f_\delta\|_*$. Из (10)

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_* = \|B^n(f - f_\delta)\|_* + \|B^{n-1}(f - f_\delta)\|_* + \ldots + \|B(f - f_\delta)\|_* + \|f - f_\delta\|_* \le$$

$$\le \left\{[\rho(B)+\varepsilon]^n + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} + \ldots + [\rho(B)+\varepsilon] + 1\right\}\|f - f_\delta\|_* =$$

$$= \frac{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}}{1 - \rho(B) - \varepsilon}\|f - f_\delta\|_* \le \frac{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}}{1 - \rho(B) - \varepsilon} M(\varepsilon)\delta = k(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}\right\}\delta,$$

где $k(\varepsilon) = \dfrac{M(\varepsilon)}{1 - \rho(B) - \varepsilon}$.

Поэтому $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le l(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}\right\}\delta$, и, следовательно,

$$\|x^* - x_{n,\delta}\| \le c(\varepsilon)[\rho(B)+\varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| + l(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}\right\}\delta, \tag{12}$$

где $l(\varepsilon) = \dfrac{k(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть спектральный радиус* $\rho(B)$ *оператора B удовлетворяет условию* $\rho(B) < 1$. *Тогда при любом* ε, $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$ *для итерационного процесса* (4) *справедлива оценка погрешности* (12).

Оптимизируем по n оценку погрешности (11). Для ее минимизации производную по n от правой части неравенства (11) приравняем нулю. Получим

$$c(\varepsilon)[\rho(B)+\varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon] + d(\varepsilon)\delta = 0;$$

$$[\rho(B)+\varepsilon]^n = \frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon]}. \tag{13}$$

Так как по условию теоремы 4 $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, то $\rho(B) + \varepsilon < 1$ и, следовательно, $\ln[\rho(B)+\varepsilon] < 0$, значит, правая часть равенства (13) положительна. Из (13) получаем априорный момент останова итераций $n_{\text{опт}} = \log_{[\rho(B)+\varepsilon]} \dfrac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon]}$.

Подставим $n_{опт}$ в (11), тогда оптимальная оценка погрешности для приближений (4) примет вид

$$\left\| x^* - x_{n,\delta} \right\|_{опт} \le c(\varepsilon) \left\| x_0 - Bx_0 - f \right\| \left[\rho(B) + \varepsilon \right]^{\log_{[\rho(B)+\varepsilon]} \frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon]}} +$$

$$+ d(\varepsilon) \left\{ \log_{[\rho(B)+\varepsilon]} \frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon]} + 1 \right\} \delta =$$

$$= \frac{-d(\varepsilon)\delta}{\ln[\rho(B)+\varepsilon]} + d(\varepsilon) \left\{ \log_{[\rho(B)+\varepsilon]} \frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon]} + 1 \right\} \delta.$$

Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной явной схемы итераций решения некорректных задач с линейным непрерывным оператором: доказана сходимость приближений с априорным выбором параметра регуляризации в банаховом пространстве, получены оценка погрешности и априорный момент останова.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.

4. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

5. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

6. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.

7. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

8. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr. 2 (116). – P. 89–95.

9. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT, 2015. – 188 с.

10. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel’skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.

11. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.

12. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.

13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.

14. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

15. Красносельский, М. А. Позитивные линейные системы / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев. – М. : Наука, 1985. – 256 с.

16. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 544 с.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Lavrient'jev, M. M. O niekotorykh niekorriektnykh zadachakh matiematichieskoj fiziki / M. M. Lavrient'jev. – Novosibirsk : SO AN SSSR, 1962. – 92 s.

4. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorriektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Yu. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.

5. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody rieshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.

6. Savchuk, V. F. Rieguliarizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstvie / V. F. Savchuк, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.

7. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.

8. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approxima-ting right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr. 2 (116). – P. 89–95.

9. Matysik, O. V. Iteracionnaja rieguliarizacija niekorrektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT, 2015. – 188 s.

10. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.

11. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.

12. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.

13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.

14. Priblizhennoje rieshenije opieratornykh uravnienij / M. A. Krasnosiel'skij [i dr.]. – M. : Nauka, 1969. – 456 s.

15. Krasnosiel'skij, M. A. Pozitivnyje liniejnyje sistiemy / M. A. Krasnosiel'skij, Ye. A. Lifshic, A. V. Soboliev. – M. : Nauka, 1985. – 256 s.

16. Kolmogorov, A. N. Eliemienty tieorii funkcij i funkcional'nogo analiza / A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. – M. : Nauka, 1976. – 544 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2023

УДК 513.82

***Александр Андреевич Юдов*[1], *Елена Вячеславовна Кисилюк*[2]**
[1]канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
***Alexander Yudov*[1], *Elena Kisilyuk*[2]**
[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
of Brest State A. S. Pushkin University
[2]Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Informatics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДВАНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

В работе изучаются однородные пространства, порожденные группой Ли движений постранства Минковского. Среди таких пространств выделяются редуктивные однородные пространства.

Ключевые слова: *группа, подгруппа, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, коммутатор, редуктивное однородное пространство, редуктивное дополнение.*

Classification and Investigation of Reductive Homogeneous Spaces Generated by the Lie Group of Motions of the Minkowski Space

We study homogeneous spaces generated by the Lie group of motions of the Minkowski space. Among such spaces, reductive homogeneous spaces are singled out.

Key words: *group, subgroup, homogeneous space, Lie group, Lie algebra, commutator, reductive homogeneous space, reductive complement.*

Введение

Однородные пространства являются предметом исследования математиков на протяжении более ста лет. Актуальность исследования таких пространств объясняется тем, что они находят применение и служат аппаратом при исследовании геометрии, алгебры, теоретической физики. Особую важность представляют однородные пространства, порожденные группой Ли движений различных (псевдоевклидовых пространств). В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства Минковского.

Нахождение редуктивных однородных пространств, порожденных группой Ли движений пространства Минковского

Определение 1. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли *H* распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}, \tag{1}$$

причем подпространство *m* инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Рассмотрим однородное пространство H/G_{12}, где G_{12} – подгруппа Ли группы Ли H вращений шестимерного Лоренцового пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{G_{12}} = \{i_5, i_6, i_9\}$, где:

$$i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению двадцати случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \upsilon \\ 0 & 1 & 0 & \sigma & s & t \\ 0 & 0 & 1 & p & q & r \end{pmatrix}.$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов X_1, X_2, X_3, определяющих инвариантные подпространства m, причем базис в алгебре $\overline{H}$ выберем следующим образом: $i_6, i_7, i_8, i_9, i_5, i_{10}$.

Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, X_2, X_3\}$ задаются векторами:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_9 + \mu i_5 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_9 + s i_5 + t i_{10}, X_3 = i_8 + p i_9 + q i_5 + r i_{10}. \tag{2}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, \mathrm{X}_1] &= i_8 + \lambda i_7, \\ [a, \mathrm{X}_2] &= i_9 + \sigma i_7, \\ [a, \mathrm{X}_3] &= i_6 + p i_7. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_6 + \lambda i_9 + \mu i_5 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_9 + s i_5 + t i_{10}) + \gamma_1(i_8 + p i_9 + q i_5 + r i_{10}) = i_5(\mu\alpha_1 + \\ + s\beta_1 + q\gamma_1) + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + i_8\gamma_1 + i_9(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1 + p\gamma_1) + i_{10}(\nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\mu\alpha_1 + s\beta_1 + q\gamma_1 = 0, \gamma_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \lambda, \delta_1 = 0, \lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1 + p\gamma_1 = 0, \nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\lambda s + q = 0, \lambda\sigma + p = 0, \lambda t + r = 0.$

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3), получим:

$$\mu\alpha_2 + s\beta_2 + q\gamma_2 = 0, \alpha_2 = 0, \beta_2 = \sigma, \gamma_2 = 0, \lambda\alpha_2 + \sigma\beta_2 + p\gamma_2 = 1, \nu\alpha_2 + t\beta_2 + r\gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma s = 0, \sigma^2 = 1, \sigma t = 0.$

Аналогично, сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\mu + ps = 0, \lambda + p\sigma = 0, \nu + tp = 0.$$

Таким образом, в случае 1^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda s + q = 0, \\ \lambda\sigma + p = 0, \\ \lambda t + r = 0, \\ \sigma s = 0, \\ \sigma^2 = 1, \\ \sigma t = 0, \\ \mu + ps = 0, \\ \lambda + p\sigma = 0, \\ \nu + tp = 0. \end{cases}$$

Из системы получаем следующее:

$$t = 0, s = 0, \mu = 0, q = 0, \nu = 0, r = 0, \sigma = \pm 1, p = \mp\lambda.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + \lambda i_9, i_7 \pm i_9, i_8 \mp \lambda i_9\}.$$

Аналогично рассматриваются случаи 2^0–20^0.

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \upsilon \\ 0 & 1 & \sigma & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q & r \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_5 + t i_{10}, X_3 = i_9 + q i_5 + r i_{10}. \tag{5}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_6, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_6, \\ [a, X_3] &= i_7. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_5 + t i_{10}) + \gamma_1(i_9 + q i_5 + r i_{10}) = i_5(\mu\alpha_1 + \\ &+ s\beta_1 + q\gamma_1) + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + i_8(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_9\gamma_1 + i_{10}(\nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\mu\alpha_1 + s\beta_1 + q\gamma_1 = 0, \alpha_1 = \lambda, \beta_1 = 0, \lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1 = 1, \gamma_1 = 0, \nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu\lambda = 0, \lambda^2 = 1, \nu\lambda = 0.$

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\mu\alpha_2 + s\beta_2 + q\gamma_2 = 0, \alpha_2 = \sigma, \beta_2 = 0, \lambda\alpha_2 + \sigma\beta_2 = 0, \gamma_2 = 1, \nu\alpha_2 + t\beta_2 + r\gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует:

$$\mu\sigma + q = 0, \lambda\sigma = 0, \nu\sigma + r = 0.$$

Аналогично, сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$s = 0, \sigma = 0, t = 0.$$

Таким образом, в случае 2^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu\lambda = 0, \\ \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ \mu\sigma + q = 0, \\ \lambda\sigma = 0, \\ \nu\sigma + r = 0, \\ s = 0, \\ \sigma = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Из системы получаем следующее: $\lambda = \pm 1, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, s = 0, t = 0, q = 0, r = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 \pm i_8, i_7, i_9\}.$$

$$3^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & 0 & \nu \\ 0 & 1 & \sigma & s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 3^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10}, X_3 = i_5 + p i_{10}. \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_6 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_6 + s i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10}) + \gamma_1(i_5 + p i_{10}) = i_5\gamma_1 + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + \\ i_8(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_9(\mu\alpha_1 + s\beta_1) + i_{10}(\nu\alpha_1 + t\beta_1 + p\gamma_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9) и формулу (10) со второй формулой (9), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 + \sigma\mu = 1, \\ \mu(\lambda + s) = 0, \\ \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0, \\ s^2 = 1 - \mu\sigma, \\ \nu\sigma + ts = 0. \end{cases}$$

Из этой системы вытекает следующая система:

$$\begin{cases} \mu(\lambda + s) = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0. \end{cases}$$

Данная система приводит к рассмотрению следующих двух случаев: $a)\lambda = -s; b)\mu = 0,\ \ \sigma = 0.$ Рассматривая исходную систему в случае $a)$, мы получаем следующее:

$$\lambda = \pm\sqrt{1-\sigma\mu},\text{ где } 1-\sigma\mu \geq 0;$$

$$\begin{cases} \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \nu\sigma - t\lambda = 0. \end{cases}$$

Определитель полученной системы отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение.

Таким образом, $\nu = 0, t = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 \pm \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_9, i_5 + p i_{10}\}.$$

Рассматривая исходную систему в случае $b)$, мы получаем следующее:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ s^2 = 1, \\ ts = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda = \pm 1, \nu = 0, s = \pm 1, t = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\}.$$

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & \nu & 0 \\ 0 & 1 & \sigma & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 4^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_5, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_5, X_3 = i_{10}. \quad (11)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered} [a, X_1] = i_8 + \lambda i_6 + \mu i_7, \\ [a, X_2] = i_9 + \sigma i_6 + s i_7, \\ [a, X_3] = 0. \end{gathered} \quad (12)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_5) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\nu\alpha_1 + t\beta_1) + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + \\ + i_8(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_9(\mu\alpha_1 + s\beta_1) + i_{10}\gamma_1. \end{gathered} \quad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с первой формулой (12) и формулу (13) со второй формулой (12), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 + \sigma\mu = 1, \\ \mu(\lambda + s) = 0, \\ \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0, \\ s^2 = 1 - \mu\sigma, \\ \nu\sigma + ts = 0. \end{cases}$$

Из этой системы вытекает следующая система:

$$\begin{cases} \mu(\lambda + s) = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0. \end{cases}$$

Данная система приводит к рассмотрению следующих двух случаев: $a)\lambda = -s; b)\mu = 0,\ \sigma = 0.$ Рассматривая исходную систему в случае a, мы получаем следующее:

$$\lambda = \pm\sqrt{1 - \sigma\mu}, \text{ где } 1 - \sigma\mu \ge 0;$$

$$\begin{cases} \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \nu\sigma - t\lambda = 0. \end{cases}$$

Определитель полученной системы отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Таким образом, $\nu = 0, t = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 \pm \sqrt{1 - \sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \sigma\mu}\, i_9, i_{10}\}.$$

Рассматривая исходную систему в случае b, мы получаем следующее:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ s^2 = 1, \\ ts = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda=\pm1, \nu=0, s=\pm1, t=0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6+i_8, i_7+i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6+i_8, i_7-i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6-i_8, i_7+i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6-i_8, i_7-i_9, i_{10}\}.$$

В случае 5^0 система инвариантности противоречива.

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 6^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1=i_6+\lambda i_7+\mu i_9+\nu i_{10}, X_2=i_8+\sigma i_9+s i_{10}, X_3=i_5+p i_{10}. \tag{14}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a=i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1]=i_8+\lambda i_9+\mu i_7, \\ [a, X_2]=i_6+\sigma i_7, \\ [a, X_3]=0.\end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered}\alpha_1(i_6+\lambda i_7+\mu i_9+\nu i_{10})+\beta_1(i_8+\sigma i_9+s i_{10})+\gamma_1(i_5+p i_{10})=i_5\gamma_1+i_6\alpha_1+ \\ +i_7\alpha_1\lambda+i_8\beta_1+i_9(\alpha_1\mu+\beta_1\sigma)+i_{10}(\alpha_1\nu+\beta_1 s).\end{gathered} \tag{16}$$

Сравнивая формулу (16) с первой формулой (15), получим:

$$\gamma_1=0, \alpha_1=0, \alpha_1\lambda=\mu, \beta_1=1, \alpha_1\mu+\beta_1\sigma=\lambda, \alpha_1\nu+\beta_1 s=0.$$

Отсюда следует: $\sigma=\lambda, s=0, \mu=0.$

Сравнивая формулу (16) со второй формулой (15), получим:

$$\gamma_2=0, \alpha_2=1, \alpha_2\lambda=\sigma, \beta_2=0, \alpha_2\mu+\beta_2\sigma=0, \alpha_2\nu+\beta_2 s=0.$$

Отсюда следует: $\sigma=\lambda, s=0, \mu=0.$

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6+\lambda i_7, i_8+\lambda i_9, i_5+p i_{10}\}.$$

$$7^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 7^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_5, X_2 = i_8 + \sigma i_9 + s i_5, X_3 = i_{10}. \tag{17}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1] = i_8 + \lambda i_9 + \mu i_7, \\ [a, X_2] = i_6 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered}\alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_5) + \beta_1(i_8 + \sigma i_9 + s i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\nu\alpha_1 + s\beta_1) + i_6\alpha_1 + \\ + i_7\lambda\alpha_1 + i_8\beta_1 + i_9(\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_{10}\gamma_1.\end{gathered} \tag{19}$$

Сравнивая формулу (19) с первой формулой (18), получим:

$$\nu\alpha_1 + s\beta_1 = 0, \alpha_1 = 0, \lambda\alpha_1 = \mu, \beta_1 = 1, \mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 = \lambda, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0, \mu = 0, \sigma = \lambda.$

Сравнивая формулу (19) со второй формулой (18), получим:

$$\nu\alpha_2 + s\beta_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda\alpha_2 = \sigma, \beta_2 = 0, \mu\alpha_2 + \sigma\beta_2 = 0, \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\nu = 0, \lambda = \sigma, \mu = 0.$

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_{10}\}.$$

В случаях 8^0, 9^0 системы инвариантности противоречивы.

$$10^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 10^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_9, X_2 = i_5, X_3 = i_{10}. \tag{23}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1] = i_8 + \lambda i_9 + \mu i_6 + \nu i_7, \\ [a, X_2] = 0, \\ [a, X_3] = 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_9) + \beta_1 i_5 + \gamma_1 i_{10} = i_5\beta_1 + i_6\alpha_1 + i_7\alpha_1\lambda + i_8\alpha_1\mu + i_9\alpha_1\nu + i_{10}\gamma_1. \tag{25}$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:

$$\beta_1 = 0, \alpha_1 = \mu, \alpha_1\lambda = \nu, \mu\alpha_1 = 1, \nu\alpha_1 = \lambda, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = \pm 1, \nu = \pm\lambda.$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + \lambda i_7 + i_8 + \lambda i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7 - i_8 - \lambda i_9, i_5, i_{10}\}.$$

В случаях 11^0–13^0 системы инвариантности противоречивы.

$$14^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 14^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10}, X_2 = i_9 + \sigma i_{10}, X_3 = i_5 + t i_{10}. \tag{26}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_9 + \lambda i_6, \\ [a, X_2] &= i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10}) + \beta_1(i_9 + \sigma i_{10}) + \gamma_1(i_5 + t i_{10}) = i_5\gamma_1 + i_7\alpha_1 + i_8\alpha_1\lambda + i_9\beta_1 + \\ + i_{10}(\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 + t\gamma_1). \end{aligned} \tag{28}$$

Сравнивая формулу (28) с первой формулой (27), получим:

$$\gamma_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = 0, \lambda\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 + t\gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = 0.$

Сравнивая формулу (28) со второй формулой (27), получим:

$$\gamma_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \mu\alpha_2 + \sigma\beta_2 + t\gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = 0.$

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_7, i_9, i_5 + i_{10}\}.$$

$$15^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 15^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_5, X_2 = i_9 + \sigma i_5, X_3 = i_{10}. \tag{29}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1] = i_9 + \lambda i_6,\\ [a, X_2] = i_7,\\ [a, X_3] = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_5) + \beta_1(i_9 + \sigma i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_7\alpha_1 + i_8\lambda\alpha_1 + i_9\beta_1 + i_{10}\gamma_1. \tag{31}$$

Сравнивая формулу (31) с первой формулой (30), получим:

$$\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = 0, \lambda\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = 0$.

Сравнивая формулу (31) со второй формулой (30), получим:

$$\mu\alpha_2 + \sigma\beta_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = 0, \lambda = 0$.

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_7, i_9, i_{10}\}.$$

$$16^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 16^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, X_2 = i_5, X_3 = i_{10}. \tag{32}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1] = i_9 + \lambda i_6 + \mu i_7,\\ [a, X_2] = 0,\\ [a, X_3] = 0.\end{gathered} \tag{33}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9) + \beta_1 i_5 + \gamma_1 i_{10} = i_5\beta_1 + i_7\alpha_1 + i_8\lambda\alpha_1 + i_9\mu\alpha_1 + i_{10}\gamma_1. \tag{34}$$

Сравнивая формулу (34) с первой формулой (33), получим:

$$\beta_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = \mu, \lambda\alpha_1 = 0, \mu\alpha_1 = 1, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = \pm 1$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_7 + i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_7 - i_9, i_5, i_{10}\}.$$

В случаях 17^0–20^0 системы инвариантности противоречивы.

Теорема 1. Относительно оператора i_5 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

$$\{i_6 + \lambda i_9, i_7 \pm i_9, i_8 \mp \lambda i_9\},$$
$$\{i_6 \pm i_8, i_7, i_9\},$$
$$\{i_6 \pm \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 \pm \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7 + i_8 + \lambda i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7 - i_8 - \lambda i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_7, i_9, i_5 + i_{10}\},$$
$$\{i_7, i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_7 + i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_7 - i_9, i_5, i_{10}\}.$$

Теорема 2. Относительно операторов i_5, i_6, i_8 инвариантно только следующее четырехмерное подпространство алгебры Ли $\overline{H} : \{i_7, i_9, i_{10}\}$.

Условие прямой суммы для подпространства $m_1 = \{i_7, i_9, i_{10}\}$ выполняются, т. е.

$$\overline{H} = \overline{G_{12}} + m_1.$$

Таким образом, получена следующая теорема:

Теорема 3. Однородное пространство H / G_{12} редуктивно. Редуктивным дополнением является только следующее подпространство: i_7, i_9, i_{10}.

Заключение

В работе получено редуктивное однородное пространство.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

REFERENCES

1. Kobajasi, Sh. Osnovy diffieriencial’noj gieomietrii : v 2 t. / Sh. Kobajasi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981. – T. 2. – 413 s.
2. Kopp, V. G. O podgruppakh vrashchienij piatimiernykh i shestimiernykh jevklidovykh i lorencevykh prostranstv / V. G. Kopp // Uchion. zap. Kazan. un-ta. – 1966. – № 1 (126). – S. 13–22.
3. Rashevskij, P. K. Rimanova gieomietrija i tenzornyj analiz / P. K. Rashevskij. – M. : Nauka, 1967. – 664 s.
4. Khelgason, S. Diffieriencial’naja gieomietrija i simmietrichieskije prostranstva / S. Khelgason. – M. : Mir, 1964. – 538 s.
5. Yudov, A. A. Klassifikacija odnomiernykh podmnogoobrazij prostranstva Minkovskogo, imiejushchikh kasatiel’nuju mnimojevklidovd i jevklidova tipa / A. A. Yudov, N. S. Kovalik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.10.2023

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша (не меней за 14 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (**.doc*, **.docx* ці **.rtf*) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкі і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 08.09.2016 № 206). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 6об.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносак.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не болей, чым 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуруецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаноўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заключэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.
- References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выпіска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: hightmath@brsu.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*
Падпісана ў друк 19.12.2023. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.
Ум. друк. арк. 13,25. Ул.-выд. арк. 6,33. Тыраж 100 экз. Заказ № 426.
Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.
ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.
224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.