

# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Рэдакцыйная калегія*

*галоўны рэдактар*  
А. М. Сендзер

*намеснік галоўнага рэдактара*  
А. Я. Будзько

*адказны рэдактар*  
М. М. Сендзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)  
А. І. Басік (Беларусь)  
В. М. Волкаў (Беларусь)  
М. А. Громаў (Расія)  
А. У. Дзямідчык (Беларусь)  
М. І. Ляўчук (Беларусь)  
І. П. Маргынаў (Беларусь)  
А. І. Мелькер (Расія)  
В. С. Манахаў (Беларусь)  
У. А. Плецохоў (Беларусь)  
В. М. Радзькоў (Беларусь)  
А. А. Трафімук (Беларусь)

Пасведчанне аб рэгістрацыі  
ў Міністэрстве інфармацыі  
Рэспублікі Беларусь  
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:  
224016, г. Брэст,  
бульвар Касманаўтаў, 21  
тэл.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага  
ўніверсітэта» выдаецца  
са снежня 1997 года

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

**№ 1 / 2023**

У адпаведнасці з Дадаткам да загада  
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь  
ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай  
камісіі Рэспублікі Беларусь ад 28.01.2022 № 14  
(са змяненнямі, унесенымі загадам ВАК ад 20.09.2022 № 363)  
часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.  
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»  
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2022 г.  
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

◇ ◇ ◇

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»  
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор  
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.  
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»  
размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU  
і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

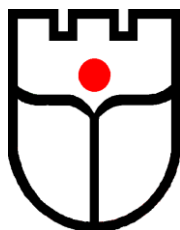
# ЗМЕСТ

## ФІЗІКА

- Бурый А. В., Ивашкевич А. В., Редьков В. М.**  
Калибровочные решения со сферической симметрией для безмассового поля со спином 2 .....5
- Кац П. Б., Кудравец А. В., Куликович Н. И., Римашевская А. С.**  
Методы расчета сечения смещения атома релятивистскими электронами и позитронами.....21
- Семенюк О. А., Ивашкевич А. В., Плетюхов В. А., Редьков В. М.**  
Безмассовый предел в уравнении Штюкельберга. Декартовы координаты .....45
- Серый А. И.**  
О термодинамическом описании электронного газа в магнитном поле .....53

## МАТЭМАТЫКА

- Артеменко Н. В.**  
О производной длине конечных разрешимых групп порядка,  
свободного от четвертых степеней и не превышающего 2000 .....65
- Басик А. И., Грицук Е. В., Шикеля Е. А.**  
О краевой задаче типа наклонной производной  
для эллиптических систем второго порядка на плоскости.....71
- Матысик О. В.**  
Апостериорный выбор параметра регуляризации  
в неявной схеме итераций решения некорректных задач  
с несамосопряженным оператором .....80
- Юдов А. А., Кислюк Е. В., Кузьмич А. М.**  
Симметрия в конечной группе и ее свойства .....93



# Vesnik

*of Brest University*

## *Editorial Board*

*editor-in-chief*  
A. M. Sender

*deputy editor-in-chief*  
A. Ya. Budzko

*managing editor*  
M. M. Sender

A. B. Antanievich (Belarus)  
A. I. Basik (Belarus)  
V. M. Volkau (Belarus)  
M. A. Gromau (Russia)  
A. U. Dziamidchyk (Belarus)  
M. I. Liauchuk (Belarus)  
I. P. Martynau (Belarus)  
A. I. Melkier (Russia)  
V. S. Manakhau (Belarus)  
U. A. Plietsiukhou (Belarus)  
V. M. Razkou (Belarus)  
A. A. Trafimuk (Belarus)

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:  
224016, Brest,  
21, Kosmonavtov Boulevard  
tel.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

## Series 4

### PHYSICS

### MATHEMATICS

#### SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment  
«Brest State A. S. Pushkin University»

## *№ 1 / 2023*

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 nr 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 28, 2022 nr 14 (with the amendments made by the order of Supreme Certification Commission from September 20, 2022 nr 363) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» has been included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in 2022 in physics-mathematical sciences (Physics)

◇ ◇ ◇

According to the agreement between Educational Establishment «Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» is placed on the platform eLIBRARY.RU and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

# CONTENTS

## PHYSICS

- Anton Bury, Alina Ivashkevich, Viktor Red'kov**  
Gauge Solutions with Spherical Symmetry for the Massless Spin 2 Field..... 5
- Piotr Kats, Andrei Kudravets, Nikita Kulikovich, Anastasiya Rymasheuskaya**  
Methods for Calculating the Atomic Displacement Cross Section  
by Relativistic Electrons and Positrons ..... 21
- Olga Semenyuk, Alina Ivashkevich, Vladimir Pletyukhov, Victor Red'kov**  
Massless limit in the Stuckelberg Equation. Cartesian Symmetries ..... 45
- Alexey Sery**  
On the Thermodynamic Description of an Electron Gas in a Magnetic Field ..... 53

## MATHEMATICS

- Natalia Artemenko**  
On the Derived Length of Finite Soluble Groups  
in which the Order is Fourth Powers Free and Not at Most 2000 ..... 65
- Aliaxandr Basik, Evgenij Hrytsuk, Elena Shikelia**  
About the Oblique Derivative Type Boundary Value Problem  
for Second-Order Elliptic Systems on the Plane ..... 71
- Oleg Matysik**  
A Posteriori Choice of the Regularization Parameter in an Implicit Iteration Scheme  
for Solving Ill-Posed Problems with a Non-Self-Adjoint Operator ..... 80
- Alexander Yudov, Elena Kisilyuk, Anastasia Kuzmich**  
Symmetry in a Finite Group and its Properties ..... 93

УДК 539.12

**Anton Bury<sup>1</sup>, Alina Ivashkevich<sup>2</sup>, Viktor Red'kov<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>2-rd Year Post-Graduate Student of the B. I. Stepanov Institute of Physics  
of the National Academy of Sciences of Belarus

<sup>2</sup>3-rd Year Post-Graduate Student of the B. I. Stepanov Institute of Physics  
of the National Academy of Sciences of Belarus

<sup>3</sup>PhD (Physics and Mathematics), Chief Researcher  
of the Center Fundamental Interactions and Astrophysics  
of the B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

**Антон Васильевич Бурый<sup>1</sup>, Алина Валентиновна Ивашкевич<sup>2</sup>,  
Виктор Михайлович Редьков<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>аспирант 2-го года обучения Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики  
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

<sup>2</sup>аспирант 3-го года обучения Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики  
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

<sup>3</sup>д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник  
Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики  
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

e-mail: <sup>1</sup>anton.buryy.97@mail.ru; <sup>2</sup>ivashkevich.alina@yandex.by;

<sup>3</sup>v.redkov@ifanbel.bas-net.by

## **Gauge Solutions with Spherical Symmetry for the Massless Spin 2 Field**

*It is known that the system of Pauli-Fierz equations for a massless field with spin 2 admits the existence of gauge solutions, they correspond to states that do not contribute to physically observable quantities such as the energy-momentum tensor. Such gauge solutions are determined by the known formulas through exact solutions of the equations for massless spin 1 field. In this paper, the problem is investigated in spherically symmetric case. Four independent solutions of the Duffin-Kemmer equation for a massless field with spin 1 in the spherical coordinate system are used. On this base, we found explicit form of four independent gauge solutions for spin 2 field. These solutions are presented in the form of linear combinations of Bessel functions with different indices,  $J_p(\epsilon r)$ ,  $p = j - 3/2, j - 1/2, j + 1/2, j + 3/2, j + 5/2$ . The established structure of gauge solutions can help in finding all solutions of the radial system of equations for a field with spin 2.*

**Key words:** spin 2, Pauli – Fierz equation, massless field, spherical symmetry, spin 1 field, Duffin – Kemmer equation, gauge solutions, Bessel functions.

## **КАЛИБРОВОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ ДЛЯ БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ СО СПИНОМ 2**

*Известно, что система уравнений Паули – Фирца для безмассового поля со спином 2 допускает существование калибровочных решений, им отвечают состояния, не дающие вклад в физически наблюдаемые величины типа тензор энергии-импульса. Эти калибровочные решения определяются согласно известным формулам через решения системы уравнений для безмассового поля со спином 1. В работе этот вопрос исследуется в сферически симметричном случае. Используются 4 независимые решения уравнения Даффина – Кеммера для безмассового поля со спином 1 в сферической системе координат. На этой основе получен явный вид четырех независимых калибровочных решений для поля со спином 2. Эти решения представляются в виде линейных комбинаций из функций Бесселя с различными индексами:  $J_p(\epsilon r)$ ,  $p = j - 3/2, j - 1/2, j + 1/2, j + 3/2, j + 5/2$ . Установленная структура калибровочных решений может помочь при нахождении всех решений радиальной системы уравнений для поля со спином 2.*

**Ключевые слова:** спин 2, уравнение Паули – Фирца, безмассовое поле, сферическая симметрия, спин 1, уравнение Даффина – Кеммера, калибровочные решения, функции Бесселя.

## 1. Introduction

After the investigation by Pauli and Fierz [1; 2], the theory of massive and massless fields is attracted much attention, for instance see [3–18; 21–25]. The most of the studies were performed in the framework of 2-nd order differential equations, as in [1; 2].

However it is known that many specific difficulties may be avoided if from the very beginning we start with the systems of the first order equations. Apparently, the first systematic study of the theory of spin 2 fields within that formalism was performed by F. I. Fedorov [6]. It turns out that this description requires a field function with 30 independent components. This theory was re-discovered by Regee in [8].

It is known that in the theory of massless spin 1 particle (electromagnetic field) there exists the gauge symmetry, so all solutions of the gradient type do not contribute to physically observable quantities, like energy-momentum tensor.

Also it is known [1; 2] that the system of equations describing the massless spin 2 field allows the existence of the gauge type solutions, which do not contribute to the physically observable quantities. They all are determined through an arbitrary vector fields  $L_a(x)$  in accordance with the formulas [1; 2]

$$H(x) = e^{(c)\alpha} \partial_\alpha L_c(x) + e_{(c);\alpha}^\alpha L^c(x),$$

$$\Phi_{(ab)}(x) = -(\gamma_{[ca]b} + \gamma_{[cb]a}) L^c(x) + [e_{(a)}^\alpha \partial_\alpha L_b(x) + e_{(b)}^\alpha \partial_\alpha L_a(x)] - \frac{1}{2} g_{ab} \Phi(x),$$

where  $L^c(x)$  is a vector field; we assume the use of tetrad formalism [18, 19]. Below we will examine such solutions for spherically symmetric case.

## 2. Gauge solutions for massless spin 2 field

For scalar component referring to the spin 2 field, we have the following general expression (first we assume the use of Cartesian basis for components of vector field)

$$H(x) = \partial_t L_0(x) - (\partial_r + \frac{2}{r}) L_3(x) - \frac{1}{r} [(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}) L_1(x) + \frac{\partial_\phi}{\sin \theta} L_2(x)]. \quad (1)$$

With the use of cyclic representation for vector components (see notations in [...])

$$L_0 = \bar{L}_0, \quad L_3 = \bar{L}_2, \quad L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\bar{L}_1 + \bar{L}_3), \quad L_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{L}_1 + \bar{L}_3), \quad (2)$$

we can rewrite relation (1) as follows

$$\bar{H}(x) = \partial_t \bar{L}_0 - (\partial_r + \frac{2}{r}) \bar{L}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}r} [(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}) (-\bar{L}_1 + \bar{L}_3) - i \frac{\partial_\phi}{\sin \theta} (\bar{L}_1 + \bar{L}_3)]. \quad (3)$$

Bearing in mind the substitution for 4-vector  $\bar{L} = (\bar{L}_a)$ :

$$\bar{L}(x) = e^{-ict} \begin{pmatrix} \bar{L}_0(r) D_0 \\ \bar{L}_1(r) D_{-1} \\ \bar{L}_2(r) D_0 \\ \bar{L}_3(r) D_{+1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$



$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{2}{r}L_3 + \frac{2}{r}\partial_\theta L_1 + \frac{1}{2}h = f_1 \\
 2\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}L_1 + \frac{2}{r}L_3 + 2\frac{\partial_\phi}{r\sin\theta}L_2 + \frac{1}{2}h = f_2 \\
 2\partial_r L_3 + \frac{1}{2}h = f_3 \\
 -\frac{1}{r}L_2 + \frac{\partial_\phi}{r\sin\theta}L_3 + \partial_r L_2 = c_1 \\
 -\frac{1}{r}L_1 + \partial_r L_1 + \frac{\partial_\theta}{r}L_3 = c_2 \\
 -\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}L_2 + \frac{\partial_\theta}{r}L_2 + \frac{\partial_\phi}{r\sin\theta}L_1 = c_3 \\
 \partial_r L_1 + \frac{\partial_\theta}{r}L_0 = d_1 \\
 \partial_t L_2 + \frac{\partial_\phi}{r\sin\theta}L_0 = d_2 \\
 \partial_t L_3 + \partial_r L_0 = d_3 \\
 2\partial_t L_0 - \frac{1}{2}h = f_0
 \end{array} \right\} = \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{l}
 (m - \cos(\theta)) \csc(\theta)(L_1 - iL_2) + \frac{\partial}{\partial\theta}L_1 - i\frac{\partial}{\partial\theta}L_2 \\
 \frac{1}{2}r\left(\Phi + 4\frac{\partial}{\partial r}L_3\right) \\
 -(m + \cos(\theta)) \csc(\theta)(L_1 + iL_2) + \frac{\partial}{\partial\theta}L_1 + i\frac{\partial}{\partial\theta}L_2 \\
 \frac{-L_1 - iL_2 - m \csc(\theta)L_3 + \frac{\partial}{\partial\theta}L_3 + r\frac{\partial}{\partial r}L_1 + ir\frac{\partial}{\partial r}L_2}{\sqrt{2}} \\
 -\frac{r\Phi}{2} - \cot(\theta)L_1 - im \csc(\theta)L_2 - 2L_3 - \frac{\partial}{\partial\theta}L_1 \\
 \frac{-L_1 + iL_2 + m \csc(\theta)L_3 + \frac{\partial}{\partial\theta}L_3 + r\frac{\partial}{\partial r}L_1 - ir\frac{\partial}{\partial r}L_2}{\sqrt{2}} \\
 \frac{-m \csc(\theta)L_0 + r\epsilon(iL_1 + L_2) - \frac{\partial}{\partial\theta}L_0}{\sqrt{2}} \\
 r\left(\frac{\partial}{\partial r}L_0 - i\epsilon L_3\right) \\
 \frac{-m \csc(\theta)L_0 + r\epsilon(L_2 - iL_1) + \frac{\partial}{\partial\theta}L_0}{\sqrt{2}} \\
 -\frac{1}{2}r(\Phi + 4i\epsilon L_0)
 \end{array} \right\}.
 \end{array}$$

Expressing the Cartesian components of the vector through the cyclic ones

$$L_0 = \bar{L}_0(r)D_0, \quad L_3 = \bar{L}_2(r)D_0,$$

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{L}_1(r)D_{-1} + \bar{L}_3(r)D_{+1}), \quad L_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{L}_1(r)D_{-1} + \bar{L}_3(r)D_{+1}),$$

we obtain (reminding the identity  $h = \bar{h}$ )

$$\bar{H}_2 = \frac{1}{r} \times$$



$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{2}\bar{L}_1((m\csc(\theta)-\cot(\theta))D_{-1}+D_{-1}') \\
 & \quad \frac{1}{2}r(\bar{h}D_0+4D_0\bar{L}_2') \\
 & -\sqrt{2}\bar{L}_3((m+\cos(\theta))\csc(\theta)D_{+1}-D_{+1}') \\
 & D_{+1}(r\bar{L}_3'-\bar{L}_3)+\frac{\bar{L}_2(D_0'-m\csc(\theta)D_0)}{\sqrt{2}} \\
 \times & \left. \frac{1}{2}(-r\bar{h}D_0-4\bar{L}_2D_0+\sqrt{2}(\bar{L}_1((\cos(\theta)-m)\csc(\theta)D_{-1}+D_{-1}')-\bar{L}_3((m+\cos(\theta))\csc(\theta)D_{+1}+D_{+1}'))\right) \\
 & D_{-1}(r\bar{L}_1'-\bar{L}_1)-\frac{\bar{L}_2(m\csc(\theta)D_0+D_0')}{\sqrt{2}} \\
 & -i\epsilon\bar{L}_1D_{-1}-\frac{\bar{L}_0(m\csc(\theta)D_0+D_0')}{\sqrt{2}} \\
 & \quad r(D_0\bar{L}_0'-i\epsilon\bar{L}_2D_0) \\
 & \quad \frac{\bar{L}_0(D_0'-m\csc(\theta)D_0)}{\sqrt{2}}-i\epsilon\bar{L}_3D_{+1} \\
 & \quad -\frac{1}{2}r(\bar{h}D_0+4i\epsilon\bar{L}_0D_0)
 \end{aligned}$$

Applying the recurrent formulas for Wigner functions, we find the following representation for the Cartesian components of the gauge symmetric tensor

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \\ \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{f}_0 \end{array} = \frac{1}{r} \left( \begin{array}{c} -\sqrt{2}b\bar{L}_1D_{-2} \\ r\left(\frac{\bar{h}}{2}+2\bar{L}_2'\right)D_0 \\ -\sqrt{2}b\bar{L}_3D_{+2} \\ -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a\bar{L}_2+2\bar{L}_3-2r\bar{L}_3'\right)D_{+1} \\ r\left(-\bar{h}-\frac{1}{r}\left(4\bar{L}_2+\sqrt{2}a(\bar{L}_1+\bar{L}_3)\right)\right)D_0 \\ -\frac{1}{2}\left(2\bar{L}_1+\sqrt{2}a\bar{L}_2-2r\bar{L}_1'\right)D_{-1} \\ -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a\bar{L}_0+2i\bar{L}_1r\epsilon\right)D_{-1} \\ r\left(\bar{L}_0'-i\bar{L}_2\epsilon\right)D_0 \\ -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a\bar{L}_0+2i\bar{L}_3r\epsilon\right)D_{+1} \\ r\left(-\frac{\bar{h}}{2}-2i\bar{L}_0\epsilon\right)D_0 \end{array} \right), \tag{8}
 \end{aligned}$$

from (8) follow expressions for separate radial components:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1 &= -\frac{\sqrt{2b}}{r}\bar{L}_1, & \bar{f}_2 &= \frac{\bar{h}}{2} + 2\bar{L}_2', & \bar{f}_3 &= -\frac{\sqrt{2b}}{r}\bar{L}_3, \\
\bar{c}_1 &= -\frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_2 - \frac{1}{r}\bar{L}_3 + \bar{L}_3', & \bar{c}_2 &= -\frac{1}{2}\bar{h} - \frac{2}{r}\bar{L}_2 - \frac{a}{\sqrt{2r}}(\bar{L}_1 + \bar{L}_3), \\
\bar{c}_3 &= -\frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_2 - \frac{1}{r}\bar{L}_1 + \bar{L}_1', & \bar{d}_1 &= -\frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_0 - i\epsilon\bar{L}_1, \\
\bar{d}_2 &= \bar{L}_0' - i\epsilon\bar{L}_2, & \bar{d}_3 &= -\frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_0 - i\epsilon\bar{L}_3, & \bar{f}_0 &= -\frac{\bar{h}}{2} - 2i\epsilon\bar{L}_0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Let us impose the parity restrictions on the gauge vector  $\bar{L}_a$  (see in [19]):

$$\bar{L}(x) = \begin{cases} \bar{L}_0(r)D_0 \\ \bar{L}_1(r)D_{-1} \\ \bar{L}_2(r)D_0 \\ \bar{L}_3(r)D_{+1} \end{cases}, \begin{cases} P = (-1)^{j+1}, & \bar{L}_0(r) = 0, \bar{L}_2(r) = 0, \bar{L}_3(r) = -\bar{L}_1(r); \\ P = (-1)^j, & \bar{L}_3(r) = +\bar{L}_1(r). \end{cases} \tag{10}$$

At the parity  $P = (-1)^{j+1}$ , we have

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= -i\epsilon\bar{L}_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\bar{L}_2 - \frac{a}{\sqrt{2r}}(\bar{L}_1 + \bar{L}_3) \equiv 0, \\
\bar{f}_1 &= -\frac{1}{r}\sqrt{2b}\bar{L}_1, & \bar{f}_2 &= 0, & \bar{f}_3 &= \frac{\sqrt{2b}}{r}\bar{L}_1, & \bar{c}_1 &= \frac{1}{r}\bar{L}_1 - \bar{L}_1', & \bar{c}_2 &= 0, \\
\bar{c}_3 &= -\frac{1}{r}\bar{L}_1 + \bar{L}_1', & \bar{d}_1 &= -i\epsilon\bar{L}_1, & \bar{d}_2 &= 0, & \bar{d}_3 &= i\epsilon\bar{L}_1, & \bar{f}_0 &= 0;
\end{aligned} \tag{11}$$

at the parity  $P = (-1)^j$ , we have

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= -i\epsilon\bar{L}_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\bar{L}_2 - \frac{2a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_1, \\
\bar{f}_1 &= -\frac{\sqrt{2b}}{r}\bar{L}_1, & \bar{f}_3 &= -\frac{\sqrt{2b}}{r}\bar{L}_1, & \bar{f}_2 &= -\frac{i\epsilon}{2}\bar{L}_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\bar{L}_2 - \frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_1 + 2\bar{L}_2', \\
\bar{c}_1 &= -\frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_2 - \frac{1}{r}\bar{L}_1 + \bar{L}_1', & \bar{c}_3 &= -\frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_2 - \frac{1}{r}\bar{L}_1 + \bar{L}_1', \\
\bar{c}_2 &= +\frac{i\epsilon}{2}\bar{L}_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dr} - \frac{2}{r}\right)\bar{L}_2 - \frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_1 - \frac{2}{r}\bar{L}_2, \\
\bar{d}_1 &= -\frac{a}{r\sqrt{2r}}\bar{L}_0 - i\epsilon\bar{L}_1, & \bar{d}_3 &= -\frac{a}{\sqrt{2r}}\bar{L}_0 - i\epsilon\bar{L}_1, & \bar{d}_2 &= \bar{L}_0' - i\epsilon\bar{L}_2, \\
\bar{f}_0 &= +\frac{i\epsilon}{2}\bar{L}_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\bar{L}_2 + \frac{a\sqrt{2}}{2r}\bar{L}_1 - 2i\epsilon\bar{L}_0.
\end{aligned} \tag{12}$$

### 3. Explicit form of the gauge solutions for massless spin 2 field

Alternatively, we may ignore the above parity restrictions on components of the vector field  $L_a$ , and apply the general form of correspondence  $L_a(x) \Rightarrow \Phi(x)$ ,  $\Phi_{ab}(x)$  according to the formulas (assuming the use of dimensionless variable  $z = \epsilon r$ )

$$h = -iL_0 - \left(\frac{d}{dz} + \frac{2}{z}\right)L_2 - \frac{a}{\sqrt{2z}}(L_1 + L_3),$$

$$f_1 = -\frac{\sqrt{2b}}{z}L_1, \quad f_2 = \frac{h}{2} + 2\frac{d}{dz}L_2, \quad f_3 = -\frac{\sqrt{2b}}{z}L_3,$$

$$c_1 = -\frac{a}{\sqrt{2z}}L_2 - \frac{1}{z}L_3 + \frac{d}{dz}L_3, \quad c_2 = -\frac{1}{2}h - \frac{2}{z}L_2 - \frac{a}{\sqrt{2z}}(L_1 + L_3), \quad c_3 = -\frac{a}{\sqrt{2z}}L_2 - \frac{1}{z}L_1 + \frac{d}{dz}L_1, \quad d_1 = -\frac{a}{\sqrt{2z}}L_0 -$$

Let us write expressions for 4 independent vector fields  $L_a^{(i)}(x)$ , they are solutions of the equation for massless spin 1 field (see in [26]):

$$L_0^{(1)} = 0, \quad L_2^{(1)} = 0, \quad L_1^{(1)} = -L_3^{(1)} = \frac{1}{z^{1/2}}J_{j+1/2};$$

$$L_2^{(2)} = -i\frac{\sqrt{2j}}{z^{1/2}}J_{j-1/2}, \quad L_3^{(2)} = i\frac{a}{z^{1/2}}J_{j-1/2} = L_1^{(2)}, \quad L_0^{(2)} = -\frac{\sqrt{2j}}{z^{1/2}}J_{j+1/2};$$

$$L_1^{(3)} = L_3^{(3)} = i\frac{\sqrt{j}}{z^{1/2}}J_{j+3/2}, \quad L_2^{(3)} = i\frac{\sqrt{2}\sqrt{j+1}}{z^{1/2}}J_{j+3/2}, \quad L_0^{(3)} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{j+1}}{z^{1/2}}J_{j+1/2};$$

$$L_1^{(4)} = L_3^{(4)} = -\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{a}{2j+1}J_{j-1/2} - \frac{1}{\sqrt{z}}\frac{a}{2j+1}J_{j+3/2},$$

$$L_2^{(4)} = \sqrt{2}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2} - \sqrt{2}\frac{j+1}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}, \quad L_0^{(4)} = -i\frac{\sqrt{2}}{z^{1/2}}J_{j+1/2}, \quad (14)$$

where  $J_p(z)$  denote the Bessel functions. For each vector field  $L^{(1)}, \dots, L^{(4)}$ , we can find corresponding 11 gauge components.

For  $L^{(1)} \Rightarrow \Phi_1$ ,

$$h = 0, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = -\frac{\sqrt{2b}(J_{j-\frac{1}{2}} + J_{j+\frac{3}{2}})}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad f_3 = \frac{\sqrt{2b}(J_{j-\frac{1}{2}} + J_{j+\frac{3}{2}})}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad f_2 = 0,$$

$$c_1 = \frac{(j+2)J_{j+\frac{3}{2}} - (j-1)J_{j-\frac{1}{2}}}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad c_3 = -\frac{(j+2)J_{j+\frac{3}{2}} - (j-1)J_{j-\frac{1}{2}}}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad c_2 = 0,$$

$$d_1 = -\frac{iJ_{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{z}}, \quad d_3 = \frac{iJ_{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{z}}, \quad d_2 = 0, \quad h = 0$$

or differently

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[ \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} 0 \\ \sqrt{2b} \\ \hline (2j+1) \\ 0 \\ \sqrt{2b} \\ \hline (2j+1) \\ j-1 \\ \hline (2j+1) \\ 0 \\ j-1 \\ \hline (2j+1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \sqrt{2b} \\ \hline (2j+1) \\ 0 \\ \sqrt{2b} \\ \hline (2j+1) \\ j+2 \\ \hline (2j+1) \\ 0 \\ j+2 \\ \hline (2j+1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ J_{j-1/2} & + & J_{j+1/2} \\ & + & J_{j+3/2} \end{array} \right].$$

$L^{(2)} \Rightarrow \Phi_2,$

$$h = 0, \quad f_0 = \frac{i(a^2 + j(7j-5))J_{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(2j-1)\sqrt{z}},$$

$$f_1 = -\frac{i\sqrt{2}ab \left( J_{j-\frac{3}{2}} + J_{j+\frac{1}{2}} \right)}{(2j-1)\sqrt{z}}, \quad f_3 = -\frac{i\sqrt{2}ab \left( J_{j-\frac{3}{2}} + J_{j+\frac{1}{2}} \right)}{(2j-1)\sqrt{z}},$$

$$f_2 = -i \frac{(a^2 + j(3j-5))J_{j-\frac{3}{2}} + (a^2 - j(5j+1))J_{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(2j-1)\sqrt{z}},$$

$$c_1 = \frac{ia \left( 2(j-1)J_{j-\frac{3}{2}} - J_{j+\frac{1}{2}} \right)}{(2j-1)\sqrt{z}}, \quad c_3 = \frac{ia \left( 2(j-1)J_{j-\frac{3}{2}} - J_{j+\frac{1}{2}} \right)}{(2j-1)\sqrt{z}}, \quad c_2 = -\frac{i(a^2 + (j-3)j) \left( J_{j-\frac{3}{2}} + J_{j+\frac{1}{2}} \right)}{\sqrt{2}(2j-1)\sqrt{z}},$$

$$d_1 = \frac{a \left( (3j+1)J_{j-\frac{1}{2}} + jJ_{j+\frac{3}{2}} \right)}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad d_3 \rightarrow \frac{a \left( (3j+1)J_{j-\frac{1}{2}} + jJ_{j+\frac{3}{2}} \right)}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad d_2 = \frac{\sqrt{2}j \left( (j+1)J_{j+\frac{3}{2}} - (3j+1)J_{j-\frac{1}{2}} \right)}{(2j+1)\sqrt{z}},$$

that is

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & & 0 & & 0 \\ \hline -\frac{i\sqrt{2}ab}{(2j-1)} & & 0 & & -\frac{i\sqrt{2}ab}{(2j-1)} \\ & & 0 & & 0 \\ \hline \frac{2i\sqrt{2}j(j-1)}{(2j-1)} & & 0 & & \frac{2i\sqrt{2}j^2}{(2j-1)} \\ & & 0 & & 0 \\ \hline -\frac{i\sqrt{2}ab}{(2j-1)} & & 0 & & -\frac{i\sqrt{2}ab}{(2j-1)} \\ & & 0 & & 0 \\ \hline \frac{ai}{2j-1} 2(j-1) & J_{j-3/2} + & 0 & J_{j-1/2} + & -\frac{ai}{2j-1} \\ & & \frac{a(3j+1)}{(2j+1)} & & \frac{aj}{2j+1} \\ \hline -\frac{i\sqrt{2}j(j-1)}{(2j-1)} & & \frac{\sqrt{2}j(3j+1)}{(2j+1)} & & -\frac{i\sqrt{2}j(j-1)}{(2j-1)} \\ & & & & \frac{\sqrt{2}j(j+1)}{(2j+1)} \\ \hline \frac{ai}{2j-1} 2(j-1) & & \frac{a(3j+1)}{(2j+1)} & & -\frac{ai}{2j-1} \\ & & \frac{a(3j+1)}{(2j+1)} & & \frac{aj}{2j+1} \\ & & 0 & & 0 \\ & & 0 & & 0 \\ & & 0 & & 0 \\ & & 0 & & 2i\sqrt{2}j \\ & & & & \frac{aj}{2j+1} \\ & & & & 0 \end{array} \right] J_{j+3/2}.$$

$L^{(3)} \Rightarrow \Phi_3,$

$h=0, \quad f_0 = i2\sqrt{2}\sqrt{j+1}J_{j+1/2},$

$$f_1 = -\frac{i\sqrt{2}b\sqrt{j} \left( J_{j+\frac{1}{2}} + J_{j+\frac{5}{2}} \right)}{(2j+3)\sqrt{z}}, \quad f_3 = -\frac{i\sqrt{2}b\sqrt{j} \left( J_{j+\frac{1}{2}} + J_{j+\frac{5}{2}} \right)}{(2j+3)\sqrt{z}},$$

$$f_2 = 2i\sqrt{2}\sqrt{j+1} \left( \frac{j+1}{2j+3} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} - \frac{j+2}{2j+3} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+5/2} \right),$$

$$c_1 = -\frac{i\sqrt{j}}{2j+3} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} - \frac{2i\sqrt{j}(j+2)}{(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+5/2}, \quad c_3 = -\frac{i\sqrt{j}}{2j+3} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} - \frac{2i\sqrt{j}(j+2)}{(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+5/2},$$

$$c_2 = -\frac{i\sqrt{2}\sqrt{j+1}(j+2)}{2j+3} \left( J_{j+\frac{1}{2}} + J_{j+\frac{5}{2}} \right),$$

$$d_1 = \frac{(j+1)\sqrt{j}}{(2j+1)\sqrt{z}} J_{j-1/2} + \frac{(3j+2)\sqrt{j}}{(2j+1)\sqrt{z}} J_{j+3/2}, \quad d_3 = \frac{(j+1)\sqrt{j}}{(2j+1)\sqrt{z}} J_{j-1/2} + \frac{(3j+2)\sqrt{j}}{(2j+1)\sqrt{z}} J_{j+3/2}$$

$$d_2 = -\frac{j\sqrt{2}\sqrt{j+1}}{(2j+1)\sqrt{z}} J_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{j+1}(3j+2)}{(2j+1)\sqrt{z}} J_{j+\frac{3}{2}},$$

that is

$$\Phi_3 = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\sqrt{2}\sqrt{j+1}\frac{j+1}{2j+3} & 0 & 0 & -2i\sqrt{2}\sqrt{j+1}\frac{j+2}{2j+3} \\ 0 & \frac{i\sqrt{2}\sqrt{jb}}{(2j+3)} & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{2}\sqrt{jb}}{(2j+3)} \\ 0 & \frac{i\sqrt{2}\sqrt{jb}}{(2j+3)} & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{2}\sqrt{jb}}{(2j+3)} \\ 0 & \frac{i\sqrt{j}}{2j+3} & 0 & 0 & \frac{2i\sqrt{j}(j+2)}{(2j+3)} \\ 0 & \frac{i\sqrt{j}}{2j+3} & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{2}\sqrt{j+1}}{(2j+3)}(j+2) \\ \frac{(j+1)\sqrt{j}}{(2j+1)} & \frac{i\sqrt{2}\sqrt{j+1}}{(2j+3)} & \frac{(3j+2)\sqrt{j}}{(2j+1)} & \frac{(3j+2)\sqrt{j}}{(2j+1)} & \frac{i\sqrt{2}\sqrt{j+1}}{(2j+3)}(j+2) \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{j+1}j}{(2j+1)} & \frac{i\sqrt{j}}{2j+3} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{j+1}(3j+2)}{(2j+1)} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{j+1}(3j+2)}{(2j+1)} & \frac{2i\sqrt{j}(j+2)}{(2j+3)} \\ \frac{(j+1)\sqrt{j}}{(2j+1)} & 0 & \frac{(3j+2)\sqrt{j}}{(2j+1)} & \frac{(3j+2)\sqrt{j}}{(2j+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\sqrt{2}\sqrt{j+1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] J_{j-1/2} + J_{j+1/2} + J_{j+3/2} + J_{j+5/2}.$$

For the case  $L^{(4)} \Rightarrow \Phi_4$

$$h = 0, \quad f_0 = -2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2},$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{z}} \left[ \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} J_{j-3/2} + \frac{2}{(2j-1)(2j+3)} J_{j+1/2} + \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} J_{j+5/2} \right] = +f_3,$$

$$f_3 = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{z}} \left[ \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} J_{j-3/2} + \frac{2}{(2j-1)(2j+3)} J_{j+1/2} + \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} J_{j+5/2} \right],$$

$$f_2 = \frac{(4j^2 - 4j)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+1)\sqrt{z}} J_{j-\frac{3}{2}} + \frac{2(-4j^2 - 4j + 2)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{1}{2}} + \frac{(4j^2 + 12j + 8)}{\sqrt{2}(2j+1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{5}{2}},$$

$$c_1 = 2a \left[ \frac{-(2j^2 + j - 3)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j-\frac{3}{2}} + \frac{1}{(2j-1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{1}{2}} + \frac{(2j^2 + 3j - 2)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{5}{2}} \right],$$

$$c_3 = 2a \left[ \frac{-(2j^2 + j - 3)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j-\frac{3}{2}} + \frac{1}{(2j-1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{1}{2}} + \frac{(2j^2 + 3j - 2)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{5}{2}} \right],$$

$$c_2 = \frac{(2j^2 - 2j)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+1)\sqrt{z}} J_{j-\frac{3}{2}} + \frac{2(2j^2 + 2j - 2)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{1}{2}} + \frac{(2j^2 + 6j + 4)}{\sqrt{2}(2j+1)(2j+3)\sqrt{z}} J_{j+\frac{5}{2}}$$

$$d_1 = \frac{2ia \left( J_{j-\frac{1}{2}} + J_{j+\frac{3}{2}} \right)}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad d_3 = \frac{2ia \left( J_{j-\frac{1}{2}} + J_{j+\frac{3}{2}} \right)}{(2j+1)\sqrt{z}}, \quad d_2 = -\frac{2i\sqrt{2} \left( jJ_{j-\frac{1}{2}} - (j+1)J_{j+\frac{3}{2}} \right)}{(2j+1)\sqrt{z}}.$$

That is

$$\Phi_4 = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[ \begin{array}{c|c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\sqrt{2}ab}{(2j+1)(2j-1)} \\ \frac{(4j^2-4j)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+1)} \\ \frac{\sqrt{2}ab}{(2j+1)(2j-1)} \\ \frac{2a(2j^2+j-3)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \\ \frac{(2j^2-2j)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+1)} \\ \frac{2a(2j^2+j-3)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & J_{j-3/2} + & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2ia}{(2j+1)} \\ \frac{2i\sqrt{2}j}{(2j+1)} \\ \frac{2ia}{(2j+1)} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \frac{2\sqrt{2}ab}{(2j-1)(2j+3)} \\ \frac{2(-4j^2-4j+2)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+3)} \\ \frac{2\sqrt{2}ab}{(2j-1)(2j+3)} \\ \frac{2a(2j+1)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \\ \frac{2(2j^2+2j-2)}{\sqrt{2}(2j-1)(2j+3)} \\ \frac{2a(2j+1)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \end{array} \\
 \end{array} \right] J_{j+1/2} + \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2ia}{(2j+1)} \\ \frac{2i\sqrt{2}(j+1)}{(2j+1)} \\ \frac{2ia}{(2j+1)} \\ 0 \end{array} & J_{j+3/2} + & \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\sqrt{2}ab}{(2j+1)(2j+3)} \\ \frac{(4j^2+12j+8)}{\sqrt{2}(2j+1)(2j+3)} \\ \frac{\sqrt{2}ab}{(2j+1)(2j+3)} \\ \frac{2a(2j^2+3j-2)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \\ \frac{(2j^2+6j+4)}{\sqrt{2}(2j+1)(2j+3)} \\ \frac{2a(2j^2+3j-2)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
 \end{array} J_{j+5/2} \Big].$$

In the following, the multiplier  $1/\sqrt{z}$  will be omitted for brevity.

#### 4. Non-gauge nature of the simplest solution $\Psi$

Let us recall the structure of the simplest solution which was found in [20] for states with parity  $\Pi = (-1)^{j+1}$ :

$$\Psi = \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{b} \frac{j+2}{2j+1} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{b} \frac{j+2}{r2j+1} \\ \frac{1}{2j+1} \\ 0 \\ -\frac{1}{2j+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & J_{j-1/2} + & \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{b} \frac{j-1}{2j+1} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{b} \frac{j-1}{2j+1} \\ \frac{1}{2j+1} \\ 0 \\ -\frac{1}{2j+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & & J_{j+3/2} = \end{array} = 0 \cdot J_{j-3/2} + VJ_{j-1/2} + 0 \cdot J_{j+1/2} + WJ_{j+3/2} + 0 \cdot J_{j+5/2}. \quad (15)$$

Four gauge solutions have the following structure

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= 0 \cdot J_{j-3/2} + Y_1 J_{j-1/2} + P_1 J_{j+1/2} + R_1 J_{j+3/2} + 0 \cdot J_{j+5/2}, \\ \Phi^2 &= X_2 J_{j-3/2} + Y_2 J_{j-1/2} + P_2 J_{j+1/2} + R_2 J_{j+3/2} + 0 \cdot J_{j+5/2}, \\ \Phi^3 &= 0 \cdot J_{j-3/2} + Y_3 J_{j-1/2} + P_3 J_{j+1/2} + R_3 J_{j+3/2} + S_3 J_{j+5/2}, \\ \Phi^4 &= X_4 J_{j-3/2} + Y_4 J_{j-1/2} + P_4 J_{j+1/2} + R_4 J_{j+3/2} + S_4 J_{j+5/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Let us assume that the equality exists

$$\Psi = A\Phi^1 + B\Phi^2 + C\Phi^3 + D\Phi^4. \quad (17)$$

We should equate the columns from the left and the right at the Bessel functions with coinciding indices; the results are

$$\begin{aligned} J_{j-3/2}, \quad D = iB(1+2j), \quad A, C \text{ are arbitrary;} \\ J_{j-1/2}, \quad \text{no solutions;} \quad J_{j+3/2}, \quad \text{no solutions;} \\ J_{j+1/2}, \quad A = 0, B = 0, C = 0, D = 0; \\ J_{j+5/2}, \quad C = 0, D = 0, \quad A, B \text{ are arbitrary.} \end{aligned}$$

Whence we conclude that the last system does not have any solutions. In other words, the simplest solutions  $\Psi$  for states with parity  $\Pi = (-1)^{j+1}$  cannot be decomposed in the



linear combinations of 4 gauge solutions  $\Phi_1, \dots, \Phi_4$ . Therefore, these solutions are physically observable (non-gauge).

Additionally, we may prove the linear independence of 4 gauge solutions. To this end we should examine the following equation

$$A\Phi_1 + B\Phi_2 + C\Phi_3 + D\Phi_4 = 0. \quad (18)$$

Taking into account the structure of gauge solutions, we derive the algebraic system

$$\begin{aligned} AY_1 + BY_2 + CY_3 + DY_4 = 0, & \quad AP_1 + BP_2 + CP_3 + DP_4 = 0, \\ AR_1 + BR_2 + CR_3 + DR_4 = 0, & \quad BX_2 + DX_4 = 0, \quad CS_3 + DS_4 = 0. \end{aligned}$$

Taking into account the explicit expressions for all involved columns, we prove that the system has only the trivial solution

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0. \quad (19)$$

Therefore, the four gauge solutions are linearly independent.

### 5. Conclusions

Four independent solutions for spin 1 massless field, according to Pauli – Fierz theory, permit to find explicit form of 11-component gauge solutions for massless spin 2 field. These four solutions are expressed (up to multiplier  $1/\sqrt{z}$ ) through Bessel functions with indices  $p = j-3/2, j-1/2, j+1/2, j+3/2, j+5/2$ . Therefore we can assume that all possible solutions of the radial system for massless spin 2 field may be constructed within the same structure as linear combinations of Bessel functions.

### REFERENCES

1. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Nr 173. – P. 211–232.
2. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.
3. De Broglie, L. Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1941. – Nr 212. – P. 657–659.
4. Gelfand, I. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group / I. M. Gelfand, A. M. Yaglom // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1948. – Vol. 18, nr 8. – P. 703–733.
5. Fradkin, E. S. To the theory of particles with higher spins / E. S. Fradkin // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1950. – Vol. 20, nr 1. – P. 27–38.
6. Fedorov, F. I. To the theory of particles with spin 2 / F. I. Fedorov // Proceedings of Belarus State University. Ser. Phys.-Math. – 1951. – Nr 12. – P. 156–173.
7. Feinberg, V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields / V. Ya. Feinberg // Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR. – 1955. – Vol. 6. – P. 269–332.
8. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, nr 2. – P. 325–326.
9. Krylov, B. V. Equations of the first order for graviton / B. V. Krylov, F. I. Fedorov // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus. – 1967. – Vol. 11, nr 8. – P. 681–684.
10. Bogush, A. A. On matrices of the equations for spin 2 particle / A. A. Bogush, B. V. Krylov, F. I. Fedorov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus.

Physics and Mathematics Series. – 1968. – Nr 1. – P. 74–81.

11. Fedorov, F. I. Equations of the first order for gravitational field / F. I. Fedorov // Reports of the Academy of Sciences of USSR. – 1968. – Vol. 179, nr 4. – P. 802–805.

12. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188, nr 5. – P. 2218–2222.

13. Krylov, B. V. On the systems of the first order for graviton / B. V. Krylov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 1972. – Nr 6. – P. 82–89.

14. Fedorov, F. I. The first order equations for gravitational field in vacuum / F. I. Fedorov, A. A. Kirilov // Acta Physica Polonica B. – 1976. – Vol. 7, nr 3. – P. 161–167.

15. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.

16. Kisel, V. V. On relativistic wave equations for a spin 2 particle / V. V. Kisel // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 1986. – Nr 5. – P. 94–99.

17. On equations for a spin 2 particle in external electromagnetic and gravitational fields / A. A. Bogush [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2003. – Nr 1. – P. 62–67.

18. Red'kov, V. M. Fields of particles in Riemannian space-time the Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian Science, 2009. – 486 p.

19. Red'kov, V. M. Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrodinger basis / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian Science, 2011. – 339 p.

20. Varshalovich, D. A. Quantum theory of angular momentum / D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K. Hersonskiy. – Leningrad : Science, 1975. – 441 p.

21. Contribution of gauge degrees of freedom to the energy-momentum tensor of the massless spin 2 field / V. V. Kisel [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2015. – Nr 2. – P. 58–63.

22. Nonrelativistic approximation in the theory of a spin two particle / V. V. Kisel [et al.] // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2015. – Vol. 59, nr 3. – P. 21–27.

23. The structure of plane waves for spin 2 field, massive and massless cases / A. V. Bury [et al.] // Problems of Physics, Informatics and Technics. – 2021. – Vol. 47, nr 2. – P. 23–34.

24. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 1–23.

25. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time. II. Separating the variables in spherical coordinates / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2022. – P. 12–33.

26. Buryy, A. V. Spin 1 particle in cylindrical basis and projective operator method / A. V. Buryy, O. A. Semenyuk, A. V. Ivashkevich // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series. – 2022. – № 4.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Nr 173. – P. 211–232.

2. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.

3. De Broglie, L. Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1941. – Nr 212. – P. 657–659.
4. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
5. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, № 1. – С. 27–38.
6. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1951. – Т. 12. – С. 156–173.
7. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с элект-ромагнитными и мезонными полями / В. Я. Файнберг // Тр. ФИАН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
8. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, nr 2. – P. 325–326.
9. Крылов, Б. В. Уравнения первого порядка для гравитона / Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // Докл. Акад. наук БССР. – 1967. – Т. 11, № 8. – С. 681–684.
10. Богуш, А. А. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 / А. А. Богуш, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // Вес. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. – 1968. – Т. 1. – С. 74–81.
11. Федоров, Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.
12. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188, nr 5. – P. 2218–2222.
13. Крылов, Б. В. О системе уравнений первого порядка для гравитона / Б. В. Крылов // Вес. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. – 1972. – № 6. – С. 82–89.
14. Fedorov, F. I. The first order equations for graviational field in vacuum / F. I. Fedorov, A. A. Kirilov // Acta Physica Polonica B. – 1976. – Vol. 7, nr 3. – P. 161–167.
15. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.
16. Кисель, В. В. О релятивистских волновых уравнениях для частицы со спином 2 / В. В. Кисель // Вес. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. – 1986. – № 5. – С. 94–99.
17. Об уравнениях для частицы со спином 2 во внешних электромагнитных и гравитационных полях / Богуш А. А. [и др.] // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 62–67.
18. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 486 с.
19. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера – Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2011. – 339 с.
20. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 441 с.
21. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии импульса безмассового поля со спином 2 / В. В. Кисель [и др.] // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.
22. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / В. В. Кисель [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.
23. Структура плоских волн для поля со спином 2: массивный и безмассовый случаи / А. В. Бурый [и др.] // Проблемы физики, информатики и техники. – 2021. – Т. 47, № 2. – С. 23–34.

24. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich [at al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 1–23.

25. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time. II. Separating the variables in spherical coordinates / A. Ivashkevich [at al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2022. – P. 12–33.

26. Buryu, A. V. Spin 1 particle in cylindric basis and projective operator method / A. V. Buryu, O. A. Semenyuk, A. V. Ivashkevich // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series. – 2022. – № 4.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 03.04.2023*

УДК 539.171.016

**Петр Борисович Кац<sup>1</sup>, Андрей Васильевич Кудравец<sup>2</sup>,  
Никита Иванович Куликович<sup>3</sup>, Анастасия Сергеевна Римашиевская<sup>4</sup>**  
<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
 Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
<sup>2,3</sup>студент 2 курса физико-математического факультета  
 Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
<sup>4</sup>магистрант физико-математического факультета  
 Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
**Piotr Kats<sup>1</sup>, Andrei Kudravets<sup>2</sup>, Nikita Kulikovich<sup>3</sup>, Anastasiya Rymasheuskaya<sup>4</sup>**  
<sup>1</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
 Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
 of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2,3</sup>2nd Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A.S. Pushkin University

<sup>4</sup>Master Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: <sup>1</sup>katspyotr@yandex.ru

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЯ СМЕЩЕНИЯ АТОМА РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ И ПОЗИТРОНАМИ

Рассмотрены основные приближенные методы расчета сечения смещения атома в веществе релятивистскими электронами и позитронами. Получена аналитическая формула для расчета сечения первичного смещения атома в рамках трижды модифицированного метода Лиджиана – Кинга – Женгминга. Выведены аналитические формулы для полного сечения смещения атома электроном при использовании простейшей модели Кинчина – Пиза в рамках метода Лиджиана – Кинга – Женгминга и его модификаций, а также второго и третьего борновских приближений. Получены аналитические выражения для сечения смещения атома в рамках укороченных вариантов метода Лиджиана – Кинга – Женгминга. Рассчитаны сечения первичного смещения электроном и полные сечения смещения электроном в углероде, кремнии, железе, свинце, уране, плутонии и эйнштейнии с помощью метода Лиджиана – Кинга – Женгминга и его модификаций. Для углерода, кремния и железа также расчеты выполнены с помощью второго и третьего борновских приближений. Для железа и свинца уточнены предыдущие результаты путем корректировки пороговой энергии смещения атома. Рассчитано сечение первичного смещения атома и полное сечение смещения атома позитронами в золоте с помощью метода LQZ и его сокращенных вариантов.

**Ключевые слова:** сечение смещения атома, модель Кинчина – Пиза, метод МакКинли – Феибаха, метод Джонсона – Вебера – Маллина, метод Лиджиана – Кинга – Женгминга.

## Methods for Calculating the Atomic Displacement Cross Section by Relativistic Electrons and Positrons

The main approximate methods for calculating the cross section of the displacement of an atom in a substance by relativistic electrons and positrons are considered. An analytical formula has been obtained for calculating the cross section of the primary displacement of an atom within the framework of the thrice modified Ligian – Qing – Zhengming method. Analytical formulas are derived for the total cross section of the displacement of an atom by an electron using the simplest Kinchin – Pease model within the framework of the Ligian – Qing – Zhengming method and its modifications, as well as the second and third Born approximations. Analytical expressions for the displacement cross section of an atom are obtained within the framework of shortened variants of the Ligian – Qing – Zhengming method. The cross sections of the primary displacement by an electron and the total cross sections of the displacement by an electron in carbon, silicon, iron, lead, uranium, plutonium and einsteinium are calculated using the Ligian – Qing – Zhengming method and its modifications. For carbon, silicon and iron calculations are also performed using the second and third Born approximations. For iron and lead the previous results are refined by correcting the threshold energy of the displacement of the atom. The cross section of the primary displacement of an atom and the total displacement of an atom by positrons by positrons in gold are calculated using the LQZ method and its shortened variants.

**Key words:** displacement cross section, Johnson – Weber – Mullin method, McKinley – Feshbach method, Kinchin – Pease model, Ligian – Qing – Zhengming method.

### Введение

Облучение твердых тел различными частицами приводит к смещению атомов из положения равновесия. Такое воздействие имеет место в ядерных и термоядерных реакторах, ускорителях, электронных микроскопах, космических аппаратах. Оно приводит к изменению свойств материалов (радиационное охрупчивание, радиационная ползучесть, радиационное распухание и т. д. [1]. Обычно предполагается, что атом может быть смещен в случае, если он получает энергию, равную или превышающую некоторую пороговую энергию  $T_d$ , зависящую от вещества и кристаллографического направления [1]. В поликристалле можно ввести одно значение  $T_d$  для данного элемента. Если энергия электрона не слишком велика, то первично выбитый атом (ПВА) не может сам выбивать атомы из узлов кристаллической решетки. В этом случае для характеристики вероятности смещения атома используется сечение первичного смещения атома [2].

Вероятность смещения атома при столкновении с электроном или другой частицей характеризуется сечением смещения атома. Смещенный атом может сам приводить к смещениям новых атомов, если обладает достаточной энергией.

Если рассматривать только первичные смещения атомов, соответствующее сечение будем называть сечением первичного смещения. Оно вычисляется по формуле:

$$\sigma_p(E, T_d) = \int_{T_d}^{T_m} \frac{d\sigma}{dT} dT, \quad (1)$$

где  $\frac{d\sigma}{dT}$  – дифференциальное сечение передачи атому энергии  $T$  при столкновении с частицей с кинетической энергией  $E$ .  $T_m$  – максимальная кинетическая энергия, которая может быть передана атому при столкновении с электроном.

В статье мы будем рассматривать смещения атомов, вызываемые электронами и позитронами.

Переходя от переменной переданной энергии  $T$  к углу рассеяния [3], получим:

$$\sigma_p(E, T_d) = 2\pi \int_{\theta(T_d)}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta, \quad (2)$$

где связь угла рассеяния с переданной энергией:  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{T}{T_m}$ .

Смещение атома могут вызывать только релятивистские электроны. Если пренебречь экранированием поля ядра электронами и размерами ядра, то необходимо использовать моттовское дифференциальное сечение рассеяния [4].  $T_m$  в случае релятивистских электронов, когда кинетическая энергия электрона много меньше энергии покоя ядра, определяется формулой [2]:

$$T_m = \frac{2E(E + 2m_e c^2)}{Mc^2}, \quad (3)$$

где  $m_e$  и  $M$  – массы электрона и ядра.

Моттовское дифференциальное сечение рассеяния выражается через медленно сходящиеся ряды по полиномам Лежандра, поэтому для практических результатов обычно используются упрощенные формулы. Часто применяют второе борновское приближение моттовского сечения. В этом приближении сечение первичного смещения атома [5]:

$$\sigma_{pMF} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left\{ \frac{1}{y} - 1 + \beta^2 \ln(y) + \pi \alpha \beta \left( \frac{2}{\sqrt{y}} - 2 + \ln(y) \right) \right\}, y = \frac{T_d}{T_m}. \quad (4)$$

где  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры.  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Для больших зарядовых чисел второе борновское приближение приводит к очень высокой погрешности [6].

Нормированным моттовским сечением НМС будем называть отношение

$$R(\theta) = \sigma_M / \sigma_R, \quad \sigma_R \equiv \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R = \left( \frac{Ze^2}{2pv} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (5)$$

где  $p$  – импульс электрона. Для нерелятивистских скоростей  $p = mv$  и  $\sigma_R$  представляет собой формулу Резерфорда.

В [7] Джонсоном, Вебером и Маллином было получено третье борновское приближение. Нормированное моттовское сечение в этом приближении выражается формулой:

$$\begin{aligned} R_{JWM} = R_{MF} + (\alpha Z)^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \left\{ L_2 \left[ 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - 4L_2 \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \right. \\ & + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \ln^2 \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{\pi^2}{2} \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{\pi^2}{6} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \\ & \left. \beta^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( L_2 \left[ 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{\sin^2(\theta/2) \ln^2[\sin(\theta/2)]}{1 - \sin^2(\theta/2)} + \frac{\pi^2}{4} \frac{1 - \sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)} - \frac{\pi^2}{6} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $L_2$  обозначает дилогарифм Эйлера.

$R_{MF}$  – второе борновское приближение – приближение МакКинли – Фешбаха [8]:

$$R_{MF}(\theta) = 1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \pi \alpha \beta Z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (7)$$

В [6] было получено выражение для сечения первичного смещения атома в третьем борновском приближении. Было показано на ряде примеров, что погрешность третьего борновского приближения для сечения первичного смещения атомов в среднем меньше погрешности второго борновского приближения.

Другой возможный способ нахождения сечения смещения атома – использование аналитического приближения Лиджиана – Кинга – Женгминга LQZ [9] (например, [3]).

Сечение образования первичного смещения атома может быть представлено в виде [2]:

$$\sigma_p(E, T_d) = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \int_y^1 \frac{R(x, E)}{x^2} dx, \quad x = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{T}{T_m}, \quad y = T_d / T_m, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (8)$$

Аналитическое приближение LQZ для НМС:

$$R_{LQZ} = \sum_{j=0}^4 a_j(Z, \beta) (1 - \cos \theta)^{j/2}, \quad a_j(Z, \beta) = \sum_{k=1}^6 d_z(j, k) (\beta - \bar{\beta})^{k-1} \quad (9)$$

В [10] разработаны т. н. модифицированный и дважды модифицированный варианты метода LQZ, которые приводят к более точным значениям НМС. В LQZ<sub>m2</sub> аналитическое приближение имеет вид:

$$R_{LQZm2}(\theta, Z, E) = 1 + \sum_{j=1}^5 a_j(Z, E)(1 - \cos \theta)^{j/2}. \quad (10)$$

Также в [10] получены аналитические выражения для  $\sigma_p$  в рамках метода LQZ, LQZ<sub>m</sub> и LQZ<sub>m2</sub> путем взятия интеграла (6):

$$\sigma_{pLQZ} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} \frac{(1 - \beta^2)}{y} [(1 - \sqrt{y}) (a_0 + (a_0 + 2\sqrt{2}a_1)\sqrt{y} + 4(\sqrt{2}a_3 + a_4)y + 4a_4y^{3/2}) - 2a_2y \ln y]. \quad (11)$$

$$\sigma_{pLQZm} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) [-1 - 2\sqrt{2}a_1 + 4(\sqrt{2}a_3 + a_4) + \frac{1}{y} + \frac{2\sqrt{2}a_1}{\sqrt{y}} - 4\sqrt{2}a_3\sqrt{y} - 4a_4y - 2a_2 \ln y]. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{pLQZm2} = & \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) [-1 - 2\sqrt{2}a_1 + 4(\sqrt{2}a_3 + a_4) + \frac{1}{y} + \\ & + \frac{2\sqrt{2}a_1}{\sqrt{y}} - 4\sqrt{2}a_3\sqrt{y} - 4a_4y - 2a_2 \ln y + \frac{8}{3}\sqrt{2}a_5(1 - y^{3/2})]. \end{aligned} \quad (13)$$

Если учитывается также смещение атомов, вызываемое первично выбитым атомом, то речь идет о полном сечении смещения  $\sigma_{tot}$  [2]:

$$\sigma_{tot}(E, T_d) = \int_{T_d}^{T_m} \nu(T) \frac{d\sigma}{dT} dT, \quad (14)$$

где  $\nu(T)$  – каскадная функция, определяющая среднее число смещений атомов на один первично выбитый атом.

Существуют различные варианты каскадной функции. Простейшей является модель Кинчина – Пиза [11]. При использовании этой модели при  $T_m \leq 2T_d$  выбитый атом не может выбивать другие атомы и  $\sigma_{tot} = \sigma_p$ . При  $T_m > 2T_d$   $\nu(T) = T / 2T_d$ .

При использовании модели Кинчина – Пиза полное сечение смещения атома [2]:

$$\sigma_{tot}(E, T_d) = \frac{\pi Z^2 e^4 (1 - \beta^2)}{m^2 c^4 \beta^4} \left( \int_y^{2y} \frac{R(x, E)}{x^2} dx + \frac{1}{2y} \int_{2y}^1 \frac{R(x, E)}{x} dx \right), T_m > 2T_d. \quad (15)$$

### Расчет сечения первичного смещения атома электроном

В работе [2] рассчитаны сечения первичного смещения и полные сечения смещения атомов для большого числа элементов, энергий электронов и энергий смещения путем численного интегрирования моттовского дифференциального сечения рассеяния. Мы определяем точность результатов наших расчетов, основанных на приближенных формулах, сравнением с данными [2]. Относительная погрешность вычислялась по формуле

$$\delta_i = \frac{|\sigma(E_i) - \sigma_o(E_i)|}{\sigma_o(E_i)},$$

где  $\sigma_o$  – сечение смещения по данным [2].



Отметим, что при энергиях, близких к пороговой, во многих случаях данные в [2] приведены с малым числом значащих цифр, поэтому, строго говоря, нельзя утверждать, что погрешности при этом вычислены точно, однако мы вычисляем эти погрешности для определения среднего по энергиям значения и сравнения между собой разных методов.

В [12] разработан трижды модифицированный метод LQZ – LQZ<sub>m3</sub>:

$$R_{LQZ_{m3}} = 1 + \sum_{j=1}^6 a_j(Z, E)(1 - \cos \theta)^{j/2}, a_j(Z, \beta) = \sum_{k=1}^5 d_z(j, k)(\beta - \bar{\beta})^{k-1}. \quad (16)$$

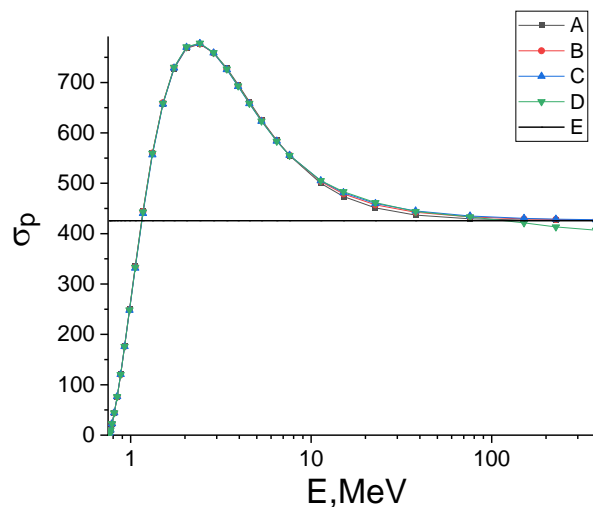
Из (4) в рамках LQZ<sub>m3</sub> к выражению, полученному в рамках LQZ<sub>m2</sub> требуется прибавить

$$\frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \int_y^1 a_6 \frac{(2x)^3}{x^2} dx = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) 4a_6 (1 - y^2).$$

В итоге получаем аналитическое выражение для сечения первичного смещения в рамках метода LQZ<sub>m3</sub>:

$$\sigma_{pLQZ_{m3}} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) [-1 - 2\sqrt{2}a_1 + 4(\sqrt{2}a_3 + a_4) + \frac{1}{y} + \frac{2\sqrt{2}a_1}{\sqrt{y}} - 4\sqrt{2}a_3\sqrt{y} - 4a_4y - 2a_2 \ln y + \frac{8}{3}\sqrt{2}a_5(1 - y^{3/2}) + 4a_6(1 - y^2)]. \quad (17)$$

Заметим, что при высоких энергиях вычисленная погрешность начинает расти и для модифицированных вариантов метода LQZ оказывается больше, чем для обычного метода. Это обстоятельство отмечалось в [6] и приводилось обоснование того, что, скорее всего, при высоких энергиях результаты [2] неточны. К такому же предположению можно прийти, исходя из рисунка 1. Горизонтальная линия соответствует асимптотическому значению сечения первичного смещения при энергии электрона, стремящейся к бесконечности [5]. Все аналитические приближения при большой энергии дают близкие к асимптотике значения, и только значения [2] опускаются ниже асимптотического значения, что подчеркивает вероятность того, что эти значения не точны. В связи с этим мы отбрасывали несколько самых высоких энергий, результаты для которых в [2] вызывают сомнения.



$Z = 94$ .  $T_d = 12$  эВ. A – LQZ, B – LQZ<sub>m2</sub>, C – LQZ<sub>m3</sub>, D – [2], E – асимптотическое значение

**Рисунок 1 – Сечение первичного смещения атома**

В [13] приводятся значения  $T_d$  для углерода и кремния для карбида кремния – 18 и 24 эВ соответственно. В [2] есть данные для кремния при  $T_d = 24$  эВ. Для углерода есть данные для  $T_d = 20$  эВ, поэтому для сравнения результатов примем  $T_d(C) = 20$  эВ.

Пороговая энергия смещения для урана, согласно [14], – 34 эВ. Для сравнения с результатами [2] можно взять пороговую энергию 32 эВ. Пороговая энергия для плутония и эйнштейния вычислялась по приближенной формуле [15]:

$$T_d \cong 175kT_m,$$

где  $T_m$  – температура плавления, и затем выбирали ближайшее значение  $T_d$ , для которого есть данные в [1].

Замечено [16], что минимальная кинетическая энергия электрона, вызывающая смещение атома  $E_d$ , вычисленная из условия равенства максимальной переданной при столкновении с атомом энергии (3) пороговой энергии, не совпадает точно с указываемой в [2] для данной относительной атомной массы и  $T_d$ . Если подобрать  $T_d$  так, чтобы  $E_d$  совпало с приведенным в [2], результаты расчетов с помощью аналитических приближений оказываются ближе к результатам численных расчетов [2]. В таблице 1 приведены значения  $E_d$  [2] и скорректированные значения  $T_d$ .

Таблица 1 – Скорректированные значения пороговой энергии

Z = 6, M = 12,011		Z = 14, M = 28,09	
$E_d = 0,099715$ МэВ	$T_d = 19,9946$ эВ	$E_d = 0,247304$ МэВ	$T_d = 23,9935$ эВ
Z = 26, M = 55,85		Z = 82, M = 207,21,	
$E_d = 0,372867$	$T_d = 19,9946$ эВ	$E_d = 0,680176$	$T_d = 11,9968$ эВ
Z = 92, M = 238		Z = 94, M = 242,00	
$E_d = 1,440231$ МэВ	$T_d = 31,9914$ эВ	$E_d = 0,759153$ МэВ	$T_d = 11,9968$ эВ
Z = 99, M = 254,00			
$E_d = 0,956450$ МэВ	$T_d = 15,9957$ эВ		

Коэффициенты  $d_Z$  для модифицированных методов LQZ для ряда элементов, для которых проводились вычисления сечения смещения атома, можно посмотреть в [17–23].

В таблицах 2–8 приводятся результаты расчетов сечения первичного смещения атома для углерода, кремния, железа, свинца, урана, плутония и эйнштейния.

Таблица 2 – Сечение первичного смещения атома (барн). Углерод. Z = 6, M = 12,011,  $T_d = 19,9946$  эВ

E, МэВ	0,100	0,101	0,103	0,106	0,110	0,115	0,121	0,129	0,139
$\sigma_{MF}$	0,15	0,67	1,65	3,00	4,60	6,31	8,03	9,87	11,63
$\sigma_{pLQZ}$	0,15	0,67	1,66	3,02	4,61	6,33	8,06	9,90	11,68
$\sigma_{pLQZm2}$	0,15	0,67	1,66	3,02	4,61	6,33	8,06	9,90	11,68
$\sigma_{pLQZm3}$	0,15	0,67	1,66	3,02	4,61	6,33	8,06	9,90	11,68
$\sigma_p [1]$	0,15	0,67	1,66	3,02	4,62	6,33	8,06	9,91	11,68
E, МэВ	0,154	0,174	0,199	0,229	0,269	0,319	0,378	0,448	0,518
$\sigma_{MF}$	13,51	15,12	16,32	17,14	17,73	18,13	18,40	18,62	18,79
$\sigma_{pLQZ}$	13,56	15,17	16,37	17,20	17,79	18,19	18,46	18,68	18,85
$\sigma_{pLQZm2}$	13,56	15,17	16,37	17,20	17,79	18,19	18,46	18,68	18,85
$\sigma_{pLQZm3}$	13,56	15,17	16,37	17,20	17,79	18,19	18,46	18,68	18,85
$\sigma_p [1]$	13,56	15,17	16,38	17,20	17,80	18,19	18,46	18,68	18,85
E, МэВ	0,598	0,698	0,847	0,997	1,49	1,99	2,99	4,98	9,97
$\sigma_{MF}$	18,97	19,16	19,41	19,61	20,10	20,39	20,69	20,90	21,01

Окончание таблицы 2

$\sigma_{pLQZ}(\delta)$	19,02	19,21	19,45	19,66	20,13	20,41	20,71	20,91	21,01
$\sigma_{pLQZm2}$	19,02	19,21	19,45	19,66	20,13	20,41	20,71	20,91	21,01
$\sigma_{pLQZm3}$	19,02	19,21	19,45	19,66	20,13	20,42	20,71	20,91	21,01
$\sigma_p [1]$	19,02	19,21	19,45	19,66	20,13	20,42	20,71	20,93	21,02
E, МэВ	19,9	29,9	49,8	69,8	99,7	199			
$\sigma_{MF}$	21,01	21,01	20,99	20,99	20,98	20,97			
$\sigma_{pLQZ}$	21,02	21,01	21,00	20,99	20,98	20,97			
$\sigma_{pLQZm2}$	21,02	21,01	21,00	20,99	20,98	20,97			
$\sigma_{pLQZm3}$	21,02	21,01	21,00	20,99	20,98	20,97			
$\sigma_p [1]$	21,03	21,02	21,02	21,01	21,01	21,01			

Таблица 3 – Сечение первичного смещения (барн). Кремний. Z = 14, M = 28,09, T<sub>d</sub> = 23,9935 эВ

E, МэВ	0,249	0,252	0,257	0,264	0,274	0,286	0,301	0,321
$\sigma_{MF}$	0,27	0,75	1,51	2,50	3,81	5,24	6,83	8,68
$\sigma_{pLQZ}$	0,28	0,76	1,54	2,56	3,90	5,36	6,98	8,88
$\sigma_{pLQZm2}$	0,28	0,76	1,54	2,56	3,90	5,35	6,98	8,87
$\sigma_{pLQZm3}$	0,28	0,76	1,54	2,56	3,90	5,35	6,98	8,87
$\sigma_p [1]$	0,28	0,76	1,54	2,56	3,90	5,35	6,98	8,87
E, МэВ	0,346	0,383	0,432	0,494	0,568	0,667	0,791	0,939
$\sigma_{MF}$	10,67	13,12	15,76	18,43	21,00	23,72	26,38	28,81
$\sigma_{pLQZ}$	10,92	13,43	16,12	18,86	21,46	24,22	26,90	29,34
$\sigma_{pLQZm2}$	10,91	13,42	16,12	18,85	21,46	24,22	26,90	29,34
$\sigma_{pLQZm3}$	10,91	13,42	16,12	18,86	21,47	24,23	26,91	29,35
$\sigma_p [1]$	10,91	13,42	16,12	18,86	21,47	24,23	26,91	29,35
E, МэВ	1,11	1,28	1,48	1,73	2,1	2,47	3,7	4,94
$\sigma_{MF}$	30,96	32,60	34,09	35,50	36,96	37,97	39,71	40,42
$\sigma_{pLQZ}(\delta)$	31,47	33,09	34,56	35,94	37,36	38,32	39,96	40,62
$\sigma_{pLQZm2}$	31,48	33,10	34,57	35,94	37,36	38,33	39,96	40,61
$\sigma_{pLQZm3}$	31,49	33,11	34,58	35,95	37,37	38,33	39,96	40,61
$\sigma_p [1]$	31,48	33,11	34,58	35,95	37,37	38,33	39,97	40,62
E, МэВ	7,41	12,3	24,7	49,4	74,1	123	173	247
$\sigma_{MF}$	40,93	41,11	41,04	40,91	40,84	40,78	40,75	40,73
$\sigma_{pLQZ}$	41,06	41,18	41,07	40,91	40,84	40,78	40,75	40,73
$\sigma_{pLQZm2}$	41,05	41,18	41,06	40,91	40,84	40,78	40,75	40,73
$\sigma_{pLQZm3}$	41,05	41,17	41,06	40,91	40,84	40,78	40,75	40,73
$\sigma_p [1]$	41,07	41,20	41,07	40,95	40,91	40,88	40,87	40,86

В [6] вычислено сечение смещения атома в железе с помощью второго и третьего борновских приближений.

В данной работе пересчитаны значения сечения первичного смещения атома с уточненной пороговой энергией смещения.

Также выполнены расчеты с помощью метода LQZ и его модифицированных вариантов.

Результаты приведены в таблице 4. В скобках приводится относительная погрешность.

Таблица 4 – Сечение первичного смещения (барн). Железо.  $Z = 26$ ,  $M = 55,85$ ,  $T_d = 19,9946$  эВ

E, МэВ	$\sigma_{PMF} (\delta)$	$\sigma_{JWM} (\delta)$	$\sigma_{LQZ} (\delta)$	$\sigma_{LQZm2} (\delta)$	$\sigma_{LQZm3} (\delta)$	$\sigma_{PO} [3]$
0,376	0,45 (8,1)	0,48 (2,6)	0,49	0,49	0,49	0,49
0,380	1,02 (7,4)	1,08 (1,8)	1,11	1,10	1,10	1,10
0,387	2,00 (7,5)	2,12 (1,9)	2,17	2,16	2,17	2,16
0,398	3,49 (7,8)	3,71 (2,1)	3,80	3,79	3,79	3,79
0,413	5,46 (7,9)	5,81 (2,1)	5,94	5,93	5,93	5,93
0,432	7,84 (8,1)	8,35 (2,1)	8,54	8,53	8,53	8,53
0,454	10,46 (8,2)	11,15 (2,1)	11,39	11,39	11,40	11,39
0,484	13,82 (8,3)	14,74 (2,12)	15,06	15,05	15,07	15,06
0,522	17,76 (8,3)	18,97 (2,1)	19,36	19,36	19,39	19,37
0,577	22,95 (8,3)	24,52 (2,0)	25,00	25,00	25,06	25,02
0,652	29,20 (8,1)	31,17 (1,9)	31,75	31,75	31,82	31,78
0,745	35,84 (7,9)	38,21 (1,8)	38,87	38,86	38,95	38,90
0,857	42,55 (7,5)	45,26 (1,6)	45,98	45,97	46,06	46,01
1,00	49,52 (7,1)	52,52 (1,4)	53,27	53,25	53,32	53,28
1,19	56,73 (6,5)	59,93 (1,2)	60,66	60,64	60,69	60,66
1,41	63,00 (5,9)	66,27 (1,0)	66,94	66,93	66,96	66,94
1,67	68,44 (5,3)	71,70 (0,80)	72,27	72,26	72,27	72,27
1,93	72,45 (4,8)	75,61 (0,63)	76,08	76,09	76,09	76,09
2,23	75,86 (4,3)	78,88 (0,49)	79,25	79,25	79,26	79,27
2,61	78,95 (3,8)	81,77 (0,34)	82,02	82,03	82,03	82,05
3,16	81,88 (3,2)	84,43 (0,18)	84,55	84,55	84,57	84,58
3,72	83,77 (2,7)	86,06 (0,07)	86,10	86,08	86,10	86,12
5,59	86,54 (1,8)	88,20 (0,13)	88,09	88,04	88,07	88,08
7,45	87,32 (1,2)	88,58 (0,20)	88,44	88,37	88,39	88,41
11,1	87,49 (0,75)	88,32 (0,20)	88,17	88,10	88,10	88,15
18,6	87,01 (0,30)	87,46 (0,22)	87,35	87,28	87,27	87,27
37,2	86,15 (0,06)	86,34 (0,15)	86,27	86,23	86,21	86,21
74,5	85,51 (0,17)	85,58 (0,09)	85,54	85,52	85,51	85,65
111	85,26 (0,25)	85,29 (0,21)	85,27	85,26	85,25	85,47
186	85,03 (0,33)	85,05 (0,30)	85,03	85,03	85,02	85,31

Корректировка пороговой энергии смещения приводит к заметному уменьшению погрешности при небольших энергиях.

В таблице 5 представлены данные вычислений по методу LQZ и его модификациям для свинца ( $Z = 82$ ).

Для таких больших значений  $Z$  борновские приближения неприменимы. В скобках для первых пяти значений приведены относительные погрешности в процентах.

Они заметно снизились после корректировки пороговой энергии смещения атома.

Мы не учитывали при оценке средней относительной погрешности энергию 288 МэВ для урана, энергии выше 75,9 МэВ для плутония и выше 47,8 МэВ для эйнштейния.

Значения с высокой погрешностью в таблицах выделены полужирным шрифтом.

Таблица 5 – Сечение первичного смещения (барн). Свинец.  $Z = 82$ ,  $M = 207,21$ ,  $T_d = 11,9968$  эВ

E, МэВ	0,686	0,693	0,707	0,727	0,754	0,789	0,829
$\sigma_{pLQZ}$	3,01 (1,1)	6,88 (1,0)	15,38 (0,62)	29,01 (0,24)	49,46 (0,09)	78,26	112,71
$\sigma_{pLQZmod2}$	3,035 (0,16)	6,928 (0,32)	15,43 (0,33)	28,97 (0,38)	49,23 (0,38)	77,73	111,90
$\sigma_{pLQZmod3}$	3,046	6,97	15,58	29,32	49,84	78,52	112,65
$\sigma_{pO}$	3,04	6,95	15,48	29,08	49,42	77,98	112,13
E, МэВ	0,884	0,952	1,05	1,19	1,36	1,56	1,83
$\sigma_{pLQZ}$	160,41	217,02	290,44	376,18	452,87	513,62	561,76
$\sigma_{pLQZmod2}$	159,35	215,93	289,67	376,11	453,51	514,59	562,57
$\sigma_{pLQZmod3}$	159,48	215,42	287,94	373,38	450,74	512,65	561,87
$\sigma_{pO}$	159,68	215,75	289,11	375,21	452,69	514,18	562,78
E, МэВ	2,17	2,58	3,06	3,53	4,08	4,76	5,78
$\sigma_{pLQZ}(\delta)$	589,65	598,20	592,48	580,39	563,95	544,03	518,06
$\sigma_{pLQZmod2}$	589,91	597,89	591,81	579,66	563,36	543,77	518,36
$\sigma_{pLQZmod3}$	590,09	598,17	591,66	579,00	562,27	542,44	517,12
$\sigma_{pO}$	590,56	598,58	592,18	579,66	562,94	543,00	517,52
E, МэВ	6,8	10,2	13,6	20,4	34	68	136
$\sigma_{pLQZ}$	497,18	453,29	430,50	408,71	393,40	384,39	381,08
$\sigma_{pLQZmod2}$	497,99	455,14	432,74	411,00	395,21	385,26	381,26
$\sigma_{pLQZmod3}$	497,10	455,69	434,26	413,35	397,74	387,22	382,51
$\sigma_{pO}$	497,32	455,75	435,29	414,38	397,13	386,67	378,67

Таблица 6 – Сечение первичного смещения (барн). Уран.  $Z = 92$ ,  $M = 238,00$ ,  $T_d = 31,9914$  эВ

E, МэВ	1,45	1,46	1,49	1,54	1,59	1,67	1,75
$\sigma_{pLQZ}$	0,524	1,21	4,07	11,03	20,01	37,02	55,70
$\sigma_{pLQZmod2}$	0,543	1,24	4,11	11,01	19,89	36,74	55,28
$\sigma_{pLQZmod3}$	0,547	1,25	4,14	11,10	20,01	36,84	55,31
$\sigma_{pO}$	0,55	1,25	4,13	11,05	19,94	36,79	55,31
E, МэВ	1,87	2,01	2,23	2,52	2,88	3,31	3,88
$\sigma_{pLQZ}$	84,28	115,96	158,87	201,48	236,02	258,90	271,17
$\sigma_{pLQZmod2}$	83,79	115,53	158,72	201,72	236,54	259,45	271,44
$\sigma_{pLQZmod3}$	83,66	115,25	158,36	201,48	236,54	259,59	271,52
$\sigma_{pO}$	83,79	115,48	158,64	201,67	236,60	259,63	271,70
E, МэВ	4,60	5,47	6,48	7,48	8,64	10,00	12,20
$\sigma_{pLQZ}$	272,11	264,68	252,93	241,51	229,86	218,58	204,86
$\sigma_{pLQZmod2}$	271,93	264,09	252,14	240,73	229,24	218,26	205,04
$\sigma_{pLQZmod3}$	271,74	263,61	251,46	240,01	228,60	217,79	204,89
$\sigma_{pO}$	272,14	264,12	251,97	240,39	228,81	217,84	204,77
E, МэВ	14,40	21,60	28,80	43,20	72,00	144,00	288,00
$\sigma_{pLQZ}$	195,10	177,63	169,75	162,97	158,73	156,52	<b>155,84 (1,8)</b>
$\sigma_{pLQZmod2}$	195,74	179,19	171,68	165,03	160,52	157,72	<b>156,53 (2,26)</b>
$\sigma_{pLQZmod3}$	195,88	179,95	172,70	166,17	161,54	158,41	<b>156,94 (2,53)</b>
$\sigma_{pO}$	195,68	180,31	173,51	166,38	161,05	157,55	153,07

Таблица 7 – Сечение первичного смещения (барн). Плутоний.  $Z = 94$ ,  $M = 242,00$ ,  $T_d = 11,9968$  эВ

E, МэВ	0,766	0,774	0,789	0,812	0,842	0,880	0,926	0,986
$\sigma_{pLQZ}$	4,47	10,24	22,48	44,17	76,32	120,88	177,28	250,46
$\sigma_{pLQZm2}$	4,53	10,33	22,56	44,12	75,98	120,14	176,15	249,07
$\sigma_{pLQZm3}$	4,56	10,43	22,79	44,55	76,55	120,63	176,16	248,13
$\sigma_p [1]$	4,55	10,39	22,66	44,25	76,12	120,21	174,04	248,69
E, МэВ	1,06	1,17	1,32	1,51	1,74	2,04	2,42	2,88
$\sigma_{pLQZ}$	335,28	444,70	560,00	658,67	727,92	768,04	776,47	759,57
$\sigma_{pLQZm2}$	333,95	443,97	560,39	660,15	729,89	769,62	776,87	758,57
$\sigma_{pLQZm3}$	331,77	440,53	556,70	657,32	729,09	770,20	777,74	758,80
$\sigma_p [1]$	333,28	443,08	559,58	659,90	730,36	770,69	778,09	759,45
E, МэВ	3,41	3,94	4,55	5,31	6,45	7,59	11,3	15,1
$\sigma_{pLQZ} (\delta)$	728,41	695,98	661,98	626,27	585,11	555,11	499,88	473,71
$\sigma_{pLQZm2}$	726,37	693,52	659,59	624,44	584,52	555,79	503,61	478,98
$\sigma_{pLQZm3}$	725,75	692,35	658,19	623,16	583,79	555,73	505,17	481,34
$\sigma_p [1]$	726,63	693,21	658,81	623,36	583,53	555,25	505,25	483,34
E, МэВ	22,7	37,9	75,9	151	227	379		
$\sigma_{pLQZ}$	451,06	436,83	429,37	427,01 (1,32)	426,47 (3,15)	426,13 (4,73)		
$\sigma_{pLQZm2}$	457,23	442,56	433,38	429,40 (1,88)	428,13 (3,55)	427,14 (4,98)		
$\sigma_{pLQZm3}$	460,05	445,17	435,21	430,51 (2,15)	428,92 (3,74)	427,64 (5,10)		
$\sigma_p [1]$	461,70	443,89	433,19	421,46	413,44	406,89		

Таблица 8 – Сечение первичного смещения (барн). Эйнштейний.  $Z = 99$ ,  $M = 254,00$ ,  $T_d = 15,9957$  эВ

E, МэВ	0,966	0,975	0,994	1,02	1,06	1,10	1,16
$\sigma_{pLQZ}$	3,57	7,51	17,45	33,99	64,25	98,21	152,28
$\sigma_{pLQZm2}$	3,60	7,56	17,49	33,95	64,01	97,74	151,55
$\sigma_{pLQZm3}$	3,65	7,65	17,66	34,19	64,23	97,79	151,13
$\sigma_p [1]$	3,64	7,62	17,57	34,03	64,03	97,67	151,31
E, МэВ	1,24	1,33	1,48	1,67	1,91	2,19	2,58
$\sigma_{pLQZ}$	224,50	300,35	407,17	506,30	584,90	632,14	652,68
$\sigma_{pLQZm2}$	223,60	299,54	406,87	506,82	586,15	633,63	653,73
$\sigma_{pLQZm3}$	222,44	297,69	404,59	504,98	585,36	633,74	654,17
$\sigma_p [1]$	223,18	299,01	406,40	506,63	586,41	634,28	654,58
E, МэВ	3,06	3,63	4,30	4,97	5,73	6,69	8,12
$\sigma_{pLQZ} (\delta)$	644,05	616,73	580,65	547,75	516,35	484,97	451,21
$\sigma_{pLQZm2}$	644,08	615,63	578,76	545,60	514,36	483,56	450,93
$\sigma_{pLQZm3}$	644,15	615,13	577,89	544,69	513,64	483,21	451,13
$\sigma_p [1]$	644,80	615,99	578,75	545,19	513,82	483,00	450,59
E, МэВ	9,56	14,3	19,1	28,6	47,8	95,6	191
$\sigma_{pLQZ}$	427,75	387,20	369,62	355,16	346,10	341,08 (0,29)	339,14 (2,39)
$\sigma_{pLQZm2}$	428,60	390,67	374,32	360,49	350,96	344,44 (0,69)	341,11 (2,99)
$\sigma_{pLQZm3}$	429,24	391,98	375,76	361,82	351,94	345,00 (0,86)	341,41 (3,08)
$\sigma_p [1]$	428,68	392,67	378,03	362,81	350,13	342,09	331,21

В таблице 9 приведены средние значения модуля относительной погрешности всех методов. В скобках указаны результаты, полученные без корректировки пороговой энергии смещения.

Таблица 9 – Средняя относительная погрешность сечения первичного смещения атома  $\langle \delta \rangle$ , %

	C	Si	Fe	Pb	U	Pu	Es
MF	0,28 (0,63)	1,39	5,06(5,24)	–	–	–	–
JWM	–	–	1,13(1,33)	–	–	–	–
LQZ	0,10	0,091	0,10	0,44(0,59)	0,87	0,67(0,80)	0,66(0,76)
LQZ <sub>m2</sub>	0,10	0,089	0,090	0,24(0,42)	0,27	0,24(0,42)	0,25(0,41)
LQZ <sub>m3</sub>	0,10	0,084	0,10	0,31	0,19	0,27(0,32)	0,24(0,32)

Для углерода погрешность всех методов достаточно мала.

Для кремния средняя погрешность метода Маккинли – Фешбаха превышает один процент, тогда как погрешности метода LQZ и модификаций менее 0,1 %. При этом модифицированные методы незначительно точнее обычного метода.

Для углерода из 33 значений с данными [2] по методу MF совпадают два значения, по методу LQZ и LQZ<sub>m2</sub> – 20, по LQZ<sub>m3</sub> – 21 значение.

Для кремния по методу MF нет совпадений, по LQZ – 10 совпадений, по LQZ<sub>m2</sub> – 14, по LQZ<sub>m3</sub> – 21.

Для тяжелых элементов модифицированные методы значительно точнее обычного метода LQZ.

### Расчет полного сечения смещения атома электроном

В данном разделе получены аналитические выражения для полного сечения смещения атома в рамках методов LQZ, LQZ<sub>m2</sub> и LQZ<sub>m3</sub>, а также во втором и третьем борновском приближении. Использовалась каскадная функция, получаемая в простейшей модели Кинчина – Пиза.

При использовании этой модели  $\sigma_{tot} = \sigma_p$  при  $T_m \leq 2T_d$ . Для  $T_m > 2T_d$  получаются следующие выражения для полного сечения:

$$\begin{aligned} \sigma_{totLQZ} = & \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left[ \frac{a_0}{2y} + \frac{2(\sqrt{2}-1)a_1}{\sqrt{y}} + 2a_2 \ln 2 + 4(2 - \sqrt{2})a_3 \sqrt{y} + 4a_4 y + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2y} \{-a_0 \ln(2y) + 2a_1(\sqrt{2} - 2\sqrt{y}) + 2a_2(1 - 2y) + \frac{4\sqrt{2}}{3} a_3(1 - (2y)^{3/2}) + 2a_4(1 - 4y^2)\} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{totLQZm2} = & \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left[ \frac{1}{2y} + \frac{2(\sqrt{2}-1)a_1}{\sqrt{y}} + 2a_2 \ln 2 + 4(2 - \sqrt{2})a_3 \sqrt{y} + 4a_4 y + \frac{8}{3}(\sqrt{2} - 4)a_5 y^{3/2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2y} \{-\ln(2y) + 2a_1(\sqrt{2} - 2\sqrt{y}) + 2a_2(1 - 2y) + \frac{4\sqrt{2}}{3} a_3(1 - (2y)^{3/2}) + 2a_4(1 - 4y^2) + \frac{8}{5} a_5(\sqrt{2} - 8y^{5/2})\} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{totLQZm3} = & \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left[ \frac{1}{2y} + \frac{2(\sqrt{2}-1)a_1}{\sqrt{y}} + 2a_2 \ln 2 + 4(2 - \sqrt{2})a_3 \sqrt{y} + \right. \\ & \left. + 4a_4 y + \frac{8}{3}(\sqrt{2} - 4)a_5 y^{3/2} + 12a_6 y^2 + \frac{1}{2y} \{-\ln(2y) + 2a_1(\sqrt{2} - 2\sqrt{y}) + 2a_2(1 - 2y) + \right. \\ & \left. + \frac{4\sqrt{2}}{3} a_3(1 - (2y)^{3/2}) + 2a_4(1 - 4y^2) + \frac{8}{5} a_5(\sqrt{2} - 8y^{5/2}) + \frac{8}{3} a_6(1 - 8y^3)\} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sigma_{totMF} = \frac{\pi Z^2 e^4}{2m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left\{ \frac{1 - \beta^2 - \ln(2y)}{y} + 2\beta^2 (1 - \ln(2)) + \right. \\ \left. + \pi Z \alpha \beta \left[ \frac{1}{y} + 4 \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{y}} + 2(1 - \ln(2)) \right] \right\}. \quad (21)$$

$$\sigma_{totJWM} = \sigma_{totMF} + \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) (Z\alpha)^2 H(y), \quad (22)$$

$$H(y) = \frac{1}{24y} [12 - 4\pi^2 + \beta^2 (7\pi^2 - 18 - 12\pi^2 \ln 2 + 6\zeta(3)) + 12\pi^2 \beta^2 \ln(1 + \sqrt{2y}) + 24(\ln(2y)) \times \\ \times (\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{2y}}) - \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{2y}}))] + 2(L_2(\frac{1}{\sqrt{2y}}) - L_2(-\frac{1}{\sqrt{2y}})) + 3\beta^2 \ln(1 - 2y)(\ln(2y))^2 + 12\pi^2 \sqrt{y} \times \\ \times (2 - 2\sqrt{2} - \beta^2) + 2y(4\pi^2 - 12 + \beta^2(18 + 5\pi^2)) + 12\pi^2 \beta^2 (\ln(1 + \sqrt{y}) - \ln(1 + \sqrt{2y})) + \pi^2 (4 - \beta^2) \times \\ \times \ln y + 24 \ln y \ln \frac{1 - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} + 12(\ln y)^2 - 9\beta^2 (\ln y)^2 \ln(1 - y) - 2(\ln y)^3 + \ln(2y)(12 - 4\pi^2 - 18\beta^2 + \\ + \pi^2 \beta^2) + 24 \ln(2y) \ln \frac{1 + \sqrt{2y}}{1 - \sqrt{2y}} + 3(\ln(2y))^2 (\beta^2 - 6) + 9\beta^2 (\ln(2y))^2 \ln(1 - 2y) + 2(\ln(2y))^3 + 192 \times \\ \times (y - \sqrt{y}) L_2(1 - \sqrt{y}) - 96(1 - 2\sqrt{2y} + 2y) L_2(1 - \sqrt{2y}) + 12(\beta^2(1 - 2y) - 4\sqrt{2y} + 2y \beta^2 \ln(2y)) \times \\ \times L_2(1 - 2y) + 24(2\sqrt{y} - \beta^2 y \ln y) L_2(1 - y) + 96y((1 - \beta^2 \ln y) L_2(\sqrt{y}) - (1 + \beta^2 \ln y) L_2(-\sqrt{y}) + \\ + L_2(-\sqrt{2y}) - L_2(\sqrt{2y})) + 12\beta^2 y (\ln y L_2(y) + 3L_3(y)) + 6\beta^2 (1 + 6y) (\ln(2y) L_2(2y) - L_3(2y))].$$

Здесь  $L_3$  – полилогарифм,  $\zeta(3)$  – постоянная Аперри.

Ниже представлены результаты расчетов полного сечения смещения для некоторых элементов.

Так как согласно каскадной модели Кинчина – Пиза при переданной энергии  $T < 2T_d$  полное сечение смещения совпадает с сечением первичного смещения, то приводятся данные, начиная с энергии, при которой полное сечение отличается от сечения первичного смещения, кроме случая кремния и третьего борновского приближения, т. к. в третьем борновском приближении сечение первичного смещения для кремния не вычислялось.



Таблица 10 – Полное сечение смещения (барн). Углерод.  $Z = 6$ ,  $M = 12,011$ ,  $T_d = 19,99462$  эВ

E, МэВ	0,199	0,229	0,269	0,319	0,378	0,448	0,518	0,598
$\sigma_{totMF}$	16,35	17,43	18,52	19,60	20,66	21,77	22,80	23,90
$\sigma_{totLQZ}$	16,41	17,49	18,59	19,67	20,73	21,85	22,87	23,97
$\sigma_{totLQZm2}$	16,41	17,49	18,59	19,67	20,73	21,85	22,87	23,97
$\sigma_{totLQZm3}$	16,41	17,49	18,59	19,67	20,73	21,85	22,87	23,97
$\sigma_{tot}$ [2]	16,41	17,50	18,59	19,67	20,73	21,85	22,87	23,98
E, МэВ	0,698	0,847	0,997	1,49	1,99	2,99	4,98	9,97
$\sigma_{totMF}$	25,20	27,02	28,72	33,61	37,71	44,17	53,18	66,49
$\sigma_{totLQZ}$	25,27	27,09	28,80	33,68	37,78	44,25	53,26	66,57
$\sigma_{totLQZm2}$	25,28	27,09	28,80	33,69	37,78	44,25	53,26	66,57
$\sigma_{totLQZm3}$	25,28	27,09	28,80	33,69	37,78	44,25	53,26	66,57
$\sigma_{tot}$ [1]	25,28	27,10	28,80	33,69	37,79	44,26	53,27	66,57
E, МэВ	19,9	29,9	49,8	69,8	99,7	199		
$\sigma_{totMF}$	80,39	88,73	99,28	106,30	113,73	128,17		
$\sigma_{totLQZ}$	80,47	88,81	99,36	106,38	113,81	128,25		
$\sigma_{totLQZm2}$	80,47	88,81	99,36	106,38	113,81	128,25		
$\sigma_{totLQZm3}$	80,47	88,81	99,36	106,38	113,81	128,25		
$\sigma_{tot}$ [1]	80,48	88,83	99,39	106,42	113,87	128,33		

Таблица 11 – Полное сечение смещения (барн). Кремний.  $Z = 14$ ,  $M = 28,09$ ,  $T_d = 23,9935$  эВ

E, МэВ	0,494	0,568	0,667	0,791	0,939	1,11	1,28
$\sigma_{totMF}$	18,56	21,50	24,97	28,84	32,93	37,15	40,94
$\sigma_{totLQZ}$	18,98	21,98	25,52	29,42	33,56	37,81	41,63
$\sigma_{totLQZm2}$	18,98	21,98	25,52	29,42	33,56	37,82	41,63
$\sigma_{totLQZm3}$	18,98	21,99	25,53	29,44	33,57	37,83	41,64
$\sigma_{tot}$ [1]	18,98	21,98	25,52	29,43	33,57	37,83	41,64
E, МэВ	1,48	1,73	2,1	2,47	3,7	4,94	7,41
$\sigma_{totMF}$	44,97	49,52	55,46	60,65	74,37	84,75	99,89
$\sigma_{totLQZ}$	45,69	50,26	56,22	61,44	75,19	85,59	100,75
$\sigma_{totLQZm2}$	45,70	50,27	56,23	61,44	75,19	85,59	100,74
$\sigma_{totLQZm3}$	45,71	50,28	56,23	61,44	75,19	85,58	100,73
$\sigma_{tot}$ [1]	45,71	50,28	56,24	61,45	75,21	85,60	100,76
E, МэВ	12,3	24,7	49,4	74,1	123	173	247
$\sigma_{totMF}$	119,47	147,09	174,94	191,32	211,85	225,69	240,14
$\sigma_{totLQZ}$	120,34	147,96	175,82	192,20	212,73	226,56	241,02
$\sigma_{totLQZm2}$	120,33	147,95	175,81	192,19	212,72	226,56	241,01
$\sigma_{totLQZm3}$	120,32	147,94	175,79	192,18	212,71	226,54	241,00
$\sigma_{tot}$ [1]	120,34	147,95	175,84	192,26	212,85	226,74	241,24

Таблица 12 – Полное сечение смещения, вычисленное в третьем борновском приближении (барн). Кремний.  $Z = 14$ ,  $M = 28,09$ ,  $T_d = 23,9935$  эВ

E, МэВ	0,249	0,252	0,257	0,264	0,274	0,286	0,301	0,321
$\sigma_{totJWM}$	0,28	0,76	1,53	2,55	3,88	5,34	6,94	8,84
E, МэВ	0,346	0,383	0,432	0,494	0,568	0,667	0,791	0,939
$\sigma_{totJWM}$	10,87	13,38	16,22	19,02	21,97	25,44	29,31	33,39
E, МэВ	1,11	1,28	1,48	1,73	2,1	2,47	3,7	4,94
$\sigma_{totJWM}$	37,61	41,40	45,43	49,98	55,91	61,10	74,82	85,19
E, МэВ	7,41	12,3	24,7	49,4	74,1	123	173	247
$\sigma_{totJWM}$	100,33	119,90	147,51	175,36	191,74	212,27	226,11	240,56

Таблица 13 – Полное сечение смещения (барн). Железо.  $Z = 26$ ,  $M = 55,85$ ,  $T_d = 19,9946$  эВ

E, МэВ	0,652	0,745	0,857	1,00	1,19	1,41	1,67
$\sigma_{totMF}$	29,20	36,16	43,74	52,44	62,72	73,23	84,20
$\sigma_{totJWM}$	32,35	39,32	46,91	55,62	65,92	76,44	87,42
$\sigma_{totLQZ}$	31,77	39,22	47,28	56,46	67,20	78,10	89,38
$\sigma_{totLQZm2}$	31,76	39,22	47,27	56,44	67,19	78,10	89,39
$\sigma_{totLQZm3}$	31,84	39,31	47,36	56,53	67,26	78,14	89,42
$\sigma_{tot} [2]$	31,79	39,25	47,31	56,48	67,22	78,12	89,41
E, МэВ	1,93	2,23	2,61	3,16	3,72	5,59	7,45
$\sigma_{totMF}$	93,94	103,97	115,23	129,32	141,65	173,45	196,52
$\sigma_{totJWM}$	97,16	107,19	118,45	132,53	144,86	176,63	199,68
$\sigma_{totLQZ}$	99,35	109,57	120,99	135,24	147,68	179,66	202,81
$\sigma_{totLQZm2}$	99,35	109,58	121,00	135,25	147,68	179,63	202,76
$\sigma_{totLQZm3}$	99,37	109,59	121,01	135,26	147,69	179,64	202,77
$\sigma_{tot} [2]$	99,37	109,60	121,03	135,28	147,73	179,67	202,81
E, МэВ	11,1	18,6	37,2	74,5	111	186	
$\sigma_{totMF}$	229,15	272,02	330,18	388,75	422,44	466,09	
$\sigma_{totJWM}$	232,28	275,12	333,24	391,78	425,46	469,11	
$\sigma_{totLQZ}$	235,50	278,41	336,59	395,15	428,84	472,48	
$\sigma_{totLQZm2}$	235,42	278,30	336,45	395,02	428,71	472,36	
$\sigma_{totLQZm3}$	235,42	278,30	336,44	394,99	428,68	472,33	
$\sigma_{tot} [2]$	235,47	278,28	336,40	395,09	428,91	472,74	

Таблица 14 – Полное сечение смещения (барн).  $Z = 82$ ,  $M = 207,21$ ,  $T_d = 11,9968$  эВ

E, МэВ	1,19	1,36	1,56	1,83	2,17	2,58
$\sigma_{totLQZ}$	376,97	460,81	539,65	623,98	707,20	786,18
$\sigma_{totLQZmod2}$	376,91	461,39	540,45	624,58	707,30	785,80
$\sigma_{totLQZmod3}$	374,18	458,68	538,55	623,80	707,30	785,99
$\sigma_{totO}$	376,03	460,58	540,07	624,80	707,94	786,53
E, МэВ	3,06	3,53	4,08	4,76	5,78	6,8
$\sigma_{totLQZ} (\delta)$	859,91	919,25	977,66	1038,41	1113,39	1175,27
$\sigma_{totLQZmod2}$	859,24	918,51	977,01	1037,99	1113,41	1175,73
$\sigma_{totLQZmod3}$	859,20	918,13	976,31	1037,05	1112,41	1174,86
$\sigma_{totO}$	859,77	918,76	976,92	1037,60	1112,86	1175,19
E, МэВ	10,2	13,6	20,4	34	68	136
$\sigma_{totLQZ}$	1327,75	1435,29	1586,87	1778,39	2039,38	2301,28
$\sigma_{totLQZmod2}$	1329,40	1437,71	1590,15	1782,33	2043,61	2305,32
$\sigma_{totLQZmod3}$	1329,42	1438,61	1592,27	1785,74	2048,16	2310,51
$\sigma_{totO}$	1329,45	1439,26	1592,75	1785,33	2047,87	2306,42

Таблица 15 – Полное сечение смещения (барн). Уран.  $Z = 92$ ,  $M = 238,00$ ,  $T_d = 31,9914$  эВ

E, МэВ	2,52	2,88	3,31	3,88	4,60	5,47
$\sigma_{totLQZ}$	202,87	244,27	281,83	319,56	355,57	388,95
$\sigma_{totLQZm2}$	203,10	244,75	282,28	319,75	355,39	388,44
$\sigma_{totLQZm3}$	202,87	244,75	282,44	319,89	355,33	388,14
$\sigma_{tot} [1]$	203,07	244,83	282,50	320,06	355,66	388,59
E, МэВ	6,48	7,48	8,64	10,00	12,20	14,40
$\sigma_{totLQZ}$	419,39	443,98	467,91	491,60	523,21	549,22
$\sigma_{pLQZm2}$	418,69	443,24	467,25	491,12	523,10	549,48
$\sigma_{totLQZm3}$	418,20	442,68	466,68	490,62	522,77	549,34
$\sigma_{tot} [1]$	418,66	443,06	466,97	490,83	522,83	549,33
E, МэВ	21,60	28,80	43,20	72,00	144,00	288,00
$\sigma_{totLQZ}$	612,14	656,56	719,13	798,07	905,43	1013,00
$\sigma_{totLQZm2}$	613,42	658,52	721,92	801,63	909,63	1017,52
$\sigma_{totLQZm3}$	613,84	659,34	723,21	803,37	911,74	1019,83
$\sigma_{tot} [1]$	614,08	659,74	723,32	803,21	911,02	1015,41

Таблица 16 – Полное сечение смещения (барн). Плутоний.  $Z = 94$ ,  $M = 242,00$ ,  $T_d = 11,9968$  эВ

E, МэВ	1,32	1,51	1,74	2,04	2,42	2,88	3,41
$\sigma_{totLQZ}$	561,35	672,20	772,76	871,17	964,94	1051,82	1130,54
$\sigma_{totLQZm2}$	561,74	673,60	774,50	872,48	965,22	1050,93	1128,78
$\sigma_{totLQZm3}$	558,06	671,09	773,64	872,85	965,89	1051,17	1128,36
$\sigma_{tot} [1]$	560,95	673,34	774,95	873,53	966,45	1051,97	1129,33
E, МэВ	3,94	4,55	5,31	6,45	7,59	11,3	15,1
$\sigma_{totLQZ} (\delta)$	1194,92	1257,24	1322,77	1404,09	1471,60	1636,17	1756,35
$\sigma_{totLQZm2}$	1192,74	1254,98	1320,78	1402,89	1471,33	1638,74	1761,07
$\sigma_{totLQZm3}$	1191,86	1253,82	1319,56	1401,89	1470,72	1639,42	1762,75
$\sigma_{tot} [1]$	1192,87	1254,60	1320,19	1402,13	1470,79	1639,37	1763,80
E, МэВ	22,7	37,9	75,9	151	227	379	
$\sigma_{totLQZ}$	1926,26	2141,33	2434,54	2726,19	2899,36	3117,29	
$\sigma_{totLQZm2}$	1933,68	2151,33	2446,73	2739,51	2913,05	3131,26	
$\sigma_{totLQZm3}$	1936,60	2155,45	2451,86	2745,18	2918,91	3137,27	
$\sigma_{tot} [1]$	1937,55	2154,96	2450,35	2735,09	2899,70	3105,55	

Таблица 17 – Полное сечение смещения (барн). Эйнштейний.  $Z = 99$ ,  $M = 254,00$ ,  $T_d = 15,9957$  эВ

E, МэВ	1,67	1,91	2,19	2,58	3,06	3,63
$\sigma_{totLQZ}$	508,39	601,00	679,79	759,87	832,29	897,74
$\sigma_{totLQZm2}$	508,90	602,18	681,10	760,74	832,28	896,81
$\sigma_{totLQZm3}$	507,07	601,38	681,16	761,12	832,39	896,47
$\sigma_{tot} [1]$	508,73	602,44	681,75	761,61	833,08	897,36
E, МэВ	4,30	4,97	5,73	6,69	8,12	9,56
$\sigma_{totLQZ} (\delta)$	958,39	1008,23	1056,14	1107,62	1171,55	1225,33
$\sigma_{totLQZm2}$	956,78	1006,33	1054,24	1106,02	1170,68	1225,31
$\sigma_{totLQZm3}$	956,10	1005,54	1053,48	1105,43	1170,43	1225,37
$\sigma_{tot} [1]$	957,00	1006,32	1053,95	1105,79	1170,40	1225,35
E, МэВ	14,3	19,1	28,6	47,8	95,6	191
$\sigma_{totLQZ}$	1358,33	1454,45	1589,20	1761,43	1994,63	2227,90
$\sigma_{totLQZm2}$	1360,83	1458,79	1595,80	1770,20	2005,22	2239,43
$\sigma_{totLQZm3}$	1361,63	1460,02	1597,46	1772,22	2007,50	2241,84
$\sigma_{tot} [1]$	1361,97	1461,12	1598,12	1771,45	2004,77	2229,62

В таблице 18 приводятся значения средней относительной погрешности для полного сечения смещения атома.

Таблица 18 – Средняя относительная погрешность полного сечения смещения атома  $\langle \delta \rangle$ , %

	C	Si	Fe	Pb	U	Pu	Es
MF	0,30	1,55	5,70	–	–	–	–
JWM	–	0,40	1,71	–	–	–	–
LQZ	0,086	0,063	0,079	0,30	0,63	0,43	0,40
LQZ <sub>m2</sub>	0,085	0,058	0,068	0,14	0,18	0,15	0,16
LQZ <sub>m3</sub>	0,085	0,059	0,085	0,24	0,13	0,21	0,18

Как и для сечения первичного смещения, для полного сечения смещения все методы дают среднюю погрешность значительно меньше 1 % для углерода.

Для кремния погрешность метода МакКинли – Фешбаха больше 1,5 %, а погрешность метода LQZ и его модификаций менее 0,1 %. Для железа погрешность метода LQZ и его модификаций остается менее 0,1 %. Погрешность расчета полного сечения смещения по методу МакКинли – Фешбаха больше, чем погрешность расчета сечения первичного смещения, а для метода LQZ и его модификаций – наоборот.

Как и для сечения первичного смещения, при высоких энергиях отличие метода LQZ и его модификаций и данных [2] растет, что, возможно, связано с погрешностью численных расчетов в [2].

Для рассмотренных примеров средняя погрешность третьего борновского приближения для расчета полного сечения смещения атома меньше погрешности второго борновского приближения. Для железа последняя превышает 5 %. Погрешности метода LQZ и его модификаций значительно меньше погрешностей борновских приближений. LQZ<sub>m3</sub> для железа оказался менее точен, чем обычный метод LQZ.

По критерию средней относительной ошибки для нормированного моттовского сечения трижды модифицированный метод LQZ становится точнее дважды модифицированного, начиная с  $Z = 101$  [21]. Однако для рассмотренных примеров в случае урана трижды модифицированный метод привел к меньшей погрешности и для  $\sigma_p$  и для  $\sigma_{tot}$ . Для тяжелых элементов модифицированные методы при расчете полного сечения смещения так же, как и для сечения первичного смещения атома, показали более высокую точность, чем обычный метод LQZ.

### Применение укороченных вариантов метода Лиджиана – Кинга – Женгминга для расчета сечения смещения атома позитроном

В [24] рассчитывалось сечение смещения атомов позитронами. Было показано, что сечения смещения позитронами всегда меньше, чем электронами, и что приближение МакКинли – Фешбаха даже менее применимо к случаю позитронов, чем к случаю электронов.

Ранее в ряде работ [25] мы рассмотрели варианты укороченного метода LQZ и показали, что, несмотря на использование меньшего числа подгоночных параметров, чем в традиционном методе, во многих применениях точность укороченных вариантов остается достаточно высокой. В данном разделе мы применили метод LQZ и укороченные варианты для расчета сечения смещения атомов золота позитронами. Мы не имеем возможности для точного сопоставления результатов численного интегрирования моттовского сечения и наших результатов, т. к. результаты для позитронов не табулированы. Поэтому мы будем сравнивать графики из работы [24] с полученными нами.

В укороченных вариантах метода LQZ нормированное моттовское сечение вычисляется по формуле (индекс  $ma$  означает число коэффициентов  $a_j$ , входящих в формулу для НМС):

$$R_{LQZ_{ma}}(\theta, Z, E) = 1 + \sum_{j=1}^m a_j(Z, E)(1 - \cos \theta)^{j/2}. \quad (23)$$

Так как укороченные варианты LQZ отличаются от модифицированных вариантов меньшим числом коэффициентов  $a_j$ , то из выражений для сечения смещения атомов (12) (19) можно сразу получить выражения в рамках укороченных методов:

$$\sigma_{p3a} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left[ -1 - 2\sqrt{2}a_1 + 4\sqrt{2}a_3 + \frac{1}{y} + \frac{2\sqrt{2}a_1}{\sqrt{y}} - 4\sqrt{2}a_3\sqrt{y} - 2a_2 \ln y \right]. \quad (24)$$

$$\sigma_{p2a} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left[ -1 - 2\sqrt{2}a_1 + \frac{1}{y} + \frac{2\sqrt{2}a_1}{\sqrt{y}} - 2a_2 \ln y \right]. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{tot3a} = & \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left[ \frac{1}{2y} + \frac{2(\sqrt{2}-1)a_1}{\sqrt{y}} + 2a_2 \ln 2 + 4(2-\sqrt{2})a_3 \sqrt{y} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2y} \{-\ln(2y) + 2a_1(\sqrt{2}-2\sqrt{y}) + 2a_2(1-2y) + \frac{4\sqrt{2}}{3}a_3(1-(2y)^{3/2})\} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\sigma_{tot2a} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left[ \frac{1}{2y} + \frac{2(\sqrt{2}-1)a_1}{\sqrt{y}} + 2a_2 \ln 2 + \frac{1}{2y} \{-\ln(2y) + 2a_1(\sqrt{2}-2\sqrt{y}) + 2a_2(1-2y)\} \right]. \quad (27)$$

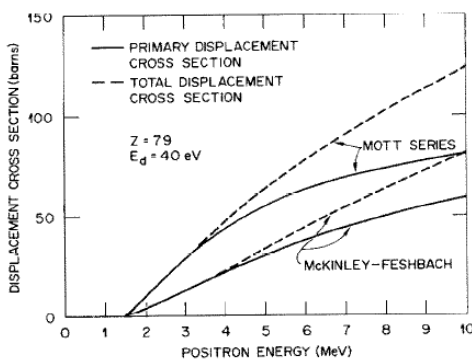
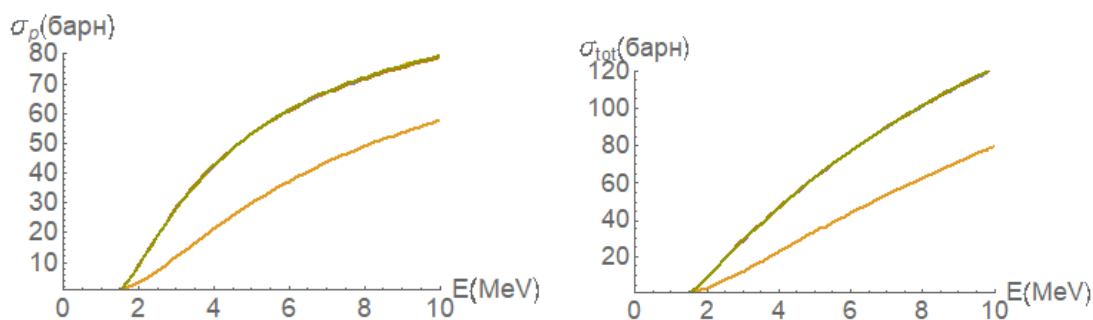
Коэффициенты  $a_j$  в методе LQZ и укороченных вариантах рассчитываются по формуле ( $L$  в разных вариантах укороченного метода принимает значения от 3 до 6):

$$a_j(Z, E) = \sum_{k=1}^L d_z(j, k) (\beta - \bar{\beta})^{k-1} \quad (28)$$

Подгоночные коэффициенты  $d_z$  для укороченных вариантов для  $Z = -79$  приводятся в работах [26–28].

Расчеты сечения смещения проводили для укороченных вариантов 3a6d, 3a5d, 3a4d, 3a3d, 2a6d, 2a5d, 2a4d, 2a3d и по обычному методу LQZ.

На рисунке 2 изображена зависимость сечения первичного смещения и полного сечения смещения атома золота позитроном от энергии для пороговой энергии смещения 40 эВ. Для сравнения приводится рисунок 1 из работы [24]. Нижняя кривая на каждом графике – сечение смещения в приближении МакКинли – Фешбаха.

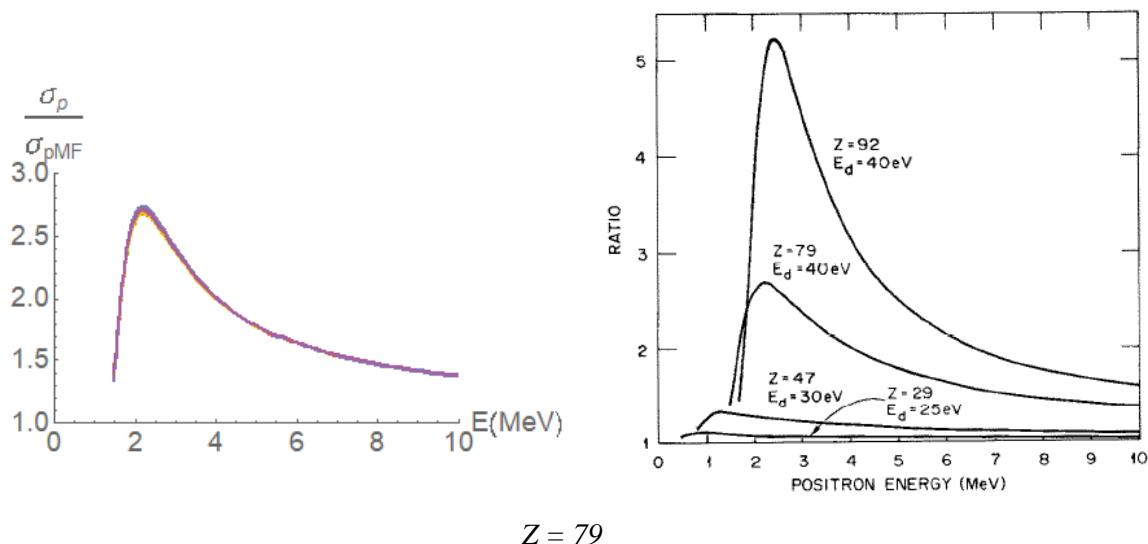


$Z = 79$

**Рисунок 2 – Сечение первичного смещения и полное сечение смещения атома позитроном**

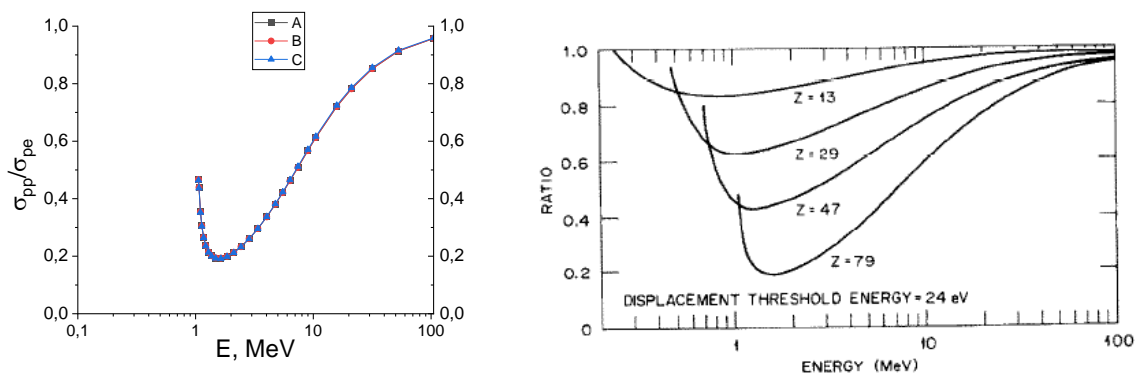
На рисунке 3 изображено отношение сечения первичного смещения атома золота позитроном к вычисленному в приближении МакКинли – Фешбаха, для сравнения приведен рисунок 2 [24].

Графики, рассчитанные по методу LQZ и всем укороченным вариантам, практически сливаются и согласуются с результатом численного расчета [24].



**Рисунок 3 – Отношение сечения первичного смещения атома позитроном к сечению, вычисленному в приближении МакКинли – Фешбаха**

На рисунке 4 изображено отношение сечений первичного смещения атома золота для позитронов и для электронов для пороговой энергии смещения 24 эВ. Для сравнения приводится рисунок 4 [24]. Данные по сечению смещения для электронов брались из [2].



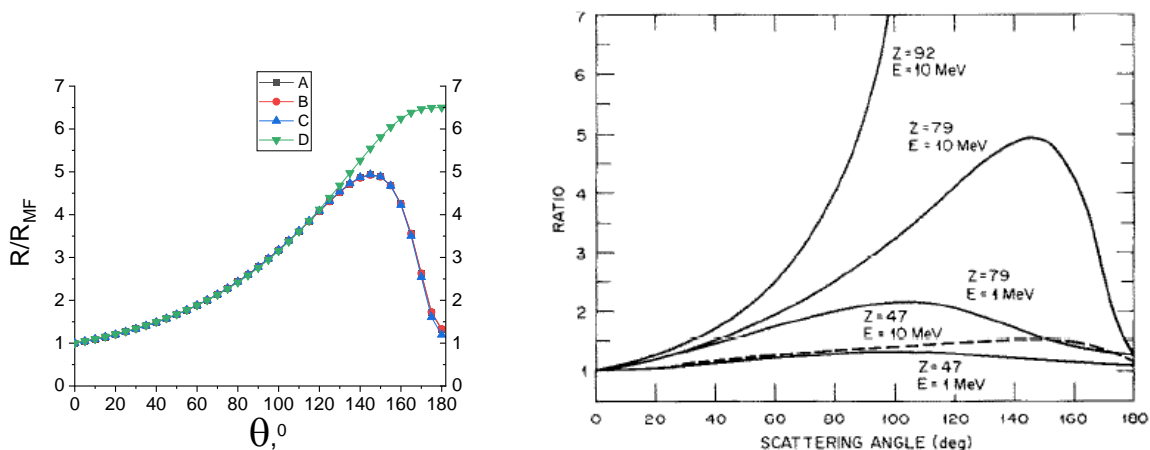
*Z = 79. A – метод LQZ, B – метод 3abd, C – метод 2a3d.*

**Рисунок 4 – Отношение сечения первичного смещения атома позитроном к сечению первичного смещения атома электроном**

Результаты хорошо согласуются с [24]. При этом даже использование метода 2a3d дает высокую точность.

На рисунке 5 изображено отношение моттовского дифференциального сечения рассеяния позитронов ядром золота к полученному в приближении МакКинли – Фешбаха для энергии позитронов 10 МэВ. Для сравнения приводится рисунок 3 из работы [24].

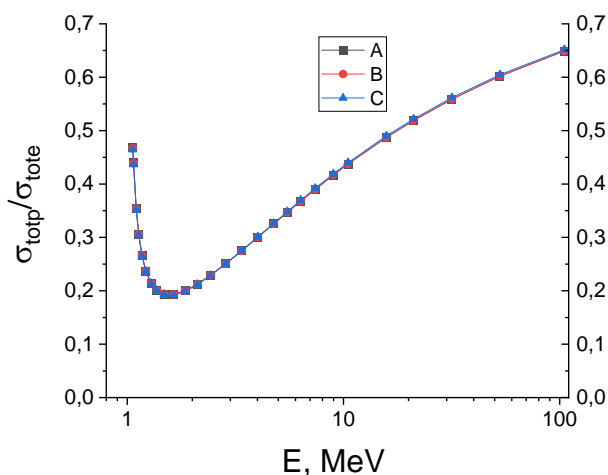
Из рисунка следует, что метод  $2a3d$  при высоких энергиях неприменим для рассеяния на большие углы. Однако, основной вклад в сечение смещения атома при высоких энергиях вносит рассеяние на малые углы, т. к. сечение рассеяния быстро убывает с ростом угла рассеяния. Поэтому все укороченные методы дают хорошую точность при расчете сечения смещения атома для широкого диапазона энергий.



$Z = 79$ .  $E = 10$  МэВ.  $A$  – численный расчет моттовского сечения,  $B$  –  $LQZ$ ,  $C$  –  $3ab d$ ,  $D$  –  $2a3d$ .

**Рисунок 5 – Отношение дифференциального сечения рассеяния атома позитроном к дифференциальному сечению рассеяния, вычисленному в приближении МакКинли – Фешбаха**

Мы рассчитали отношение полных сечений смещения атома золота позитронами и электронами. Для расчета использовалась модель Кинчина – Пиза, как и в [24]. Результаты приведены на рисунке 6.



$Z = 79$ .  $A$  – метод  $LQZ$ ,  $B$  – метод  $3ab d$ ,  $C$  – метод  $2a3d$ .

**Рисунок 6 – Отношение полного сечения смещения атома позитроном к полному сечению смещения электроном**

Все методы дают близкие результаты. Отличие сечений смещения для позитронов и электронов при высоких энергиях выше, чем для сечений первичного смещения.

При энергии 105 МэВ отношение сечений 0,65, в то время как для сечений первичного смещения отношение составляет 0,96.

Отметим, что в [29] отношение сечений полного смещения позитронов и электронов оказывается выше. Возможно, это связано с использованием другой каскадной функции.

### Заклучение

В работе рассмотрено использование аппроксимаций моттовского дифференциального сечения рассеяния для расчета сечения смещения атома релятивистскими электронами и позитронами. Получены следующие результаты:

1. Получено аналитическое выражения для расчета сечения первичного смещения атома в рамках трижды модифицированного метода Лиджиана – Кинга – Женгминга.

2. Получены аналитические выражения для расчета полного сечения смещения атома при использовании каскадной функции Кинчина – Пиза в рамках метода Лиджиана – Кинга – Женгминна и его второй и третьей модификаций, а также в рамках второго борновского приближения.

3. Получено выражение для полного сечения смещения атома в третьем борновском приближении через специальные функции.

4. Вычислены сечения смещения атома электроном в углероде, кремнии, железе, свинце, уране, плутонии и эйнштейнии с корректировкой пороговой энергии смещения атома. Для рассмотренных примеров средняя погрешность борновских приближений для расчета полного сечения смещения несколько больше, чем для расчета сечения первичного смещения. Средняя погрешность третьего борновского приближения в несколько раз меньше, чем второго. С ростом порядкового номера элемента погрешности борновских приближений растут.

5. Погрешности метода LQZ и его модификаций существенно меньше, чем борновских приближений. При этом средние погрешности для полного сечения смещения оказываются меньше, чем для сечения первичного смещения. Для тяжелых элементов средние погрешности выше, чем для легких, но во всех рассмотренных случаях средняя погрешность менее 1 %. Во всех рассмотренных случаях погрешность дважды модифицированного метода LQZ меньше или равна погрешности обычного метода. Погрешность трижды модифицированного метода LQZ для полного сечения смещения атома в железе выше, чем обычного метода. Для тяжелых элементов погрешности модифицированных вариантов метода LQZ значительно меньше, чем обычного метода.

6. Получены аналитические выражения для сечения смещения атома в рамках укороченных вариантов метода Лиджиана – Кинга – Женгминга. Рассчитано сечение первичного смещения атома и полное сечение смещения атома позитронами в золоте. Как метод LQZ, так и все укороченные варианты дают для сечения смещения атома значения, близкие между собой и согласующиеся с результатами численных расчетов, хотя укороченные методы для расчета моттовского сечения на большие углы при высоких энергиях могут быть неприменимы. Показано, что в случае использования каскадной модели Кинчина – Пиза при высоких энергиях различие полного сечения смещения позитронами и электронами больше, чем для сечения первичного смещения.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленский, В. Ф. Радиационные дефекты и набухание металлов / В. Ф. Зеленский, И. М. Нехлюдов, Т. П. Чернякова. – Киев : Наук. думка, 1988. – 296 с.
2. Oen, O. S. Cross sections for atomic displacements in solids by fast electrons / O. S. Oen // Oak Ridge National Laboratory Report. – 1973, Nr ORNL-4897.



3. Controlled Introduction of Defects to Delafossite Metals by Electron Irradiation / V. Sunko [et al.] // *Phys. Rev. X*. – 2020. – Vol. 10. – P. 021018-1–021018-16.
4. Mott, N. F. The Polarisation of Electrons by Double Scattering / N. F. Mott // *Proc. Roy. Soc. A*. – 1932. – Vol. 135/ – P. 429–458.
5. Khandelwal, G. S. Displacement Cross Sections for Fast Electrons Incident on Gold / G. S. Khandelwal, E. Merzbacher // *Phys. Rev.* – 1963. – Vol. 130, nr 5. – P. 1822–1825.
6. Архутик, А. В. О точности борновских приближений моттовского сечения рассеяния / А. В. Архутик, П. Б. Кац // *Вестн. Брѣсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка*. – 2022. – № 2. – С. 5–28.
7. Johnson, W. R. Coulomb Scattering of Polarized Electrons / W. R. Johnson, T. A. Weber, C. J. Mullin // *Phys. Rev.* – 1961. – Vol. 121, nr 4. – P. 933–939.
8. McKinley Jr, W. A. The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei / W. A. McKinley Jr, H. Feshbach // *Phys. Rev.* – 1948. – Vol. 74, nr 12. – P. 1759–1763.
9. Lijian, T. Analitic Fitting to the Mott Cross Section of Electrons / T. Lijian, H. Qing, L. Zhengming // *Radiat. Phys. Chem.* – 1995. – Vol. 45, nr 2. – P. 235–245.
10. Some approaches to the calculation of the normalized Mott cross section, displacement cross section, and the Mott correction to the Bethe formula / P. B. Kats [et al.] // *Radiat. Phys. Chem.* – 2022. – Vol. 192. – Art. 109919.
11. Pease, R. S. Displacement of atoms in solid by radiation / R. S. Pease, G. H. Kinchin // *Reports on Progress in Physics*. – 1955. – 18:1. – P. 1–51.
12. Римашевская, А. С. Трижды модифицированный метод LQZ на примере коперниция / А. С. Римашевская // *От творческого поиска к профессиональному становлению : материалы Всерос. науч.-практ. студенч. конф.* – Бузулук, 2022. – С. 253–257.
13. Similarities and distinctions of defect production by fast electron and proton irradiation: moderately doped silicon and silicon carbide of n-type / V. V. Emtsev [et al.] // *Физика и техника полупроводников*. – 2012. – Т. 46, вып. 4. – С. 473–480.
14. MeV electron irradiation induced crystallization in metallic glasses: Atomic structure, crystallization mechanism and stability of an amorphous phase under the irradiation / T. Nagase [et al.] // *Journal of Non-Crystalline Solids*. – 2012. – Vol. 358. – P. 502–518.
15. Wolfer, W. G. Radiation Effects in Plutonium – What Is Known? Where Should We Go from Here? / W. G. Wolfer // *Los Alamos Science*. – 2020. – Nr 26. – P. 275–285.
16. Кац, П. Б. Расчеты полного сечения смещения атома электроном в уране, плутонии и эйнштейнии на основе метода Лиджиана – Кинга – Женгминга и его модификаций / П. Б. Кац, А. С. Римашевская // *Актуальные вопросы общества, науки и образования : сб. ст. III Междунар. науч.-практ. конф., Пенза, 15 янв. 2023 г. : в 2 ч.* – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2023. – Ч. 2. – С. 20–26.
17. Мушинская, К. А. Дважды модифицированный метод LQZ для урана, плутония и эйнштейния / К. А. Мушинская // *НИРС-2021. Физика: научный и методический аспекты : сб. материалов студенч. науч. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. В. С. Секержицкого.* – Брест : БрГУ, 2021. – С. 25.
18. Кац, П. Б. Коэффициенты дважды модифицированного метода LQZ для алюминия, меди, олова и свинца / П. Б. Кац, К. А. Мушинская // *Современные научные проблемы и вопросы преподавания теоретической и математической физики, физики конденсированных сред и астрономии : сб. материалов VIII Респ. науч.-практ. конф., Брест, 21 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. В. Демидчика.* – Брест : БрГУ, 2021. – С. 20–22.
19. Куликович, Н. И. Вычисление поправки Мотта для химических элементов с  $Z = 6, 12, 26, 36, 52, 60, 75, 80, 92, 104$  и  $114$  с помощью метода Лиджиана – Кинга – Женгминга и его модификаций и метода Матвеева – Толманова / Н. И. Куликович,

А. С. Римашевская // Большая студенческая конференция : сб. ст. III Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2022. – Ч. 1. – С. 12–18.

20. Кац, П. Б. Трижды модифицированный метод LQZ для первых десяти элементов периодической системы Д. И. Менделеева / П. Б. Кац, А. С. Римашевская // Актуальные вопросы подготовки будущих преподавателей физики и астрономии : материалы регион. науч.-практ. семинара, Брест, 17–18 нояб. 2022 г. – Брест, 2022. – С. 25–27.

21. Куликович, Н. И. Сравнительный анализ точности дважды и трижды модифицированного метода Лиджиана – Кинга – Женгминга для химических элементов от урана до бория / Н. И. Куликович, А. С. Римашевская // Наука и просвещение: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. IX Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2022. – С. 10–18.

22. Куликович, Н. И. Расчет сечения первичного смещения атома электроном в углероде и кремнии / Н. И. Куликович, А. С. Римашевская // Modern scientific research : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., Пенза, 23 янв. 2023 г., – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2023. – С. 12–16.

23. Кац, П. Б. Расчет сечения смещения атома электроном в свинце на основе метода Лиджиана – Кинга – Женгминга и его модификаций / П. Б. Кац, А. С. Римашевская // International research forum – 2023 : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф., Петрозаводск, 9 марта 2023 г. – Петрозаводск : МЦНП «Новая наука», 2023. – С. 25–31.

24. Oen, O. S. Cross sections for atomic displacements in solids by fast positrons / O. S. Oen // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1988. – Vol. B 33. – P. 744–747.

25. Кац, П. Б. Применение укороченных вариантов метода Лиджиана – Кинга – Женгминга для расчета поправки Мотта / П. Б. Кац, А. В. Кудравец // Современные тенденции развития науки и образования : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2023. – С. 8–13.

26. Кац, П. Б. Сравнение точности вариантов укороченного модифицированного метода Лиджиана – Кинга – Женгминга  $3\alpha 3d$  и  $2\alpha 4d$  для вольфрама, золота, свинца, тория и урана / П. Б. Кац, А. В. Кудравец // Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 20–21 окт. 2022 г. ; редкол.: С. И. Василец [и др.]. – Минск : БГПУ, 2022. – С. 221–224.

27. Кац, П. Б. Применение укороченных вариантов метода Лиджиана – Кинга – Женгминга для расчета сечения смещения атома позитроном / П. Б. Кац, А. В. Кудравец // Современные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. XXXI Междунар. науч.-практ. конф., Пенза 20 февр. 2023 г. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2023. – С. 12–18.

28. Кудравец, А. В. Укороченный модифицированный метод Лиджиана – Кинга – Женгминга  $2\alpha 3d$  для химических элементов от прометия до урана / А. В. Кудравец // Наука и просвещение: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. IX Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2022. – С. 19–23.

29. Evaluation of displacement damage in solids induced by fast positrons: Modeling and effect on vacancy measurement / Qiang Yan [et al.] // Nuclear Materials and Energy. – 2021. – Vol. 27. – Art. 101022.

## REFERENCES

1. Zielienskij, V. F. Radiacionnyje diefiekty i raspukhanije mietallov / V. F. Zielienskij, I. M. Niekliudov, T. P. Chierniakova. – Kijev : Nauk. dumka, 1988. – 296 s.

2. Oen, O. S. Cross sections for atomic displacements in solids by fast electrons / O. S. Oen // Oak Ridge National Laboratory Report. – 1973, Nr ORNL-4897.

3. Controlled Introduction of Defects to Delafossite Metals by Electron Irradiation / V. Sunko [et al.] // *Phys. Rev. X*. – 2020. – Vol. 10. – P. 021018-1–021018-16.
4. Mott, N. F. The Polarisation of Electrons by Double Scattering / N. F. Mott // *Proc. Roy. Soc. A*. – 1932. – Vol. 135. – P. 429–458.
5. Khandelwal, G. S. Displacement Cross Sections for Fast Electrons Incident on Gold / G. S. Khandelwal, E. Merzbacher // *Phys. Rev.* – 1963. – Vol. 130, nr 5. – P. 1822–1825.
6. Arkhutiĭ, A. V. O tochnosti bornovskikh priblizhenij mottovskogo siechienenija rassiejaniĭa / A. V. Arkhutiĭ, P. B. Kac // *Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematika*. – 2022. – № 2. – S. 5–28.
7. Johnson, W. R. Coulomb Scattering of Polarized Electrons / W. R. Johnson, T. A. Weber, C. J. Mullin // *Phys. Rev.* – 1961. – Vol. 121, nr 4. – P. 933–939.
8. McKinley Jr, W. A. The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei / W. A. McKinley Jr, H. Feshbach // *Phys. Rev.* – 1948. – Vol. 74, nr 12. – P. 1759–1763.
9. Lijian, T. Analitic Fitting to the Mott Cross Section of Electrons / T. Lijian, H. Qing, L. Zhengming // *Radiat. Phys. Chem.* – 1995. – Vol. 45, nr 2. – P. 235–245.
10. Some approaches to the calculation of the normalized Mott cross section, displacement cross section, and the Mott correction to the Bethe formula / P. B. Kats [et al.] // *Radiat. Phys. Chem.* – 2022. – Vol. 192. – Art. 109919.
11. Pease, R. S. Displacement of atoms in solid by radiation / R. S. Pease, G. H. Kinchin // *Reports on Progress in Physics*. – 1955. – 18:1. – P. 1–51.
12. Rimashevskaja, A. S. Trizhdy modifitsirovannyj mietod LQZ na primierie kopiernicija / A. S. Rimashevskaja // *Ot tvorchieskogo poiska k professional'nomu stanovlieniu : materialy Vsieros. nauch.-prakt. studiench. konf.* – Buzuluk, 2022. – S. 253–257.
13. Similarities and distinctions of defect production by fast electron and proton irradiation: moderately doped silicon and silicon carbide of n-type / V. V. Emtsev [et al.] // *Физика и техника полупроводников*. – 2012. – Т. 46, вып. 4. – С. 473–480.
14. MeV electron irradiation induced crystallization in metallic glasses: Atomic structure, crystallization mechanism and stability of an amorphous phase under the irradiation / T. Nagase [et al.] // *Journal of Non-Crystalline Solids*. – 2012. – Vol. 358. – P. 502–518.
15. Wolfer, W. G. Radiation Effects in Plutonium – What Is Known? Where Should We Go from Here? / W. G. Wolfer // *Los Alamos Science*. – 2020. – Nr 26. – P. 275–285.
16. Kac, P. B. Raschioty polnogo siechienenija smieschenija atoma eliektronom v uranie, plutonii i ejnshtejnii na osnovie mietoda Lidzhiana – Kinga – Zhengminga i jego modifikacij / P. B. Kac, A. S. Rimashevskaja // *Aktual'nyje voprosy obshchestva, nauki i obrazovanija : sb. st. III Miezhdunar. nauch.-prakt. konf., Pienza, 15 janv. 2023 g. : v 2 ch.* – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2023. – Ch. 1. – S. 20–26.
17. Mushinskaja, K. A. Dvazhdy modifitsirovannyj mietod LQZ dlia urana, plutonija i ejnshtejniya / K. A. Mushinskaja // *NIRS-2021. Fizika: Nauchnyj i mietodichieskij aspiekty : sb. materialov studiench. nauch. konf., Briest, 22–23 apr. 2021 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. V. S. Siekierzhickogo*. – Briest : BrGU, 2021. – S. 25.
18. Kac, P. B. Koeffitsijenty dvazhdy modifitsirovannogo mietoda LQZ dlia aliuminija, miedi, olova i svinca / P. B. Kac, K. A. Mushinskaja // *Sovriemiennyje nauchnyje probliemy i voprosy priepodavanija tieorietichieskoj i matiematichieskoj fiziki, fiziki kondensirovannykh sried i astronomi i: sb. materialov VIII Riesp. nauch.-prakt. konf., Briest, 21 okt. 2021 g. / Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. A. V. Diemidchika*. – Briest : BrGU, 2021. – S. 20–22.
19. Kulikovich, N. I. Vychislieniye popravki Motta dlia khimichieskikh eliemientov s  $Z = 6, 12, 26, 36, 52, 60, 75, 80, 92, 104$  i  $114$  s pomoshchju mietoda Lidzhiana – Kinga –

Zhengminga i jego modifikacij i mietoda Matviejeva – Tolmanova / N. I. Kulikovich, A. S. Rimashevskaja // Bol'shaja studienchieskaja konfierencija : sb. st. III Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. : v 2 ch. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2022. – Ch. 1. – S. 12–18.

20. Kac, P. B. Trizhdy modifitsirovannyj mietod LQZ dlia piervykh diesiati eliemientov pieriodichieskoj sistiemy D. I. Miendieliejeva / P. B. Kac, A. S. Rimashevskaja // Aktual'nyje voprosy podgotovki budushchikh priepodavatieliej fiziki i astronomii : materialy riegiion. nauch.-prakt. sieminara, Briest, 17–18 nojab. 2022 g. – Briest, 2022. – S. 25–27.

21. Kulikovich, N. I. Sravnitel'nyj analiz tochnosti dvazhdy i trizhdy modifitsirovannogo mietoda Lidzhiana – Kinga – Zhengminga dlia khimichieskikh eliemientov ot urana do borija / N. I. Kulikovich, A. S. Rimashevskaja // Nauka i prosvieshchienije: aktual'nyje voprosy, dostizhenija i innovacii : sb. st. IX Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2022. – S. 10–18.

22. Kulikovich, N. I. Raschiot siechienija piervichnogo smieshchienija atoma eliektro-nom v ugljerodie i kriemni / N. I. Kulikovich, A. S. Rimashevskaja // Modern scientific research : materialy II Miezhdunar. nauch.-prakt. konf., Pienza, 23 janv. 2023 g. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2023. – S. 12 – 16.

23. Kac, P. B. Raschiot siechienija smieshchienija atoma eliektromom v svinca na osnovie mietoda Lidzhiana – Kinga – Zhengminga i jego modifikacij / P. B. Kac, A. S. Rimashevskaja // International research forum – 2023 : sb. st. Miezhdunar. nauch.-prakt. konf., Pietrozavodsk, 9 marta 2023 g. – Pietrozavodsk : MCNP «Novaja nauka», 2023. – S. 25–31.

24. Oen, O. S. Cross sections for atomic displacements in solids by fast positrons / O. S. Oen // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1988. – Vol. B 33. – P. 744–747.

25. Kac, P. B. Primienienije ukorochnykh variantov mietoda Lidzhiana – Kinga – Zhengminga dlia raschiota popravki Motta / P. B. Kac, A. V. Kudravec // Sovriemiennyje tendencii razvitija nauki i obrazovanija : sb. st. Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2023. – S. 8–13.

26. Kac, P. B. Sravnenije tochnosti variantov ukorochnogo modifitsirovannogo mietoda Lidzhiana – Kinga – Zhengminga 3a3d i 2a4d dlia vol'frama, zolota, svinca, torija i urana / P. B. Kac, A. V. Kudravec // Fiziko-matiematičieskoje obrazovanije: celi, dostizhenija i pier-spiektivy : materialy Miezhdunar. nauch.-prakt. konf., Minsk, 20–21 okt. 2022 g. ; riedkol.: S. I. Vasilec [i dr.]. – Minsk : BGPU, 2022. – S. 221–224.

27. Kac, P. B. Primienienije ukorochnykh variantov mietoda Lidzhiana – Kinga – Zhengminga dlia raschiota siechienija smieshchienija atoma pozitromom / P. B. Kac, A. V. Kudravec // Sovriemiennyje nauchnyje issliedovanija: aktual'nyje voprosy, dostizhenija i innovacii : sb. st. XXXI Miezhdunar. nauch.-prakt. konf., Pienza, 20 fievr. 2023 g. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2023. – S. 12–18.

28. Kudravec, A. V. Ukorochennyj modifitsirovannyj mietod Lidzhiana – Kinga – Zhengminga 2a3d dlia khimichieskikh eliemientov ot promietija do urana / A. V. Kudravec // Nauka i prosvieshchienije: aktual'nyje voprosy, dostizhenija i innovacii : sb. st. IX Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2022. – S. 19–23.

29. Evaluation of displacement damage in solids induced by fast positrons: Modeling and effect on vacancy measurement / Qiang Yan [et al.] // Nuclear Materials and Energy. – 2021. – Vol. 27. – Art. 101022.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 10.04.2023*

УДК 539.12

**Ольга Александровна Семенюк<sup>1</sup>, Алина Валентиновна Ивашкевич<sup>2</sup>,  
Владимир Анестиевич Плетюхов<sup>3</sup>, Виктор Михайлович Редьков<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>аспирант 2-го года обучения Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики  
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

<sup>2</sup>аспирант 3-го года обучения Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики  
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

<sup>3</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>4</sup>д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник

Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики

Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси

**Olga Semenyuk<sup>1</sup>, Alina Ivashkevich<sup>2</sup>, Vladimir Pletyukhov<sup>3</sup>, Victor Red'kov<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>2nd Year Postgraduate Student of B. I. Stepanov Institute of Physics  
of National Academy of Sciences of Belarus

<sup>2</sup>3rd Year Postgraduate Student of B. I. Stepanov Institute of Physics  
of National Academy of Sciences of Belarus

<sup>3</sup>PhD (Physics and Mathematics), Professor,

Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>4</sup>PhD (Physics and Mathematics),

Chief Researcher of the Center Fundamental Interactions and Astrophysics

of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: <sup>1</sup>olya.vasiluyk.97@yandex.by; <sup>2</sup>ivashkevich.alina@yandex.by;

<sup>3</sup>vladimir.pletyukhov@yandex.by; <sup>4</sup>v.redkov@ifanbel.bas-net.by

## БЕЗМАССОВЫЙ ПРЕДЕЛ В УРАВНЕНИИ ШТЮКЕЛЬБЕРГА. ДЕКАРТОВЫЕ КООРДИНАТЫ

Анализируются возможности описания различных частиц со спином 1 на основе использования обобщенной системы уравнений. В работе исследуется безмассовое поле Штюкельберга и его связь с системой уравнений Озиевского – Полубаринова для нотофа. Среди 11-ти компонент полевой функции Штюкельберга антисимметричный тензор представляет калибровочные компоненты, а скаляр и вектор соответствуют физически наблюдаемым величинам. Показано, что в декартовых координатах существуют пять линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы Штюкельберга.

**Ключевые слова:** безмассовое поле Штюкельберга, нотоф, декартовы координаты, точные решения.

### *Massless limit in the Stuckelberg Equation. Cartesian symmetries*

In the paper, possibilities to describe different vector particle on the base of the using generalized system of equations are analyzed. Mainly we study the massless Stuckelberg field. and its connection to Ogievetsky – Polubarinov equations for notoph. Among the 11 components of the field, the antisymmetric tensor  $\Psi_{ab}$  corresponds to gauge variables, whereas the scalar and vector  $\Psi$ ,  $\Psi_a$  represent physically observable quantities. In Cartesian coordinates, exists five linearly independent solutions, describing different states of the Stuckelberg particle.

**Key words:** massless Stuckelberg field, notoph, Cartesian symmetries, exact solutions.

### **Введение**

#### **Безмассовый предел в уравнении Штюкельберга**

Как известно, самая простая система релятивистских инвариантных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая свободную микрочастицу со спином 1, имеет вид

$$\partial^b \psi_{ab} + d\psi_a = 0, \quad (1.1)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + \beta \psi_{ab} = 0, \quad (1.2)$$

где  $\psi_a$  – 4-вектор ( $a, b = 0, 1, 2, 3$ );  $\psi_{ab}$  – антисимметричный тензор второго ранга;  $\alpha, \beta$  – произвольные вещественные параметры. Здесь мы используем метрику  $g_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , так что  $\partial^0 = \partial_0$ ,  $\partial^i = -\partial_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Эта система включает в себя в качестве частных случаев три различные физически неэквивалентные теории.

Так, полагая в (1.1), (1.2)

$$\alpha = \beta = m \neq 0, \quad (1.3)$$

получим систему уравнений Даффина – Кеммера для векторной частицы с ненулевой массой

$$\partial^b \psi_{ab} + m\psi_a = 0, \quad -\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + m\psi_{ab} = 0. \quad (1.4)$$

Если выбрать  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ , то придем к 10-мерной формулировке теории Максвелла, описывающей фотон – безмассовый микрообъект со спиральностью  $\pm 1$ :

$$\partial^b \psi_{ab} = 0, \quad -\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + \psi_{ab} = 0. \quad (1.5)$$

Наконец, при задании параметров  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  будем иметь систему

$$\partial^b \psi_{ab} + \psi_a = 0, \quad \partial_b \psi_a - \partial_a \psi_b = 0, \quad (1.6)$$

которая описывает подобный нотофу Огиевецкого – Полубаринова [3] безмассовый микрообъект со спиральностью 0, однако переносящий во взаимодействиях спин 1. В дальнейшем, следуя терминологии работы [4], будем называть этот микрообъект дуальным нотофом.

Одним из существенных отличий безмассовых систем (1.5) и (1.6) от системы Даффина – Кеммера (1.4) является то, что в (1.5), (1.6) часть компонент волновой функции  $\psi_A = (\psi_a, \psi_{ab})$  являются ненаблюдаемыми (потенциалы), а часть – наблюдаемыми (напряженности). Так, в системе (1.5) в качестве потенциалов выступают компоненты вектора  $\psi_a$ , в качестве напряженности – компоненты тензора  $\psi_{ab}$ , при этом первое уравнение называется уравнением движения, а второе позволяет выразить напряженности через потенциалы. В системе (1.6), наоборот, потенциалами являются компоненты тензора  $\psi_{ab}$ , а в качестве напряженности выступает вектор  $\psi_a$ .

Более широкие возможности для описания как массивных, так и безмассовых микрообъектов с максимальным спином  $s = 1$  предоставляет система уравнений первого порядка

$$\partial^a \psi_a + \alpha \psi = 0, \quad (1.7)$$

$$\partial^b \psi_{ab} + \partial_a \psi + \beta \psi_a = 0, \quad (1.8)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + \gamma \psi_{ab} = 0, \quad (1.9)$$

которая помимо вектора  $\psi_a$  и тензора  $\psi_{ab}$  содержит скалярную функцию  $\psi$ .

В случае, когда ни один из параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  в этой системе не равен нулю, она описывает (гипотетический) микрообъект с переменным спином  $s = 0, 1$  и двумя

значениями массы  $m_1 = \sqrt{\alpha\beta}$ ,  $m_2 = \sqrt{\beta\gamma}$ , причем масса  $m_1$  относится к спину 0, а масса  $m_2$  – к спину 1. При  $\alpha = \gamma$  получаем теорию микрообъекта с переменным спином  $s = 0, 1$  и одной массой.

Если в (1.7) – (1.9) положить

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = m, \quad (1.10)$$

то получим систему уравнений

$$\partial^a \psi_a = 0, \quad (1.11)$$

$$\partial^b \psi_{ab} + \partial_a \psi + m \psi_a = 0, \quad (1.12)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + m \psi_{ab} = 0. \quad (1.13)$$

Эта система, как и уравнения Даффина – Кеммера (1.4), описывает микрочастицу с ненулевой массой и спином 1, но содержит большее, чем (1.4), число уравнений и компонент волновой функции. Данный вариант теории массивной векторной частицы известен в литературе как подход Штюкельберга [5; 6; 7–11]).

Безмассовый предел системы (1.11) – (1.13) имеет вид

$$\partial^a \psi_a = 0, \quad (1.14)$$

$$\psi_a = \partial_a \psi + \partial^b \psi_{ab}, \quad (1.15)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a = 0. \quad (1.16)$$

Из (1.15) – (1.17) несложно получить уравнения второго порядка

$$\partial^a \partial_a \psi = 0, \quad \partial^a \partial_a \psi_a = 0, \quad (1.17)$$

которые указывают на то, что система (1.14) – (1.16) действительно описывает безмассовый микрообъект. В дальнейшем будем называть его безмассовым полем Штюкельберга.

Исследование возможных решений этой системы уравнений в декартовой системе координат является целью настоящей работы.

### Декартовы координаты

Итак, рассматриваем систему дифференциальных уравнений первого порядка (1.14) – (1.16). Величины  $\psi_a$  здесь будем трактовать как наблюдаемые (напряженности),  $\psi$  и  $\psi_{ab}$  – как ненаблюдаемые (потенциалы).

Выражая вектор напряженности  $\psi_a$  из уравнения (1.16) и подставляя полученное выражение в (1.17), придем к следующему уравнению второго порядка для тензор потенциала  $\psi_{ab}$ :

$$\partial_a \partial^c \psi_{bc} - \partial_b \partial^c \psi_{ac} = 0. \quad (2.1)$$

Рассматривая случай плоских волн, используем подстановки

$$\psi = f e^{-iex^0} e^{ik^1 x^1} e^{ik^2 x^2} e^{ik^3 x^3}, \quad (2.2)$$

$$\psi_a = f_a e^{-iex^0} e^{ik^1 x^1} e^{ik^2 x^2} e^{ik^3 x^3}, \quad (2.3)$$

$$\psi_{ab} = f_{ab} e^{-iex^0} e^{ik^1 x^1} e^{ik^2 x^2} e^{ik^3 x^3}. \quad (2.4)$$

Тогда уравнения (1.15) – (1.16) дают

$$\partial^a \partial_a \psi = 0 \Rightarrow (\varepsilon^2 - k_j k_j) \stackrel{=0}{=} f = 0 \Rightarrow f - \text{любое}, \quad (2.5)$$

$$\psi_a = \partial_a \psi + \partial_0 \psi_{a0} - \partial_1 \psi_{a1} - \partial_2 \psi_{a2} - \partial_3 \psi_{a3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} if_0 &= \varepsilon f - k_1 E_1 - k_2 E_2 - k_3 E_3, & if_1 &= k_1 f - \varepsilon E_1 + k_3 B_2 - k_2 B_3, \\ if_2 &= k_2 f - \varepsilon E_2 + k_1 B_3 - k_3 B_1, & if_3 &= k_3 f - \varepsilon E_3 + k_2 B_1 - k_1 B_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Запишем уравнение (2.1) в развернутом виде

$$\begin{aligned} \partial_0(\partial_0 \psi_{01} - \partial_1 \psi_{11} - \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \psi_{31}) - \partial_1(\partial_0 \psi_{00} - \partial_1 \psi_{10} - \partial_2 \psi_{20} - \partial_3 \psi_{30}) &= 0, \\ \partial_0(\partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \psi_{12} - \partial_2 \psi_{22} - \partial_3 \psi_{32}) - \partial_2(\partial_0 \psi_{00} - \partial_1 \psi_{10} - \partial_2 \psi_{20} - \partial_3 \psi_{30}) &= 0, \\ \partial_0(\partial_0 \psi_{03} - \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \psi_{33}) - \partial_3(\partial_0 \psi_{00} - \partial_1 \psi_{10} - \partial_2 \psi_{20} - \partial_3 \psi_{30}) &= 0, \\ \partial_2(\partial_0 \psi_{03} - \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \psi_{33}) - \partial_3(\partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \psi_{12} - \partial_2 \psi_{22} - \partial_3 \psi_{32}) &= 0, \\ \partial_3(\partial_0 \psi_{01} - \partial_1 \psi_{11} - \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \psi_{31}) - \partial_1(\partial_0 \psi_{03} - \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \psi_{33}) &= 0, \\ \partial_1(\partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \psi_{12} - \partial_2 \psi_{22} - \partial_3 \psi_{32}) - \partial_2(\partial_0 \psi_{01} - \partial_1 \psi_{11} - \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \psi_{31}) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \partial_0 \partial_0 \psi_{01} - \partial_0 \partial_2 \psi_{21} - \partial_0 \partial_3 \psi_{31} + \partial_1 \partial_1 \psi_{10} + \partial_1 \partial_2 \psi_{20} + \partial_1 \partial_3 \psi_{30} &= 0, \\ \partial_0 \partial_0 \psi_{02} - \partial_0 \partial_1 \psi_{12} - \partial_0 \partial_3 \psi_{32} + \partial_2 \partial_1 \psi_{10} + \partial_2 \partial_2 \psi_{20} + \partial_2 \partial_3 \psi_{30} &= 0, \\ \partial_0 \partial_0 \psi_{03} - \partial_0 \partial_1 \psi_{13} - \partial_0 \partial_2 \psi_{23} + \partial_3 \partial_1 \psi_{10} + \partial_3 \partial_2 \psi_{20} + \partial_3 \partial_3 \psi_{30} &= 0, \\ \partial_2 \partial_0 \psi_{03} - \partial_2 \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \partial_0 \psi_{02} + \partial_3 \partial_1 \psi_{12} + \partial_3 \partial_3 \psi_{32} &= 0, \\ \partial_3 \partial_0 \psi_{01} - \partial_3 \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \partial_3 \psi_{31} - \partial_1 \partial_0 \psi_{03} + \partial_1 \partial_1 \psi_{13} + \partial_1 \partial_2 \psi_{23} &= 0, \\ \partial_1 \partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \partial_1 \psi_{12} - \partial_1 \partial_3 \psi_{32} - \partial_2 \partial_0 \psi_{01} + \partial_2 \partial_2 \psi_{21} + \partial_2 \partial_3 \psi_{31} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.4) в (2.7) и используя очевидные замены

$$\partial_0 \Rightarrow -i\varepsilon, \quad \partial_j \Rightarrow -ik_j, \quad \partial_0 \partial_0 \Rightarrow -\varepsilon^2, \quad \partial_j \partial_i \Rightarrow -k_j k_i,$$

получим следующую систему из шести линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 f_{01} - \varepsilon k_2 f_{21} - \varepsilon k_3 f_{31} + k_1 k_1 f_{10} + k_1 k_2 f_{20} + k_1 k_3 f_{30} &= 0, \\ \varepsilon^2 f_{02} - \varepsilon k_1 f_{12} - \varepsilon k_3 f_{32} + k_1 k_2 f_{10} + k_2 k_2 f_{20} + k_2 k_3 f_{30} &= 0, \\ \varepsilon^2 f_{03} - \varepsilon k_1 f_{13} - \varepsilon k_2 f_{23} + k_3 k_1 f_{10} + k_3 k_2 f_{20} + k_3 k_3 f_{30} &= 0, \\ \varepsilon k_2 f_{03} - k_2 k_1 f_{13} - k_2 k_2 f_{23} - \varepsilon k_3 f_{02} + k_3 k_1 f_{12} + k_3 k_3 f_{32} &= 0, \\ \varepsilon k_3 f_{01} - k_3 k_2 f_{21} - k_3 k_3 f_{31} - \varepsilon k_1 f_{03} + k_1 k_1 f_{13} + k_1 k_2 f_{23} &= 0, \\ \varepsilon k_1 f_{02} - k_1 k_1 f_{12} - k_1 k_3 f_{32} - \varepsilon k_2 f_{01} + k_2 k_2 f_{21} + \partial_2 \partial_3 f_{31} &= 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем для величин  $f_{ab}$  по аналогии с электродинамикой обозначения

$$f_{01} = E_1, \quad f_{02} = E_2, \quad f_{03} = E_3, \quad f_{23} = B_1, \quad f_{31} = B_2, \quad f_{12} = B_3 \quad (2.9)$$

и перепишем систему (2.8) в виде



$$\begin{aligned}
 (\varepsilon^2 - k_1 k_1) E_1 - k_1 k_2 E_2 - k_1 k_3 E_3 - \varepsilon k_3 B_2 + \varepsilon k_2 B_3 &= 0, \\
 -k_1 k_2 E_1 + (\varepsilon^2 - k_2 k_2) E_2 - k_2 k_3 E_3 + \varepsilon k_3 B_1 - \varepsilon k_1 B_3 &= 0, \\
 -k_3 k_1 E_1 - k_3 k_2 E_2 + (\varepsilon^2 - k_3 k_3) E_3 - \varepsilon k_2 B_1 + \varepsilon k_1 B_2 &= 0, \\
 -\varepsilon k_3 E_2 + \varepsilon k_2 E_3 - (k_2 k_2 + k_3 k_3) B_1 + k_2 k_1 B_2 + k_3 k_1 B_3 &= 0, \\
 \varepsilon k_3 E_1 - \varepsilon k_1 E_3 + k_1 k_2 B_1 - (k_3 k_3 + k_1 k_1) B_2 + k_3 k_2 B_3 &= 0, \\
 -\varepsilon k_2 E_1 + \varepsilon k_1 E_2 + k_1 k_3 B_1 + k_2 k_3 B_2 - (k_1 k_1 + k_2 k_2) B_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Представим систему (2.10) в матричной форме:

$$A \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 - k_1^2 & -k_1 k_2 & -k_1 k_3 & 0 & -\varepsilon k_3 & \varepsilon k_2 \\ -k_1 k_2 & \varepsilon^2 - k_2^2 & -k_2 k_3 & \varepsilon k_3 & 0 & -\varepsilon k_1 \\ -k_1 k_3 & -k_2 k_3 & \varepsilon^2 - k_3^2 & -\varepsilon k_2 & \varepsilon k_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon k_3 & \varepsilon k_2 & -k_2^2 - k_3^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ \varepsilon k_3 & 0 & -\varepsilon k_1 & k_1 k_2 & -k_1^2 - k_3^2 & k_2 k_3 \\ -\varepsilon k_2 & \varepsilon k_1 & 0 & k_1 k_3 & k_2 k_3 & -k_1^2 - k_3^2 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Если в системе (2.10) учесть связь  $\varepsilon^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$  между энергией и импульсом (при рассмотрении плоских волн это условие должно учитываться обязательно), то ранг матрицы  $A$  оказывается равным двум. В результате приходим, например, к системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 - k_1^2 & -k_1 k_2 & -k_1 k_3 & 0 & -\varepsilon k_3 & \varepsilon k_2 \\ -k_1 k_2 & \varepsilon^2 - k_2^2 & -k_2 k_3 & \varepsilon k_3 & 0 & -\varepsilon k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \varepsilon = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \tag{2.12}$$

или

$$\begin{aligned}
 (k_2^2 + k_3^2) E_1 - k_1 k_2 E_2 &= k_1 k_3 E_3 + \varepsilon k_3 B_2 - \varepsilon k_2 B_3, \\
 -k_1 k_2 E_1 + (k_1^2 + k_3^2) E_2 &= k_2 k_3 E_3 - \varepsilon k_3 B_1 + \varepsilon k_1 B_3.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Выразим из уравнений (2.13) величины  $E_1, E_2$ :

$$E_1 = \frac{k_1(-B_1 \varepsilon^2 k_2 + E_3 k_2^2 + E_3 k_3^2) + \varepsilon k_3 (B_2 k_3 - B_3 k_2) + B_2 \varepsilon k_1^2 + E_3 k_1^3}{k_3 \varepsilon^2}, \tag{2.14}$$

$$E_2 = \frac{(k_2^2 + k_3^2)(E_3 k_2 - B_1 \varepsilon) + \varepsilon k_1 (B_2 k_2 + B_3 k_3) + E_3 k_2 k_1^2}{k_3 \varepsilon^2}. \tag{2.15}$$

Здєсь можна выдєлїть чєтырэ лїнєйно нєзавїсїмых рєшєнїя:

$$\begin{aligned}
 (B_1, 0, 0, E_3 = 0), \quad E_1 &= -\frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon} B_1, \quad E_2 = -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon} B_1; \\
 (0, B_2, 0, E_3 = 0), \quad E_1 &= -\frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon} B_2, \quad E_2 = \frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon} B_2; \\
 (0, 0, B_3, E_3 = 0), \quad E_1 &= -\frac{k_2}{\varepsilon} B_3, \quad E_2 = \frac{k_1}{\varepsilon} B_3; \\
 (B_i = 0, E_3), \quad E_1 &= -\frac{k_1}{k_3} E_3, \quad E_2 = \frac{k_2}{k_3} E_3.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Возвращаясь к уравнению (1.16) и соотношениям (2.6), получим с учетом (2.16) следующие решения для величин  $f_a$ :

$$\begin{aligned}
 if_0 &= f\varepsilon + \frac{k_2^3 + k_1^2 k_2 + k_3^2 k_2}{k_3 \varepsilon} B_1, \quad if_1 = k_1 \left( f + \frac{k_2}{k_3} B_1 \right), \quad if_2 = fk_2 + \frac{k_2^2}{k_3} B_1, \quad if_3 = fk_3 + k_2 B_1; \\
 if_0 &= f\varepsilon - \frac{(k_1^3 + (k_2^2 + k_3^2)k_1)}{k_3 \varepsilon} B_2, \quad if_1 = fk_1 - \frac{k_1^2}{k_3} B_2, \quad if_2 = k_2 \left( f - \frac{k_1}{k_3} B_2 \right), \quad if_3 = fk_3 - B_2 k_1; \\
 if_0 &= f\varepsilon, \quad if_1 = fk_1, \quad if_2 = fk_2, \quad if_3 = fk_3; \\
 if_0 &= f\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{k_3} E_3, \quad if_1 = k_1 f - \frac{\varepsilon k_1}{k_3} E_3, \quad if_2 = k_2 f - \frac{\varepsilon k_2}{k_3} E_3, \quad if_3 = fk_3 - \varepsilon E_3.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

С учетом величины  $f$  можно выделить пять независимых решений (свободные параметры для сокращения формул полагаем равными единице):

$$1) \quad f = 0, \quad E_1 = -\frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_2 = -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \tag{2.18}$$

$$if_0 = \frac{k_2^3 + k_1^2 k_2 + k_3^2 k_2}{k_3 \varepsilon}, \quad if_1 = k_1 \frac{k_2}{k_3}, \quad if_2 = \frac{k_2^2}{k_3}, \quad if_3 = k_2;$$

$$2) \quad f = 0, \quad E_1 = \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_2 = \frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 1, \quad B_3 = 0, \tag{2.19}$$

$$if_0 = -\frac{(k_1^3 + (k_2^2 + k_3^2)k_1)}{k_3 \varepsilon}, \quad if_1 = -\frac{k_1^2}{k_3}, \quad if_2 = -k_2 \frac{k_1}{k_3}, \quad if_3 = -k_1;$$

$$3) \quad f = 0, \quad E_1 = -\frac{k_2}{\varepsilon}, \quad E_2 = \frac{k_1}{\varepsilon}, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 1, \tag{2.20}$$

$$if_0 = 0, \quad if_1 = 0, \quad if_2 = 0, \quad if_3 = 0;$$

$$4) \quad f = 0, \quad E_1 = \frac{k_1}{k_3}, \quad E_2 = \frac{k_2}{k_3}, \quad E_3 = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \tag{2.21}$$

$$if_0 = -\frac{\varepsilon^2}{k_3}, \quad if_1 = -\frac{\varepsilon k_1}{k_3}, \quad if_2 = -\frac{\varepsilon k_2}{k_3}, \quad if_3 = -\varepsilon;$$

$$5) \quad f = 1, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \tag{2.22}$$

$$if_1 = k_1, \quad if_2 = k_2, \quad if_3 = k_3, \quad if_0 = \varepsilon,$$

из которых первые четыре соответствуют нулевому скалярному полю.

### Заклучение

Итак, проведенный анализ решений системы уравнений, описывающих безмассовое поле Штукельберга, показывает, что эта система имеет пять независимых частных решений. Вопрос о том, какие из описываемых ими состояний вносят вклад в физически наблюдаемые величины, требует дополнительного анализа с привлечением явного выражения для тензора энергии-импульса поля. Данный вопрос находится в настоящее время в поле зрения авторов.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffin, R. I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R. I. Duffin // *Phys.Rev.* – 1938. – Vol. 54, nr12. – P. 1114–1117.
2. Kemmer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Огивецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огивецкий, И. В. Полубаринов // *Ядер. физика.* – 1966. – Т. 4, вып.1. – С. 216–223.
4. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
5. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E. C. G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–328.
6. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
7. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 486 с.
8. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 339 с.
9. Частица Штукельберга во внешнем магнитном поле. Метод проективных операторов / Е. М. Овсюк [и др.] // *Изв. Коми науч. центра Урал. отд-ния Рос. акад. наук. Сер. «Физ.-мат. науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 69–78.
10. Частица Штукельберга во внешнем магнитном поле. Нерелятивистское приближение. Точные решения / Е. М. Овсюк [и др.] // *Изв. Коми науч. центра Урал. отд-ния Рос. акад. наук. Сер. «Физ.-мат. науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 79–88.
11. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, nr 4. – P. 387–404.

### REFERENCES

1. Duffin, R. I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R. I. Duffin // *Phys.Rev.* – 1938. – Vol. 54, nr12. – P. 1114–1117.
2. Kemmer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Ogijevickij, V. I. Notof i jego vozmozhnyje vzaimodiejstvija / V. I. Ogijevickij, I. V. Polubarinov // *Jadier. fizika.* – 1966. – Т. 4, vyp. 1. – S. 216–223.
4. Plietiukhov, V. A. Rielativistskije volnovyje uravnenija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietiukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk: Bielarus. navuka, 2015. – 328 s.

5. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E. C. G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–328.
6. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
7. Ried'kov, V. M. Polia chastic v riemanovom prostranstvie i gruppa Lorentsa / V. M. Ried'kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2009. – 486 s.
8. Ried'kov, V. M. Tietradnyj formalizm, sfierichieskaja simmetrija i basis Shredingiera / V. M. Ried'kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2011. – 339 s.
9. Chastica Stiukel'berga vo vnieshniem magnitnom polie. Mietod projektivnykh operatorov / Ye. M. Ovsijuk [i dr.] // *Izv. Komi nauch. centra Ural. otd-nija Ros. akad. nauk. Sier. «Fiz.-mat. nauki».* – 2022. – № 5 (57). – S. 69–78.
10. Chastica Stiukel'berga vo vnieshniem magnitnom polie. Nierelativistskoje priblizhenije. Tochnyje rieshenija / Ye. M. Ovsijuk [i dr.] // *Izv. Komi nauch. centra Ural. otdnija Ros. akad. nauk. Sier. «Fiz.-mat. nauki».* – 2022. – № 5 (57). – S. 79–88.
11. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, nr 4. – P. 387–404.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 13.03.2023*

УДК 536+537.6

**Алексей Игоревич Серый***канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Alexey Sery***Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: alexey\_sery@mail.ru***О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА  
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

*Исследовано влияние температуры и интенсивного магнитного поля на некоторые термодинамические характеристики идеальных газов заряженных фермионов. В приближении абсолютного нуля температуры получена зависимость химического потенциала нерелятивистского и релятивистского электронного газа, а также степени спиновой поляризации релятивистского электронного газа от индукции магнитного поля при заполнении одного или двух уровней Ландау. Для крайне невырожденного релятивистского электронного газа получены выражения для химического потенциала, степени спиновой поляризации, энтропии, средней энергии и намагниченности. Для промежуточных температур получено выражение для большого термодинамического потенциала газа заряженных фермионов.*

**Ключевые слова:** *электронный газ, магнитное поле, спиновая поляризация, химический потенциал.*

***On the Thermodynamic Description of an Electron Gas in a Magnetic Field***

*The influence of temperature and intense magnetic field on some thermodynamic characteristics of ideal gases of charged fermions is investigated. The dependence of the chemical potential of a non-relativistic and relativistic electron gas, as well as the degree of spin polarization of a relativistic electron gas on the magnetic field induction when filling one or two Landau levels is obtained in the approximation of absolute zero temperature. Expressions for the chemical potential, the degree of spin polarization, entropy, average energy and magnetization are obtained for an extremely non-degenerate relativistic electron gas. For intermediate temperatures, an expression is obtained for the large thermodynamic potential of a gas of charged fermions.*

**Key words:** *electron gas, magnetic field, spin polarization, chemical potential.*

**Введение**

Расчет термодинамических характеристик газов заряженных фермионов в магнитном поле представляет интерес для различных астрофизических приложений. Исследования в данной предметной области ведутся уже на протяжении нескольких десятилетий, причем многие важные результаты уже прочно вошли не только в научную, но и в учебную литературу.

Так, для случая высоких температур и слабых магнитных полей, т. е. когда выполняются соотношения

$$\zeta \ll kT, \quad \mu B \ll kT, \quad (1)$$

получено выражение для намагниченности электронного газа через квантовые функции Ланжевена [1, с. 245–246]. При этом  $B$  – индукция магнитного поля,  $T$  – температура,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\zeta$  – химический потенциал (отсчитываемый от энергии покоя),  $\mu$  – соответствующий магнетон (магнетон Бора в случае электронов).

Для нерелятивистского электронного газа в приближении абсолютного нуля температуры найдены:

а) выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала и магнитной восприимчивости [1, с. 291–294], числа частиц, давления и средней энергии [2, с. 28];

б) выражения для указанных величин (за исключением большого термодинамического потенциала) в пределе слабых магнитных полей [2, с. 29–30] и в квантовом пределе [2, с. 31];

в) система уравнений, связывающих  $B$ ,  $\zeta$ , спиновую поляризацию и концентрацию электронов [2, с. 13–20], выполнены дальнейшие исследования этой системы для некоторых частных случаев [3, с. 75; 4, с. 15].

Уравнение для химического потенциала исследовалось также в [5, с. 12–14].

Для нерелятивистского электронного газа в случае низких отличных от нуля температур, т. е. когда

$$\zeta \gg kT, \quad (2)$$

найлены выражения для большого термодинамического потенциала [6, с. 205–209] химического потенциала [1, с. 295], магнитной восприимчивости [1, с. 295; 6, с. 205] и намагниченности [6, с. 210]. При этом отдельно исследовались случаи, когда

$$\zeta \gg kT \gg \mu B, \quad (3)$$

и

$$\zeta \gg \mu B \geq kT. \quad (4)$$

Те же величины (а также давление, энтропия и полная энергия) несколько иным способом найдены в [7, с. 12–15].

Для нерелятивистского электронного газа в случае высоких температур найдены выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала и намагниченности [1, с. 297], числа частиц, давления, спиновой поляризации, энтропии, средней энергии [2, с. 52–54].

Для релятивистского электронного газа:

а) в приближении абсолютного нуля температуры найдены выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала (в неявном виде), магнитной восприимчивости, давления и средней энергии [2, с. 39–45], уравнение для химического потенциала исследовалось также в [5, с. 12–14];

б) в случае низких отличных от нуля температур, т.е. когда справедливо условие (2), найдены выражения для большого термодинамического потенциала, давления, энтропии, намагниченности и полной энергии [8, с. 11–14];

в) в случае высоких температур получены выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала (в неявном виде), магнитной восприимчивости, энтропии и средней энергии [2, с. 63–64], но результаты требуют пересмотра.

Несмотря на то что многие вопросы, относящиеся к данному проблемному полю, уже достаточно хорошо исследованы, ряд вопросов остается не до конца изученным. Исследованию некоторых из таких вопросов посвящена данная публикация.

Во всех исследуемых далее случаях газ будет считаться идеальным.

### **Химический потенциал крайне вырожденного идеального нерелятивистского электронного газа в магнитном поле**

Рассмотрим нерелятивистский электронный газ в квантующем магнитном поле при абсолютном нуле температуры.

Уравнение, связывающее химический потенциал  $\zeta_e(B)$  (отсчитываемый от энергии покоя электрона) такого газа с его концентрацией  $n_e$  в магнитном поле с индукцией  $B$  (где  $m_e$  – масса электрона,  $\mu_B$  – магнетон Бора), может быть записано на основе

сведений из [2, с. 19] (без учета аномального магнитного момента электрона) в виде соотношений:

$$n_e = A \left( \sqrt{\zeta_e(B)} + 2 \sum_{j=1}^r \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2j} \right), \quad (5)$$

$$A = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{2\pi^2 \hbar^3}. \quad (6)$$

Суммирование в (5) выполняется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не окажется отрицательным. Рассмотрим некоторые частные случаи (в т. ч. те, которые не затрагивались ранее).

При  $r = 0$  сумма в правой части (5) пропадает, и тогда величина  $\zeta_e(B)$  с учетом (6) легко выражается через остальные:

$$\zeta_e(B) = \frac{n_e^2 \pi^4 \hbar^6}{2m_e^3 (\mu_B B)^2}. \quad (7)$$

При  $r = 1$  для  $\zeta_e(B)$  из (5) получается квадратное уравнение, которое для удобства анализа значений корней после предварительных несложных преобразований можно переписать в виде

$$9\zeta_e^2(B) - \left( 48\mu_B B + 10 \frac{n_e^2}{A^2} \right) \zeta_e(B) + \left( 8\mu_B B + \frac{n_e^2}{A^2} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Общее выражение для обоих корней уравнения (8) выглядит следующим образом:

$$\zeta_{e(\pm)}(B) = \frac{1}{18} \left( 48\mu_B B + 10 \frac{n_e^2}{A^2} \pm \sqrt{384\mu_B B \frac{n_e^2}{A^2} + 64 \frac{n_e^4}{A^4}} \right). \quad (9)$$

Поскольку  $\zeta_e(B)$  определяется однозначно, следует оставить только один корень. Из (5) при  $r = 1$  можно сделать оценки для химического потенциала, если положить в правой части (5) все подкоренные выражения равными  $\zeta_e(B)$  (тогда правая часть будет больше левой) или  $\zeta_e(B) - 2\mu_B B$  (тогда левая часть будет больше правой). В результате запишем:

$$\frac{n_e^2}{9A^2} < \zeta_e(B) < \frac{n_e^2}{9A^2} + 2\mu_B B. \quad (10)$$

При этом для установления границ корней уравнения (9) можно либо пренебречь слагаемым, зависящим от  $B$ , под радикалом, либо дополнять подкоренное выражение до полного квадрата. В результате можно получить следующие границы:

$$\frac{n_e^2}{9A^2} + \frac{4}{3} \mu_B B < \zeta_{e(-)}(B) < \frac{n_e^2}{9A^2} + \frac{8}{3} \mu_B B, \quad (11)$$

$$\frac{n_e^2}{A^2} + \frac{8}{3} \mu_B B < \zeta_{e(+)}(B) < \frac{n_e^2}{A^2} + 4\mu_B B. \quad (12)$$

Неравенства (11) и правое неравенство (12) не противоречат неравенствам (10), а левое неравенство (12) противоречит правому неравенству (10). Поэтому в (9) следует оставить только корень  $\zeta_{e(-)}(B)$ .

С дальнейшим ростом  $r$  получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней.

### Химический потенциал крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле

Теперь рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, только для релятивистского газа. Уравнение, аналогичное (5), для химического потенциала  $\chi_e(B)$  (который, в отличие от нерелятивистского случая, содержит энергию покоя электрона) может быть записано на основе сведений из [2, с. 45] следующим образом:

$$n_e = F \left( \sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4} + 2 \sum_{j=1}^r \sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4 - 4 j m_e c^2 \mu_B B} \right), \quad (13)$$

$$F = \frac{m_e \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3 c}, \quad (14)$$

Суммирование в (13), как и в (5), ведется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не станет отрицательным. Как и для нерелятивистского газа, рассмотрим некоторые частные случаи (в т. ч. те, которые не затрагивались ранее).

При  $r = 0$  сумма в правой части (13) исчезает, поэтому величина  $\chi_e(B)$  может быть легко выражена через остальные:

$$\chi_e(B) = \sqrt{n_e^2 \pi^4 \hbar^6 c^2 / (m_e \mu_B B)^2 + m_e^2 c^4}. \quad (15)$$

При  $r = 1$  из (13) получается квадратное уравнение относительно величины

$$y = \chi_e^2(B) - m_e^2 c^4. \quad (16)$$

Для удобства анализа корней такого уравнения после несложных преобразований можно переписать его следующим образом:

$$9y^2 - \left( 96\mu_B B m_e c^2 + 10 \frac{n_e^2}{F^2} \right) y + \left( 16\mu_B B m_e c^2 + \frac{n_e^2}{F^2} \right)^2 = 0. \quad (17)$$

Корни уравнения (17) находятся по формулам:

$$y_{\pm} = \frac{1}{18} \left( 96\mu_B B m_e c^2 + 10 \frac{n_e^2}{F^2} \pm \sqrt{768\mu_B B m_e c^2 \frac{n_e^2}{F^2} + 64 \frac{n_e^4}{F^4}} \right). \quad (18)$$

Поскольку  $\chi_e(B)$  определяется однозначно, следует, как и в нерелятивистском случае, оставить только один корень в (18). Из (13) при  $r = 1$  можно, выполняя рассуждения, аналогичные приведенным в абзаце перед (10), сделать следующие оценки:

$$\frac{n_e^2}{9F^2} < y < \frac{n_e^2}{9F^2} + 4\mu_B B m_e c^2. \quad (19)$$



Для установления границ корней (18) можно, как и при получении (11) – (12), либо пренебрегать слагаемым, зависящим от  $B$ , под радикалом, либо дополнять подкоренное выражение до полного квадрата. В этом случае получаем следующие оценки:

$$\frac{n_e^2}{9F^2} + \frac{8}{3}m_e c^2 \mu_B B < y_- < \frac{n_e^2}{9F^2} + \frac{16}{3}m_e c^2 \mu_B B, \quad (20)$$

$$\frac{n_e^2}{F^2} + \frac{16}{3}m_e c^2 \mu_B B < y_+ < \frac{n_e^2}{F^2} + 8m_e c^2 \mu_B B. \quad (21)$$

Оба неравенства (20), а также правое неравенство (21) не противоречат неравенствам (19). В противоположность этому, левое неравенство (21) противоречит правому неравенству (19). Поэтому в (18) оставляем только корень  $y_-$ , и тогда из (18) и (16) следует, что

$$\chi_e(B) = \sqrt{\frac{96\mu_B B m_e c^2 + 10 \frac{n_e^2}{F^2} - \sqrt{768\mu_B B m_e c^2 \frac{n_e^2}{F^2} + 64 \frac{n_e^4}{F^4}}}{18} + m_e^2 c^4}. \quad (22)$$

По аналогии с нерелятивистским случаем, с дальнейшим ростом  $r$  получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней относительно величины (16).

### Степень поляризации крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле

Рассмотрим предыдущую модель электронного газа, оставляя все ее параметры без изменений, но теперь будем исследовать вопрос о спиновой поляризации электронов.

На основе соотношений [2, с. 45] можно записать систему уравнений, связывающих степень спиновой поляризации  $p_{0e}$  и химический потенциал  $\chi_e(B)$  такого газа:

$$n_e(1 + p_{0e}) = \frac{2m_e \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3 c} \sum_{j=0}^r \sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4 - 4j m_e c^2 \mu_B B}, \quad (23)$$

$$n_e(1 - p_{0e}) = \frac{2m_e \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3 c} \sum_{j=1}^r \sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4 - 4j m_e c^2 \mu_B B}. \quad (24)$$

Здесь, как и в предыдущих задачах, не учитывается аномальный магнитный момент электрона, а суммирование ведется с прежними замечаниями. Можно исключить величину  $\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4$  из (23) и (24) или выразить ее в явном виде, вычитая (24) из (23). Тогда в правой части остается только одно слагаемое – то, в котором под корнем присутствует лишь  $\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4$ :

$$n_e p_{0e} = \frac{m_e \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3 c} \sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4}. \quad (25)$$

Из (25) легко получить, что

$$\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4 = \frac{n_e^2 p_{0e}^2 \pi^4 \hbar^6 c^2}{(m_e \mu_B B)^2}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (23), получаем:

$$n_e(1 + p_{0e}) = \frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c} \sum_{j=0}^r \sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2 \pi^4 \hbar^6 c^2}{(m_e\mu_B B)^2} - 4jm_e c^2 \mu_B B}. \quad (27)$$

Можно подставить (26) также в (24), в результате чего получаем:

$$n_e(1 - p_{0e}) = \frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c} \sum_{j=1}^r \sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2 \pi^4 \hbar^6 c^2}{(m_e\mu_B B)^2} - 4jm_e c^2 \mu_B B}. \quad (28)$$

Вычитание (28) из (27) уже не приводит к новым уравнениям, но вместо вычитания можно выполнить сложение, в результате чего получим:

$$2n_e = \frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c} \left( \frac{n_e p_{0e} \pi^2 \hbar^3 c}{m_e \mu_B B} + 2 \sum_{j=1}^r \sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2 \pi^4 \hbar^6 c^2}{(m_e\mu_B B)^2} - 4jm_e c^2 \mu_B B} \right). \quad (29)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи полученных уравнений.

Легко убедиться, что если в (27)  $r = 0$ , то  $p_{0e} = 1$ . При  $r = 1$  из (27), (28) или (29) независимыми способами можно получить одно и то же квадратное уравнение относительно  $p_{0e}$ , которое внешне не отличается от аналогичного уравнения для нерелятивистского газа [4, с. 15]:

$$3p_{0e}^2 + 2p_{0e} - 1 - \frac{16(m_e\mu_B B)^3}{n_e^2 \pi^4 \hbar^6} = 0. \quad (30)$$

Корни уравнения (30) находятся по формуле

$$p_{0e}^{(\pm)} = \frac{1}{3} \left( -1 \pm \sqrt{1 + 3 \left( 1 + 16(m_e\mu_B B)^3 / (n_e^2 \pi^4 \hbar^6) \right)} \right). \quad (31)$$

Легко убедиться в том, что корень  $p_{0e}^{(-)}$  отрицателен по знаку, а также превосходит единицу по модулю при любых, отличных от нуля значениях  $B$ , что лишено физического смысла. Кроме того, в соответствии со смыслом величины  $p_{0e}$ , который подразумевается в [2, с. 45], для уравнения (30) берется только положительный корень, а таким корнем при любых, отличных от нуля значениях  $B$ , как можно убедиться, является только корень  $p_{0e}^{(+)}$ .

Как и в случае химического потенциала, с дальнейшим ростом  $r$  получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней.

### Химический потенциал крайне невырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле

Перейдем к исследованию электронного газа при высоких температурах. Уравнение, связывающее химический потенциал такого газа с другими величинами, было получено в [2, с. 62–64]. Выполненные преобразования, однако, требуют уточнения, поэтому получим указанное уравнение заново.

Введем обозначения:  $\chi$  – химический потенциал (содержащий энергию покоя частиц),  $N_e$  – число электронов,  $V$  – объем,  $s = 1/2$ . Смысл остальных величин был

приведен ранее. Запишем исходные соотношения (без учета аномального магнитного момента электрона):

$$N_e = N_e^- + N_e^+, \quad (32)$$

$$N_e^\pm = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_e \mu_B B V}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi - \varepsilon_{n\pm}}{kT}\right) dp_z, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{n\pm} = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_z^2 + 2m_e c^2 \mu_B B (2n + 1 \pm 2s)}. \quad (34)$$

При этом  $N_e^\pm$  – число электронов со спинами, направленными, соответственно, по направлению и против направления вектора индукции магнитного поля (направления собственных магнитных моментов противоположны),  $n$  – номер уровня Ландау,  $p_z$  – проекция импульса отдельного электрона на ось  $z$ .

Перепишем (32) с учетом (33) и (34) следующим образом:

$$N_e = \frac{m_e \mu_B B V}{\pi^2 \hbar^3 c} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\varepsilon_{n1}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{n-}}{kT}\right) d\sqrt{\varepsilon_{n-}^2 - m_e^2 c^4 - 4nm_e c^2 \mu_B B} + \int_{\varepsilon_{n2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{n+}}{kT}\right) d\sqrt{\varepsilon_{n+}^2 - m_e^2 c^4 - 4(n+1)m_e c^2 \mu_B B} \right), \quad (35)$$

$$\varepsilon_{n1} = \sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B}, \quad (36)$$

$$\varepsilon_{n2} = \sqrt{m_e^2 c^4 + 4(n+1)m_e c^2 \mu_B B}. \quad (37)$$

Соотношение (35) можно также переписать следующим образом:

$$N_e = \frac{m_e \mu_B B V}{\pi^2 \hbar^3 c} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \left( \int_{m_e c^2}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon_{n1}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4 - 4nm_e c^2 \mu_B B} \right). \quad (38)$$

Введем обозначения:

$$x = \frac{\varepsilon}{m_e c^2}, y_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B}}, \quad (39)$$

$$v_n = \frac{\sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B}}{kT} = \eta \sqrt{1 + \frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}}, \eta = \frac{m_e c^2}{kT} = v_0. \quad (40)$$

С учетом (39) и (40) можно переписать (38) в виде

$$N_e = \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \left( \frac{m_e^2 c \mu_B B V}{\pi^2 \hbar^3} \int_1^{+\infty} \exp(-\eta x) d\sqrt{x^2 - 1} + \frac{2m_e \mu_B B V}{\pi^2 \hbar^3 c} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B} \int_1^{+\infty} \exp(-y_n v_n) d\sqrt{y_n^2 - 1} \right). \quad (41)$$

Учитывая выражение для функции Бесселя

$$K_1(\lambda) = \int_1^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (42)$$

можно окончательно переписать (41) в виде

$$N_e = \frac{m_e^2 c \mu_B B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \left( K_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}} K_1(v_n) \right). \quad (43)$$

Таким образом,

$$N_e^- = \frac{m_e^2 c \mu_B B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}} K_1(v_n), \quad (44)$$

$$N_e^+ = \frac{m_e^2 c \mu_B B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}} K_1(v_n). \quad (45)$$

Кроме того, с учетом соотношения

$$n_e = N_e / V, \quad (46)$$

можно из (43) выразить химический потенциал через остальные величины:

$$\chi = kT \ln \left( \frac{\pi^2 \hbar^3 n_e}{m_e^2 c \mu_B B \left( K_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}} K_1(v_n) \right)} \right). \quad (47)$$

**Степень поляризации и другие термодинамические характеристики крайне невырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле**

В электронном газе во внешнем магнитном поле при любой температуре возникает поляризация спинов (и собственных магнитных моментов). Степень такой поляризации в общем случае можно найти по формуле

$$p_{0e} = (N_e^- - N_e^+) / (N_e^- + N_e^+), \quad (48)$$

где выражения для  $N_e^\pm$  были получены ранее. Подставляя (44), (45) в (48), получим:

$$p_{0e} = K_1(v_0) / \left( K_1(v_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + 4n\mu_B B / (m_e c^2)} K_1(v_n) \right). \quad (49)$$

Далее нам также понадобится обозначение (помимо (40)):

$$\alpha = \frac{\mu_B B}{kT}. \quad (50)$$

Общие выражения для энтропии  $S$ , средней энергии  $E$  и намагниченности  $M$  имеют, соответственно, вид [2, с. 49, 53]:

$$S = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\chi, V}, \quad (51)$$

$$E = \Omega + \chi N + TS, \quad (52)$$

$$M = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial B} \right)_{\chi, V, B}. \quad (53)$$

При этом  $\Omega$  – большой термодинамический потенциал, выражение для которого в случае крайне невырожденного газа имеет вид [2, с. 49]:

$$\Omega = -N_e kT. \quad (54)$$

Подставляя (54) в (51) – (52), с учетом (43) получим:

$$S = N_e k \left( 2 - \frac{\chi}{kT} + \frac{\eta^2 K_0(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 K_0(v_n)}{\eta K_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n K_1(v_n)} \right), \quad (55)$$

$$E = N_e kT \left( 1 + \frac{\eta^2 K_0(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 K_0(v_n)}{\eta K_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n K_1(v_n)} \right), \quad (56)$$

$$M = \frac{N_e kT}{VB} \left( 1 - \frac{4\eta\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n K_0(v_n)}{\eta K_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n K_1(v_n)} \right). \quad (57)$$

При получении (55) – (57) было использовано соотношение [9, с. 168]

$$K_1'(y) = -K_0(y) - K_1(y)/y. \quad (58)$$

### Омега-потенциал идеального нерелятивистского газа заряженных фермионов в магнитном поле при конечных температурах

Теперь перейдем к исследованию нерелятивистского газа при конечных, но не очень высоких температурах. Общее выражение для большого термодинамического потенциала газа заряженных фермионов в магнитном поле при конечных температурах имеет вид [2, с. 48, 50, 51]

$$\Omega = -kT \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \sum_s \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( 1 + \exp \left( \frac{\chi - \varepsilon_n}{kT} \right) \right) dp_z. \quad (59)$$

В (59) приняты обозначения:  $m$  – масса частицы,  $\varepsilon_n$  – энергия фермиона,  $n$  – номер уровня Ландау,  $\mu$  – соответствующий магнетон (магнетон Бора для электронов или позитронов, ядерный магнетон для протонов),  $p_z$  – проекция импульса отдельного фермиона на ось  $z$ .

Таким образом, соотношение (59), как и все последующие, применимы не только к электронам, но и к другим заряженным фермионам (позитронам, протонам и др.).

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда для любых физически допустимых значений  $\varepsilon_n$  справедливо соотношение

$$\exp\left(\frac{\varepsilon_n - \chi}{kT}\right) > 1. \quad (60)$$

Для энергии и химического потенциала выполняются соотношения:

$$\chi = \zeta + mc^2, \quad \varepsilon_n = \frac{p_z^2}{2m} + mc^2 + (2n + 1 + 2\sigma)\mu B, \quad (61)$$

где  $c$  – скорость света,  $\sigma$  – отношение собственного магнитного момента фермиона к соответствующему магнетону.

Если величина  $s$  принимает значения, равные  $\pm 1/2$ , а минимальное значение  $n$  равно нулю, то из (61) следует, что (60) справедливо при

$$\zeta < (1 - |\sigma|)\mu B. \quad (62)$$

При выполнении (62) для логарифма в (59) можно выполнить следующее разложение:

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{\chi - \varepsilon_n}{kT}\right)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \exp\left((j+1)\frac{\chi - \varepsilon_n}{kT}\right). \quad (63)$$

С учетом (63) можно переписать (59) в виде:

$$\begin{aligned} \Omega = & -kT \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right) \sum_s \exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma\mu B}{kT}\right) \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right) dp_z. \end{aligned} \quad (64)$$

Далее учтем, что [10, с. 277]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right) dp_z = \sqrt{\frac{2\pi mkT}{j+1}}. \quad (65)$$

Выполняя суммирование, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right) = \frac{1}{2\operatorname{sh}\left((j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}, \quad (66)$$

$$\sum_s \exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma\mu B}{kT}\right) = 2\operatorname{ch}\left((j+1)\frac{\sigma\mu B}{kT}\right). \quad (67)$$

Подставляя (65) – (67) в (64), окончательно получаем:

$$\Omega = -2\mu_B V \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)^{3/2}} \exp\left( (j+1) \frac{\zeta}{kT} \right) \frac{ch\left( (j+1) \frac{\sigma\mu_B}{kT} \right)}{sh\left( (j+1) \frac{\mu_B}{kT} \right)}. \quad (68)$$

Если в сумме (68) оставить только слагаемое, соответствующее  $j=0$ , то получится уже известный результат для высоких температур [2, с. 51].

### Заключение

Исследовано влияние температуры и квантующего магнитного поля на избранные термодинамические характеристики идеальных газов заряженных фермионов. В приближении абсолютного нуля температуры получена зависимость химического потенциала нерелятивистского и релятивистского электронного газа, а также степени спиновой поляризации релятивистского электронного газа от индукции магнитного поля при заполнении одного или двух уровней Ландау. Для крайне невырожденного релятивистского электронного газа получены выражения для химического потенциала, степени спиновой поляризации, энтропии, средней энергии и намагниченности. Для отличных от нуля, но не очень высоких температур получено выражение для большого термодинамического потенциала газа заряженных фермионов. Результаты могут представлять интерес для теоретического исследования замагниченных сверхплотных астрофизических объектов и замагниченной межзвездной среды.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
2. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
3. Секержицкий, В. С. О поляризации крайне вырожденных идеальных ферми-газов в магнитном поле / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. – Брэст : БрДУ, 2020. – Вып. 16, ч. 2 : Прыродазн. навукі. – С. 70–78.
4. Секержицкий, В. С. О частично поляризованном идеальном электронном газе в квантующем магнитном поле / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Астрофизические исследования в БрГУ имени А. С. Пушкина : сб. материалов науч.-практ. семинара, Брест, 12 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Серого. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 14–15.
5. Секержицкий, В. С. Об использовании программы MathCAD для вычисления химического потенциала газа нерелятивистских фермионов / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2018. – С. 12–14.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 5 : Статистическая физика, ч. 1. – 616 с.
7. Секержицкий, В. С. О вычислении термодинамических характеристик нерелятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле при низких отличных от нуля температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Современные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. XVIII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2021. – С. 12–15.

8. Секержицкий, В. С. О вычислении некоторых термодинамических характеристик релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле при низких отличных от нуля температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. XIX Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2021. – Ч. 1. – С. 11–14.

9. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М. : Наука, 1973. – 228 с.

10. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев [и др.] ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.

## REFERENCES

1. Rumier, Yu. B. Tiermodinamika, statisticheskaja fizika i kinetika : uchieb. posobije / Yu. B. Rumier, M. Sh. Rvkin. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.

2. Siekierzickij, V. S. Ravnovesnyje sistemy fiermionov i bozonov v magnitnykh poliakh : monografija / V. S. Siekierzickij ; Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Brest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.

3. Siekierzickij, V. S. O poliarizacii krajnie vyrozhdennykh ideal'nykh fiermi-gazov v magnitnom polie / V. S. Siekierzickij, A. I. Sieryj // Vuchon. zap. Brest. dziazrh. un-ta imia A. S. Pushkina : zb. navuk. pr. – Brest : BrDU, 2020. – Vyp. 16., ch. 2 : Pryrodazn. navuki. – S. 70–78.

4. Siekierzickij, V. S. O chastichno poliarizovannom ideal'nom eliektronnom gazie v kvantujushchiem magnitnom polie / V. S. Siekierzickij, A. I. Sieryj // Astrofizichieskije issliedovanija v BrGU imieni A. S. Pushkina : sb. materialov nauch.-prakt. sieminara, Brest, 12 apr. 2022 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. A. I. Sierogo. – Brest : BrGU, 2022. – S. 14–15.

5. Siekierzickij, V. S. Ob ispol'zovanii programmy MathCAD dlja vychislienija khimichieskogo potentsiala gaza nierielativistskikh fiermionov / V. S. Siekierzickij, A. I. Sieryj // Matematichieskoje modelirovanije i novyje obrazovatel'nyje tiekhnologii v matematike : materialy riesp. nauch.-prakt. konf., Brest, 24–25 apr. 2018 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. A. I. Basika. – Brest : BrGU im. A. S. Pushkina, 2018. – S. 12–14.

6. Landau, L. D. Tieorietichieskaja fizika : uchieb. posobije dlja vuzov : v 10 t. / L. D. Landau, Ye. M. Lifshic. – 5-je izd., stier. – M. : FIZMATLIT, 2001. – T. V : Statistichieskaja fizika, v 2 ch., ch. 1. – 616 s.

7. Siekierzickij, V. S. O vychislienii tiermodinamichieskikh kharakteristik nierieliativistskogo eliektronnogo gaza v kvantujushchiem magnitnom polie pri nizkikh otlichnykh ot nulia tiempieraturakh / V. S. Siekierzickij, A. I. Sieryj // Sovriemiennyje nauchnyje issliedovanija: aktual'nyje voprosy, dostizhenija i innovacii : sb. st. XVIII Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. – Pienza : MCNS «Наука i Prosvieshchienije», 2021. – S. 12–15.

8. Siekierzickij, V. S. O vychislienii niekatorykh tiermodinamichieskikh kharakteristik rieliativistskogo eliektronnogo gaza v kvantujushchiem magnitnom polie pri nizkikh otlichnykh ot nulia tiempieraturakh / V. S. Siekierzickij, A. I. Sieryj // Sovriemiennyje nauchnyje issliedovanija: aktual'nyje voprosy, dostizhenija i innovacii : sb. st. XIX Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. : v 2 ch. – Pienza : MCNS «Наука i Prosvieshchienije», 2021. – Ch. 1 – S. 11–14.

9. Dvajt, G. B. Tablicy integralov i drugije matematichieskije formuly / G. B. Dvajt. – M. : Nauka, 1973. – 228 s.

10. Osnovnyje matematichieskije formuly : spravochnik / V. T. Vodniev [i dr.] ; pod red. Yu. S. Bogdanova. – Minsk : Vysh. shk., 1995. – 380 s.



---

# МАТЭМАТЫКА

---

УДК 512.542

**Наталья Витальевна Артеменко**  
*магистрант физико-математического факультета  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*  
**Natalia Artemenko**  
*Master Student of the Faculty of Physics and Mathematics  
of Brest State A. S. Pushkin University*  
email: [artemenkonatasha@outlook.com](mailto:artemenkonatasha@outlook.com)

## О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ПОРЯДКА, СВОБОДНОГО ОТ ЧЕТВЕРТЫХ СТЕПЕНЕЙ И НЕ ПРЕВЫШАЮЩЕГО 2000\*

*Натуральное число  $n$  называется свободным от четвертых степеней, если  $p^4$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . Получена точная оценка производной длины конечных разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней и не превышающего 2000.*

*Ключевые слова:* разрешимая группа, порядок, свободный от четвертых степеней, производная длина.

### *On the Derived Length of Finite Soluble Groups in which the Order is Fourth Powers Free and Not at Most 2000*

*A natural number  $n$  is called free of fourth powers if  $p^4$  it does not divide  $n$  for all primes  $p$ . The accurate estimate of the derived length of a finite soluble groups in which the order is fourth powers free and at most 2000 is obtained.*

*Ke ywords:* soluble group, order of fourth powers free, derived length.

#### **Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Для группы  $G$  можно построить цепочку коммутантов

$$G \supseteq G' \supseteq (G')' \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \dots$$

Здесь  $G'$  – коммутант группы  $G$  и  $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$ . Если существует номер  $n$  такой, что  $G^{(n)} = 1$ , то группа  $G$  называется разрешимой. Наименьшее натуральное  $n$ , для которого  $G^{(n)} = 1$ , называется производной длиной группы  $G$  и обозначается  $d(G)$ .

Пусть  $m$  и  $n$  – натуральные числа. Говорят, что  $n$  свободно от  $m$ -х степеней, если  $p^m$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . При  $m=4$  говорят, что  $n$  свободно от четвертых степеней.

В работе [2] были получены точные оценки производной, нильпотентной и  $p$ -длины конечных разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней. В частности, производная длина таких групп не превышает 6. Данную оценку можно уточнить, если рассмотреть группы порядка, не превышающего 2000.

---

\*Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (№ госрегистрации 20211467) при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь).

С использованием системы компьютерной алгебры GAP [3] был разработан алгоритм для определения наибольшего значения производной длины разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней и не превышающего 2000.

**Теорема.** Пусть  $G$  – разрешимая группа порядка, свободного от четвертых степеней и не превышающего 2000. Тогда производная длина группы  $G$  не превышает 4.

Справедливость теоремы подтверждают вычисления в системе GAP. С использованием методов абстрактной теории групп и теории формаций в настоящей статье получено доказательство приведенной выше теоремы.

### Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Обозначим через  $[A]B$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ ,  $O_p(G)$  – наибольшую нормальную  $p$ -подгруппу группы  $G$ ,  $O_{p'}(G)$  – наибольшую нормальную  $p'$ -подгруппу группы  $G$ . Через  $Z_n$  будем обозначать циклическую группу порядка  $n$ .

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 4].

Пусть  $\mathfrak{F}$  – некоторая формация групп и  $G$  – группа. Тогда  $G^{\mathfrak{F}}$  –  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  из  $G$ , для которых  $G/N \in \mathfrak{F}$ . Произведение  $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}\}$  формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  состоит из всех групп  $G$ , для которых  $\mathfrak{G}$ -корадикал принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Как обычно,  $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ . Формация всех абелевых групп обозначается через  $\mathfrak{A}$ . Очевидно, что  $G \in \mathfrak{A}^k$  тогда и только тогда, когда  $d(G) \leq k$ .

**Лемма 1.** [4, лемма VI.8.1; 5, теорема 4B]. Пусть  $H$  – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы  $GL(n, p)$ . Тогда:

- 1) если  $n = 2$ , то  $H$  циклическая и  $|H|$  делит  $(p^2 - 1)$ ;
- 2) если  $n = 3$ , то  $H$  метаболева.

**Лемма 2.** [6, леммы 10, 11].

1) Если  $H$  – разрешимая  $A_4$ -свободная подгруппа  $GL(3, 3)$  и  $O_3(H) = 1$ , то  $d(H) \leq 2$ .

2) Если  $H$  – разрешимая  $A_4$ -свободная подгруппа  $GL(3, 5)$  и  $O_5(H) = 1$ , то  $d(H) \leq 3$ .

Вычисления в системе GAP устанавливают справедливость следующих лемм.

**Лемма 3.** Расширение элементарной абелевой группы порядка 4 при помощи симметрической группы  $S_3$  изоморфно одной из следующих групп:

$$Z_2 \times [Z_3]Z_4, [Z_6 \times Z_2]Z_2, Z_2 \times Z_2 \times S_3, S_4.$$

**Лемма 4.** Если  $H$  – собственная подгруппа симметрической группы  $S_4$ , то  $H \simeq \{Z_2, Z_3, E_4, Z_4, S_3, D_8, A_4\}$ . В частности,  $d(H) \leq 2$ .

**Лемма 5.** Пусть  $G$  – группа порядка 24. Тогда  $G$  изоморфна одной из следующих групп:

$$Z_8 \times Z_3, Z_{12} \times Z_2, Z_6 \times Z_2 \times Z_2, [Z_3]Z_8, SL(2, 3), [Z_3]Q_8, Z_4 \times S_3, D_{24}, Z_2 \times Z_3 \times Z_4, \\ [[Z_6]Z_2]Z_2, D_8 \times Z_3, Q_8 \times Z_3, S_4, A_4 \times Z_2, D_{12} \times Z_2.$$

В частности,  $d(G) \leq 3$ .

**Лемма 6.** Если  $H$  – разрешимая неприводимая подгруппа группы  $GL(2, 7)$  и  $|H| = 72$ , то

$$H = \{Z_3 \times SL(2, 3); Z_3 \times [Z_6 \times Z_2]Z_2\}.$$

В частности,  $d(H) \leq 3$ .

**Лемма 7.** Пусть  $H$  – неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(2, p)$ . Тогда  $d(H) \leq 3$  или  $|H| = 24 \cdot k$ , где  $k$  делит  $p-1$ .

*Доказательство.* Воспользуемся доказательством, которое приведено в [7, лемма 3]. Пусть  $H$  содержится в максимальной разрешимой подгруппе  $M$  группы  $GL(2, p)$ . Очевидно,  $M$  – неприводимая подгруппа.

Если  $M$  импримитивна или  $M$  примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа  $F$  изоморфна мультипликативной группе поля  $GF(p^2)$ , то  $d(M) \leq 2$ . Поэтому  $d(H) \leq 2$ .

Пусть  $M$  примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа  $F = GF(p)^* E_2$ . Подгруппа  $F$  состоит из скалярных матриц, поэтому  $F$  содержится в центре  $M$ . В  $M$  существует нормальная подгруппа  $A$  такая, что  $A$  содержит  $F$  и  $A/F$  изоморфна элементарной абелевой группе порядка 4, а  $M/A$  изоморфна симметрической группе степени 3. Тогда существует нормальный ряд

$$1 \leq F \leq A \leq M$$

такой, что  $M/F$  является расширением элементарной абелевой группы  $A/F$  порядка 4 при помощи группы  $M/A$  изоморфной  $S_3$ . По лемме 3 возможны следующие случаи:

$$M/F \simeq \{Z_2 \times ([Z_3]Z_4), [Z_6 \times Z_2]Z_2, Z_2 \times Z_2 \times S_3, S_4\}.$$

Во всех, кроме последнего случая,  $M/F \in \mathcal{A}^2$  и  $d(M/F) \leq 2$ . Пересечем нормальный ряд  $1 \leq F \leq A \leq M$  с подгруппой  $H$ , получим

$$1 \triangleleft F \cap H \triangleleft A \cap H \triangleleft M \cap H = H.$$

Если  $M/F \in \mathcal{A}^2$ , то  $H/F \cap H \simeq HF/F \in \mathcal{A}^2$  и  $H \in \mathcal{A}^3$ . Поэтому  $d(H) \leq 3$ .

Пусть  $M/F \simeq S_4$ . Если  $HF/F < M/F$ , то по лемме 4

$$HF/F \simeq \{Z_2, Z_3, E_4, Z_4, S_3, D_8, A_4\}.$$

Поэтому  $H/F \cap H \simeq HF/F \in \mathcal{A}^2$  и  $H \in \mathcal{A}^3$ . Значит,  $d(H) \leq 3$ .

Пусть  $HF/F = M/F$ . Так как  $|M| = 24 \cdot (p-1)$ , то  $|H| = 24 \cdot |F \cap H|$  и  $|F \cap H|$  делит  $p-1$ .

Других ситуаций для  $M$  нет. Лемма доказана.

### Доказательство теоремы

Пусть  $N_1$  и  $N_2$  – минимальные нормальные подгруппы группы  $G$ . Тогда группа  $G$  изоморфна фактор-группе  $G/N_1 \cap N_2$ . В свою очередь, по [1, лемма 2.33] фактор-

группа  $G/N_1 \cap N_2$  изоморфна подгруппе прямого произведения фактор-групп  $G/N_1$  и  $G/N_2$ . Поскольку для всех фактор-групп выполняются условия теоремы, то  $G/N_1 \in \mathfrak{A}^4$  и  $G/N_2 \in \mathfrak{A}^4$ . Поэтому производная длина группы  $G$  не превышает 4. Значит, в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа и подгруппа Фиттинга  $F(G)$  группы  $G$  является подгруппой некоторой силовой  $p$ -подгруппы  $G_p$  группы  $G$ .

Пусть  $\Phi(G) \neq 1$ , тогда  $\Phi(G) < F(G) \leq G_p$ . Так как порядок группы  $G$  свободен от четвертых степеней, то производная длина подгруппы  $F(G)$  не превышает 2, а порядок фактор-группы  $F(G)/\Phi(G)$  равен либо  $p$ , либо  $p^2$ . По теореме 4.24 [1] фактор-группа  $F(G)/\Phi(G)$  либо минимальная нормальная подгруппа группы  $G/\Phi(G)$ , либо  $F(G)/\Phi(G)$  есть прямое произведение минимальных нормальных фактор-групп  $N_1/\Phi(G)$  и  $N_2/\Phi(G)$  порядка  $p$  группы  $G/\Phi(G)$ .

Если  $|F(G)/\Phi(G)| = p$ , то  $G/F(G)$  изоморфна фактор-группе  $(G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))$ , которая, в свою очередь, по [1, теорема 2.8] изоморфна циклической группе, как группе автоморфизмов группы простого порядка  $p$ . Отсюда следует, что  $G/F \in \mathfrak{A}$  и  $d(G) \leq 3$ .

Если  $|F(G)/\Phi(G)| = p^2$  и  $F(G)/\Phi(G)$  есть прямое произведение минимальных нормальных фактор-групп  $N_1/\Phi(G)$  и  $N_2/\Phi(G)$  порядка  $p$  группы  $G/\Phi(G)$ , то по [1, теорема 2.8] для каждого  $N_i/\Phi(G)$  фактор-группа  $G/\Phi(G)/C_{G/\Phi(G)}(N_i/\Phi(G))$  изоморфна подгруппе группы автоморфизмов  $Aut(N_i/\Phi(G)) \simeq Z_{p-1}$ . По [1, лемма 2.33] фактор-группа  $G/\Phi(G)/\bigcap_{i=1}^2 C_{G/\Phi(G)}(N_i/\Phi(G))$  изоморфна подгруппе прямого произведения групп  $G/\Phi(G)/C_{G/\Phi(G)}(N_i/\Phi(G))$ ,  $1 \leq i \leq 2$ . Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^2 C_{G/\Phi(G)}(N_i/\Phi(G)) = C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$$

и

$$G/\Phi(G)/\bigcap_{i=1}^2 C_{G/\Phi(G)}(N_i/\Phi(G)) \simeq G/F.$$

Отсюда следует, что  $G/F \in \mathfrak{A}$  и  $d(G) \leq 3$ .

Если  $|F(G)/\Phi(G)| = p^2$  и  $F(G)/\Phi(G)$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G/\Phi(G)$ , то фактор-группа  $G/F(G)$  изоморфна подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p)$ . Из леммы 7 следует, что производная длина фактор-группы  $G/F(G)$  не превышает 3 или  $|G/F(G)| = 24 \cdot k$ , где  $k$  делит  $p-1$ . Очевидно, что в этом случае либо  $d(G) \leq 4$ , либо  $|F(G)| = p^3$  и  $|G| = 24 \cdot p^3 \cdot k$ , где  $k$  делит  $p-1$ . Так как порядок группы не превышает 2000, то  $p \leq 3$ . Противоречие, поскольку группа  $G$  свободна от четвертых степеней.

Если  $\Phi(G)=1$ , то подгруппа Фиттинга является минимальной нормальной подгруппой группы  $G$  и  $C_G(F(G))=F(G)$ . Поэтому  $|F(G)|$  равен либо  $p$ , либо  $p^2$ , либо  $p^3$ .

Если  $|F(G)|=p$ , то по [1, теорема 2.8]  $G/F(G)$  изоморфна циклической группе, как группе автоморфизмов группы простого порядка  $p$  и  $G \in \mathfrak{A}^2$ . Поэтому  $d(G) \leq 2$ .

Если  $|F(G)|=p^2$ , то по [1, теорема 2.8] фактор-группа  $G/F(G)$  изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе группы  $Aut(F(G)) \simeq GL(2, p)$ . Тогда по лемме 7 производная длина фактор-группы  $G/F(G)$  не превосходит 3 или  $|G/F(G)|=24 \cdot k$ , где  $k$  делит  $p-1$ .

Если  $d(G/F(G)) \leq 3$ , то  $d(G) \leq 4$ . Если  $|G/F(G)|=24 \cdot k$ , то  $|G|=24 \cdot p^2 \cdot k$ , где  $k$  делит  $p-1$ . Так как порядок группы  $G$  не превышает 2000, то  $p \leq 7$ .

Если  $p=2$ , то  $|G|=24 \cdot 2^2 \cdot k$ . Противоречие, т. к. порядок группы  $G$  свободен от четвертых степеней.

Если  $p=3$ , то  $|G|=24 \cdot 3^2 \cdot k$  и  $k$  делит  $3-1=2$ . Следовательно,  $k=2$  или  $k=1$ . Если  $k=2$ , то порядок группы  $G$  не свободен от четвертых степеней. Противоречие. Если  $k=1$ , то  $|G|=3^3 \cdot 2^3$  и  $|G/F(G)|=2^3 \cdot 3=24$ . По лемме 5  $G/F(G) \in \mathfrak{A}^3$  и  $G \in \mathfrak{A}^4$ . Следовательно,  $d(G) \leq 4$ .

Если  $p=5$ , то  $|G|=24 \cdot 5^2 \cdot k$  и  $k$  делит  $5-1=4$ . Следовательно,  $k=4$ ,  $k=2$  или  $k=1$ . В случаях, когда  $k=2$  или  $k=4$ , порядок группы  $G$  не свободен от четвертых степеней. Противоречие. Значит,  $k=1$  и  $|G/F(G)|=24$ . По лемме 5  $G/F(G) \in \mathfrak{A}^3$  и  $G \in \mathfrak{A}^4$ . Следовательно,  $d(G) \leq 4$ .

Если  $p=7$ , тогда  $|G|=24 \cdot 7^2 \cdot k$  и  $k$  делит  $7-1=6$ . Следовательно, либо  $k=6$ , либо  $k=3$ , либо  $k=2$ , либо  $k=1$ . Если  $k$  равно 2 или 6, то порядок группы  $G$  не свободен от четвертых степеней. Противоречие. Если  $k=1$ , то  $|G/F(G)|=24$  и по лемме 5  $G/F(G) \in \mathfrak{A}^3$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{A}^4$  и  $d(G) \leq 4$ . Если  $k=3$ , то  $|G/F(G)|=72$ . Следовательно,  $G/F(G)$  изоморфна подгруппе полной линейной группы  $GL(2, 7)$ . Тогда по лемме 6  $G/F(G) \in \mathfrak{A}^3$ . Значит,  $G \in \mathfrak{A}^4$  и  $d(G) \leq 4$ .

Если  $|F(G)|=p^3$ , то по [1, теорема 2.8] фактор-группа  $G/F(G)$  изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе полной линейной группы  $Aut(F(G)) \simeq GL(3, p)$ . Кроме того,  $G/F(G)$  –  $p'$ -группа.

Если  $p=2$ , то  $G/F(G)$  – подгруппа нечетного порядка группы  $GL(3, p)$ . Тогда по лемме 1  $d(G/F(G)) \leq 2$  и  $d(G) \leq 3$ .

Если  $p=3$ , то  $G/F(G)$  –  $3'$ -группа и, следовательно, фактор-группа  $G/F(G)$  является  $A_4$ -свободной группой. По лемме 2(1)  $d(G/F(G)) \leq 2$  и  $d(G) \leq 3$ .

Если  $p=5$ , то  $G/F(G)$  –  $5'$ -группа и  $|G/F(G)| \leq 16$ . Следовательно, фактор-группа  $G/F(G)$  либо  $A_4$ -свободна, либо  $G/F(G) \simeq A_4$ . Если подгруппа  $G/F(G)$   $A_4$ -свободна, то по лемме 2(2)  $d(G/F(G)) \leq 3$  и  $d(G) \leq 4$ . Если  $G/F(G) \simeq A_4$ , то  $d(G/F(G)) \leq 2$  и  $d(G) \leq 3$ .

Если  $p = 7$ , то  $|G/F(G)| \leq 5$ . Отсюда следует, что подгруппа  $G/F(G)$  абелева и  $d(G) \leq 2$ .

Очевидно, что при  $p \geq 11$  группа  $G$  изоморфна подгруппе  $F(G)$  и  $G$  абелева.

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что оценка производной длины, полученная в теореме, точная.

**Пример.** С помощью системы компьютерной алгебры GAP [3] найдена группа  $G = [S]D_8$  ( $\text{IdGroup}(G)=[216,87]$ ), где  $S$  – экстраспециальная группа порядка 27,  $D_8$  – диэдральная группа порядка 8. Очевидно, что  $|G| = 216 = 2^3 \cdot 3^3$ . Производная длина группы  $G$  равна 4.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Артеменко, Н. В. Конечные разрешимые группы порядка, свободного от четвертых степеней / Н. В. Артеменко, А. А. Трофимук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2021. – № 2. – С. 62–68.
3. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gap-system.org>.
4. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
5. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.
6. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
7. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

#### REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedieniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.
2. Artiomenko, N. V. Koniechnye razrieshimyje grupy poriadka, svobodnogo ot chietviortykh stiepienij / N. V. Artiomenko, A. Trofimuk // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fi-zika. Matematyka. – 2021. – № 2. – S. 62–68.
3. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gap-system.org>.
4. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
5. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.
6. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – Т. 52, № 5. – S. 892–903.
7. Monakhov, V. S. O maksimal'nykh i silovskikh podgruppakh koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov, Ye. Ye. Gribovskaja // Mat. zamietki. – 2021. – Т. 70, №. 4. – S. 603–612.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 08.11.2022

УДК 517.954

*Александр Иванович Басик<sup>1</sup>, Евгений Васильевич Грицук<sup>2</sup>,  
Елена Андреевна Шикеля<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа,  
дифференциальных уравнений и их приложений  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа,  
дифференциальных уравнений и их приложений  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина,  
доц. каф. высшей математики  
Брестского государственного технического университета  
<sup>3</sup>студент 4-го курса физико-математического факультета  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

*Aliaxandr I. Basik<sup>1</sup>, Evgenij V. Hrytsuk<sup>2</sup>, Elena A. Shikelia<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Assistant Professor  
of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications  
at the Brest State A. S. Pushkin University  
<sup>2</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Assistant Professor  
of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications  
at the Brest State A. S. Pushkin University,  
Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics  
at the Brest State Technical University  
<sup>3</sup>fourth-year student of the Department of Physics and Mathematics  
at the Brest State A. S. Pushkin University  
email: <sup>1</sup>alex-basik@yandex.ru; <sup>2</sup>gricuk\_e@tut.by; <sup>3</sup>elenashikelia@gmail.com

## О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Рассматривается множество эллиптических систем двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем. Для таких систем изучается вопрос регуляризуемости задачи типа наклонной производной. В каждой компоненте гомотопической связности рассматриваемого множества эллиптических систем приводится представитель, обладающий следующими свойствами: каждая компонента произвольного дважды непрерывно дифференцируемого решения является бигармонической функцией, и краевая задача типа наклонной производной в классической постановке для этого представителя не является нетеровой. Таким образом устанавливается, что регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим классом системы.

**Ключевые слова:** эллиптическая система, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского, гомотопическая классификация.

### *About the Oblique Derivative Type Boundary Value Problem for Second-Order Elliptic Systems on the Plane*

The set of elliptic systems of two second-order partial differential equations on the plane with positive characteristic determinant is considered in this paper. For such systems the question of regularizability of an oblique derivative type problem is studied. In each homotopy class of the set of elliptic systems under consideration, a representative is given that has the following properties: each component of an arbitrary twice continuously differentiable solution is a biharmonic function, and an oblique derivative-type boundary value problem in the classical formulation for this representative is not Fredholm. Consequently, the regularizability of a problem of oblique derivative type boundary value problem for the elliptic systems under consideration is not related to the homotopy class of the system.

**Ke ywords:** elliptic system, regularizable boundary value problem, Lopatinski condition, homotopic classification.

### Введение

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ , границей которой является гладкая кривая Ляпунова  $\partial\Omega$ , рассмотрим множество равномерно эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\sum_{j,k=1}^2 A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^2 A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0(x)u = 0, \quad (1)$$

где  $A_{jk}(x)$ ,  $A_j(x)$  и  $A_0(x)$  – заданные в  $\Omega$  достаточно гладкие квадратные вещественные матрицы-функции второго порядка,  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  – искомая вектор-функция.

В работе [1] Б. В. Боярский установил, что множество эллиптических систем двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем имеет три компоненты гомотопической связности. Системы первой компоненты гомотопны паре уравнений Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \Delta u_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Системы второй компоненты гомотопны системе А. В. Бицадзе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

третьей компоненты – сопряженной системе А. В. Бицадзе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Задача отыскания пары функций

$$u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))^T \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}),$$

удовлетворяющей в области  $\Omega$  системе (1) и на поверхности  $\partial\Omega$  граничным условиям

$$p_k \langle l_1; \text{grad } u_1 \rangle + q_k \langle l_2; \text{grad } u_2 \rangle = f_k, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

называется задачей типа наклонной производной. Здесь  $p_k, q_k, f_k : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$  – заданные функции класса  $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ ;  $l_1, l_2$  – заданные некасательные к поверхности  $\partial\Omega$  векторные поля;  $\langle \cdot; \cdot \rangle$  – стандартное скалярное произведение в  $\mathbf{R}^2$ ;  $C^{n,\alpha}(\Omega)$  – множество всех непрерывно дифференцируемых в области  $\Omega$  функций до порядка  $n$  включительно, частные производные порядка  $n$  которых непрерывны по Гельдеру с показателем  $\alpha \in (0; 1]$  в этой области;  $C^{n,\alpha}(\bar{\Omega})$  – множество всех непрерывно дифференцируемых в области  $\Omega$  функций до порядка  $n$  включительно, все частные производные которых



до порядка  $n$  включительно допускают непрерывное продолжение на замыкание области и продолжения всех производных непрерывны по Гельдеру с показателем  $\alpha \in (0;1]$  в замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$ .

Для произвольной эллиптической системы (1) краевая задача типа наклонной производной, вообще говоря, не является нетеровой. Например, в случае  $l_1 = l_2$  задача не будет нетеровой [2] для системы (3).

Известно, что если (1) является системой ортогонального типа и в каждой точке границы  $\partial\Omega$  векторы  $l_1$  и  $l_2$  не параллельны, то задача (1), (5) при  $p_1 = q_2 = 1$  и  $p_2 = q_1 = 0$  является нетеровой независимо от того, какой компоненте гомотопической связности принадлежит система (1) [3, с. 74].

В настоящей статье для каждой компоненты гомотопической связности множества эллиптических систем вида (1) приводится представитель, для которого задача типа наклонной производной не является нетеровой. Тем самым мы показываем, что регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим типом системы, и пополняем количество подобных примеров [4].

Проблема гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений впервые была сформулирована И. М. Гельфандом в 1960 г. Она состоит в нахождении числа компонент гомотопической связности, в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [5].

Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, по ней имеются лишь отдельные результаты. Например, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодереску [6], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [7], для кососимметрических эллиптических систем в  $\mathbf{R}^3$  [8] и для эллиптических систем ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$  [9]. Также известны классы систем, для которых в произвольной области любые граничные условия не могут образовывать регуляризуемую краевую задачу [10–12].

### Примеры эллиптических систем и некоторые их свойства

Рассмотрим следующие три системы двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \\ 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} 4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - 9 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \frac{17}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 7 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \\ 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - 4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 4 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 4 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{7}{5} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 5 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{1}{5} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{6}{5} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 6 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Характеристические матрицы систем (7), (8) и (9) имеют соответственно вид

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_1 \xi_2 + 4\xi_2^2 & \xi_2^2 \\ 2\xi_1^2 + 3\xi_1 \xi_2 + 3\xi_2^2 & \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$B(\xi) = \begin{pmatrix} 4\xi_1^2 - 9\xi_1 \xi_2 - 3\xi_2^2 & -\frac{17}{2} \xi_1^2 - 7\xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \\ 2\xi_1^2 - 4\xi_1 \xi_2 - 2\xi_2^2 & -4\xi_1^2 - 4\xi_1 \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$C(\xi) = \begin{pmatrix} -\frac{4\xi_1^2}{15} + \frac{7\xi_1 \xi_2}{5} - \frac{\xi_2^2}{15} & -5\xi_1^2 - 3\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 \\ \frac{\xi_1^2}{5} + \frac{\xi_1 \xi_2}{5} - \frac{6\xi_2^2}{5} & 6\xi_1 \xi_2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** Каждая из систем  $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ ,  $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ ,  $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  является эллиптической. Система  $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  гомотопна паре уравнений Лапласа (2), система  $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  гомотопна системе А. В. Бицадзе (3), а система  $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  гомотопна сопряженной системе А. В. Бицадзе (4).

*Доказательство.* Поскольку

$$\det A(\xi) = \det B(\xi) = \det C(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 > 0$$

при всех  $\xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ , то, по определению, каждая из рассматриваемых систем является эллиптической.

В работе [1] по коэффициентам эллиптической системы (1) строится специальная квадратичная функция  $p(\lambda)$ , по расположению корней которой на комплексной плоскости можно определить принадлежность системы (1) той или иной компоненте гомотопической связности. Для системы  $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  эта квадратичная функция имеет вид

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i\right)\lambda + \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4}i\right),$$

и ее корни  $\lambda_1 = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4}i$ ,  $\lambda_2 = -i$  имеют мнимые части разных знаков, и, согласно [1], система (6) гомотопна паре уравнений Лапласа (2).

Для системы  $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  соответствующая квадратичная функция имеет вид

$$p_B(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{2}{7} - \frac{26}{21}i\right)\lambda + \left(-\frac{5}{21} - \frac{2}{7}i\right),$$

корни которой  $\lambda_1 = -\frac{2}{7} + \frac{5}{21}i$ ,  $\lambda_2 = i$  имеют положительные мнимые части, и, согласно [1], система (7) гомотопна системе А. В. Бицадзе (3).

Для системы  $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  соответствующая квадратичная функция имеет вид

$$p_C(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{33}{61} + \frac{177}{122}i\right)\lambda + \left(-\frac{55}{122} + \frac{33}{61}i\right),$$

корни которой  $\lambda_1 = -\frac{33}{61} - \frac{55}{122}i$ ,  $\lambda_2 = -i$  имеют отрицательные мнимые части, согласно [1], система (8) гомотопна системе, сопряженной системе А. В. Бицадзе (4).

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Каждая компонента произвольного решения любой из систем  $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ ,  $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ ,  $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  в области  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  удовлетворяет уравнению  $\Delta^2 v = 0$ , где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа на плоскости.

*Доказательство.* Согласно результатам книги [10, с. 141], из эллиптичности рассматриваемых систем следует, что каждая компонента  $u_k$  ( $k=1,2$ ) произвольного решения  $u$  любой из них является функцией класса  $C^\infty(\Omega)$ . Тогда из равенств

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta^2 u_1 \\ \Delta^2 u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 3\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + 4\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Delta^2 u_1 \\ \Delta^2 u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 4\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{17}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 7\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 4\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 9\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Delta^2 u_1 \\ \Delta^2 u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + 3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 5\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -\frac{1}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{6}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\frac{4}{15}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{7}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{15}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

следует требуемое.

**Задача типа наклонной производной для рассматриваемых систем**

В этом разделе считаем, что граничные условия (5) имеют вид

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial l} \right|_{\partial\Omega} = f_1, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = f_2, \quad (9)$$

где  $\nu$  – единичное поле внутренних нормалей на поверхности  $\partial\Omega$ ;  $l$  – единичное поле на  $\partial\Omega$ , составляющее с нормалью  $\nu$  ориентированный угол  $45^\circ$  в каждой точке  $\partial\Omega$ ;  $f_1, f_2 : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$  – заданные непрерывные по Гельдеру функции.

**Теорема 3.** Для каждой из систем  $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ ,  $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ ,  $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$  задача с граничными условиями (11) не является нетеровой.

*Доказательство.* Достаточно показать невыполненность условия Я. Б. Лопатинского, обеспечивающего нетеровость краевой задачи, как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [14]. Это условие известно как условие регуляризуемости краевой задачи и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора (9). Для задачи (1), (5) условие регуляризуемости состоит в том, что в каждой точке  $y \in \partial\Omega$  и при каждом векторе  $\tau$ , касательном к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ , ранг матрицы Я. Б. Лопатинского

$$L(y, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Xi(y, \lambda\nu + \tau) \Theta^{-1}(y, \lambda\nu + \tau) (E, \lambda E) d\lambda, \quad (10)$$

является максимальным, т. е. равен двум. Здесь  $\Theta(y, \xi)$  – характеристическая матрица системы (1);  $\Xi$  – символ старшей части граничного оператора (5);  $E$  – единичная матрица размера  $2 \times 2$ ;  $\nu$  – внутренняя нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ ;  $\Gamma$  – простой замкнутый контур, лежащий в верхней  $\lambda$ -полуплоскости и охватывающий находящиеся там  $\lambda$ -корни уравнения

$$\det \Theta(y, \lambda\nu + \tau) = 0. \quad (11)$$

Поскольку в каждой точке  $y \in \partial\Omega$

$$\det A(\lambda\nu + \tau) = \det B(\lambda\nu + \tau) = \det C(\lambda\nu + \tau) = (\lambda^2 + 1)^2,$$

то уравнение (11) для каждой из рассматриваемых систем имеет корни  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  кратности 2. Пусть простой замкнутый контур  $\Gamma$ , лежащий в полуплоскости  $\text{Im } \lambda > 0$ , охватывает точку  $\lambda_1 = i$ . В той точке  $\tilde{y}$  поверхности  $\partial\Omega$ , в которой внутренняя нормаль  $\nu = (-1; 0)$ , на векторе  $\tau = (0; 1)$  матрица Лопатинского (10) задачи с граничными

условиями (9) для системы  $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ , имеет вид

$$L_A(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} \lambda + \gamma & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda + 1 & -1 \\ -2\lambda^2 + 3\lambda - 3 & \lambda^2 + \lambda + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} d\lambda,$$

для системы  $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$

$$L_B(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} \lambda + \gamma & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\lambda^2 + 4\lambda & \frac{17}{2}\lambda^2 - 7\lambda - \frac{1}{2} \\ -2\lambda^2 - 4\lambda + 2 & 4\lambda^2 + 9\lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} d\lambda$$

и для системы  $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$

$$L_C(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} \lambda + \gamma & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6\lambda + 3 & 5\lambda^2 - 3\lambda - 1 \\ -\frac{1}{5}\lambda^2 + \frac{1}{5}\lambda + \frac{6}{5} & -\frac{4}{15}\lambda^2 - \frac{7}{5}\lambda - \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} d\lambda,$$

где  $\gamma = \frac{\langle l, \tau \rangle}{\langle l, \nu \rangle} = 1$ . Вычислив записанные выше интегралы с помощью основной теоремы о вычетах, получим, что

$$L_A(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2-i & i & 3i & i \\ -4-3i & 2-i & 6-3i & 2-i \end{pmatrix},$$

$$L_B(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 17-i & -16i & 3+33i \\ -4+4i & 8-9i & -8-8i & 18+15i \end{pmatrix},$$

$$L_C(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 45i & 150-15i & -180+45i & 60+285i \\ -6-3i & -8+21i & 6-27i & -42-11i \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что все миноры второго порядка матриц  $L_A(\tilde{y}, \tau)$ ,  $L_B(\tilde{y}, \tau)$  и  $L_C(\tilde{y}, \tau)$  равны нулю. Таким образом, в точке  $\tilde{y} \in \partial\Omega$  нарушается условие Лопатинского, и, следовательно, задача типа наклонной производной (с краевыми условиями (9)) для каждой из рассматриваемых систем (6), (7) и (8) не является регуляризуемой.

Теорема доказана.

### Заключение

Таким образом, в каждой компоненте гомотопической связности множества эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем найдется система, обладающая следующими свойствами:

- 1) все дважды непрерывно дифференцируемые решения этой системы являются бигармоническими вектор-функциями;
- 2) краевая задача типа наклонной производной в произвольной ограниченной области с гладкой границей на плоскости не является регуляризуемой.

Последнее означает, что оператор, отвечающий рассматриваемой задаче, не является нетеровским в определенных банаховых пространствах, т. е. имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярский, Б. В. О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости / Б. В. Боярский // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, nr 9. – P. 565–570.
2. Жадан, М. И. Задача типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка / М. И. Жадан, А. Т. Усс // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 6. – С. 489–491.
3. Жадан, М. И. Гомотопическая классификация и регуляризуемость некоторых классов эллиптических систем и краевых задач : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / М. И. Жадан ; Ин-т математики АН БССР. – Минск, 1983. – 111 л.
4. Басик, А. И. К вопросу регуляризуемости краевой задачи типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка на плоскости [Электронный ресурс] / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. В. Копайцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 67–71. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_3\\_52\\_67](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67). – EDN: GFUZYC
5. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.
6. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика : респ. межвед. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
7. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.
8. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в  $\mathbf{R}^3$  / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології. Освіта : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.
9. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$  [Электронный ресурс] / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – Режим доступа: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>.
10. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.
11. Басик, А. И. О краевых задачах для систем Янушаускаса / А. И. Басик, А. Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26–28.
12. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в  $\mathbf{R}^4$  / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.
13. Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – М. : Мир, 1965. – 379 с.
14. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

## REFERENCES

1. Bojarskij, B. V. O piervoj krajevoj zadachie dlia sistiem uravnenij elliptichieskogo tipa vtorigo poriadka na ploskosti / B. V. Bojarskij // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, nr 9. – P. 565–570.
2. Zhdan, M. I. Zadacha tipa naklonnoj proizvodnoj dlia elliptichieskikh sistiem vtorigo poriadka / M. I. Zhdan, A. T. Uss // Dokl. AN BSSR. – 1983. – Т. 27, № 6. – S. 489–491.

3. Zhadan, M. I. Gomotopichieskaja klassifikacija i riegularizujemost' niekatorykh klassov elliptichieskikh sistiem i krajevykh zadach : dis. ... kand. fiz.-mat. nauk : 01.01.02 / M. I. Zhadan ; In-t matematiki AN BSSR – Minsk, 1983. – 111 l.
4. Basik, A. I. K voprosu riegularizujemosti krajevoj zadachi tipa naklonnoj proizvodnoj dlja elliptichieskikh sistiem vtorigo poriadka na ploskosti [Elektronnyj riesurs] / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk, T. V. Kopajceva // Problemy fiziki, matematiki i tiehniki. – 2022. – № 3 (52). – S. 67–71. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_3\\_52\\_67](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67). – EDN: GFUZYC
5. Giel'fand, I. M. O elliptichieskikh uravnenijakh / I. M. Giel'fand // Uspiehi mat. nauk. – 1960. – T. 15, vyp. 3. – S. 121–132.
6. Shevchienko, V. I. Gomotopichieskaja klassifikacija zadach Rimana – Gil'berta dlja golomorfnoho vektora / V. I. Shevchienko // Matematichieskaja fizika : riesp. miezhved. sb. – Kijev, 1975. – Vyp. 17. – S. 184–186.
7. Uss, A. T. Krajevaja zadacha Rimana – Gil'berta dlja triokhmiernykh analogov sistiem Koshi – Rimana // Dokl. NAN Belarusi. – 2003. T. 47, № 6. – S. 10–15.
8. Basik, A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija riegularizujemykh krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dlja odnogo klassa elliptichieskikh sistiem v  $\mathbf{R}^3$  / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk // Matematika. Informacijni tekhnolohiji. Osvita : zb. st. – Luc'k, 2019. – № 6. – S. 12–18.
9. Basik, A. I. Zadacha Rimana – Gil'berta dlja elliptichieskikh sistiem ortogonal'nogo tipa v  $\mathbf{R}^3$  [Elektronnyj riesurs] / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk, T. A. Gricuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2020. T. 56, № 1. – S. 7–16. – Riezhim dostupa: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-7-16>.
10. Uss, A. T. Gomotopichieskaja klassifikacija chietyriokhmiernykh analogov sistiem Koshi – Rimana s dejstvitel'nymi koefficientami / A. T. Uss // Dokl. NAN Bielarusi. – 2003. – T. 47, № 4. – S. 5–9.
11. Basik A. I. O krajevykh zadachakh sistiem Janushauskasa / A. I. Basik, A. T. Uss // Tr. In-ta matematiki NAN Bielarusi. – 2002. – T. 10. – S. 26–28.
12. Basik, A. I. O krajevykh zadachakh dlja elliptichieskikh psievdosimmitrichieskikh sistiem piervogo poriadka v  $\mathbf{R}^4$  / A. I. Basik, A. T. Uss // Diffierenc. uravnenija. – 2003. – T. 38, № 3. – S. 410–412.
13. Khiermander, L. Liniejnyje diffierencial'nyje opieratory s chastnymi proizvodnymi / L. Khiermander. – M. : Mir, 1965. – 379 s.
14. Agranovich, M. S. Elliptichieskije singuliarnyje integro-diffierencial'nyje opieratory / M. S. Agranovich // Uspiehi mat. nauk. – 1965. – T. 20, vyp. 5. – S. 1–121.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.05.2023*

УДК 519.6 + 517.983.54

**Олег Викторович Матысик***канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Oleg Matysik***PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
of Brest State A. S. Pushkin University  
e-mail: matysikoleg@mail.ru***АПОСТЕРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ  
В НЕЯВНОЙ СХЕМЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ  
С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ**

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с ограниченным несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявная итерационная схема. Для этого метода обосновывается возможность применения правила останова по поправкам, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость метода и получена оценка для момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

**Ключевые слова:** некорректное уравнение первого рода, неявная итерационная схема, гильбертово пространство, ограниченный и несамосопряженный оператор, правило останова по поправкам.

***A Posteriori Choice of the Regularization Parameter in an Implicit Iteration Scheme  
for Solving Ill-Posed Problems with a Non-Self-Adjoint Operator***

An implicit iterative scheme is proposed for solving linear operator equations of the first kind with a bounded non-self-adjoint operator in a Hilbert space. For this method, the possibility of applying the stop rule on amendments is justified, which makes the proposed method effective even when there is no information about the source-like representativeness of the exact solution. In this paper, the convergence of the method is proved and an estimate for the stopping moment is obtained. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

**Key words:** ill-posed equation of the first kind, implicit iteration scheme, Hilbert space, bounded and non-self-adjoint operator, stop rule by amendments.

**Введение**

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

с заданным оператором  $A: X \rightarrow Y$  и элементом  $y$ ,  $X$  и  $Y$  – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

**Определение.** Задачу отыскания решения  $x \in X$  уравнения (1) называют **корректной** (или **корректно поставленной**, или **корректной по Адамару**), если при любой фиксированной правой части  $y = y_0 \in Y$  уравнения (1) его решение:

- а) существует в пространстве  $X$ ;
- б) определено в пространстве  $X$  однозначно;



в) устойчиво в пространстве  $X$ , т. е. непрерывно зависит от правой части  $y \in Y$ . В случае нарушения любого из этих условий задачу называют **некорректной** (**некорректно поставленной**); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть **неустойчивой**.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора  $A^{-1}$  на всем пространстве  $Y$ .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике  $l_2$ , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–13].

В настоящей статье предлагается неявная итерационная схема решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и обоснована возможность применения к ней правила останова по поправкам.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным явным методом итераций Ландвебера [2]  $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$ ,  $x_{0,\delta} = 0$  показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле метод Ландвебера предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В методе Ландвебера на параметр  $\alpha$  накладывается ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ , что может привести на прак-

тике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемой неявной схеме итераций ограничений сверху на  $b > 0$  нет. Это позволяет считать  $b > 0$  произвольно большим (независимо от  $\|A\|$ ), в связи с чем оптимальную оценку погрешности для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье неявный итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмологии, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии).

## Основная часть

### 1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \quad (2)$$

где  $A$  – оператор несамосопряженный и ограниченный. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ . Однако нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (2) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что  $y \in R(A)$ , т. е. при точной правой части  $y$  уравнение имеет единственное решение  $x$ . Будем искать его, используя неявную схему итераций

$$x_{n+1} = \left[ (A^* A)^4 + B \right]^{-1} \left[ Bx_n + (A^* A)^3 A^* y \right], \quad x_0 = 0, \quad (3)$$

где  $I$  – единичный оператор, а  $B$  – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве  $B$  возьмем оператор  $B = bI, b > 0$ . Обычно правая часть уравнения неизвестна, а вместо нее известно  $y_\delta$ , такое что  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ . Тогда приближения (3) примут вид

$$z_{n+1} = Cz_n + Dy_\delta + Cu_n, \quad z_0 \in H, \quad (4)$$

где  $u_n$  – ошибки при вычислении итераций ( $\|u_n\| \leq \beta$ ),  $C = \left[ (A^* A)^4 + B \right]^{-1} B$ ,

$$D = \left[ (A^* A)^4 + B \right]^{-1} (A^* A)^3 A^*.$$

Ранее [14] была изучена сходимость схемы итераций (3) с апостериорным выбором числа итераций (останов по малости невязки) для ограниченного и самосопряженного оператора  $A$ . При возмущениях в правой части (2) там доказано, что при условии  $b > 0$  метод (3) сходится и в предположении, что точное решение  $x$  уравнения (2) источнообразно представимо, получены апостериорные оценка погрешности метода и оценка момента останова.

## 2. Правило останова по поправкам.

В том случае, когда источнопредставимость точного решения неизвестна, метод (4) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по поправкам [5–6; 8]. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент останова  $m$  определим неравенствами

$$\begin{aligned} \|z_n - z_{n+1}\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Покажем, что метод (4) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

**Лемма 1.** Пусть приближение  $\omega_n$  определяется условиями

$$\omega_0 = z_0, \quad \omega_{n+1} = C\omega_n + Dy + Cu_n, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

Тогда справедливо неравенство  $\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$ .

**Доказательство.** Из (6) при  $n = k$  имеем  $Cu_k = \omega_{k+1} - C\omega_k - Dy$ . Отсюда, используя равенство  $A^* Ax = A^* y$ , получим

$$\begin{aligned} u_k &= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}Dy = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - \\ &- \left[ (A^*A)^4 + B \right] \left[ (A^*A)^4 + B \right]^{-1} (A^*A)^3 A^*y = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - (A^*A)^4 x = \\ &= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}(E - C)x = C^{-1}(\omega_{k+1} - x) - (\omega_k - x). \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta_k = \omega_k - x$ , тогда  $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$ , откуда  $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - \\ &- 2 \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left( C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Покажем, что  $(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k$ ,  $k \geq 0$ . Имеем  $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ ,  $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ , тогда получим  $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$ ,  $\omega_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \omega_{k+1} - x$ , отсюда следует, что

$$(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k, \quad k \geq 0. \quad (9)$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (8) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 &\geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^n ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k) + 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - \\ &- 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k) + \gamma_n, \end{aligned}$$

где  $\gamma_n = 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}$ . Нетрудно

показать, что  $\gamma_n \geq 0$  при любых  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Тогда

$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k)$ . Используя равенство (9), получим

$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2$ , откуда вытекает

$\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$ . Лемма 1 доказана.

Имеет место

**Лемма 2.** При  $\forall \omega_0 \in H$  и произвольной последовательности ошибок  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих условию  $\|u_n\| \leq \beta$ , выполнено неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta. \quad (10)$$

**Доказательство.** Для доказательства леммы 2 воспользуемся теоремой:

**Теорема 1 (Тёплица).** Пусть выполняются условия: 1)  $P_{n_k} \geq 0$ ; 2)  $\sum_{k=1}^n P_{n_k} = 1$ ;

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = 0$  для любого фиксированного  $k$ ; 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тогда

$(t_n) = \left( \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k \right), n \in N$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ .

**Доказательство.** Из 4) имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , поэтому  $(\forall \varepsilon > 0)$ ,

$(\exists n_0 \in N), (\forall n \in N, n > n_0)$ , что  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Так как любая сходящаяся последовательность ограничена, то  $(\exists M > 0), (\forall n \in N)$ , что  $|x_n| \leq M$ , поэтому получим

$|x_n - a| \leq |x_n| + |a| \leq 2M$ , значит,  $|x_n - a| \leq 2M$ .

Из 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = 0$  для любого фиксированного  $k$ , поэтому  $\exists n'_0 > n_0$ , что

$$P_{n_k} < \frac{\varepsilon}{4n_0 M}, k = \overline{1, n_0} \text{ для } \forall n > n'_0.$$

Таким образом, справедливо записать:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k - a \right| &= \left| \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k - \sum_{k=1}^n P_{n_k} a \right| = \left| \sum_{k=1}^n P_{n_k} (x_k - a) \right| \leq \sum_{k=1}^n P_{n_k} |x_k - a| = \\ &= P_{n_1} |x_1 - a| + \dots + P_{n_{n_0}} |x_{n_0} - a| + P_{n_{n_0+1}} |x_{n_0+1} - a| + \dots + P_{n_n} |x_n - a| \leq \\ &\leq n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0 M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} (P_{n_{n_0+1}} + \dots + P_{n_n}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, для  $(\forall n > n'_0)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ . Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, рассмотрим и докажем следующие примеры:

**Пример 1.** Дано:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = a$ .

**Доказательство.** Воспользовавшись теоремой 1, имеем  $P_{n_k} = \frac{1}{n}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $n \in N$ .

Тогда 1)  $P_{n_k} \geq 0$ ; 2)  $\sum_{k=1}^n P_{n_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Следовательно, получим

$$t_n = \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \text{ поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

**Пример 2.** Дано:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $x_n > 0$ . Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = a$ .

**Доказательство.** Из теоремы 1 имеем  $P_{n_k} = \frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ . Тогда справедливо за-

писать: 1)  $P_{n_k} \geq 0$ ; 2)  $\sum_{k=1}^n P_{n_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = 1$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = 0$ . Следова-

тельно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = a$ .

**Пример 3.** Дано:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $x_n > 0$ . Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} = a$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ , следова-

тельно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = a$ .

Опираясь на пример 3, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} \|a_k\|} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1} \|a_k\|^2} = \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} \|a_k\|^2} \right\}^{1/2} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \|a_k\|^2}{n} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

А теперь вернемся непосредственно к доказательству леммы 2.

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \leq (\text{см. (11)}) \leq \\ &\leq \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \right\}^{1/2} \leq \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} n \|C\|^2 \beta^2 \right\}^{1/2} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta, \text{ так как } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует (10), и, значит, лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть уровень останова  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$  выбирается как функция от уровней  $\delta$  и  $\beta$  норм погрешностей  $y - y_\delta$  и  $u_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ , то момент останова  $t$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta$  и  $u_n$ , удовлетворяющих условиям  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ,  $\|u_n\| \leq \beta$ ;

б) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$ , то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta)(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того,  $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$ ,  $\delta, \beta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p)$ , где  $d > 1$ ,  $p \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ .

**Доказательство.** а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} D y_\delta + u_{n-k-1}). \quad (12)$$

При  $n=1$  из  $z_n = C z_{n-1} + D y_\delta + C u_{n-1}$  имеем  $z_1 = C z_0 + D y_\delta + C u_0$ , из (12) получим то же самое, т. е. при  $n=1$  формула (12) верна. Предположим, что (12) верна при  $n=p$ , т. е.  $z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} D y_\delta + u_{p-k-1})$ , и докажем ее справедливость при  $n=p+1$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 z_{p+1} &= Cz_p + Dy_\delta + Cu_p = C \left( C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} Dy_\delta + u_{p-k-1}) \right) + Dy_\delta + Cu_p = \\
 &= C^{p+1} z_0 + C^2 (C^{-1} Dy_\delta + u_{p-1} + Dy_\delta + Cu_{p-2} + CDy_\delta + C^2 u_{p-3} + \dots + \\
 &\quad + C^{p-2} Dy_\delta + C^{p-1} u_0) + Dy_\delta + Cu_p = C^{p+1} z_0 + C (Dy_\delta + Cu_{p-1} + \\
 &\quad + CDy_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} Dy_\delta + C^p u_0 + C^{-1} Dy_\delta + u_p) = \\
 &= C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^p C^k (C^{-1} Dy_\delta + u_{p-k}).
 \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (12) доказана. Отсюда

$$\begin{aligned}
 \omega_n &= C^n \omega_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} Dy + u_{n-k-1}) = C^n \omega_0 + (E + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) Dy + \\
 &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} (A^* A)^{-1} (E - C) A^* y + \\
 &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что  $z_0 = \omega_0$ , получим

$$\begin{aligned}
 z_n - z_{n+1} &= C^n z_0 + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \\
 &= C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y - A^{-1} (E - C^n) y + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + \\
 &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} \omega_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y + A^{-1} (E - C^{n+1}) y - A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - \\
 &\quad - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1} C^n (E - C) (y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n D(y - y_\delta).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \|C^n D(y - y_\delta)\|. \tag{13}$$

Обозначим  $\sigma = D(y - y_\delta)$ , тогда  $\|C^n D(y - y_\delta)\| = \|C^n \sigma\| = \left\| \int_{-M}^M \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^M \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| +$

$\left\| \int_{-M}^0 \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| = \|I_1\| + \|I_2\|$ . Каждый из полученных интегралов разобьем на два

интеграла  $I_1 = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda \sigma + \int_{\varepsilon_0}^M \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda \sigma$ . Так как  $\frac{b}{\lambda^4 + b} \leq q(\varepsilon_0) < 1$  для  $\lambda \geq \varepsilon_0$ ,

то имеем  $\left\| \int_{\varepsilon_0}^M \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \sigma \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\sigma\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . А для первого интеграла  $\left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \sigma \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \sigma\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0$  в силу свойств спектральной функции. Таким образом,  $\|I_1\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Аналогично  $\|I_2\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\|C^n D(y - y_\delta)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\|$ . Из леммы 2 вытекает неравенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta$ .

Следовательно, условием  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$  момент останова  $m$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$  и  $u_n, \|u_n\| \leq \beta$ .

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова  $m'$  условием

$$\left. \begin{aligned} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| &> \varepsilon - \|D\|\delta, \quad (n < m'), \\ \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| &\leq \varepsilon - \|D\|\delta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из (13) следует, что  $m \leq m'$ . Из леммы 1 при  $n = m'$  получим  $\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$ , поэтому справедливо записать  $\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$ . Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (14) при  $n < m'$  имеем  $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|D\|\delta$ , то  $m'(\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$ . Учитывая, что  $\omega_0 = z_0$  и  $m \leq m'$ , из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m \leq m' \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} DC^k y. \quad (15)$$

Предположим, что (15) верно, тогда

$$\begin{aligned} x - C^n x &= D(E + C + C^2 + \dots + C^{n-1})y, \quad (E - C^n)x = D(E - C^n)(E - C)^{-1}y, \\ (E - C^n)x &= A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax, \quad (E - C^n)x = (E - C^n)x. \end{aligned}$$



Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (15) доказана. Из (12) вычтем (15), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}D(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]. \quad (16)$$

Отсюда  $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}D(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]$ , где  $\Delta_n = z_n - x$

и  $\Delta_0 = z_0 - x$ . Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|D\|\delta + \|C\|\beta)n. \quad (17)$$

В частности, (17) справедливо и при  $n = m$ . Если  $m \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$ , тогда, как показано ранее,  $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ . Поэтому для доказательства  $\|z_m - x\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$  достаточно показать, что  $m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ . Из (16) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n D(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \quad (18)$$

Так как спектр оператора  $C = \left[ (A^* A)^4 + B \right]^{-1}$  принадлежит  $[0, 1]$ , то можно до-

казать, что  $\|C^n(E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}$ . Поэтому из (18) получим при  $n = m - 1$

$$\begin{aligned} \|z_{m-1} - z_m\| &\leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \|C^{m-1} D(y_\delta - y)\| + \|Cu_{m-1}\| + \\ &+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2} \right\| \leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|D\|\delta + \\ &+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|D\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m), \end{aligned}$$

т. к.  $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$  [15].

Так как по условию теоремы  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p), d > 1, p \in (0, 1)$ , то при всех достаточно малых  $\delta, \beta$  выполняется неравенство  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$ , поэтому из б)

получим  $m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}$ .

Поскольку  $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$ , то  $\varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|D\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$ . Отсюда

$$\text{получим, что } m \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}.$$

Умножим обе части последнего равенства на  $\|D\|\delta + \|C\|\beta$ , получим

$$m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| (\|D\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)} \right]}. \text{ При } m \rightarrow \infty \text{ множитель}$$

$$\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \rightarrow 0, \text{ а дробь } \frac{2(\|D\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)} \right]} \text{ ограничена при}$$

$\delta, \beta \rightarrow 0$ . Поэтому  $m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$ , при  $m \rightarrow \infty, \delta, \beta \rightarrow 0$ . Отсюда и из неравенства (17) при  $m \rightarrow \infty$  получим

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \left( \|C^m \Delta_0\| + m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \right) = 0.$$

Итак, доказано, что  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , т. е. метод итераций (4) с правилом останова (5) сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Теорема 2 доказана.

### Заклучение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной неявной схемы итераций решения некорректных задач: доказана сходимость приближений с апостериорным выбором параметра регуляризации (останов по поправкам) в исходной норме гильбертова пространства в случае ограниченного несамосопряженного оператора и получена оценка для апостериорного момента останова.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

5. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.
6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – № 2 (116). – P. 89–95.
8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr. 397. – P. 271–279.
13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.
14. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения некорректных уравнений с апостериорным выбором параметра регуляризации / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2022. – № 1. – С. 82–90.
15. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

## REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Jemielin, I. V. K teorii niekorrektnykh zadach / I. V. Jemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.
4. Samarskij, A. A. Chisliennyje metody rieshenija obratnykh zadach matematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
5. Савчук, В. Ф. Riegiularizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstve / V. F. Savchuk, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.
6. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.
7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – № 2 (116). – P. 89–95.
8. Matysik, O. V. Iteracionnaja riegiularizacija niekorrektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // *Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter)*. – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // *J. Comp. Appl. Math.* – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // *J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier)*. – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // *J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier)*. – 2021. – Nr. 397. – P. 271–279.
13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // *J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier)*. – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.
14. Matysik, O. V. Skhodimost' v gilbertovom prostranstvie niejavnoj iteracionnoj procedury rieshenija niekorriektnykh uravnenij s aposteriornym vyborom paramietra rieglia-rizacii / O. V. Matysik // *Viesn. Bresc. un-ta. Sier, 4. Fizika. Matematyka*. – 2022. – № 1. – S. 82–90.
15. Gradshtejn, I. S. Tablicy integralov, summ, riadov i proizvodienij / I. S. Gradshtejn, I. M. Ryzhyk. – M. : Nauka. – 1971. – 1108 s.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 02.03.2023*

УДК 513.82

*Александр Андреевич Юдов<sup>1</sup>, Елена Вячеславовна Кисилюк<sup>2</sup>,  
Анастасия Михайловна Кузьмич<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., преподаватель лицея № 1 г. Бреста

<sup>2</sup>магистр физ.-мат. наук

<sup>3</sup>магистрант физ.-мат. факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

*Alexander Yudov<sup>1</sup>, Elena Kisilyuk<sup>2</sup>, Anastasia Kuzmich<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,  
Lecturer at the Educational Institution Lyceum № 1 in Brest

<sup>2</sup>Master of Physical and Mathematical Sciences

<sup>3</sup>Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [modelmath@brsu.brest.by](mailto:modelmath@brsu.brest.by)

## СИММЕТРИЯ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ И ЕЕ СВОЙСТВА

*Изучаются конечные группы. Дается определение симметрии конечной группы относительно произвольной точки и изучаются свойства симметрии. Рассматриваются гомоморфизмы конечной группы и строятся однородные пространства, порожденные гомоморфизмом, изучаются его свойства, рассматриваются примеры.*

**Ключевые слова:** группа, подгруппа, гомоморфизм, симметрия, однородное пространство.

### *Symmetry in a Finite Group and its Properties*

*In this work finite groups are studied. A definition of a finite group with respect to approaching points of view is given and the properties of the collection are studied. Homomorphisms of a finite group are considered and homogeneous spaces generated by a homomorphism are constructed, its properties are studied, and examples are considered.*

**Key words:** group, subgroup, homomorphism, symmetry, homogeneous space.

### **Введение**

Теория конечных групп представляет собой активно развивающийся раздел современной алгебры. В этом направлении работали: О. Ю. Шмидт, В. Хупперт, Л. А. Шеметков, С. А. Чунихин, В. С. Монахов, А. А. Трофимук, Д. В. Грицук и др. В данной работе для конечной группы вводится понятие симметрии. Это понятие применяется для исследования структуры конечных групп.

### **1. Определение симметрии конечной группы и ее свойства**

Рассмотрим произвольную конечную группу  $G$ .

**Определение 1.** Симметрией группы  $G$  относительно элемента  $x_0$  этой группы будем называть преобразование  $S_{x_0}$ , определенное формулой:

$$S_{x_0} : G \rightarrow G : y \rightarrow x_0 y^{-1} x_0.$$

Рассмотрим свойства симметрии.

**Теорема 1.** Симметрия  $S_{x_0}$  является биекцией для любого  $x_0 \in G$ .

**Доказательство.**  $S_{x_0}$  инъективно, т. к. если  $x_0 y^{-1} x_0 = x_0 z^{-1} x_0 \Rightarrow y^{-1} = z^{-1} \Rightarrow y = z$ .

$S_{x_0}$  сюръективно, т. к. если  $z \in G$ , то  $\exists y$  такое, что:  $x_0 y^{-1} x_0 = z$ , то  $y^{-1} = x_0^{-1} z x_0^{-1}$ ,  
 $y = x_0 z^{-1} x_0$ .

Таким образом  $S_{x_0}$  – биекция.

**Теорема 2.** Симметрия  $S_{x_0}$  является инволютивным преобразованием, т. е.  $S_{x_0}^2 = Id$ .

**Доказательство.** Действительно,

$$S_{x_0}(S_{x_0}(y)) = S_{x_0}(x_0 y^{-1} x_0) = x_0 x_0^{-1} y x_0^{-1} x_0 = y. \quad \text{Ч. т. д.}$$

**Теорема 3.** Преобразование, обратное к симметрии, является симметрией.

**Доказательство.** Действительно, пусть  $z = S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0$ , тогда  $y^{-1} = x_0^{-1} z x_0^{-1}$  и  $y = x_0 z^{-1} x_0 = S_{x_0}(z)$ . Ч. т. д.

**Теорема 4.** Пусть  $f: G \rightarrow G'$  – гомоморфизм и  $x_0 \in G, S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0$  – симметрия относительно  $x_0$  группы  $G$ . Пусть элементы  $y$  и  $z$  – симметричны, т. е.  $z = x_0 y^{-1} x_0$ . Тогда элементы  $f(y)$  и  $f(z)$  будут симметричны относительно  $f(x_0)$  в группе  $G'$ .

**Доказательство.**

$$f(z) = f(x_0 y^{-1} x_0) = f(x_0) f(y^{-1}) f(x_0) = f(x_0) f^{-1}(y) f(x_0) = S_{f(x_0)}(f(y)). \quad \text{Ч. т. д.}$$

**Следствие.** При любом автоморфизме  $f$  группы  $G$  элементы симметричные относительно точки  $x_0$  переходят в элемент симметричный относительно точки  $f(x_0)$ .

Это же касается группы  $S_n$  (в частности  $S_4$ ). Следовательно, симметрия элементов сохраняется при всех автоморфизмах группы.

**Теорема 5.** Композиция двух симметрий не является симметрией.

**Доказательство.**

$$z = S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0, w = S_{p_0}(z) = p_0 z^{-1} p_0, \text{ тогда } w = S_{p_0}(S_{x_0}(y)) = p_0 (x_0 y^{-1} x_0)^{-1} p_0 = p_0 x_0^{-1} y x_0^{-1} p_0 \text{ – не симметрия. Ч. т. д.}$$

**Определение 2.** Элемент  $a$  группы  $G$  будем называть инволютивным, если  $a^2 = \varepsilon$ .

**Теорема 6.** При всякой симметрии относительно инволютивного элемента группы  $G$  любая ее подгруппа преобразуется в подгруппу.

**Доказательство.** Пусть группа  $H$  – подгруппа группы  $G$ ,  $x_0$  – инволютивный элемент этой группы. Пусть  $y, z \in H$ . Рассмотрим  $S_{x_0}(yz) = x_0 (yz)^{-1} x_0 = x_0 z^{-1} y^{-1} x_0 = x_0 z^{-1} x_0 x_0 y^{-1} x_0 = S_{x_0}(z) \cdot S_{x_0}(y) \in S_{x_0}(H)$ , т. к.  $yz \in H$ . Таким образом, во множестве  $S_{x_0}(H)$  определена композиция. Эта композиция ассоциативна.

Действительно:

$$S_{x_0}((yz)w) = S_{x_0}(w) \cdot S_{x_0}(yz) = S_{x_0}(w) \cdot (S_{x_0}(z) \cdot S_{x_0}(y)). \quad \text{С другой стороны, } S_{x_0}(y(zw)) = S_{x_0}(zw) \cdot S_{x_0}(y) = (S_{x_0}(w) \cdot S_{x_0}(z)) \cdot S_{x_0}(y). \text{ Поскольку } (yz)w = y(zw), \text{ то композиция в } S_{x_0}(H) \text{ ассоциативна.}$$

Докажем, что во множестве  $S_{x_0}(H)$  для любого элемента существует обратный. Действительно, пусть  $S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0$  – произвольный элемент из  $S_{x_0}(H)$ . Тогда

$$S_{x_0}(y^{-1}) = x_0 y x_0. \text{ Перемножая } S_{x_0}(y) \text{ и } S_{x_0}(y^{-1}), \text{ получим: } S_{x_0}(y) \cdot S_{x_0}(y^{-1}) = x_0 y^{-1} x_0 x_0 y x_0 = x_0 \varepsilon x_0 = \varepsilon. \text{ Таким образом, } S_{x_0}(y^{-1}) = S_{x_0}(y)^{-1}.$$

Докажем далее, что во множестве  $S_{x_0}(H)$  существует единица – это элемент

$$S_{x_0}(\varepsilon) = x_0 \varepsilon^{-1} x_0 = x_0^2 = \varepsilon.$$

Таким образом,  $S_{x_0}(H)$  образует группу. Ч. т. д.

Множество всех симметрий не образует группу, т. к. композиция симметрий относительно разных центров не является симметрией. Однако если рассмотреть множество всех симметрий данной группы и всех их композиций, то такая совокупность преобразований будет образовывать группу.

Группа  $S_4$  – это множество всех перестановок степени 4 с операцией умножения перестановок. Эта группа является конечной группой порядка  $4! = 24$ . Все элементы этой группы, используя символику циклов, можно записать в виде:  $\varepsilon, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$  [1, с. 17], обозначая элементы соответственно

буквами  $\varepsilon, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2,$

$D_3, D_4, D_5, D_6$ . Операцию умножения элементов этой группы можно задать в виде таблицы.

Ниже приводятся примеры вычисления симметрий группы  $S_4$  для различных элементов.

$$S_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon, S_\varepsilon(234) = (243), S_\varepsilon(132) = (123), S_\varepsilon(12)(34) = (12)(34), S_\varepsilon(123) = (132), S_\varepsilon(14)(23) = (14)(23), S_\varepsilon(243) = (243), S_\varepsilon(143) = (134), S_\varepsilon(142) = (124), S_\varepsilon(134) = (143), S_\varepsilon(13)(24) = (13)(24), S_\varepsilon(124) = (142), S_\varepsilon(1234) = (1432), S_\varepsilon(1243) = (1342), S_\varepsilon(1324) = (1423), S_\varepsilon(1342) = (1243), S_\varepsilon(1423) = (1324), S_\varepsilon(1432) = (1234), S_\varepsilon(12) = (12), S_\varepsilon(13) = (13), S_\varepsilon(14) = (14), S_\varepsilon(23) = (23), S_\varepsilon(24) = (24), S_\varepsilon(34) = (34).$$

$$S_{(234)}(\varepsilon) = (243), S_{(234)}(234) = (234), S_{(234)}(132) = (132), S_{(234)}(12)(34) = (134), S_{(234)}(123) = (14)(32), S_{(234)}(14)(23) = (123), S_{(234)}(243) = \varepsilon, S_{(234)}(143) = (143), S_{(234)}(142) = (13)(24), S_{(234)}(134) = (12)(34), S_{(234)}(13)(24) = (142), S_{(234)}(124) = (124), S_{(234)}(1234) = (1234), S_{(234)}(1243) = (14), S_{(234)}(1324) = (12), S_{(234)}(1342) = (1342), S_{(234)}(1423) = (1423), S_{(234)}(1432) = (13), S_{(234)}(12) = (1324), S_{(234)}(13) = (1432), S_{(234)}(14) = (1243), S_{(234)}(23) = (23), S_{(234)}(24) = (24), S_{(234)}(34) = (34).$$

Аналогично вычисляются образы элементов группы  $S_4$ , полученные при остальных симметриях.

Перечислим все подгруппы группы  $S_4$ :

$$1) F_1 = \{\varepsilon, (12)\}, F_2 = \{\varepsilon, (13)\}, F_3 = \{\varepsilon, (14)\}, F_4 = \{\varepsilon, (23)\}, F_5 = \{\varepsilon, (24)\}, F_6 = \{\varepsilon, (34)\}, F_7 = \{\varepsilon, (12)(34)\}, F_8 = \{\varepsilon, (13)(24)\}, F_9 = \{\varepsilon, (14)(23)\}.$$

$$2) G_1 = \{\varepsilon, (123), (132)\}, G_2 = \{\varepsilon, (124), (142)\}, G_3 = \{\varepsilon, (134), (143)\}, G_4 = \{\varepsilon, (234), (243)\}, K_1 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, K_2 = \{\varepsilon, (12)(34), (12), (34)\}, K_3 = \{\varepsilon, (13)(24), (13), (24)\}, K_4 = \{\varepsilon, (14)(23), (14), (23)\}, K_5 = \{\varepsilon, (1234), (1432), (13)(24)\}, K_6 = \{\varepsilon, (1243), (1342), (14)(23)\}, K_7 = \{\varepsilon, (1324), (1423), (12)(34)\}.$$

$$3) S_3^1 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}, S_3^2 = \{\varepsilon, (124), (142), (12), (14), (24)\}, S_3^3 = \{\varepsilon, (134), (143), (13), (14), (34)\}, S_3^4 = \{\varepsilon, (234), (243), (23), (24), (34)\}.$$





$$1) H_1 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1324), (1423)\},$$

$$H_2 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (14), (23), (1243), (1342)\},$$

$$H_3 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\}.$$

$$2) A_1 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (142), (134), (243), (132), (124), (143), (234)\}.$$

На основании теоремы 6 при симметрии относительно инволютивного центра каждая подгруппа группы  $S_4$  переходит в подгруппу.

**Определение 3.** Зеркалом для симметрии  $S(x_0)$  будем называть множество всех элементов группы, которые переходят в себя при данной симметрии, т. е. множество всех неподвижных элементов для этой симметрии. Зеркало будем обозначать  $Z(x_0)$ .

Существует в  $S_4$  10 инволютивных элементов:  $\varepsilon, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$ . Рассмотрим симметрии относительно этих элементов и найдем образы всех подгрупп при этих симметриях.

Рассмотрим симметрию  $S_{(12)}$ . Знак  $\dot{\rightarrow}$  соответствует точно неподвижной подгруппе. При этом подгруппы группы  $S_4$  преобразуются следующим образом:

$$1) F_1 \dot{\rightarrow} F_1, F_2 \rightarrow F_4, F_3 \rightarrow F_5, F_4 \rightarrow F_2, F_5 \rightarrow F_3, F_6 \dot{\rightarrow} F_6, F_7 \dot{\rightarrow} F_7, F_8 \rightarrow F_9, F_9 \rightarrow F_8.$$

$$2) G_1 \dot{\rightarrow} G_1, G_2 \dot{\rightarrow} G_2, G_3 \rightarrow G_4, G_4 \rightarrow G_3.$$

$$3) K_1 \rightarrow K_1, K_2 \dot{\rightarrow} K_2, K_3 \rightarrow K_4, K_4 \rightarrow K_3, K_5 \rightarrow K_6, K_6 \rightarrow K_5, K_7 \dot{\rightarrow} K_7.$$

$$4) S_3^1 \rightarrow S_3^1, S_3^2 \rightarrow S_3^2, S_3^3 \rightarrow S_3^4, S_3^4 \rightarrow S_3^3.$$

$$5) H_1 \rightarrow H_1, H_2 \rightarrow H_3, H_3 \rightarrow H_2.$$

$$6) A_1 \rightarrow A_1, Z_{(12)} = \{F_1, F_6, F_7, G_1, G_2, K_2, K_7\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(13)}$ :

$$1) F_1 \rightarrow F_4, F_2 \dot{\rightarrow} F_2, F_3 \rightarrow F_6, F_4 \rightarrow F_1, F_5 \dot{\rightarrow} F_5, F_6 \rightarrow F_3, F_7 \rightarrow F_9, F_8 \dot{\rightarrow} F_8, F_9 \rightarrow F_7.$$

$$2) G_1 \dot{\rightarrow} G_1, G_2 \rightarrow G_4, G_3 \dot{\rightarrow} G_3, G_4 \rightarrow G_2.$$

$$3) K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_4, K_3 \dot{\rightarrow} K_3, K_4 \rightarrow K_2, K_5 \dot{\rightarrow} K_5, K_6 \rightarrow K_7, K_7 \rightarrow K_6. S_3^1 \rightarrow S_3^1, S_3^2 \rightarrow S_3^4, S_3^3 \rightarrow S_3^3, S_3^4 \rightarrow S_3^2.$$

$$4) H_1 \rightarrow H_2, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_3.$$

$$5) A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(13)} = \{F_2, F_5, F_8, G_1, G_3, K_3, K_5\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(14)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_5, F_2 \rightarrow F_6, F_3 \dot{\rightarrow} F_3, F_4 \dot{\rightarrow} F_4, F_5 \rightarrow F_1, F_6 \rightarrow F_2, F_7 \rightarrow F_8, \\ F_8 \rightarrow F_7, F_9 \dot{\rightarrow} F_9.$$

$$2) \quad G_1 \rightarrow G_4, G_2 \dot{\rightarrow} G_2, G_3 \dot{\rightarrow} G_3, G_4 \rightarrow G_1.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_3, K_3 \rightarrow K_2, K_4 \dot{\rightarrow} K_4, K_5 \rightarrow K_7, K_6 \dot{\rightarrow} K_6, K_7 \rightarrow K_5.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^4, S_3^2 \rightarrow S_3^2, S_3^3 \rightarrow S_3^3, S_3^4 \rightarrow S_3^1.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_3, H_2 \rightarrow H_2, H_3 \rightarrow H_1.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(14)} = \{F_3, F_4, F_9, G_2, G_3, K_4, K_6\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(23)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_2, F_2 \rightarrow F_1, F_3 \dot{\rightarrow} F_3, F_4 \dot{\rightarrow} F_4, F_5 \rightarrow F_6, F_6 \rightarrow F_5, F_7 \rightarrow F_8, \\ F_8 \rightarrow F_7, F_9 \dot{\rightarrow} F_9.$$

$$2) \quad G_1 \dot{\rightarrow} G_1, G_2 \rightarrow G_3, G_3 \rightarrow G_2, G_4 \dot{\rightarrow} G_4.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_3, K_3 \rightarrow K_2, K_4 \dot{\rightarrow} K_4, K_5 \rightarrow K_7, K_6 \dot{\rightarrow} K_6, K_7 \rightarrow K_5.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^1, S_3^2 \rightarrow S_3^3, S_3^3 \rightarrow S_3^2, S_3^4 \rightarrow S_3^4.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_3, H_2 \rightarrow H_2, H_3 \rightarrow H_1.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(23)} = \{F_3, F_4, F_9, G_1, G_4, K_4, K_6\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(24)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_3, F_2 \dot{\rightarrow} F_2, F_3 \rightarrow F_1, F_4 \rightarrow F_6, F_5 \dot{\rightarrow} F_5, F_6 \rightarrow F_4, F_7 \rightarrow F_9, \\ F_8 \dot{\rightarrow} F_8, F_9 \rightarrow F_7.$$

$$2) \quad G_1 \rightarrow G_3, G_2 \dot{\rightarrow} G_2, G_3 \rightarrow G_1, G_4 \dot{\rightarrow} G_4.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_4, K_3 \dot{\rightarrow} K_3, K_4 \rightarrow K_2, K_5 \dot{\rightarrow} K_5, K_6 \rightarrow K_7, K_7 \rightarrow K_6.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^3, S_3^2 \rightarrow S_3^2, S_3^3 \rightarrow S_3^1, S_3^4 \rightarrow S_3^4.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_2, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_3.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(24)} = \{F_2, F_5, F_8, G_2, G_4, K_3, K_5\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(34)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_3, F_2 \dot{\rightarrow} F_2, F_3 \rightarrow F_1, F_4 \rightarrow F_6, F_5 \dot{\rightarrow} F_5, F_6 \rightarrow F_4, F_7 \rightarrow F_9, \\ F_8 \dot{\rightarrow} F_8, F_9 \rightarrow F_7.$$

$$2) \quad G_1 \rightarrow G_3, G_2 \rightarrow G_2, G_3 \rightarrow G_1, G_4 \rightarrow G_4.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_4, K_3 \rightarrow K_3, K_4 \rightarrow K_2, K_5 \rightarrow K_5, K_6 \rightarrow K_7, K_7 \rightarrow K_6.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^3, S_3^2 \rightarrow S_3^2, S_3^3 \rightarrow S_3^1, S_3^4 \rightarrow S_3^4.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_2, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_3.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(34)} = \{F_2, F_5, F_8, G_2, G_4, K_2, K_5\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(\varepsilon)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_1, F_2 \rightarrow F_2, F_3 \rightarrow F_3, F_4 \rightarrow F_4, F_5 \rightarrow F_5, F_6 \rightarrow F_6, F_7 \rightarrow F_7,$$

$$F_8 \rightarrow F_8, F_9 \rightarrow F_9.$$

$$2) \quad G_1 \rightarrow G_1, G_2 \rightarrow G_2, G_3 \rightarrow G_3, G_4 \rightarrow G_4.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_2, K_3 \rightarrow K_3, K_4 \rightarrow K_4, K_5 \rightarrow K_5, K_6 \rightarrow K_6, K_7 \rightarrow K_7.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^1, S_3^2 \rightarrow S_3^2, S_3^3 \rightarrow S_3^3, S_3^4 \rightarrow S_3^4.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_1, H_2 \rightarrow H_2, H_3 \rightarrow H_3.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(\varepsilon)} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, K_1, K_2, K_3, K_4\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(12)(34)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_1, F_2 \rightarrow F_5, F_3 \rightarrow F_4, F_4 \rightarrow F_3, F_5 \rightarrow F_2, F_6 \rightarrow F_6, F_7 \rightarrow F_7,$$

$$F_8 \rightarrow F_8, F_9 \rightarrow F_9.$$

$$2) \quad G_1 \rightarrow G_2, G_2 \rightarrow G_1, G_3 \rightarrow G_4, G_4 \rightarrow G_3.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_2, K_3 \rightarrow K_3, K_4 \rightarrow K_4, K_5 \rightarrow K_5, K_6 \rightarrow K_6, K_7 \rightarrow K_7.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^2, S_3^2 \rightarrow S_3^1, S_3^3 \rightarrow S_3^4, S_3^4 \rightarrow S_3^3.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_1, H_2 \rightarrow H_2, H_3 \rightarrow H_3.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(12)(34)} = \{F_1, F_6, F_7, F_8, F_9, K_1, K_2, K_5, K_6\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(14)(23)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_6, F_2 \rightarrow F_5, F_3 \rightarrow F_3, F_4 \rightarrow F_4, F_5 \rightarrow F_2, F_6 \rightarrow F_1, F_7 \rightarrow F_7,$$

$$F_8 \rightarrow F_8, F_9 \rightarrow F_9.$$

$$2) \quad G_1 \rightarrow G_4, G_2 \rightarrow G_3, G_3 \rightarrow G_2, G_4 \rightarrow G_1.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_2, K_3 \rightarrow K_3, K_4 \rightarrow K_4, K_5 \rightarrow K_5, K_6 \rightarrow K_6, K_7 \rightarrow K_7.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^4, S_3^2 \rightarrow S_3^3, S_3^3 \rightarrow S_3^2, S_3^4 \rightarrow S_3^1.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_1, H_2 \rightarrow H_2, H_3 \rightarrow H_3.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(14)(23)} = \{F_3, F_4, F_7, F_8, F_9, K_1, K_4, K_5, K_7\}.$$

Рассмотрим симметрию  $S_{(13)(24)}$ :

$$1) \quad F_1 \rightarrow F_6, F_2 \rightarrow F_2, F_3 \rightarrow F_4, F_4 \rightarrow F_3, F_5 \rightarrow F_5, F_6 \rightarrow F_1, F_7 \rightarrow F_7, \\ F_8 \rightarrow F_8, F_9 \rightarrow F_9.$$

$$2) \quad G_1 \rightarrow G_3, G_2 \rightarrow G_4, G_3 \rightarrow G_1, G_4 \rightarrow G_2.$$

$$3) \quad K_1 \rightarrow K_1, K_2 \rightarrow K_2, K_3 \rightarrow K_3, K_4 \rightarrow K_4, K_5 \rightarrow K_5, K_6 \rightarrow K_6, K_7 \rightarrow K_7.$$

$$4) \quad S_3^1 \rightarrow S_3^3, S_3^2 \rightarrow S_3^4, S_3^3 \rightarrow S_3^1, S_3^4 \rightarrow S_3^2.$$

$$5) \quad H_1 \rightarrow H_1, H_2 \rightarrow H_2, H_3 \rightarrow H_3.$$

$$6) \quad A_1 \rightarrow A_1.$$

$$Z_{(13)(24)} = \{F_2, F_5, F_7, F_8, F_9, K_1, K_3, K_6, K_7\}.$$

## 2. G-пространства, порожденные гомоморфизмами конечных групп

**Определение 4.** Пусть задана конечная группа  $G$ .

Отображение

$$\varphi: G \rightarrow G \quad (1)$$

называется гомоморфизмом группы  $G$ , если оно удовлетворяет условию:

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad (2)$$

для любых  $a, b \in G$ .

Если  $\varphi$  биекция, то это отображение называется автоморфизмом.

**Определение 5.** Подмножество  $X$  конечной группы  $G$  называется (левым)  $G$ -пространством, если  $\forall x \in X, \forall g \in G$  сопоставляется элемент  $x' \in X$ , обозначаемый  $x \cdot g$ , такой что:

$$1. \quad g_2(g_1 x) = (g_2 g_1) x.$$

$$2. \quad ex = x.$$

В этом случае говорят, что  $G$  действует слева на  $X$ .

**Определение 6.**  $G$ -пространство  $X$  называется однородным  $G$ -пространством, если  $\forall x, x' \in X$  найдется  $g \in G$ , такое, что  $g \cdot x = x'$ .

Пусть задан гомоморфизм  $\varphi$  конечной группы  $G$ . Рассмотрим множество

$$X = \{a\varphi(a^{-1}) \mid a \in G\}. \quad (3)$$

**Теорема 7.** Множество  $X$  является левым  $G$ -пространством.

**Доказательство.** Пусть  $x = a\varphi(a^{-1}), b \in G$ , тогда

$$b \cdot a\varphi(a^{-1}) \equiv ba\varphi(a^{-1}b^{-1}) = ba\varphi((ba)^{-1}) \in X. \quad (4)$$

Докажем выполнение условий  $G$ -пространства.

$$\begin{aligned} c \cdot (b \cdot a\varphi(a^{-1})) &= c \cdot (ba\varphi((ba)^{-1})) = cba\varphi((ba)^{-1}c^{-1}) = cba\varphi(a^{-1}b^{-1}c^{-1}) = \\ &= cba\varphi((cba)^{-1}) = (cb) \cdot a\varphi(a^{-1}), \quad e \cdot a\varphi(a^{-1}) = ea\varphi(a^{-1}e^{-1}) = a\varphi(a^{-1}). \end{aligned}$$

Теорема 7 доказана.

**Теорема 8.**  $\varphi$ -пространство  $X = \{a\varphi(a^{-1})\}$  является однородным  $G$ -пространством. Такое однородное пространство будем называть  $\varphi$ -пространством.

**Доказательство.** Пусть заданы два элемента  $G$ -пространства  $X : a\varphi(a^{-1})$  и  $b\varphi(b^{-1})$ . Рассмотрим элемент  $c = ba^{-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} c \cdot a\varphi(a^{-1}) &= ba^{-1} \cdot (a\varphi(a^{-1})) = \\ &= ba^{-1}a\varphi(a^{-1}(ba^{-1})^{-1}) = b\varphi(a^{-1}ab^{-1}) = b\varphi(b^{-1}). \end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

**Теорема 9.**  $\varphi$ -пространство  $X$  содержит единицу группы.

**Доказательство.** Рассмотрим элемент  $e$ , тогда

$$e\varphi(e^{-1}) = e\varphi(e)^{-1} = ee^{-1} = e.$$

Теорема 9 доказана.

**Определение 7.** Автоморфизм  $\varphi$  группы  $G$  называется инволютивным, если  $\varphi^2 = Id$ .

В дальнейшем будем считать отображение  $\varphi$  автоморфизмом.

**Теорема 10.** Если автоморфизм  $\varphi$  инволютивный, то  $\varphi$ -пространство вместе с каждым своим элементом содержит ему обратный. Такое  $\varphi$ -пространство будем называть симметрическим.

**Доказательство.** Рассмотрим  $a\varphi(a^{-1}) \in X$ . Пусть  $a = \varphi(b)$ . Рассмотрим ему обратный элемент:

$$\begin{aligned} (a\varphi(a^{-1}))^{-1} &= \varphi(a^{-1})^{-1}a^{-1} = \varphi(a)a^{-1} = \varphi(\varphi(b))\varphi(b)^{-1} = \\ &= \varphi^2(b)\varphi(b^{-1}) = b\varphi(b^{-1}) \in X. \end{aligned}$$

Теорема 10 доказана.

Возникает задача: для заданной конечной группы  $G$  найти все автоморфизмы, все инволютивные автоморфизмы, все  $\varphi$ -пространства, все симметрические пространства.

**Пример 1.** Пусть  $G$  абелева группа. Тогда отображение  $\varphi : a \rightarrow a^{-1}$  является автоморфизмом. Соответствующее пространство имеет вид  $\{a\varphi(a^{-1})\} = \{aa\} \forall a \in G$ .

$$\varphi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Свойство гомоморфизма выполняется.

**Пример 2.** Пусть  $G$  – абелева группа порядка  $n$  и  $m$  – натуральное число, взаимно простое с  $n$ . Тогда отображение  $\varphi: g \rightarrow g^m, g \in G$  является автоморфизмом группы  $G$  [1, с. 61], т. к.

$$(g_1 g_2)^m = \underbrace{g_1 g_2 \dots g_1 g_2}_m = g_1^m g_2^m.$$

Автоморфизм  $\varphi$  не является инволютивным, действительно

$$\varphi^2(g) = (g^m)^m = g^{m^2} \neq g.$$

Найдем  $\varphi$ -пространство, соответствующее автоморфизму  $\varphi$ .

$$g\varphi(g^{-1}) = g(g^{-1})^m = g \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_m = \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{m-1},$$

$$X = \{ \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{m-1} \mid \forall g \in G \} = \{ h^{m-1} \mid \forall h \in G \}.$$

**Пример 3.**  $\varphi: G \rightarrow G: g \rightarrow a^{-1}ga = g^a$ ; для некоторого  $a$ .

$$\varphi(g_1 g_2) = a^{-1}g_1 g_2 a = a^{-1}g_1 a a^{-1}g_2 a = \varphi(g_1)\varphi(g_2).$$

Значит, условие автоморфизма выполняется. Найдем  $\varphi$ -пространство  $X$ . Рассмотрим  $\forall b \in G$  и возьмем некоторый фиксированный  $a \in G$ , тогда произвольный элемент  $\varphi$ -пространства  $X$  будет иметь вид:  $b\varphi(b^{-1}) = ba^{-1}b^{-1}a$ . Таким образом,  $\varphi$ -пространство  $X$  состоит из элементов вида  $\{ba^{-1}b^{-1}a \mid \forall b \in G\}$ , которые представляют собой множество всех коммутаторов  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$  в группе  $G$ .

**Теорема 11.** Пусть  $X$  –  $\varphi$ -пространство, причем  $\varphi$ -инволютивный автоморфизм. Тогда вместе с каждым элементом  $\varphi$ -пространства  $X$  содержит и обратный к нему.

**Доказательство.** Рассмотрим элемент  $a\varphi(a^{-1}) \in X$ . К нему обратный будет элемент  $(a\varphi(a^{-1}))^{-1} = (\varphi(a^{-1}))^{-1}a^{-1} = \varphi(a)a^{-1} = \varphi(a)\varphi(\varphi(a^{-1})) = b\varphi(b^{-1}) \in X$ , где  $b = \varphi(a)$ . Ч. т. д.

**Теорема 12.** Пусть  $X$  –  $\varphi$ -пространство и  $\psi$  – произвольный автоморфизм группы  $G$ . Тогда  $\psi(X)$  – также будет  $\varphi$ -пространством, порожденным некоторым автоморфизмом  $\varphi'$ .

**Доказательство.** Пусть  $a\varphi(a^{-1}) \in X$ . Рассмотрим  $\psi(a\varphi(a^{-1})) = \psi(a)\psi(\varphi(a^{-1}))$ . Определим автоморфизм  $\varphi'$  из условия  $\psi \circ \varphi = \varphi' \circ \psi$ . Отсюда  $\varphi' = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$  и, следовательно,  $\psi(a)\psi(\varphi(a^{-1})) = \psi(a)\varphi'(\psi(a^{-1})) = b\varphi'(b^{-1})$ , где  $b = \psi(a)$ . То есть каждый элемент  $\psi(a\varphi(a^{-1}))$  можно представить в виде  $b\varphi'(b^{-1})$  для некоторого автоморфизма  $\varphi'$ . Следовательно,  $\varphi$ -пространство  $X$  переводится в  $\varphi'$ -пространство  $X'$ .

**Теорема 13.** Пусть  $X$  – симметрическое  $\varphi$ -пространство,  $S_{x_0}$  – симметрия  $x_0 \in X$ . Тогда  $S_{x_0}(X) = X$ .

**Доказательство.** Пусть  $a\varphi(a^{-1}) \in X$ ,  $x_0 = b\varphi(b^{-1})$ .  $S_{x_0}(a\varphi(a^{-1})) = x_0(a\varphi(a^{-1}))^{-1}x_0 = b\varphi(b^{-1})\varphi(a)a^{-1}b\varphi(b^{-1})$ .

Пусть  $c = b\varphi(b^{-1})\varphi(a)$ ,  $c^{-1} = \varphi(a^{-1})\varphi(b)b^{-1}$ ,  $\varphi(c^{-1}) = a^{-1}b\varphi(b^{-1})$  и, следовательно,  $S_{x_0}(a\varphi(a^{-1})) = c\varphi(c^{-1}) \in X$ . Ч. т. д.

Рассмотрим примеры  $\varphi$ -пространства для группы  $S_4$ .

Пусть инволютивный автоморфизм группы  $S_4$  задается формулой  $\varphi: a \rightarrow (12)a(12)$ . Рассмотрим пространство  $X = \{a\varphi(a^{-1})\}$ .

Рассматривая последовательно вместо  $a$  все элементы группы  $S_4$ , получим, что  $\varphi$ -пространство  $X_{(12)}$  состоит из элементов:

$$X_{(12)} = \{\varepsilon, (132), (123), (143), (134), (13)(24)\}.$$

Аналогично получим:

$$X_{(13)} = \{\varepsilon, (132), (123), (143), (134), (13)(24)\},$$

$$X_{(14)} = \{\varepsilon, (143), (142), (134), (124), (14)(23)\},$$

$$X_{(23)} = \{\varepsilon, (123), (234), (213), (243), (23)(14)\},$$

$$X_{(24)} = \{\varepsilon, (124), (243), (142), (234), (24)(13)\},$$

$$X_{(34)} = \{\varepsilon, (134), (143), (234), (243), (12)(34)\},$$

$$X_{(12)(34)} = \{\varepsilon, (13)(24), (14)(23)\},$$

$$X_{(13)(24)} = \{\varepsilon, (12)(34), (14)(23)\},$$

$$X_{(14)(24)} = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24)\},$$

$$X_{(\varepsilon)} = \{\varepsilon\}.$$

### Заключение

Введенное в работе понятие симметрии конечной группы позволяет получить новые характеристики подгрупп конечной группы, что, в свою очередь, позволит сделать классификацию этих подгрупп. Вводится новое понятие  $\varphi$ -пространства как подмножества конечной группы, полученного с помощью автоморфизма  $\varphi$  этой группы, и изучаются его свойства.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов : учеб. пособие / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Монахов, В. С. Введение в теорию групп : тексты лекций по курсу «Алгебра и теория чисел» / В. С. Монахов. – Минск, 1990. – 71 с.
3. Богопольский, О. В. Введение в теорию групп / О. В. Богопольский. – М. ; Ижевск : ИКИ, 2002.

### REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov : uchieb. posobiye / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

---

2. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriyu grupp : teksty likcij po kursu «Algebra i teoriya chisel» / V. S. Monakhov. – Minsk, 1990. – 71 s.

3. Bogopol'skij, O. V. Vviedeniye v teoriyu grupp / O. V. Bogopol'skij. – M. ; Izhevsk : IKI, 2002.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 13.04.2023*



## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша (не меней за 14 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc, \*.docx ці \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 08.09.2016 № 206). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. боб.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносака.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш, чым 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуравецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаноўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.
- References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выліска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацый артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: [highmath@brsu.by](mailto:highmath@brsu.by).

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друку 07.06.2023. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 12,32. Ул.-выд. арк. 7,10. Тыраж 100 экз. Заказ № 194.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.