

**А.И. Серый, З.Н. Серая, Н.В. Силаев**  
 Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

### **О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**

В связи с тем, что студенты физико-математического факультета УО «БрГУ им. А.С. Пушкина» изучают численные методы, представляет интерес систематизация основных сведений по отдельным темам для закрепления материала. Далее в виде сравнительных таблиц отображены некоторые сведения по задачам линейной алгебры и линейного программирования.

Таблица 1 – Задачи линейной алгебры (ЛА) и линейного программирования

Задачи		ЛА	линейного программирования
Что надо найти		отдельные числа, элементы векторов и матриц	экстремум линейной формы [1, с. 55]
При условии задания		исходных матриц и векторов	ограничений в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) или неравенств
Типы задач	по постановке	1) решение СЛАУ; 2) приведение матрицы к специальному виду; 3) нахождение: а) собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) матриц; б) обратной матрицы; в) определителя матрицы	1) стандартные (в случае ограничений в виде системы неравенств); 2) канонические стандартные (в случае ограничений в виде СЛАУ)
	по тематической направленности	1) расчет электрических цепей на основе правил Кирхгофа; 2) некоторые задачи квантовой теории поля; 3) некоторые задачи нахождения энергии вырожденных состояний в квантовой механике	1) транспортная задача; 2) задача планирования производства; 3) задача о диете; 4) задача о вариантах выдачи банкоматом заданной суммы с учетом наличия купюр разных номиналов
Методы решения		1) прямые (ПМ); 2) итерационные (ИМ); 3) смешанные (СМ); для некоторых задач подробнее см. в таблицах 2-4	1) графический метод (для систем $2 \times 2$ ); 2) симплекс-метод (для систем большей размерности)

Из таблицы 2 видно, что: 1) при нахождении корней ХП происходит временный выход за рамки ЛА; 2) поиск СЗ и СВ матрицы разбивается на подзадачи, некоторые из которых можно решать прямыми или итерационными методами, поэтому в целом указанные в таблице 2 методы можно считать смешанными; 3) с точки зрения общей «блочной» стратегии эти методы являются прямыми; 4) при учете лишь этапов, относящихся к ЛА, метод Данилевского прямой (т.к. матрица  $S$  ищется прямым методом).

Таблица 2 – Некоторые методы нахождения СЗ и СВ матриц

Метод	непосредственного вычисления определителя [2, с. 50]	Данилевского [2, с. 52–65]
Коэффициенты характеристического полинома (ХП)	находятся вычислением определителя $ A - \lambda E $	находятся из первой строки матрицы (форма Фробениуса) $\Phi = S^{-1}AS$
СЗ находятся как корни ХП	через ПМ или ИМ для нелинейных алгебраических уравнений	
СВ $\bar{x}$ находятся	решением СЛАУ $(A - \lambda E)\bar{x} = \vec{0}$ (через ПМ или ИМ)	как $\bar{x} = \sum_j \bar{y}_j$ , где $\bar{y}_j$ – СВ матрицы $\Phi$ ( $y_j = \lambda_j^{n-1}, j=1, n$ )

Таблица 3 – Смешанные и итерационные методы нахождения СЗ и СВ матриц

Перед нахождением СЗ и СВ	находятся коэффициенты ХП	ищется последовательность матриц, подобных матрице $A$ , для которых СЗ и СВ найти легко
Общие методы	см. таблицу 2	степенные ( $LR$ и $QR$ -алгоритмы)
Особенности для симметричных матриц	а) приведение к 3-диагональному виду методом вращений; б) поиск СЗ и СВ	а) СЗ – диагональные элементы «предельной» матрицы; б) СВ – столбцы матрицы вращения

Таблица 4 – Прямые и итерационные методы решения СЛАУ

Методы	Прямые (точные) [2, с. 17–35]	Итерационные
Примеры методов	1) окаймления; 2) ортогонализации; 3) квадратного корня; 4) LU-разложения; 5) оптимального исключения; 6) прогонки; 7) Гаусса со схемами: а) единственного деления; б) с выбором главного элемента (по столбцу, строке, всей матрице)	1) общий неявный простой итерации; 2) прямые итерационные: а) Якоби; б) Зейделя [2, с. 35–49]
Кроме того	начальные приближения (НП) не нужны	НП требуются
Условие сходимости	матрица системы не должна быть плохо обусловленной	зависит от метода
Точного результата	за конечное число итераций можно достичь, если исходные данные заданы точно, а вычисления идут без округлений	за конечное число итераций нельзя достичь ни при каких условиях
Общая схема решения	1. Упрощение исходной СЛАУ. 2. Решение упрощенной СЛАУ.	1. Преобразование исходной СЛАУ. 2. Задание НП. 3. Выполнение итераций.
Контроль точности	почти не нужен для языков, способных работать с высокоточными числами	не нужен в силу наличия самоисправления

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В.Ф. Численные методы : учебно-методическое пособие / В.Ф. Савчук, О.В. Матыськ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2010. – 72 с.

2. Сборник задач по методам вычислений / под ред. П. И. Монастырного // Мн.: Изд-во БГУ, 1983. – 287 с.