УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности 6-05-0113-04
«Физико-математическое образование (Физика и информатика)»

Брест
БрГУ имени А. С. Пушкина
2023

ISBN 978-985-22-0615-0

Об издании – 1, 2

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Рекомендовано редакционно-издательским советом учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина»

Рецензенты:
кафедра высшей математики УО «Брестский государственный технический университет» (заведующий кафедрой – кандидат технических наук, доцент Л. П. Махнист)

доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования УО «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина» кандидат физико-математических наук М. Г. Кот

Марзан, С. А.
Математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2023. 239 с. – Режим доступа: http://rep.brsu.by/handle/123456789/9419
ISBN 978-985-22-0615-0.

Учебно-методический комплекс содержит курс лекций и практических занятий, вопросы и тестовые задания для самоконтроля, а также задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальных работ по разделу «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» учебной дисциплины «Математический анализ».
Адресуется студентам специальности «Физико-математическое образование (Физика и информатика)».
Разработано в формате pdf.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Текстовое учебное электронное издание
Системные требования: тип браузера и версия любые; скорость подключения к информационно-телекоммуникационным сетям любая; дополнительные надстройки к браузеру не требуются.

2 -– производственно-технические сведения

• Использованное ПО: Windows 10, Kile 3, LaTeX;

• ответственный за выпуск Ж. М. Селюжицкая, технический редактор С. А. Марзан, корректор А. А. Лясник, компьютерный набор и верстка С. А. Марзан;

• дата размещения на сайте: 08.11.2023;

• объем издания: 2 Мб;

• производитель: учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», 224016, г. Брест, ул. Мицкевича, 28. Тел.: 8(0162) 21-70-55. E-mail: rio@brsu.brest.by.

Знакомство с ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы с ним необходим компьютер, планшет или смартфон с любой операционной системой, на котором установлена программа для чтения документов формата pdf, например, Adobe Acrobat Reader. Для работы с тестовыми заданиями требуется подключение к сети Интернет. Тесты, включенные в ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов.

После запуска ЭУМК в правой части экрана читатели увидят навигационную панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

– кнопка «На весь экран» позволяет «развернуть» ЭУМК на весь экран монитора;

– кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУМК;

– кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУМК;

– кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУМК, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

– кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУМК.

Кроме указанных выше кнопок, навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУМК, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУМК можно «листать», нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУМК. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУМК.

Весь текст ЭУМК снабжен необходимыми гиперссылками, позволяющими реализовать интуитивно понятную навигацию с возможностью быстрого поиска требуемой информации.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Предлагаемый вниманию читателей учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) разработан в соответствии с требованиями образовательного стандарта общего высшего образования специальности 6-05-0113-04 «Физико-математическое образование (Физика и информатика)» и на основании учебного плана (рег. № ФМ-6-002-23/уч. от 23.02.2023).

ЭУМК обеспечивает достижение основной дидактической цели – самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной и учебной информации количество часов, предусмотренных учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко.

При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, ЭУМК содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы с наиболее способными студентами.

Тесты, включенные в ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. В ходе изучения дисциплины студенты должны прежде всего научиться логически мыслить, приобрести навыки решения задач.

ЭУМК содержит обширный материал для контрольных и индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену и зачету.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной, ее геометрический и механический смысл. Касательная и нормаль к графику функции. Односторонние производные. Понятие дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.	2	2
2	Производная суммы, произведения и частного. Производные основных элементарных функций. Производная обратной функции. Производная композиции функций (сложной функции). Производная показательно-степенной функции. Логарифмическая производная.	2	2
3	Понятие дифференциала функции, его геометрический и механический смысл. Дифференциал и приближенные вычисления. Дифференциал композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Механический смысл второй производной. Формула Лейбница.	2	4
4	Производная функции, заданной параметрически. Кривые, заданные параметрически.	2	2
5	Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).	2	
6	Правила Лопиталя.	2	2
7	Формула Тейлора и ее приложения.	2	2
8	Приложения дифференциального исчисления к исследованию свойств функций. Возрастание и убывание функции в точке. Критерий строгой монотонности функции на промежутке. Понятие максимума и минимума функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия максимума и минимума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклые функции. Достаточное условие выпуклости функции на интервале. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия перегиба. Вертикальная, горизонтальная и наклонная асимптоты. Критерий горизонтальных и наклонных асимптот. Исследование функции и построение ее графика (с применением дифференциального исчисления).	6	8

ЛЕКЦИЯ 1
Производная функции

1.1 Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача Ньютона о скорости

Пусть функция $x = f(t)$, $x \in [0, +\infty)$, представляет собой закон движения (формула, по которой находится путь, пройденный телом от начала движения до момента времени t).

Нам необходимо решить две задачи:

1. Дать понятие скорости в момент времени $t = t_0 > 0$ (мгновенной скорости).

2. Найти способ вычисления этой скорости.

Рассмотрим промежуток времени длиной $\Delta t > 0$ от момента t_0 до $t = t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени телом пройден путь $\Delta f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Отношение $\frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}$ называется **средней скоростью** на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Определение 1.1. ***Мгновенной скоростью*** *тела в момент времени t_0 будем считать*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} = V(t_0). \tag{1.1}$$

2. Задача Лейбница[1] о касательной к кривой

Рассмотрим некоторую кривую Γ – график функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$, и на ней две точки: $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированную, $M(x, y)$ – движущуюся. Обозначим: $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Проведем через точки M_0 и M секущую M_0M, которая образует с осью Ox угол β (рисунок 1.1). Начнем приближать точку M по кривой Γ к точке M_0. Положение секущей будет меняться. **Касательной к кривой** Γ в точке M_0 будем называть (по Лейбницу) предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M к точке M_0. Найдем угловой коэффициент этой касательной.

[1]Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) – немецкий философ, логик, математик, физик.

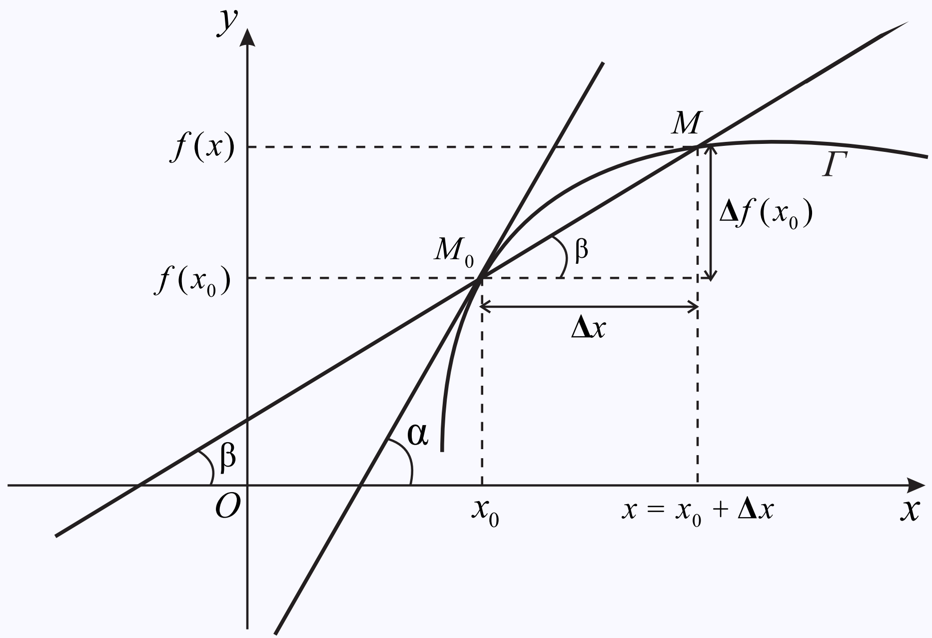


Рисунок 1.1 – Касательная к кривой

Угловой коэффициент секущей

$$K_{MM_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta.$$

Если $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$, то $M \to M_0$, а угловой коэффициент касательной будет:

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1.2}$$

Тогда уравнение указанной касательной примет вид:

$$y = f(x_0) + K(x - x_0). \tag{1.3}$$

Нами введено понятие касательной к кривой и найдено ее уравнение.

1.2 Понятие производной, ее геометрический и механический смысл. Касательная и нормаль к графику функции. Односторонние производные

Анализируя методы решения задач, приведенных выше, приходим к понятию производной функции в точке.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : U_{x_o} \to \mathbb{R}$.

Возьмем любое приращение $\Delta x \neq 0$ аргумента, но такое, чтобы $x = x_0 + \Delta x \in U_{x_0}$. Тогда получим приращение функции

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 1.2. ***Производной*** *функции* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1.4}$$

Обозначения производной:

$$f'(x_0),\ y'_{x=x_0} \text{ – по Лагранжу},$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\ \frac{df}{dx}(x_0) \text{ – по Лейбницу},$$

$$\dot{f}(x_0) \text{ – по Ньютону},$$

$$Df(x_0) \text{ – по Коши}.$$

Замечание 1.1. Из задачи Лейбница о касательной к кривой следует, что угловой коэффициент указанной касательной будет равен производной функции f в точке x_0, то есть $k = f'(x_0)$ (в этом заключается **геометрический смысл производной** функции в точке). Тогда уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.5}$$

будет уравнением касательной, а

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{1.6}$$

уравнением нормали.

Замечание 1.2. **Механический смысл производной** заключается в том, что если $x = f(t)$ – закон движения, то $x' = f'(t) = V(t)$ – скорость при указанном движении в момент времени t, а $V'(t) = a(t)$ – ускорение. Если же $y = f(x)$ – некоторая функция, то $y' = f'(x)$ – скорость изменения этой функции в точке x.

Определение 1.3. ***Правосторонней*** (***левосторонней***) ***производной*** *функции* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0 *называется правосторонний* (*левосторонний*) *предел разностного отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:*

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0 \\ (\Delta x \to +0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0 \\ (\Delta x \to -0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Правостороннюю и левостороннюю производные называют **односторонними производными**.

Замечание 1.3. Для определения левосторонней производной функции в точке x_0 достаточно, чтобы функция f была определена на левосторонней окрестности точки $U^-_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0]$ $(\delta > 0)$; для определения правосторонней производной функции в точке x_0 достаточно, чтобы функция f была определена на правосторонней окрестности точки $U^+_{x_0} = [x_0, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$.

Справедлива теорема (критерий существования производной в точке).

Теорема 1.1. *Функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 производную, равную числу $a \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда существуют односторонние производные функции f в точке x_0 и обе они равны числу a.*

Пример 1.1. Функция $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ имеет

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = f'(0-0).$$

Значит, функция f в точке $x_0 = 0$ производной не имеет.

Пример 1.2. Пользуясь определением 1.2, покажите, что функция $f(x) = \sin x$ имеет производную в любой точке числовой прямой. Найдите ее.

◀ Возьмем любую точку $x \in \mathbb{R}$, придадим ей любое приращение $\Delta x \neq 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

Значит, для всех $x \in \mathbb{R}$ $(\sin x)' = \cos x$. ▶

1.3 Понятие дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости

Определение 1.4. *Функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде:*

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{1.7}$$

где A – некоторое действительное число, которое не зависит от Δx, а может зависеть только от самой функции f и точки x_0, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Пример 1.3. Пользуясь определением 1.4, докажите, что функция $f(x) = |x^3|$ дифференцируема в точке $x = 0$.

◀ $\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \left|(\Delta x)^3\right| - |0| = 0 \cdot \Delta x + |\Delta x| \Delta x \cdot \Delta x$, что соответствует выражению 1.5, где $A = 0$ и $\alpha(\Delta x) = |\Delta x| \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. ▶

Теорема 1.2 (критерий дифференцируемости). *Функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную.*

◀Разделим левую и правую части (1.7) на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

Значит, существует $f'(x_0) = A$ (необходимое условие доказано). И наоборот, если существует

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

то

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

(пользуемся теоремой о связи функции, имеющей предел, и бесконечно малой), а поэтому функция f дифференцируема в точке x_0. ▶

Замечание 1.4. Из теоремы 1.2 следует, что понятия дифференцируемости функции одной переменной в точке и существования производной в этой точке равносильны.

Теорема 1.3. *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

◀ В равенстве (1.7) переходим к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, значит (определение непрерывности функции на «языке приращений»), функция непрерывна в точке x_0. ▶

Замечание 1.5. Утверждение, обратное теореме 1.3, вообще говоря, неверно. Из примера 1.1 следует, что функция $f(x) = |x|$, непрерывная в точке $x_0 = 0$, не является дифференцируемой в этой точке.

Определение 1.5. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***дифференцируемой на множестве*** *X, если она дифференцируема в каждой точке множества X.*

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Что называется приращением функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0?
3. Дайте определение производной функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0.
4. Каков механический (физический) смысл производной функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0?
5. Каков геометрический смысл производной функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0? Дайте определение касательной и нормали к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ и напишите их уравнения.
6. Дайте определение односторонних производных функции в точке. Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке? Приведите примеры.
7. Сформулируйте определение и критерий дифференцируемости функции в точке.
8. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Задачи, приводящие к понятию производных. Вычисление производных по определению. Дифференцируемость функции

Задание 1. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = 15\sin 3t$. Найти мгновенную скорость точки в момент времени t_0.

◀В момент времени t_0 координата точки равнялась $x_0 = 15\sin 3t_0$, а в момент $t_0 + \Delta t$ она равнялась $x_0 + \Delta x = 15\sin 3\,(t_0 + \Delta t)$. Поэтому путь, пройденный за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$, равен

$$\Delta x = 15\sin 3\,(t_0 + \Delta t) - 15\sin 3t_0 = 30\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\sin 3\frac{\Delta t}{2},$$

а средняя скорость точки за этот же промежуток времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 30\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}.$$

Следовательно, мгновенная скорость точки в момент времени t_0:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0} 30\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t} =$$

$$= 30\lim_{\Delta t\to 0}\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{3}{2}\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{3\frac{\Delta t}{2}} = 45\cos 3t_0.$$

Так как $v_{\text{мгн}} = x'_t$, то мы можем сказать, что производная функции $x = 15\sin 3t$ равна $45\cos 3t$. ▶

Задание 2. Количество радиоактивного вещества в момент времени t выражается формулой

$$m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

где T – так называемый период полураспада, а M – первоначальное количество вещества (количество вещества в момент времени $t = 0$). Найти мгновенную скорость распада вещества в момент времени t_0.

◀Найдем среднюю скорость распада вещества за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. В момент времени t_0 количество вещества было $m_0 = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ стало $m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}}$. Поэтому за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ количество вещества изменилось на

$$\Delta m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}} - M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$$

(отметим, что $\Delta m < 0$, так как количество радиоактивного вещества уменьшается). Средняя скорость распада за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = M\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}}{\Delta t} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}.$$

Поэтому мгновенная скорость распада выражается формулой

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0} M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}.$$

Так как $M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$ не зависит от Δt, то это выражение можно вынести за знак предела:

$$v_{\text{мгн}} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{T\frac{\Delta t}{T}} = \left(\frac{0}{0}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{1}{T}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\frac{\Delta t}{T}} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{m_0\ln 2}{T}.$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Таким образом, скорость радиоактивного распада в момент времени t_0 пропорциональна количеству вещества в этот момент времени.▶

Задание 3. Пусть в электрической цепи течет постоянный ток. Под постоянным током мы будем понимать количество электричества, протекающее в цепи за единицу времени. Дать определение переменного тока в момент времени t и вычислить его, если количество электричества, протекшее в цепи за промежуток времени $[0, t]$, равно $Q(t)$.

◀Количество электричества, протекшее в цепи за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, выражается формулой $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$.

Отнеся это количество к единице времени, получим средний ток за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$:

$$I_{\text{ср}} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенным током в момент времени t называют предел среднего тока за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, когда $\Delta t \to 0$:

$$I_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} I_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Это означает, что $I_{\text{мгн}}$ – производная функции Q:

$$I_{\text{мгн}}(t) = Q'(t).$$ ▶

Задание 4. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \sqrt[3]{x}$.
◄Найдем сначала приращение функции при изменении аргумента от x до $x + \Delta x$. Оно равно

$$\Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$.

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$.

Чтобы вычислить этот предел, умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы

$$\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}:$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\Delta x \left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Таким образом, $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ►

Задание 5. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \arcsin x$.

◀ Найдем сначала приращение функции при изменении аргумента от x до $x + \Delta x$. Оно равно

$$\Delta y = \arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}.$$

Чтобы вычислить этот предел, заменим бесконечно малую функцию $\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x$ при $\Delta x \to 0$ на эквивалентную бесконечно малую функцию

$$\sin\left(\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x\right) = (x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 (1 - x^2) - x^2\left[1 - (x + \Delta x)^2\right]}{\Delta x\left[(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}\right]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}} = \frac{2x}{2x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

Таким образом, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. ▶

Задание 6. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$ дифференцируема в точке $x = 0$.

◄Так как функция f задается различными аналитическими выражениями на лучах $(-\infty, 0)$, $[0, \infty)$, общим концом которых является точка $x = 0$, вычислим односторонние производные в точке $x = 0$. Сначала найдем $f'(0+0)$. Если $\Delta x > 0$, то $f(\Delta x) = \Delta x^2$, а поэтому

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Если же $\Delta x < 0$, то $f(\Delta x) = \Delta x^3$, а поэтому $f'(0-0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3 - 0}{\Delta x} = 0$.

Так как односторонние производные равны, то производная функции f в точке 0 существует (она равна нулю), а значит, функция f дифференцируема в точке 0.►

Задание 7. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ \sin x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ не имеет производной в точке $x = 0$.

$$◄\ f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ и } f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 0.$$

Так как односторонние производные различны, то функция не дифференцируема в точке $x = 0$. ►

Задача 8. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{3(x-1)}$ не дифференцируема в точке $x = 1$.

$$◄\ \Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = \sqrt[3]{3(1+\Delta x - 1)} = \sqrt[3]{3\Delta x} = A \cdot \Delta x + \frac{\sqrt[3]{3\Delta x} - A \cdot \Delta x}{\Delta x} \Delta x. \tag{1.8}$$

С учетом (1.7) в (1.8) $\alpha(\Delta x) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - A \cdot \Delta x}{\Delta x}$.

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} - A \right) = +\infty$. Значит, функция f не дифференцируема в точке $x = 1$. ►

Задание 9. Показать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ не имеет производной в точке $x = 0$.

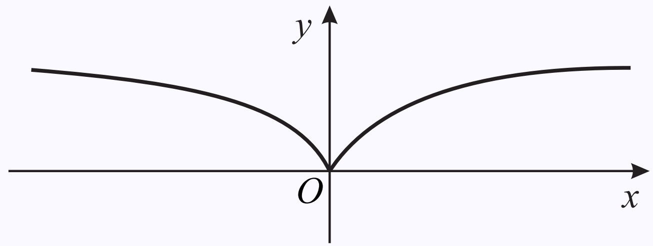


Рисунок 1.2 – График функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

◄ $\Delta y = \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} - \sqrt[3]{x^2}$, откуда значение Δy в точке $x = 0$ будет равно $\sqrt[3]{\Delta x^2}$; поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}};$$

следовательно,

$$y'_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty,$$

то есть производная функции не существует (рисунок 1.2).►

Задания для самостоятельного решения

1. Найти мгновенную скорость прямолинейно движущейся точки, если ее координата в момент времени t выражается формулой $x = t^4 + 4t^2 - 2t - 1$.
2. Найти мгновенную угловую скорость вращающегося тела, если в момент времени t угол поворота равен $\varphi = 2t^3 - 3t + 1$.
3. Твердое тело вращается около неподвижной оси, причем в момент времени t угол поворота равен $\varphi(t)$. Что следует понимать под: 1) средней угловой скоростью вращения за некоторый промежуток времени; 2) угловой скоростью вращения в данный момент t?
4. Точка движется по прямой (вообще говоря, неравномерно и неравномерно-ускоренно), причем известна ее скорость $v(t)$ как функция времени t. Дайте определение терминов: 1) среднее ускорение за данный промежуток времени; 2) ускорение в данный момент.
5. Твердое тело вращается около неподвижной оси, причем в момент времени t угловая скорость равна $\omega(t)$. Дайте определение терминов: 1) среднее угловое ускорение за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$; 2) угловое ускорение в момент времени t.
6. Медный стержень, длина которого при 0° равна l_0, имеет при температуре t° длину l. Дайте точное определение понятия «коэффициент линейного расширения меди при температуре t_0°».
7. Количество тепла, необходимое для того, чтобы повысить температуру 1 *г* вещества от 0° до t°, равно $Q(t^\circ)$. Дайте точное определение понятий: 1) средняя теплоемкость вещества в температурном промежутке: $[t_0^\circ, t_0^\circ + \Delta t^\circ]$; 2) теплоемкость вещества при температуре t_0°.
8. В процессе распада радиоактивного вещества A появляется радиоактивное вещество B, которое в свою очередь распадается. Обозначим через $m(t)$ количество вещества в момент времени t. Дайте точное определение понятия «скорость распада вещества B в момент времени t».
9. Тело движется по прямой линии под действием переменной силы, направленной по той же прямой. Работа, необходимая для перемещения тела из начала координат в точку B с координатой x, равна $A(x)$. Как связана функция $A(x)$ с силой, действующей на тело в точке B?

10. Работа, произведенная за единицу времени, называется мощностью. Дайте точное определение понятия мощности в данный момент времени и установите связь этого понятия с функцией $A(t)$ – работой, произведенной за промежуток времени $[0, t]$.
11. Материальный отрезок AB неоднороден. Задана функция $m(x)$ – масса части отрезка AM, где x – длина этой части. Что следует понимать под: 1) средней (линейной) плотностью отрезка на участке $[x, x + \Delta x]$; 2) плотностью (линейной) в точке x?
12. Обозначим через $p(h)$ давление воздуха на высоте h над уровнем моря. Как связана функция $p(h)$ с плотностью воздуха на высоте h?
13. Радиус круга равномерно увеличивается со скоростью v. С какой скоростью увеличивается площадь круга (начальное значение радиуса равно нулю)?
14. Радиус шара равномерно увеличивается со скоростью v. С какой скоростью увеличивается объем шара? С какой скоростью увеличивается его поверхность (начальное значение радиуса равно нулю)?
15. Пользуясь определением производной, найдите производные следующих функций:

$$y = \frac{1}{x^2 + 2}, y = \sqrt[n]{x}, y = \sqrt{x^2 - 3}, y = \operatorname{tg} ax, y = \operatorname{tg}^2 x, y = e^{kx}, y = \sin^2 x,$$

$$y = \cos^2 x, y = \arcsin^2 x, y = \arcsin \sqrt{x}, y = \operatorname{arctg} x, y = \ln\left(x^2 - 1\right).$$

16. Покажите, что функции $y = \sqrt[3]{x - 1}$, $y = |x - 1|$, $y = (x - 1)^{\frac{2}{5}}$, $y = |\ln x|$ не имеют производной в точке $x = 1$; функция $y = \arccos(\sin x)$ – в точке $x = k\pi$; функции $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ – в точке $x = 0$; а функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ – в любой точке, отличной от нуля.

ЛЕКЦИЯ 2
Основные свойства производной. Производные элементарных функций

2.1 Производная суммы, произведения и частного

Теорема 2.1. *Если функции* $u : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *и* $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* x_0, *то сумма, произведение и частное этих функций (частное при условии, что* $v(x_0) \neq 0$*) также дифференцируемы в этой точке, причем справедливы формулы:*

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0); \tag{2.1}$$

$$(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0); \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}; \tag{2.3}$$

◄Приведем доказательство только для частного $W = \frac{u}{v}$.

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}(x_0) = \frac{\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x_0)+\Delta u}{v(x_0)+\Delta v} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{\Delta x(v(x_0)+\Delta v)v(x_0)} = \frac{v(x_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)(v(x_0)+\Delta v)} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)}$$

($\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$, так как функция v дифференцируема в точке x_0, а значит, непрерывна в этой точке).►

Следствие 2.1. *Если функция* $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* x_0 *и* α *– любое действительное число, то существует* $(\alpha \cdot v)'(x_0) = \alpha v'(x_0)$ *(постоянный множитель можно выносить за знак производной).*

Следствие 2.2 (свойство линейности). *Если функции* $f_i : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,n})$ *дифференцируемы в точке* x_0*, то любая линейная комбинация этих функций* $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$*, дифференцируема в точке* x_0*, причем*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x_0). \tag{2.4}$$

◀Справедливость утверждения следует из теоремы 2.1 (производная суммы) и следствия 2.1. ▶

2.2 Производные основных элементарных функций

2.2.1 Производная степенной функции

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{2.5}$$

◀Для доказательства формулы (2.5) рассмотрим случаи:

а) $\alpha = n \in \mathbb{N}$ (показатель – натуральное число), $x \in \mathbb{R}$.

Используем метод математической индукции. При $n = 1$ формула (2.5) справедлива (доказывается по определению производной). Допустим, что (2.5) справедлива при $n = k$, где $k > 1$, это значит: $(x^k)' = kx^{k-1}$.

Докажем справедливость указанной формулы при $n = k + 1$ (используем формулу для производной произведения):

$$\left(x^{k+1}\right)' = \left(x^k \cdot x\right)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k = (k+1)\, x^k.$$

Значит, формула (2.5) справедлива для любого натурального $\alpha = n \in \mathbb{N}$;

б) если $\alpha = 0$, то $x^{\alpha} = 1$, $x \neq 0$ и $(x^{\alpha})' = (1)' = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$.

Утверждение при $\alpha = 0$ доказано;

в) если $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, а $(-n) \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, то

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})'}{x^{-2n}} = \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}.$$

Формула (2.5) доказана для любого $\alpha \in \mathbb{Z}$;
г) допустим, что $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$,
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^\alpha\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right)}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}$. ►

2.2.2 Производная показательной функции

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \Big[\text{используем замечательный предел (??)}\Big] = a^x \ln a.$$

Следствие 2.3. $(e^x)' = e^x$.

2.2.3 Производная тригонометрических функций

Нами доказано (пример 1.2), что:

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{2.6}$$

Можно аналогично доказать, что

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{2.7}$$

Используя теорему о производной частного и формулы (2.6) и (2.7), получаем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.3 Производная обратной функции

Теорема 2.2. *Если функция* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *является обратимой и существует производная* $f'(x_0) \neq 0$, *а обратная функция* f^{-1} *непрерывна в точке* y_0, *где* $y_0 = f(x_0)$, *то в точке* y_0 *существует производная обратной функции и справедлива формула*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (2.8)$$

◀Придадим точке $y_0 \in D\left(f^{-1}\right)$ любое приращение $\Delta y \neq 0$, но такое, чтобы $y_0 + \Delta y \in D\left(f^{-1}\right)$. Тогда $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \neq 0$ (разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, $f^{-1}(y)$ является обратимой). Получаем:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/_{\Delta x}}.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\Delta y \to 0$, а так как функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0, то и $\Delta x \to 0$, когда $\Delta y \to 0$.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

значит, существует и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \left(f^{-1}\right)'(y_0)$, а также справедлива формула (2.8).▶

Замечание 2.1. Пользуясь теоремой 2.2, выведем формулы для производных функций

$$y = \log_a x, \;\; y = \arcsin x, \;\; y = \arccos x, \;\; y = \operatorname{arctg} x, \;\; y = \operatorname{arcctg} x.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \;\; \left((\ln x)' = \frac{1}{x}\right).$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.4 Производная композиции функций (сложной функции)

Пусть $f : U_{u_0} \to \mathbb{R}$, $\varphi : U_{x_0} \to \mathbb{R}$, причем $E(\varphi) \subset U_{u_0}$.

Теорема 2.3. *Если функция f дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, а функция φ дифференцируема в точке x_0, то сложная функция $f \circ \varphi$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула*

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0). \tag{2.9}$$

◀Возьмем любое приращение $\Delta x \neq 0$ аргумента x_0, но такое, чтобы $x_0 + \Delta x \in U_{x_0}$, тогда функция $u = \varphi(x)$ получит приращение $\Delta u = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$, а значит, и функция $y = f(u)$ получит приращение $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$. Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, то справедливо представление

$$\Delta y = f'(u_0)\,\Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u, \tag{2.10}$$

где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$.

Разделим левую и правую части (2.10) на $\Delta x \neq 0$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ в полученном после этого равенстве.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)+0\cdot\varphi'(x_0)=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

Мы использовали при доказательстве тот факт, что $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 (так как она дифференцируема в этой точке), поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, а значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$. ►

Замечание 2.2. Теорема 2.3 и правила дифференцирования сложной функции переносятся на композицию трех и большего числа составляющих функций.

Пример 2.1. Пусть $y=\cos x^2$. Здесь $f(u)=\cos u$ и $u=x^2$. Условия теоремы 2.3 выполняются для всех $x\in\mathbb{R}$, значит, наша функция дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $(\cos x^2)'=-\sin x^2\cdot 2x=-2x\sin x^2$.

Замечание 2.3. Зная, что $(\sin x)'=\cos x$ и $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, найдем

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-\sin x.$$

В приложениях математического анализа приходится иметь дело с так называемыми гиперболическими функциями:

$\operatorname{sh} t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический синус;
$\operatorname{ch} t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический косинус;
$\operatorname{th} t=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический тангенс;
$\operatorname{cth} t=\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический котангенс.

Пример 2.2. Доказать, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t;$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

$$◀\ \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} =$$

$$= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \operatorname{ch} 2t.$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = 1.\ ▶$$

Используя основные свойства производной, а также формулы для производной показательной и сложной функции, выведем формулы для производных гиперболических функций.

$$(\operatorname{sh} t)' = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t;$$

$$(\operatorname{ch} t)' = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t;$$

$$(\operatorname{th} t)' = \left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} t)' \operatorname{ch} t - (\operatorname{ch} t)' \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t};$$

$$(\operatorname{cth} t)' = \left(\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} t)' \operatorname{sh} t - (\operatorname{sh} t)' \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}.$$

Замечание 2.4. Формулы производных основных элементарных и гиперболических функций составляют так называемую **таблицу производных**, которую можно увидеть, нажав на кнопку «Приложение» навигационной панели. Таблица производных вместе с правилами дифференцирования суммы, произведения и частного функций, а также правилом дифференцирования сложной функции составляют основу дифференциального исчисления.

2.5 Производная показательно-степенной функции. Логарифмическая производная

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке x_0 и для любых $x \in U_{x_0}$ $f(x) > 0$. Тогда для любых $x \in U_{x_0}$ существует $\ln y = \ln f(x)$.

Пользуясь теоремой о производной композиции функции (теорема 2.3), получим:

$$(\ln f)'(x_0) = \frac{y'(x_0)}{y(x_0)}. \tag{2.11}$$

Правая часть формулы (2.11) называется **логарифмической производной** функции f в точке x_0. Пользуясь понятием логарифмической производной, найдем производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, $x \in U_{x_0}$.

Теорема 2.4. *Если функции $u : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ и $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0 и для любых $x \in U_{x_0}$ $u(x) > 0$, то функция $y = u(x)^{v(x)}$, $x \in U_{x_0}$, имеет производную в точке x_0 и справедлива формула*

$$y'(x_0) = u(x_0)^{v(x_0)} \ln u(x_0) \cdot v'(x_0) + v(x_0) \cdot u(x_0)^{v(x_0)-1} u'(x_0). \tag{2.12}$$

◄Прологарифмировав равенство $y = u^v$, получаем: $\ln y = v \ln u$. Тогда

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u'. \tag{2.13}$$

Из (2.13) вытекает справедливость формулы (2.12).►

Замечание 2.5. Правую часть формулы (2.12) можно объяснить как сумму, в которой первое слагаемое – производная функции u^v как показательной (считать $u = \mathrm{const}$), а второе – степенной u^vс постоянным показателем v.

Пример 2.3. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y = (\sin x)^{x^2}$, $D(y) = (0, \pi)$.

◀Условия теоремы 2.4 выполняются для всех $x \in (0, \pi)$, поэтому на $(0, \pi)$ существует производная данной функции, и справедливо:

$$y' = (\sin x)^{x^2} \cdot \ln \sin x \cdot 2x + x^2 (\sin x)^{x^2 - 1} \cdot \cos x. \blacktriangleright$$

Замечание 2.6. Справедлива формула $y = u^v = e^{v \ln u}$, пользуясь которой можно находить производную данной функции как сложной.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Используя определение производной, выведите формулы для производных функций $y = x^\alpha$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$.
2. Используя формулу производной частного, выведите формулы для производных функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
3. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
4. Используя основные свойства производной, выведите формулы для производных гиперболических функций.
5. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
6. Используя теорему о производной обратной функции, выведите формулу для производной обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.
7. Дайте определение логарифмической производной.
8. Сформулируйте теорему о производной показательно-степенной функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Вычисление производных с использованием общих правил дифференцирования

Задание 1. Найти производную функции $y = 3 \cdot 2^{-5\,\mathrm{tg}^4 \frac{7}{\sqrt{x}}}$.

◀Воспользуемся теоремой о производной сложной функции. Для усвоения алгоритма нахождения производной сложной функции можно порекомендовать следующий способ.

а) предположим, что необходимо вычислить значение функции в некоторой точке x. Это можно сделать, выполняя следующие действия:

1) $x^{-\frac{1}{2}}$; 2) $7\times\oplus$; 3) $\mathrm{tg}\,(\oplus)$; 4) $(\oplus)^4$; 5) $-5\times\oplus$; 6) $2^{\oplus}$; 7) $3\times\oplus$, где $\times$ – знак произведения, $\oplus$ – обозначается результат предыдущего действия;

б) нахождение производной будем проводить в обратном порядке (результаты действий нахождения производных умножаем):

7) выносим постоянный множитель 3 за знак производной;

6) находим производную показательной функции;

5) выносим постоянный множитель (-5) за знак производной;

4) находим производную степенной функции;

3) находим производную функции тангенс;

2) выносим постоянный множитель 7 за знак производной;

1) находим производную степенной функции;

в) непосредственное нахождение производной данной функции (упрощений не проводим):

$$y' = 3 \cdot \left(2^{-5\,\mathrm{tg}^4 \frac{7}{\sqrt{x}}} \cdot \ln 2\right) \cdot (-5) \cdot \left(4\,\mathrm{tg}^3 \frac{7}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{7}{\sqrt{x}}}\right) \cdot (7) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}. \blacktriangleright$$

Задание 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные данных функций:

1) $y = \frac{1-x^3}{1-x^5}$.

$$\blacktriangleleft\ y' = \frac{(1-x^3)'(1-x^5) - (1-x^5)'(1-x^3)}{(1-x^5)^2} = \frac{-3x^2(1-x^5) + 5x^4(1-x^3)}{(1-x^5)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 + 3x^7 + 5x^4 - 5x^7}{(1-x^5)^2} = \frac{-3x^2 + 5x^4 - 2x^7}{(1-x^5)^2}.\ \blacktriangleright$$

2) $y = e^x(\sin x + \cos x)$.

$$\blacktriangleleft\ y' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' = e^x(\sin x + \cos x) +$$

$$+e^x(\cos x - \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x.\ \blacktriangleright$$

3) $y = \operatorname{arctg}^3(2x-1) + \arcsin^3\sqrt{x}$.

$$\blacktriangleleft\ y' = 3\operatorname{arctg}^2(2x-1)\cdot\frac{1}{1+(2x-1)^2}\cdot 2 + \frac{3\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3\operatorname{arctg}^2(2x-1)}{2x^2-2x+1} + \frac{3\arcsin^2\sqrt{x}}{2\sqrt{(1-x)\,x}}.\ \blacktriangleright$$

4) $y = \ln^2\cos^3(4x-1)$.

$$\blacktriangleleft\ y' = 2\ln\cos^3(4x-1)\cdot\frac{1}{\cos^3(4x-1)}\cdot 3\cos^2(4x-1)\cdot(-\sin(4x-1))\cdot 4 =$$

$$= -24\operatorname{tg}(4x-1)\cdot\ln\cos^3(4x-1).\ \blacktriangleright$$

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

5) $y=\frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{e^{\arcsin^4 x}+5}$.

$$\blacktriangleleft\ y'=\frac{(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))'\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)-(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)'}{\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)}{\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)^2}-$$

$$-\frac{(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))\cdot e^{\arcsin^4 x}\cdot 4\arcsin^3 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)^2}.\ \blacktriangleright$$

6) $y=\ln\sqrt[5]{\frac{x^3-x+1}{x^2+4x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\blacktriangleleft\ y'=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^3-x+1}{x^2+4x+1}}}\cdot\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{x^3-x+1}{x^2+4x+1}\right)^4}}\times$$

$$\times\frac{(3x^2-1)(x^2+4x+1)-(2x+4)(x^3-x+1)}{(x^2+4x+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+\frac{(2x-3)^2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\frac{(2x+3)^2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{5}\frac{x^2+4x+1}{x^3-x+1}\times$$

$$\times\frac{3x^4+12x^3+3x^2-x^2-4x-1-2x^4+2x^2-2x-4x^3+4x-4}{(x^2+4x+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3+4x^2-12x+9}+\frac{3}{3+4x^2+12x+9}\right)=$$

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

Приложение

Закрыть

$$= \frac{1}{5}\frac{x^4+8x^3+4x^2-2x-5}{(x^3-x+1)(x^2+4x+1)} + \left(\frac{1}{4x^2-12x+12} + \frac{1}{4x^2+12x+12}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{x^4+8x^3+4x^2-2x-5}{(x^3-x+1)(x^2+4x+1)} + \frac{x^2+3}{2(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)}.$$

Найти производную проще, если в начале упростить выражение, а затем найти производную.▶

7) $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

◀**1-й способ**: $\ln y = \frac{1}{x}\ln\cos x$;

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)'\ln\cos x + \frac{1}{x}(\ln\cos x)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\cos x + \frac{1}{x}\frac{1}{\cos x}(-\sin x);$$

$$y' = (\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\cos x + (\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{(-\sin x)}{\cos x} = -(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln\cos x + x\operatorname{tg} x}{x^2}.$$

2-й способ: В условии дана показательно-степенная функция. Найдем производную функции как сумму показательной функции (считаем такой нашу функцию) и степенной (считаем такой нашу функцию). Покажем алгоритм нахождения производной. Упрощение вида полученного выражения проводить не будем.

$$\left(\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)\ \Big|\ \left((f(x))^{\alpha}\right)' = \alpha(f(x))^{\alpha-1}\cdot f'(x)\right).$$

$$y' = \frac{1}{x}(\cos x)^{\frac{1}{x}-1}\cdot(\cos x)' + (\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\cos x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot(\cos x)^{-1}\cdot(-\sin x) + (\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\cos x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -(\cos x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\sin x}{x\cdot\cos x} + \frac{\ln\cos x}{x^2}\right) = -(\cos x)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln\cos x + x\operatorname{tg} x}{x^2}.$$ ▶

8) $y = x^{x^x}$.

$$\blacktriangleleft\ y' = x^x \cdot x^{x^x-1} \cdot (x)' + x^{x^x} \cdot \ln x \cdot (x^x)' = x^x \cdot x^{x^x-1} +$$

$$+ x^{x^x} \cdot \ln x \cdot \left(x \cdot x^{x-1} + x^x \cdot \ln x\right) = x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right). \ \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти производную функции $y = \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}}$.

$\blacktriangleleft$**1-й способ.** $y' = \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} +$

$$+ \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} - 1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

2-й способ. $\left(y = (u(x))^{v(x)},\ \ln y = v \ln u,\ \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u'\right)$

$$\ln y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right);\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) +$$

$$+ \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \cdot \frac{1}{2\sin^3 \frac{1}{x}} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$y' = \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} +$$

$$+ \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \cdot \frac{1}{2\sin^3 \frac{1}{x}} \cdot 6 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

3-й способ.

$$\left(a^{\log_a f(x)} = f\left(x\right) \mid u^v = \left(e^{\ln u}\right)^v = e^{v\ln u}\right)$$

$$y = e^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x^2}\cdot\ln\left(2\sin^3\frac{1}{x}\right)};$$

$$y' = e^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x^2}\cdot\ln\left(2\sin^3\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(\frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}}\cdot\frac{6x}{\left(2-x^2\right)^2}\ln\left(2\sin^3\frac{1}{x}\right)+\right.$$

$$\left.+\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x^2}\cdot\frac{1}{2\sin^3\frac{1}{x}}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin^2\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \left(2\sin^3\frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x^2}}\cdot\ln\left(2\sin^3\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}}\cdot\frac{6x}{\left(2-x^2\right)^2}+$$

$$+\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x^2}\left(2\sin^3\frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x^2}-1}\cdot 6\cdot\sin^2\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$ ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

1.1 $y = \frac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}$;

1.2 $y = \frac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}$;

1.3 $y = \sqrt[3]{x^2}\sin x \ln x$;

1.4 $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}$;

1.5 $y = x\left(\arccos x + \operatorname{arctg} x\right)$;

1.6 $y = \sin^5 x$;

1.7 $y = \ln^5 x$;

1.8 $y = \left(3x^2 - 1\right)^5$;

1.9 $y = \operatorname{arctg}\left(2x+1\right)^4$;

1.10 $y = \operatorname{arctg} e^{4x}$;

1.11 $y = \operatorname{arctg} x^2$;

1.12 $y = \operatorname{arctg}\left(\arcsin^4 x\right)$;

1.13 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$;

1.14 $y = \sin^4 5x$;

1.15 $y = \ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]$;

1.16 $y = \sqrt{\sin 2x + \cos 3x}$;

1.17 $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

1.18 $y = e^x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

1.19 $y = \sin\left(\cos x\right) + \cos\left(\sin x\right)$;

1.20 $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} + e^{\sin x^2}$;

1.21 $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$;

1.22 $y = \frac{e^x\cos x}{\sin x^2}$;

1.23 $y = \frac{\operatorname{tg} x^2}{\sqrt{x^3+1}}$;

1.24 $y = \cos^3 x^3 - e^{x^2}\operatorname{tg} x$;

1.25 $y = e^{\operatorname{arctg}^3\sqrt{x+4}}$;

1.26 $y = \ln^2\arcsin^3\sqrt{x}$;

1.27 $y = \arcsin^3\left[\ln^2\left(e^{x^2}+1\right)\right]$;

1.28 $y = \ln\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$;

1.29 $y = \sqrt{1+x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$;

1.30 $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$;

1.31 $y = \ln\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)(x+2)^2}{(x-2)e^{\operatorname{arctg} x}}}$;

1.32 $y = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$;

1.33 $y = \operatorname{sh}^3 4x + \operatorname{ch}^3\sqrt{x}$;

1.34 $y = \operatorname{th}^5\left(2e^{\sqrt{x}} - 1\right);$

1.35 $y = \operatorname{sh}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right];$

1.36 $y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arcctg} a^{-x};$

1.37 $y = \sqrt[12]{e^{\sin 4x (x^2-6)^5}};$

1.38 $y = \sqrt[3]{\frac{e^{\sin x + \cos x}}{(4x^3+2)^6}};$

1.39 $y = \arccos \frac{x^{3n}+1}{x^{2n}-1};$

1.40 $y = \frac{x^2 \ln^2 \operatorname{tg} x}{\ln \sin^2 2x};$

1.41 $y = e^{\arcsin \sqrt{x^2-1}};$

1.42 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} e^{x^3 - 2 \operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{2} \ln x^3 - 1};$

1.43 $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \left(\sqrt[3]{4x^2} + 1\right)^2;$

1.44 $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1+x^2};$

1.45 $y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right);$

1.46 $y = \ln\left(x^4+4\right);$

1.47 $y = \left(x^2+1\right)^{2x};$

1.48 $y = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}};$

1.49 $y = \sqrt[x]{(2x \sin x + 1)^2};$

1.50 $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}};$

1.51 $y = x^{\sin x};$

1.52 $y = x^{x^2}.$

2. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 3
Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Понятие дифференциала функции, его геометрический и механический смысл

Определение 3.1. *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, то линейная однородная функция $f'(x_0)\,\Delta x$ (относительно Δx) называется* ***дифференциалом*** *функции f в точке x_0.*

Обозначения: $df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x$ или $dy = f'(x_0)\,\Delta x$.

Если $f'(x_0) = A \neq 0$, то дифференциал представляет собой главную линейную часть приращения функции в точке x_0 (смотри (1.7)), так как $\alpha(\Delta x)\,\Delta x$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $A\Delta x = f'(x_0)\,\Delta x$ при $\Delta x \to 0$. По определению считаем, что $dx = \Delta x$ (дифференциал независимой переменной). Тогда:

$$dy = f'(x)\,dx \tag{3.1}$$

для любой точки $x \in U_{x_0}$, в которой существует $f'(x)$ ((3.1) – формула для вычисления дифференциала).

Замечание 3.1. Из теоремы 2.1 и определения дифференциала функции следует, что если функции $u : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ и $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0, то

$$d(u+v)(x_0) = du(x_0) + dv(x_0); \tag{3.2}$$

$$d(uv)(x_0) = u(x_0)dv(x_0) + v(x_0)du(x_0); \tag{3.3}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = \frac{v(x_0)du(x_0) - u(x_0)dv(x_0)}{v^2(x_0)}; \tag{3.4}$$

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, тогда dy есть приращение ординаты касательной к графику Γ_f в точке $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$. В этом заключается геометрический смысл дифференциала (рисунок 3.1). $\frac{KL}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = f'\left(x_0\right)$; $KL = f'\left(x_0\right)\Delta x$; $KL = dy$.

Дифференциал имеет и механический смысл. Если $S = S\left(t\right)$ – закон движения тела, то $dS = S'\left(t_0\right)dt$ – путь, пройденный телом при равномерном движении со скоростью $S'\left(t_0\right) = \text{const}$ за время $dt = \Delta t$; или $dA = f'\left(t_0\right)dt$ – работа, совершенная при постоянной мощности $f'\left(t_0\right)$ за время dt.

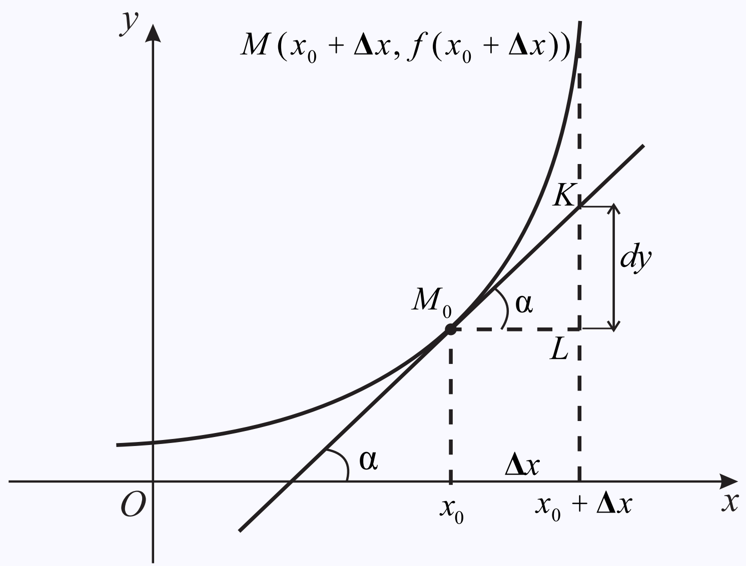


Рисунок 3.1 – Геометрический смысл дифференциала

3.2 Дифференциал и приближенные вычисления

Из равенства (1.7) следует, что

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0). \tag{3.5}$$

Пример 3.1. Пользуясь формулой (3.5), найти приближенное значение $\cos 61°$.

◀Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$. Примем за $x_0 = 60° = \frac{\pi}{3}$ радиан. Тогда

$$\Delta x = 1° = \pi/180° \approx 0,01745. \quad f'(x) = -\sin x, \quad df = -\sin x \cdot \Delta x.$$

$$\cos 61° \approx \cos 60° - \sin 60° \cdot 0,01745 = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,01745 \approx$$

$$\approx 0.5 - 0,86603 \cdot 0,01745 \approx 0,5 - 0,0151 = 0,4849. \ ▶$$

Замечание 3.2. Формула (3.5) может быть использована для вывода приближенных формул, например:

$$(1 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}, \tag{3.6}$$

$$\sin \Delta x \approx \Delta x, \tag{3.7}$$

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x, \tag{3.8}$$

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x. \tag{3.9}$$

3.3 Дифференциал композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала

Нами показано (определение 1.4), что если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ независимой переменной x дифференцируема в точке x_0, то дифференциал функции f в этой точке будет

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx. \tag{3.10}$$

Возникает вопрос: сохраняется ли форма (3.10) дифференциала, если x не является независимой переменной? Ответ положительный. Покажем это. Пусть выполняются условия теоремы 2.3. Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u_0) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Умножим левую и правую части последнего равенства на dx:

$$dy = f'(u_0)\, du. \tag{3.11}$$

Из формул (3.1) и (3.11) следует, что форма дифференциала является неизменной как для независимого аргумента функции f, так и в том случае, когда аргумент сам есть некоторая дифференцируемая функция. Указанное свойство дифференциала функции называется инвариантностью его формы.

3.4 Производные и дифференциалы высших порядков. Механический смысл второй производной

3.4.1 Производные высших порядков. Механический смысл второй производной

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности U_{x_0}. Тогда для любого $x \in U_{x_0}$ существует единственное значение $f'(x)$, то есть на U_{x_0} определена функция $y = f'(x)$. Если эта функция $y = f'(x)$ сама является дифференцируемой в точке x_0, то указанную производную $y'(x_0)$ называют второй производной (производной второго порядка) функции f в точке x_0 и обозначают

$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

По индукции вводят (если они существуют) производные следующих порядков: $f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)'$ и так далее. Если введено понятие $(n-1)$-й производной (она существует в некоторой окрестности U_{x_0}) и она дифференцируема в точке x_0, то $\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ называют производной n-го порядка функции f в точке x_0. Если функция f на множестве $X \subset \mathbb{R}$ имеет конечную производную порядка $n \in \mathbb{N}$ (или производную всех порядков), то она называется n-раз дифференцируемой на множестве X (или бесконечно дифференцируемой на множестве X).

Замечание 3.3. Для обозначения порядка производных используют и римские цифры, если он небольшой. Так, $f^{(\text{V})}$ – производная пятого порядка функции f.

Для некоторых бесконечно дифференцируемых функций выводятся формулы для вычисления производных порядка n ($n \in \mathbb{N}$).

Пример 3.2. $f(x) = \sin x$. Найти формулу для $f^{(n)}(x)$.

$$\blacktriangleleft\ (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 1\right),$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$(\sin x)^{(IV)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

$$\ldots$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right) \blacktriangleright. \tag{3.12}$$

Аналогично:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right), \tag{3.13}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \tag{3.14}$$

$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \tag{3.15}$$

$$(\log_a |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}. \tag{3.16}$$

Если $x = x(t)$ – зависимость от времени координаты материальной точки, которая движется по числовой оси, то $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ – скорость, а $\frac{dx'}{dt}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) = x''(t)$ – ускорение указанной точки в момент t.

3.4.2 Формула Лейбница

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток числовой прямой, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.1. *Если функции f и g n-раз дифференцируемы на промежутке I, то и функция $f \cdot g$ n-раз дифференцируема на промежутке I и для любой точки $x \in I$ справедлива формула:*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{3.17}$$

◀При $n = 1$ формула (3.17) справедлива: $(fg)' = f'g + fg'$. Допустим, что формула справедлива для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $n \geqslant 1$. Докажем ее справедливость для $n + 1$. Продифференцируем формулу для n, получим:

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)}g + \left(C_n^0 f^{(n)} g' + C_n^1 f^{(n)} g'\right) +$$

$$+ \left(C_n^1 f^{(n-1)} g^{(2)} + C_n^2 f^{(n-1)} g^{(2)}\right) + \left(C_n^2 f^{(n-2)} g^{(3)} + C_n^3 f^{(n-2)} g^{(3)}\right) + \ldots + fg^{(n+1)}.$$

Используя формулу $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (непосредственно проверяется), доказываем справедливость теоремы.▶

Пример 3.3. $u(x) = x^2 \sin x$. Найти $u^{(n)}(x)$.

◀ $(x^2 \sin x)^{(n)} = x^2 \cdot \sin^{(n)} x + C_n^1 \cdot 2x \sin^{(n-1)} x + C_n^2 \cdot 2 \sin^{(n-2)} x =$

$$= x^2 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(-n(n-1)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \left(x^2 - n(n-1)\right)\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 2nx \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). ▶$$

3.4.3 Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности U_{x_0}, тогда для точек указанной окрестности существует первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$, где x – независимая переменная. Если существует $f''(x_0)$, то функция $y = f(x)\,dx$ будет дифференцируемой в точке x_0 и ее дифференциал в этой точке будет

$$d\left(f'(x)\ dx\right)\big|_{x=x_0} = f''(x_0)\,(dx)^2 . \tag{3.18}$$

Определение 3.2. *Значение дифференциала от первого дифференциала dy называется* ***вторым дифференциалом*** *функции $y = f(x)$ (в точке x_0) и обозначается d^2y.*

Из формулы (3.18) и определения 3.1 вытекает, что

$$d^2y = f''(x_0)\,(dx)^2 = f''(x_0)\ dx^2. \tag{3.19}$$

Аналогично вводятся дифференциалы более высоких порядков. Методом индукции для дифференциала n-го порядка выводится формула

$$d^ny = f^{(n)}(x_0)\ dx^n. \tag{3.20}$$

Замечание 3.4. Формула (3.20) имеет место, когда x – независимая переменная. Допустим, что $x = x(t)$ сама является функцией. Тогда, например:

$$d^2y = d\left(f'(x)\ dx\right) = d\left(f'(x)\right)\ dx + f'(x)\,d(dx) = f''(x)\ dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Значит, в данном случае форма дифференциала нарушается.

Замечание 3.5. Можно показать, что абсолютная ошибка при использовании формулы (3.5) не превышает

$$\overline{\Delta} = \frac{M}{2}\,(\Delta x)^2 , \tag{3.21}$$

где M – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Пример 3.4. Оцените погрешность, допускаемую при применении формулы (3.5) для приближенного вычисления $\cos 61^\circ$ в примере 3.1.

◀Оценим погрешность на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{61^\circ\pi}{180^\circ}\right]$.

$$f''(x) = (f'(x))' = (-\sin x)' = -\cos x, |f''(x)| = |-\cos x| = \cos x \leqslant \frac{1}{2},$$

$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{61^0\pi}{180^0}\right]$. Тогда $\overline{\Delta} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}(0,01745)^2 < 0,0001$.

Вывод: $\cos 61^\circ \approx 0,4849$ с точностью 10^{-4}. ▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение дифференциала функции. В чем состоит геометрический смысл дифференциала.
2. Как можно использовать дифференциал для приближенного вычисления значения функции?
3. Докажите инвариантность формы первого дифференциала.
4. Дайте определение n-й производной функции.
5. Дайте определение дифференциала n-го порядка функции.

Дифференциал функции и приближенные вычисления

Задание 1. Найдите приращение и дифференциал функции $y = x^3 + 2x$ в точке $x = 2$, при $\Delta x = 0,1$ и при $\Delta x = 0,01$. Найдите абсолютную и относительную погрешности, которые мы допускаем при замене приращения функции ее дифференциалом.

$$◀\ \Delta y = \left[(x+\Delta x)^3 + 2\left(x+\Delta x\right)\right] - \left(x^3 + 2x\right) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 +$$

$$+\Delta x^3 + 2\Delta x = \left(3x^2+2\right)\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,\ dy = y'\Delta x = \left(3x^2+2\right)\Delta x.$$

При $x = 2$ и $\Delta x = 0,1$ получим:

$$\Delta y = (3\cdot 2^2+2)\cdot 0,1 + 3\cdot 2\cdot 0,1^2 + 0,1^3 = 1,461, dy = \left(3\cdot 2^2+2\right)\cdot 0,1 = 1,4.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 0,061$ (6,1%), а относительная погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}061}{1{,}461}$, то есть будет уже около $4,17\%$.

При $x = 2$ и $\Delta x = 0,01$ имеем:

$$\Delta y = (3\cdot 2^2+2)\cdot 0,01 + 3\cdot 2\cdot 0,01^2 + 0,01^3 = 0,140601,$$

$$dy = \left(3\cdot 2^2+2\right)\cdot 0,01 = 0,14.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 0,000601$ (0,0601 %), а относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0,000601}{0,140601},$$

то есть будет уже около $0,427\%$ ► .

Задание 2. Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислите приближенно изменение, претерпеваемое функцией $y = x^3 - 7x^2 + 80$ при изменении x от значения 5 к значению $5,01$.

◀В данном случае будем считать $x = 5$, а $\Delta x = 0,01$. Изменение функции Δy приближенно равно дифференциалу dy:

$$\Delta y \approx dy = y' \Delta x = \left(3x^2 - 14x\right) \Delta x = \left(3 \cdot 5^2 - 14 \cdot 5\right) \cdot 0,01 = 0,05. \blacktriangleright$$

Задание 3. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенное значение функции $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ при $x = 0,15$.

◀При $x = 0$ значение функции находится легко (равно 1). Остается подсчитать, насколько изменится значение y при переходе x от значения 0 к значению $0,15$. Произведем приближенный подсчет с помощью дифференциала.

$$y' = \frac{-4\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}}{5\left(4 - x^2\right)} = -\frac{4y}{5\left(4 - x^2\right)},$$

$$\Delta y \approx dy = y' \Delta x = \frac{-4y\Delta x}{5\left(4 - x^2\right)}.$$

Подставляя $x = 0$, $y = 1$ и $\Delta x = 0,15$, получим

$$\Delta y \approx -\frac{4 \cdot 0,15}{5 \cdot 4} = -0,03.$$

Следовательно, $y_{x=0,15} = y_{x=0} + \Delta y \approx 1 - 0,03 = 0,97$.

Если вычислить искомое значение с помощью калькулятора, то оно будет приблизительно равно $0,97039$. Как видим, сделанное нами вычисление верно с точностью до трех десятичных знаков.▶

Задание 4. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$. При измерении радиус r оказался равным $5,2$ см, причем максимальная возможная при этом погрешность измерения Δr находится в пределах $\pm 0,05$ см. Определите абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при вычислении площади круга по указанной формуле.

◀Абсолютная погрешность $|\Delta S| \approx |dS| = |2\pi r \cdot dr| = 2\pi \cdot 5,2 \cdot 0,05 = 0,52\pi \approx 1,63$.

Найдем относительную погрешность: $\left|\frac{\Delta S}{S}\right| \approx \left|\frac{dS}{S}\right| = \left|\frac{2\pi r dr}{\pi r^2}\right| = 2\left|\frac{dr}{r}\right|$.

Оказалось, что относительная погрешность равна удвоенной относительной погрешности при измерении радиуса. Численно получим:

$$\left|\frac{dS}{S}\right| = 2\left|\frac{dr}{r}\right| = 2 \cdot \frac{0,05}{5,2} = \frac{1}{52},$$

то есть относительная погрешность будет около 2 %.▶

Задание 5. Найдите дифференциалы функций

1) $y = \sin x - x\cos x$; 2) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

◀1) $y' = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x$, $dy = y'dx = x\sin x\, dx$;

2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$,

$dy = y'\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) dx$. ▶

Задание 6. Вычислить приближенно значение $y = \sin 29°$.

◀ $\Delta y \approx dy$, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, $y = \sin(30° - 1°)$. В нашем случае $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180} = 0,017$, $y = f(x) = \sin x$. $y' = \cos x$. $f'(30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

$$\sin 29° \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,017 \approx 0,5 + 0,014 = 0514.$$ ▶

Задание 7. Цилиндр, диаметр которого 10 см, высота 20 см, при шлифовке поверхности потерял в весе 2 г. На сколько уменьшился его диаметр, если плотность вещества цилиндра равна $2,5$ г/см^3?

◀**1-й способ**: $m = \pi r^2 H \cdot \rho = \pi \cdot 25 \cdot 20 \cdot 2,5 = 1250\pi$ г, $\Delta m = 2$ г,

$$m - \Delta m = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 20 \cdot 2,5 \text{ г}, \;\; 1250\pi - 2 = 12,5\pi d^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{1250\pi - 2}{12,5\pi}} \approx 9,997453196 \text{ см}.$$

Найдем величину уменьшения диаметра:

$$\Delta d = 10 - 9,997453196 \approx 0,0025468 \text{ см}.$$

2-й способ: $m = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 20 \cdot 2,5 = 12,5\pi d^2$ г, $\Delta m \approx dm = 25\pi d \Delta d$, $\Delta m = 2$ г.

$$\Delta d = \frac{2}{25\pi d} = \frac{2}{25 \cdot 3,1415926 \cdot 10} \approx 0,0025464 \text{ см}.$$

Абсолютная погрешность между первым и вторым способом составляет

$$0,0025468 - 0,0025464 = 0,0000004 = 4 \cdot 10^{-7}. \; \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите дифференциалы функций:

1.1 $y = 2x^2 - 8x + 5$;

1.2 $y = \sqrt[4]{(x+1)^3}$;

1.3 $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$;

1.4 $y = \sin x - x\cos x$;

1.5 $y = \cos(\ln x)$;

1.6 $y = \ln \operatorname{tg}(ax + b)$;

1.7 $y = \arcsin \frac{x}{2}$.

2. Найдите приращение и дифференциал функции $y = 2x^2 - 3x$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0,1$ и $\Delta x = 0,01$. Найдите для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

3. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенно значения функций:

3.1 $f(x) = (x-3)^2 (x-2)^3 (x-4)$ при $x = 4,001$,

3.2 $f(x) = \sqrt[7]{3x^3 + 2x - 4}$ при $x = 1,001$,

3.3 $f(x) = x\ln(x-2)$ при $x = 3,001$.

4. Вычислите приближенно значение $\sqrt[3]{27,0081}$, $\sin 29^\circ$, $\cos 151^\circ$, $\operatorname{tg} 44^\circ 41'$, $\arcsin 0,5011$, $\operatorname{arctg} 1,002$. Полученные результаты сравните с другими способами вычисления.

5. Ток I определяется по тангенс-гальванометру по формуле $I = C\operatorname{tg}\varphi$. Пусть $d\varphi$ – ошибка, допущенная при отсчете угла φ. Найти абсолютную и относительную погрешности при определении I. При каком угле φ относительная погрешность будет минимальной?

6. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус R шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до одного процента?

7. Период качания маятника вычисляется по формуле $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести ($g = 981$ см/сек^2). Какое влияние на погрешность при вычислении периода T окажет погрешность в один процент при измерении: а) длины маятника l; б) ускорения g?
8. По данному расстоянию d светящейся точки от оптического центра двояковыпуклого стекла может быть вычислено расстояние ее изображения согласно формуле $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, где F – постоянная для данного стекла и данного сорта лучей. Как влияет погрешность в измерении d на погрешность в вычислении $f(x)$?
9. Ответьте на вопросы теста.

Геометрические и физические приложения производной

Задание 1. Через фокус параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$, проведена хорда, перпендикулярная оси координат. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Докажите, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

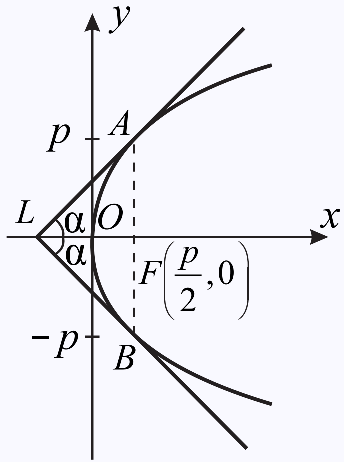


Рисунок 3.2

◄Найдем координаты точки A (рисунок 3.2). Абсцисса фокуса параболы $x = \frac{p}{2}$. Тогда

$$f\left(\frac{p}{2}\right) = \sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p = y,$$

то есть $A\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Используя геометрический смысл производной функции в точке, найдем угол α.

$$y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}; y'\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{\sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}}} = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 1,\ \ \alpha = \frac{\pi}{4},\ \ 2\alpha = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 2. Составьте уравнение касательной, проходящей через точку $M(2,-5)$ к кривой

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

◀Проверим, принадлежит ли точка M данной кривой. $(x^2 - 4x + 3)\Big|_{x=2} = -1$. Точка M данной кривой не принадлежит. Уравнение касательной, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0)$ графика функции f имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.22}$$

Касательная (3.22) проходит через точку $M(2,-5)$, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению (3.22), то есть

$$-5 = f(x_0) + f'(x_0)(2 - x_0). \tag{3.23}$$

У нас

$$f(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3;\ \ f'(x) = 2x - 4;\ \ f'(x_0) = 2x_0 - 4.$$

Тогда (3.23) примет вид

$$-5 = x_0^2 - 4x_0 + 3 + (2x_0 - 4)(2 - x_0). \tag{3.24}$$

Решаем квадратное уравнение: (3.24) $x_0^2 - 4x_0 = 0$, $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$. Если $x_0 = 0$, то $f(x_0) = f(0) = 3$, $f'(0) = -4$. Получим уравнение касательной:

$$y = 3 - 4x.$$

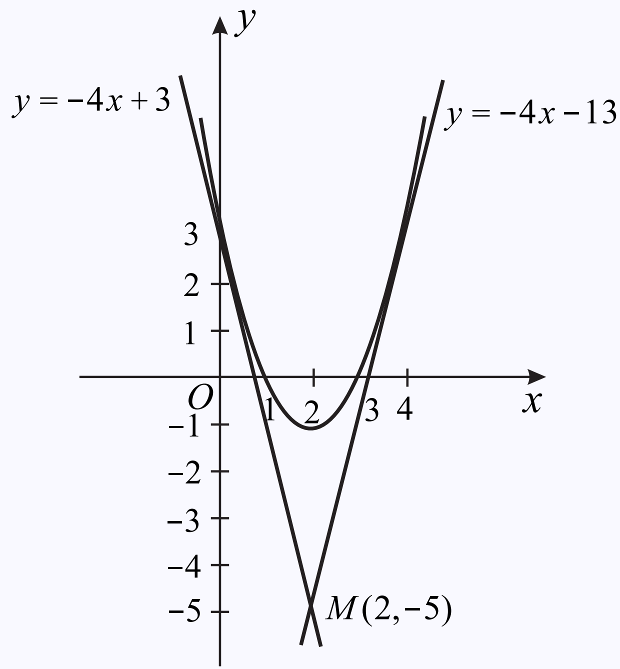


Рисунок 3.3 – Касательные к кривой $y = x^2 - 4x + 3$

Если $x_0 = 4$, то $f\,(4) = 3$, $f'\,(4) = 4$. Уравнение второй касательной будет иметь вид:

$$y = 3 + 4\,(x - 4) = 4x - 13. \blacktriangleright$$

Задание 3. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан за 8 с. Найти угловую скорость через 64 с после начала движения.

◀В любой момент времени t вращения колеса угол поворота φ

$$\varphi = kt^2. \tag{3.25}$$

Из начальных условий $t_0 = 8$ с и $\varphi_0 = 2\pi$ находим коэффициент пропорциональности $2\pi = k \cdot 8^2$, $k = \frac{2\pi}{8^2} = \frac{\pi}{32}$. Тогда закон вращения будет определяться формулой

$$\varphi = \frac{\pi}{32}t^2. \tag{3.26}$$

Закон изменения угловой скорости будет

$$\omega = \varphi' = \frac{\pi}{32} \cdot 2t, \text{ то есть } \omega = \frac{\pi}{16}t. \tag{3.27}$$

Если $t = 64$ с, то $\omega\,(64) = \frac{\pi}{16} \cdot 64 = 4\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right) = 2 \left(\frac{\text{об}}{\text{с}}\right)$ ▶.

Задание 4. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью $5\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Какова скорость изменения объема шара в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

◀Считаем, не теряя общности, что в начальный момент времени радиус шара $R = 0$. Берем любой текущий момент времени t, когда радиус шара возрастает. В это время он станет равным $R = 5t$ см. Тогда объем шара будет $V\,(t) = \frac{4}{3}\pi\,(5t)^3$. Находим производную функции $V'\,(t) = 4\pi\,(5t)^2 \cdot 5 = 20\pi\,(5t)^2 = 500\pi t^2$ – это закон скорости изменения объема шара.

Дальше используем начальные условия $5t = 50$, $t = 10$. Тогда искомая скорость

$$V'\,(10) = 20\pi\,(5 \cdot 10)^2 = 5\pi \cdot 10^4 \left(\frac{\text{см}^3}{\text{с}}\right) = 0,05\pi \left(\frac{\text{м}^3}{\text{с}}\right). \text{ ▶}$$

Задание 5. Напишите уравнения касательных к заданной кривой $y = x\sqrt[3]{1-x}$ в точках с абсциссами: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 9$.

◀Имеем $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y(9) = -18$, $y' = (1-x)^{\frac{1}{3}} - x \cdot \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(3-4x)$, $y'(0) = 1$, $y'(9) = -\frac{11}{4}$.

Следовательно, уравнения касательных в случаях а) и в) будут иметь вид, соответственно, $y = x$ и $y + 18 = -\frac{11}{4}(x-9)$; в случае б) формула для y' теряет смысл. В данном случае можно непосредственно вычислить, что $\lim\limits_{x\to 1} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{-\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\infty$.

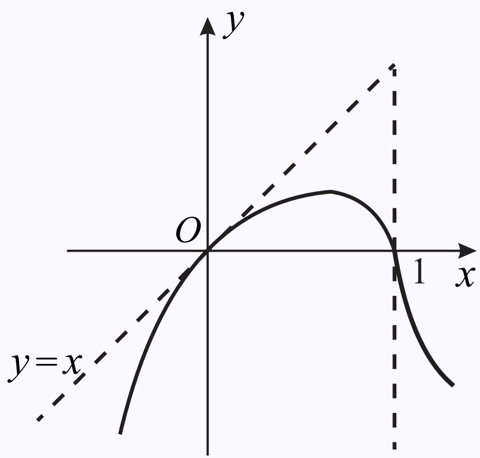


Рисунок 3.4

Заметим, что проще использовать утверждение: если f непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ (соответственно $+\infty$ или $-\infty$). Таким образом, в точке $(1, 0)$ непрерывная кривая $y = x\sqrt[3]{1-x}$ имеет вертикальную касательную $x = 1$ (рисунок 3.4).▶

Задание 6. Кривая задана уравнением: $y = x^2+5x+3$. Определить угол между касательными к кривой в точках с абсциссами $x = -2$ и $x = 0$.

◄Угловой коэффициент касательной равен производной y', вычисленной при значении x, равном абсциссе точки касания. Поэтому начинаем решение задачи с вычисления производной: $y' = 2x + 5$.

Обозначим через α угол наклона касательной в точке с абсциссой $x = -2$, а через β – в точке с абсциссой $x = 0$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = y'|_{x=-2} = 2\cdot(-2)+5 = 1, \operatorname{tg}\beta = y'|_{x=0} = 2\cdot 0+5 = 5.$$

Угол φ между касательными равен $\beta - \alpha$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{5-1}{1+5\cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Находим, что $\varphi = 0,588$ рад.►

Задание 7. На кривой $y = 4x^2 - 6x + 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x$.

◄Пусть искомая точка касания есть (x_0, y_0). Тогда угловой коэффициент k касательной равен значению производной в точке касания, то есть

$$k = y'|_{x=x_0} = (8x-6)|_{x=x_0} = 8x_0 - 6 = 2(4x_0-3).$$

Для того чтобы касательная была параллельна прямой $y = 2x$, их угловые коэффициенты должны совпадать, то есть $k = 2$ или $2(4x_0 - 3) = 2$. Решая последнее уравнение относительно x_0, получим:

$$4x_0 - 3 = 1,\ 4x_0 = 4,\ x_0 = 1.$$

Подставляя найденное значение абсциссы искомой точки в уравнение кривой, найдем значение ее ординаты y_0: $y_0 = 4\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 3 = 1$. Итак, искомой будет точка $(1, 1)$. ►

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть

Задание 8. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ в точке с абсциссой 2.

◀По заданному значению $x_0 = 2$ находим $y_0 = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$. Значит, касательная проходит через точку $\left(2, \frac{1}{5}\right)$. Пишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку $\left(2, \frac{1}{5}\right)$: $y - \frac{1}{5} = k\,(x-2)$.

Находим угловой коэффициент касательной:

$$k = y'|_{x=2} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\Big|_{x=2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=2} = -\frac{4}{25}.$$

Поскольку нормаль и касательная к кривой, проведенные в одной точке кривой, взаимно перпендикулярны, то для нормали угловой коэффициент $k = \frac{25}{4}$. Подставляя полученные значения k в уравнение пучка прямых, найдем искомые уравнения касательной и нормали: уравнение касательной: $y = \frac{-4x+13}{25}$, или $4x + 25y - 13 = 0$, уравнение нормали: $y = \frac{125x-246}{20}$, или $125x - 20y - 246 = 0$. ▶

Задание 9. Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 м. Нижний конец лестницы начинает отодвигаться от стены с постоянной скоростью 2 м/сек. С какой скоростью опускается в момент времени t верхний конец лестницы? Чему равно его ускорение в этот момент времени?

◀За t сек нижний конец лестницы пройдет расстояние в $2t$ м. По теореме Пифагора верхний конец находится в этот момент на высоте $h = \sqrt{25-4t^2}$. Чтобы найти скорость движения, вычислим производную функции $s = 5 - h$. Имеем:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\,(5-h)}{dt} = -\frac{dh}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}.$$

Так как ускорение является производной от скорости по времени, то

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{100}{(25-4t^2)\sqrt{25-4t^2}}.$$ ▶

Задание 10. Найдите формулу для суммы

$$s_n = 1^2 + 2^2 x + \ldots + n^2 x^{n-1}.$$

◀По формуле для суммы членов геометрической прогрессии имеем:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Почленно дифференцируя это равенство, получим:

$$1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Умножив обе части равенства на x и снова продифференцировав обе его части, получим:

$$1^2 + 2^2 x + \ldots + n^2 x^{n-1} = \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)\,x^{n+1} + (n+1)^2\,x^n - x - 1}{(x-1)^3}.$$ ▶

Задание 11. Тяжелая балка длиной l м опускается на землю так, что ее нижний конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот, который разматывается со скоростью v м/сек. При этом балка опускается и вагонетка откатывается. Определите ускорение, с которым откатывается вагонетка в тот момент, когда расстояние от нее до стены равно b м.

◀За t сек верхний конец балки пройдет путь vt. Тогда нижний конец балки, а таким образом и вагонетка переместятся на S м. Имеем в произвольный момент t (рисунок 3.5) $OA = S$, $KO = l - vt$, $KA = l$. Из теоремы Пифагора[1] (ΔAOK – прямоугольный) имеем

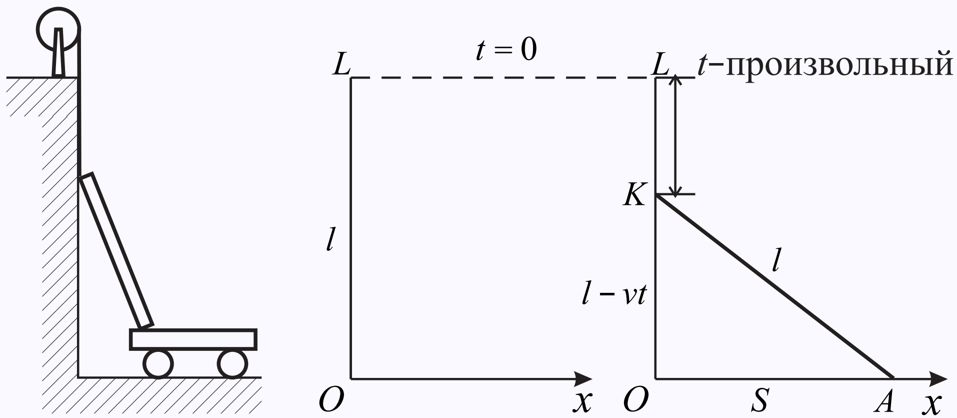


Рисунок 3.5

$$S(t) = \sqrt{l^2 - (l^2 - vt)^2} = \sqrt{2lvt - v^2t^2}.$$

[1] Пифагор Самосский (570–490 гг. до н.э.) – древнегреческий философ, математик.

С учетом механического смысла второй производной найдем ускорение, с которым движется вагонетка, в любой момент времени t. Для этого вычислим первую и вторую производные функции S:

$$S'(t) = \frac{lv - v^2 t}{\sqrt{2lvt - v^2t^2}};$$

$$S''(t) = \frac{-v^2\sqrt{2lvt - v^2t^2} - (lv - v^2t)\,\frac{lv - v^2t}{\sqrt{2lvt - v^2t^2}}}{2lvt - v^2t^2} = -\frac{l^2v^2}{(2lvt - v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Получили $a(t) = -\frac{l^2v^2}{(2lvt - v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Пусть в момент времени t_0 вагонетка находится на расстоянии b м от стены. Это значит, что

$$b = \sqrt{2lvt_0 - v^2t_0}.$$

Тогда ускорение вагонетки в момент времени t_0 равно

$$a(t_0) = -\frac{l^2v^2}{b^3}. \qquad (3.28)$$

Проверка размерности выражения (3.28) $\frac{м}{с^2} = \frac{м^2 \cdot \frac{м^2}{с^2}}{м^3} = \frac{м}{с^2}$.

Знак «$-$» перед выражением (3.28) показывает, что скорость уменьшается.

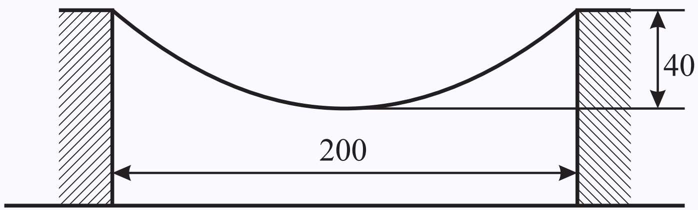
Таким образом, в момент, когда расстояние от вагонетки до стены равно b м, она имеет ускорение равное $-\frac{l^2v^2}{b^3}$ м/с^2. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Под каким углом пересекается парабола $y = x^2$ с прямой $3x - y - 2 = 0$?
2. Под какими углами пересекаются параболы: $y = x^2$ и $y^2 = x$?
3. Под какими углами пересекается гипербола $y = \frac{1}{x}$ с параболой $y = \sqrt{x}$.
4. Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой 2.
5. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?
6. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$: 1) параллельна прямой $y = 4x - 5$; 2) перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$; 3) образует с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол в $45°$?
7. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?
8. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Доказать, что эти касательные пересекаются под прямым углом.
9. Написать уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$.
10. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.
11. Показать, что для гиперболы $xy = a$ площадь треугольника, образованного любой касательной и координатными осями, равна площади квадрата, построенного на действительной полуоси.
12. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^4 - 3$, проходящих через точку $(1, -2)$.
13. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 2x - 1$ в точке ее пересечения с параболой $y = 2x^2$.
14. Составить уравнение касательной к кривой $y = \ln x$. В какой точке эта касательная: а) параллельна прямой $y = x - 1$; б) перпендикулярна прямой $2x + 3y = 1$?
15. Составить уравнение нормали к $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

16. Точка движется по прямой $y = 3x - 4$ так, что ее абсцисса возрастает с постоянной скоростью $v = 7$. С какой скоростью изменяется ордината?

17. Канат висящего моста имеет вид параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точек подвеса. Найти угол между канатом и опорными колоннами.



Указание. Сначала, исходя из условия задачи, составьте уравнение параболы, то есть определите величину k в уравнении $y = kx^2$.

18. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 сек. Определите угловую скорость через 32 сек после начала движения.

19. Два самолета вылетают (не одновременно) из пункта A и летят: один со скоростью 850 км/ч в южном направлении, другой – со скоростью 900 км/ч в западном направлении. С какой скоростью возрастает расстояние между самолетами во время полета? Какова эта скорость в момент, когда расстояние первого самолета от пункта A равно 75 км, а второго – 180 км?

20. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол

$$\varphi = a + bt - ct^2,$$

где a, b и c – положительные постоянные. Определите угловую скорость и ускорение вращения.

21. Точка движется по параболе $y = 7 - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется с течением времени t по закону $x = t^3$. С какой скоростью изменяется ордината?

22. Имеется тонкий неоднородный стержень AB длиной 20 см. Известно, что для любой точки C стержня, отстоящей от A на расстоянии 1 см, масса куска стержня AC определяется по формуле: $M = 3l^2 + 5l$. Найдите линейную плотность стержня: а) в точке, отстоящей от точки A на $l = 5$ см; б) в самой точке A; в) в конце стержня.
23. Закон движения тела дан формулой: $S = a + bt + ct^2$. Покажите, что действующая сила постоянна.

    Указание. Иметь в виду, что ускорение пропорционально действующей силе.
24. Распад радия совершается по закону $R = R_0 e^{-kt}$, где R_0 – количество радия в начальный момент времени $t = 0$, а R – количество не распавшегося радия в момент времени t. Определите закон зависимости скорости распада радия от времени. Покажите, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия.
25. Постоянный ток определяется как количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в единицу времени. Дайте в соответствии с этим определение переменного тока. Определите ток в конце пятой секунды, если известно, что количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой: $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов).
26. Выведите формулы для следующих сумм:

    26.1 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + \ldots + n\,(n+1)\,x^{n-1}$;

    26.2 $1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)\,x^{2x-2}$;

    26.3 $1 - 5x^4 + 9x^8 + \ldots + (-1)^{n-1}\,(4n-3)\,x^{4n-4}$;

    26.4 $1^2 + 3^2x^2 + 5^2x^4 + \ldots + (2n-1)^2\,x^{2x-2}$.

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 4
Производная функции, заданной параметрически

4.1 Параметрически заданные функции и их дифференцирование

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и одна из них, например $x = \varphi(t)$, непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности; тогда существует обратная φ функция $t = t(x)$ и в некоторой окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$ имеет смысл композиция $y = \psi(t(x))$. Эта функция y переменной x и называется **параметрически заданной функцией** системой уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Теорема 4.1. *Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в некоторой окрестности U_{t_0}, причем для любого $t \in U_{t_0}$ $\varphi'(t) \neq 0$, а функция φ – возрастает (убывает) в этой окрестности, то функция $y = f(x)$, заданная параметрически системой уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$, где $t \in U_{t_0}$, и ее производная*

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4.1}$$

◀Выполняются все условия теоремы 2.2 о существовании производной для обратной функции φ^{-1} в точке $x = \varphi(t)$, значит:

$$\exists\ \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Далее, используя теорему о производной сложной функции, получим $\left(f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)$:

$$\exists\ f'(x) = \left(\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)' = \psi'(t) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \ ▶$$

Замечание 4.1. Формулу (4.1) удобно записывать в виде

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}, \tag{4.2}$$

используя обозначения:

$$f'(x) = y'_x,\ \varphi'(t) = \varphi'_t,\ \psi'(t) = \psi'_t.$$

Формула (4.2) дает возможность находить производную y'_x функции $y = f(x)$, заданной параметрически, не находя выражение непосредственной зависимости y от x.

Производная y'_x функции, заданной параметрически, в свою очередь является функцией, заданной параметрически с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = g(t), \end{cases} \quad t \in U_{t_0}\ .$$

И если дополнительно к условиям теоремы 4.1 потребовать дифференцируемость функции g на окрестности U_{t_0}, то заданная параметрически функция $y = f(x)$ будет дважды дифференцируемой в точке $x = \varphi(t)$, где $t \in U_{t_0}$, и

$$f''(x) = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Последнюю формулу удобно записывать в виде

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t} \quad \text{или} \quad y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t}, \tag{4.3}$$

где $y''_{xx} = y''_{x^2} = f''(x)$, $(y'_x)'_t = g'(t)$.

Аналогично можно получить формулы производных высших порядков функции, заданной параметрически.

Пример 4.1. Пусть
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)\,. \tag{4.4}$$

◀Очевидно, что на промежутках $(0,\pi)$ и $(\pi,2\pi)$ выполняются все условия теоремы 4.1 (функция $x=\varphi(t) = a\cos t$ убывает на промежутке $(0,\pi)$ и возрастает на промежутке $(\pi,2\pi)$, также существуют $\varphi'(t) = -a\sin t \neq 0$ и $\psi'(t) = b\cos t$ в любой точке рассматриваемых множеств).

Пусть $X_1 = \varphi((0,\pi))$, $X_2 = \varphi((\pi,2\pi))$ – образы указанных промежутков при отображении φ. Значит, на множествах X_1 и X_2 определена функция $y = f(x)$, заданная параметрически, и для любого $x \in X_1 \cup X_2$

$$\exists\, y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}. \ ▶$$

4.2 Примеры кривых, заданных параметрически

Параметрические уравнения прямой

Пусть прямая проходит через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1). Тогда ее уравнение принимает вид

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = t, \ \text{ или } \begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0)\,, \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0)\,, \end{cases} \tag{4.5}$$

где функции (4.5) определены на $I = \mathbb{R}$. Если $I = [0,1]$, то системой (4.5) задается отрезок с концами в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Параметрические уравнения эллипса

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.6}$$

Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)\,. \tag{4.7}$$

Возьмем любую точку (x, y), которая принадлежит эллипсу (4.6). Тогда точка $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ принадлежит единичной окружности, а поэтому существует такое $t \in [0, 2\pi)$, что

$$\frac{x}{a} = \cos t,\ \ \frac{y}{b} = \sin t,\ \ y = b\sin t,\ \ x = a\cos t.$$

Таким образом, для координат точки эллипса получим представление (4.7). И наоборот, для любого $t \in [0, 2\pi)$ с помощью (4.7) получаем точки, координаты которых удовлетворяют уравнению эллипса (4.6):

$$\frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} = 1, \quad 1 = 1.$$

Замечание 4.2. Определим геометрический смысл параметра t. Возьмем любую точку $M\,(x, y)$ эллипса (4.6) и ей соответствующую точку $M'\left(x, \frac{a}{b}y\right) = M'\,(\alpha, \beta)$. Покажем, что M' принадлежит окружности $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$. Имеем $x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, так как M – точка эллипса (4.6).

Значением параметра t, соответствующим точке $M\,(x, y)$ эллипса (4.6) служит угол между действительной осью OX и радиус-вектором $\overrightarrow{OM'}$, $M'\left(x, \frac{a}{b}y\right)$ принадлежит окружности с центром в начале координат и радиуса a, отсчитываемый против часовой стрелки (рисунок 4.1).

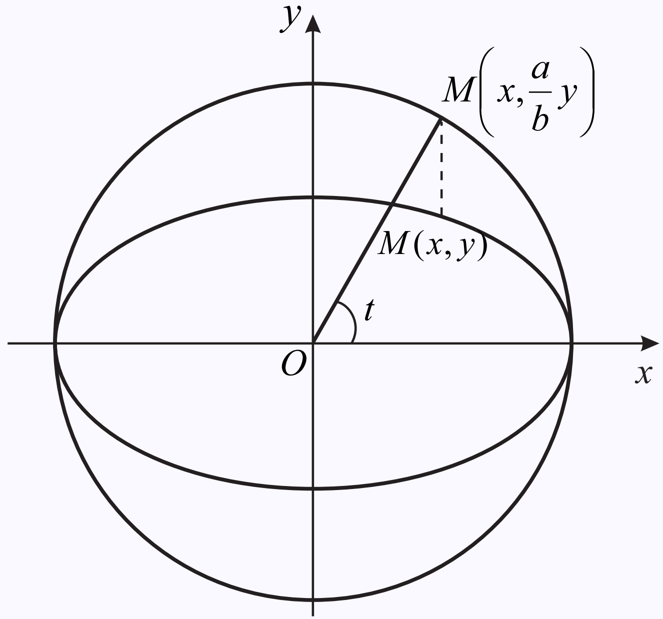


Рисунок 4.1 – Эллипс и окружность

Параметрические уравнения ветвей гиперболы

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

С использованием гиперболических функций можно показать, что параметрические уравнения правой ветви гиперболы имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad (x \geqslant a,\ t \in \mathbb{R});$$

а параметрические уравнения левой ветви гиперболы имеют вид

$$\begin{cases} x = -a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad (x \leqslant a,\ t \in \mathbb{R}).$$

Параметрические уравнения циклоиды

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t)\,, \\ y = a\,(1 - \cos t)\,, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(можно считать, что $-\infty < t < +\infty$).

Циклоида – это кривая, которая описывается фиксированной точкой окружности круга, который катится без трения и скольжения по прямой, например оси абсцисс (рисунок 4.2).

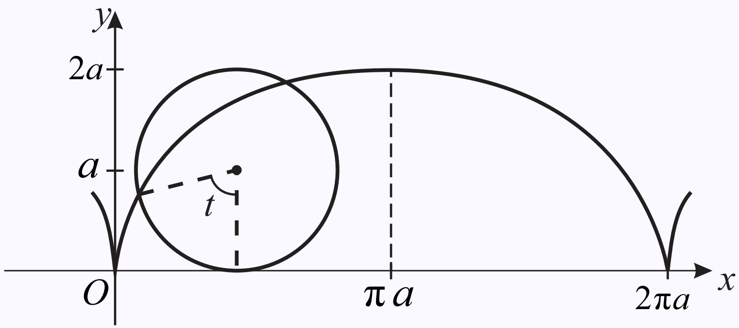


Рисунок 4.2 – Циклоида

Параметрические уравнения астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi),$$

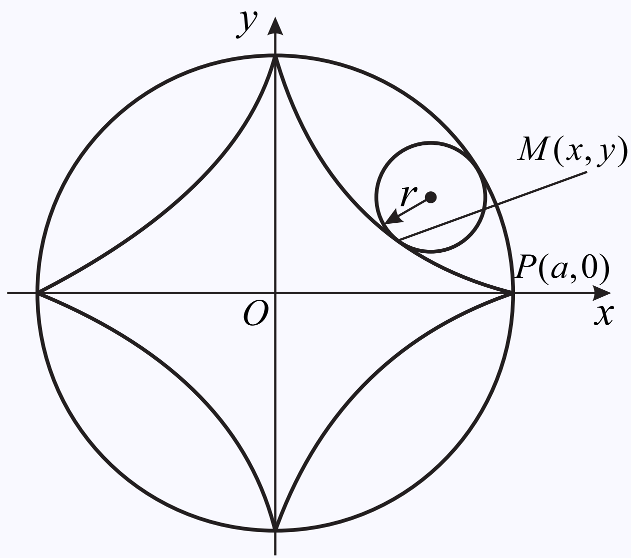


Рисунок 4.3 – Астроида

Астроида – замкнутая кривая, которая описывается точкой (x, y) окружности радиуса $r = a/4$, которая катится по внутренней стороне окружности $x^2 + y^2 = a^2$ (рисунок 4.3).

Параметрические уравнения декартового листа

$$\begin{cases} x = -\frac{3at}{1+t^3}; \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}; \ t = \frac{y}{x}.$$

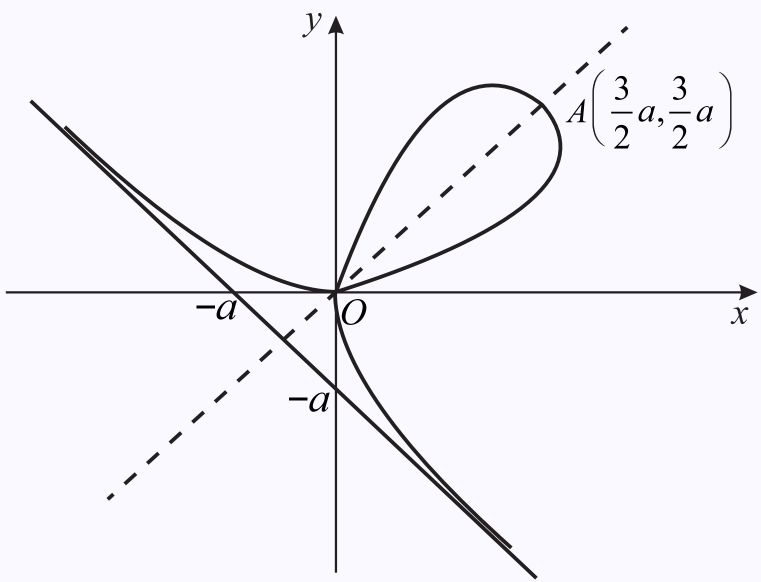


Рисунок 4.4 – Декартов лист

При $t \to \pm\infty$ обе координаты стремятся к 0 (начальная точка $(0,0)$ получается как при $t = 0$, так и при $t = \pm\infty$). При изменении t от $-\infty$ до (-1) точка (x, y) кривой, выходя из начала координат, удаляется по правой ветке в бесконечность. При возрастании t от 0 до $+\infty$ точка (x, y) описывает (против часовой стрелки) петлю. При изменении t от (-1) до 0 точка (x, y) из бесконечности по левой ветке возвращается в начало координат.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение функции, заданной параметрически.
2. Сформулируйте теорему о дифференцировании функции, заданной параметрически.
3. Приведите примеры параметрически заданных кривых (прямая, эллипс, гипербола, циклоида, астроида, декартов лист).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Производные и дифференциалы высших порядков. Производная функции, заданной параметрически

Задание 1. Используя формулу Лейбница, найдите n-ю, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, производную функции

$$f(x) = \left(x^2 - 5\right)\cos 2x, \ x \in \mathbb{R}.$$

◀Используем формулу Лейбница (3.17). Пусть

$$g(x) = x^2 - 5, \ f(x) = \cos 2x.$$

$$\left(\left(x^2-5\right)\cos 2x\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x^2-5\right)^{(k)} (\cos 2x)^{(n-k)} =$$

$$= C_n^0\left(x^2-5\right)(\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 \cdot 2x (\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2 \cdot 2 (\cos 2x)^{(n-2)} =$$

$$= \frac{n!}{0!\,(n-0)!}\left(x^2-5\right)\cdot 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}\cdot 2x \cdot 2^{n-1}\cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2\cdot n!}{2!\,(n-2)!}\cdot 2^{n-2}\cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) = 2^n\left(x^2-5\right)\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 2^n n x \cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + 2^{n-2} n(n-1)\cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right). ▶$$

Задание 2. Пусть
$$y = (4x+1)^7 \left(x^2+6x-3\right)^{10} (x+5)^{12}, \; x \in \mathbb{R}.$$
Найдите выражения для $y^{(39)}$ и для $y^{(40)}$.

◀Если раскрыть скобки в выражении выше, то получим многочлен со старшим членом $4^7 x^{39}$. Известно, что при $n > k$ (k и n – натуральные числа) $\left(x^k\right)^{(n)} = 0$, а $(x^n)^{(n)} = n!$ Поэтому 39-е производные всех слагаемых, кроме старшего, равны нулю, а 39-я производная старшего члена равна $4^7 \cdot 39!$ Итак,
$$y^{(39)} = 4^7 \cdot 39!.$$
Ясно, что $y^{(40)} = 0$. ▶

Задание 3. Найдите выражение для производной n-го порядка функции $y = e^{kx}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, $y''' = k^3 e^{kx}$. Естественно предположить, что $y^{(n)} = k^n e^{kx}$. Докажем это равенство методом математической индукции. При $n = 1$ оно верно. Предположим, что уже доказано равенство
$$y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$
Дифференцируя обе части этого равенства, получаем, что $y^{(n+1)} = k^{n+1} e^{kx}$. Это показывает, что из справедливости формулы для n вытекает ее справедливость для $n+1$. Значит, равенство верно при всех значениях $n \in \mathbb{N}$. ▶

Задание 4. Найдите выражение для n-й производной функции $y = \sin 4x \cdot \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Преобразуем заданную функцию по формуле
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$
Тогда $y = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)$. Так как $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$, то
$$y^{(n)} = \frac{6^n}{2} \sin\left(6x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right). ▶$$

Задание 5. Найдите выражение для n-й производной функции

$$y = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}, \ \ x \in (-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty).$$

◀Представим эту функцию в виде

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{2x+3}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Чтобы найти коэффициенты A и B, приведем обе части полученного равенства к одному знаменателю и в силу равенства двух дробей приравняем их числители:

$$2x+3 = A\,(x-3) + B\,(x-2) = (A+B)\,x + (-3A-3B)\,.$$

Чтобы это равенство было верно при всех значениях x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3. \end{cases}$ Откуда находим $A=-7$, $B=9$, а потому

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{x-2} + \frac{9}{x-3}.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\,n!}{(x+a)^{n+1}},$$

то

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = \frac{7\,(-1)^{n+1}\,n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{9\,(-1)^n\,n!}{(x-3)^{n+1}}. \ ▶$$

Задание 6. Пользуясь формулой Лейбница (3.17), найдите пятую производную функции $y = x^5 e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Полагая $f = x^5$ и $g = e^{\frac{x}{2}}$, найдем:

$$f' = 5x^4,\ f'' = 20x^3,\ f''' = 60x^2,\ f^{(4)} = 120x,\ f^{(5)} = 120,$$

$$g' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\ g'' = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}},\ g''' = \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}},\ g^{(4)} = \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}},\ g^{(5)} = \frac{1}{32}e^{\frac{x}{2}}.$$

Подставляя в формулу Лейбница при $n = 5$, получим:

$$y^{(5)} = 120e^{\frac{x}{2}} + 5 \cdot 120x \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}60x^2 \cdot \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}20x^3 \cdot \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}} + 5 \cdot 5x^4 \cdot \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}} +$$

$$+ x^5\frac{1}{32}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(120 + 300x + 150x^2 + 25x^3 + \frac{25}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^5\right).\ ▶$$

Задание 7. Найдите дифференциалы dy и d^2y функции $y = x^4 - 3x^2 + 2$ в случае, когда: 1) x – независимая переменная; 2) x – функция от другой независимой переменной.

◀Дифференциал первого порядка dy в силу свойства инвариантности его формы представляется в обоих случаях одинаково:

$$dy = y'\,dx = \left(4x^3 - 6x\right)\,dx = 2\left(2x^3 - 3x\right)\,dx.$$

В первом случае под dx понимается приращение независимой переменной Δx ($dx = \Delta x$), во втором случае – дифференциал от x как от функции ($dx \neq \Delta x$).

Что же касается дифференциалов высшего порядка, то для них, как известно, свойство инвариантности формы нарушается. Следовательно, при отыскании d^2y приходится решать задачу для каждого случая отдельно.

1. Пусть x – независимая переменная. В этом случае $dx = \Delta x$ не зависит от x и его можно выносить за знак дифференциала, получим:

$$d^2y = d\,(dy) = d\left[2\left(2x^3 - 3x\right)\,dx\right] = 2\,dx \cdot d\left(2x^3 - 3x\right) = 2\,dx \cdot \left(6x^2 - 3\right)\,dx = 6\left(2x^2 - 1\right)\,dx^2.$$

2. Пусть x является в свою очередь функцией от некоторой другой переменной. В этом случае dx уже зависит от этой переменной, и выносить его за знак дифференциала, как мы это делали в первом случае, нельзя. Нужно вычислить дифференциал как от произведения двух функций.

$$d^2y = d\,(dy) = d\left[2\left(2x^3 - 3x\right)\,dx\right] = 2d\left[\left(2x^3 - 3x\right)\,dx\right] =$$

$$= 2\left[d\left(2x^3 - 3x\right)\,dx + \left(2x^3 - 3x\right)d\,(dx)\right] =$$

$$= 2\left[3\left(2x^3 - 1\right)\,dx \cdot dx + \left(2x^3 - 3x\right)d^2x\right] = 6\left(2x^3 - 1\right)\,dx^2 + 2\left(2x^3 - 3x\right)d^2x. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найдем y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} функции $y = y\,(x)$, заданной параметрически:

$$x = a\,(t - \sin t)\,,\ \ y = a\,(1 - \cos t)\,.$$

$\blacktriangleleft$Так как $x'_t = a\,(1 - \cos t)$ положительна для $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а $y'_t = a\sin t$, то в соответствующих точках

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$y''_{x^2} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}};\quad y'''_{x^3} = \frac{\left(y''_{x^2}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin^5\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Докажите, что функция $y = e^x \cos x$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)} + 4y = 0$.
2. Найдите y'' для $y = x\sqrt{1+x^2}$, y''' для $y = e^{-x^2}$, y''' для $y = \sqrt[5]{x^3}$, $y^{(4)}$ для $y = x \sin^2 x$.
3. Докажите, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ удовлетворяет уравнению $y^3 y'' + 1 = 0$.
4. Найдите $y^{(n)}$ для следующих функций:

4.1 $y = \ln \frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$;

4.2 $y = \frac{1}{x^2(x-1)}$;

4.3 $y = \frac{x+1}{x(x-1)}$;

4.4 $y = (3x^2 + 2x + 1)\ln(x+1)$;

4.5 $y = (5x^2 - 1)\sin x$.

5. Пусть $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^3 \cdot (x-4)^6$. Найдите $f^{(12)}(x)$.
6. Пусть $f(x) = (4x^3 + 3x - 1)^{11} \cdot (x^4 + 4)^{12} \cdot (x^7 - 5)^6$. Найдите $f^{(123)}(x)$, $f^{(124)}(x)$.
7. Найдите $y^{(20)}$ для $y = x^2 e^{2x}$, $y^{(5)}$ для $y = x \ln x$, $y^{(4)}$ для $y = e^x \cos x$, $y^{(8)}$ для $y = \frac{x^2}{1-x}$, $y^{(6)}$ для $y = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$, $y^{(100)}$ для $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $y^{(50)}$ для $y = x^2 \sin 2x$.

   Указание. После первого дифференцирования результат представьте в виде суммы дробных степеней линейной функции, для которых можно получить общую форму n-й производной.
8. Найдите значения производных порядка n при $x = 0$ от следующих функций:

8.1 $y = x^k e^{ax}$;

8.2 $y = \arcsin x$;

8.3 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

8.4 $y = \arcsin^2 x$;

8.5 $y = \sin(m \arcsin x)$;

8.6 $y = e^{m \arcsin x}$;

8.7 $y = (1+x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \operatorname{arctg} x)$;

8.8 $y = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

9. Даны функции: а) $y = \sqrt[3]{x^2}$, б) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$. Найдите $d^2 y$, считая, что x – независимая переменная.

10. Дана функция: $y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Найдите d^2y при условии, что

10.1 x – независимая переменная;

10.2 x – функция от другой переменной.

11. Покажите, что если тело движется по закону $s = ae^t + be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

12. Точка движется так, что скорость ее пропорциональна квадратному корню из пройденного пути (как это, например, имеет место при свободном падении). Покажите, что движение происходит под действием постоянной силы.

Указание. Ускорение пропорционально действующей силе.

13. Тяжелая материальная точка $M(x; y)$ брошена в вертикальной плоскости Oxy под углом α к плоскости горизонта с начальной скоростью v_0. Составьте (пренебрегая сопротивлением воздуха) уравнения движения и определите величину скорости v и ускорения ω, а также траекторию движения. Чему равны наибольшая высота подъема точки и дальность полета?

14. Докажите, что ускорение гармонического колебания $x = A\sin(\omega t + \alpha)$ пропорционально отклонению x от положения равновесия.

15. Найдите производные первого и второго порядка функций $y = y(x)$, заданных параметрически:

15.1 $x(t) = a\left(\cos t - \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right),\ y(t) = a\sin t;$

15.2 $x(t) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right),\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$

15.3 $x(t) = t^3 + 3t,\ y(t) = t\operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{1+t^2};$

15.4 $x(t) = e^t(\cos t + \sin t),\ y(t) = e^t(\cos t - \sin t);$

15.5 $x(t) = a(1+\cos t)\cos t,\ y(t) = a(1-\cos t)\sin t;$

15.6 $x(t) = a\cos t + (at+b)\sin t,\ y(t) = a\sin t - (at+b)\cos t;$

15.7 $x(t) = a\cos^5 t,\ y(t) = a\sin^5 t.$

ЛЕКЦИЯ 5
Основные теоремы дифференциального исчисления

5.1 Точки экстремума. Теорема Ферма[1]

Определение 5.1. *Пусть* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$. *Точка* x_0 *называется* ***точкой максимума*** (***минимума***) *функции* f, *а* $f(x_0)$ – ***максимумом*** (***минимумом***), *если существует такая окрестность* $U_{x_0} \subset X$, *что для любых* $x \in U_{x_0}$ $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$, *причем если для любых* $x \in \mathring{U}_{x_0}$ $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, *то* x_0 *называют* ***точкой строгого максимума*** (***строгого минимума***).

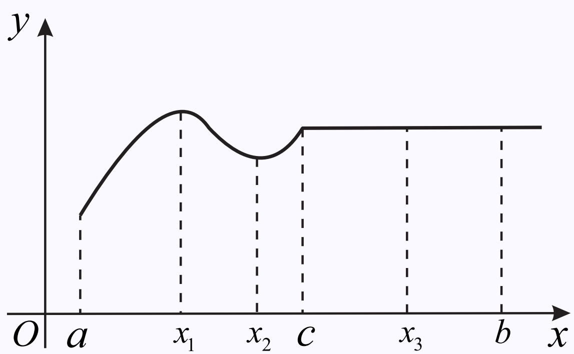


Рисунок 5.1 – Максимумы и минимумы функции

Замечание 5.1. Из рисунка 5.1 видно, что x_1 – точка строгого максимума функции, любая же точка промежутка $[c, b)$ – точка максимума (нестрогого), точка x_2 – строгого минимума функции, а точки интервала (c, b) – точки минимума (нестрогого).

[1]Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик.)

Подчеркнем, что неравенства в определениях экстремумов выполняются лишь в некоторой достаточно малой окрестности экстремума. Максимумы (минимумы) не обязательно являются наибольшими (наименьшими) значениями функции на рассматриваемом промежутке (рисунок 5.1).

Определение 5.2. *Точки максимума и минимума функции называются* ***точками экстремума****, а значения в них –* ***экстремумами****.*

Теорема 5.1 (Ферма). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке экстремума x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

◀Пусть x_0 – точка максимума функции. Тогда для любого $\Delta x \neq 0$ и такого, что $x_0 + \Delta x \in U_{x_0}$ будет

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0, \text{ если } \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0, \text{ если } \Delta x > 0.$$

А тогда, по теореме о предельном переходе в неравенствах и определению производной, получим, что $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. ▶

Следствие 5.1. *Если выполняются условия теоремы, то в точке x_0 функция f имеет касательную, параллельную оси Ox (геометрический смысл теоремы).*

5.2 Теорема Ролля[2]

Теорема 5.2. *Пусть функция $f \in C([a,b])$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

◀Выполняются условия теоремы Вейерштрасса, значит, существуют такие точки $c_1, c_2 \in [a,b]$, что $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$, где m – наименьшее значение функции f на $[a,b]$, а M – наибольшее. Имеют место два случая.

а) $m = M = f(x) = const$. Тогда для любого $x \in (a,b)$ $f'(x) = 0$ (в качестве c можно взять любую точку интервала (a,b));

б) $m < M$. Тогда хотя бы одна из точек c_1 или c_2 обязательно принадлежит интервалу (a,b) (в противном случае $f(c_1) = m = f(c_2) = M = f(a) = f(b)$).

Пусть $c_2 \in (a,b)$, $f(c_2) = M$. В этом случае выполняются все условия теоремы Ферма, значит, $f'(c_2) = 0$. Роль c играет c_2. ▶

Следствие 5.2. *Если функция $f \in C([a,b])$ дифференцируема на интервале (a,b), то между любыми двумя нулями a и b $(a < b)$ функции f существует нуль ее производной.*

Заметим, что все предпосылки теоремы Ролля существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два из трех условий теоремы, третье же не выполнялось бы, и у которых не существует точки c такой, что $f'(c) = 0$. (При этом, в силу третьего условия теоремы, в котором говорится о значениях функции в концевых точках промежутка, следует рассматривать лишь функции, определенные на отрезках.)

Функция $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы Ролля, но не удовлетворяет условию 1 (рисунок 5.2).

Функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2 (рисунок 5.3).

[2]Мишель Ролль (1652–1719) – французский математик.

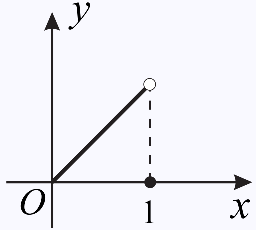


Рисунок 5.2

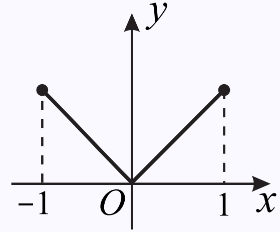


Рисунок 5.3

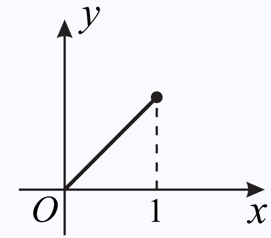


Рисунок 5.4

Наконец, функция $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3 (рисунок 5.4).

Для всех этих функций не существует точки, в которой их производная обращалась бы в нуль.

5.3 Теорема Лагранжа[3]

Теорема 5.3. *Если функция $f \in C([a,b])$ дифференцируема на интервале (a,b), то существует такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \tag{5.1}$$

◀Введем вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$, где λ – некоторое действительное число. Для функции φ выполняются следующие условия теоремы Ролля: $\varphi \in C([a,b])$, φ дифференцируема хотя бы на (a,b). Еще потребуем, чтобы и $\varphi(a) = \varphi(b)$, это значит $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Отсюда $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

А тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c) = f'(c) - \lambda = 0$, поэтому $\lambda = f'(c)$. ▶

[3]Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – французский математик.

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

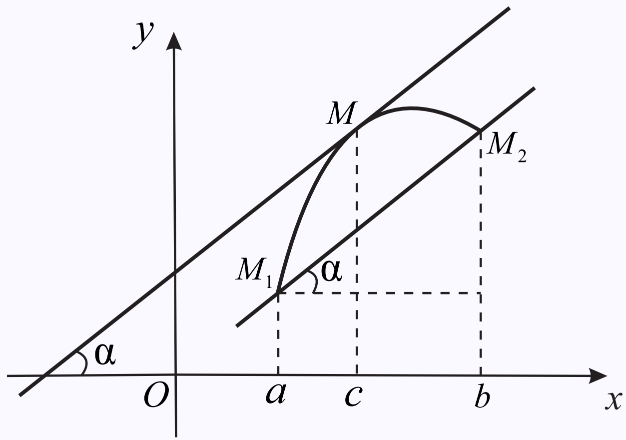


Рисунок 5.5 – Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Следствие 5.3 (геометрический смысл теоремы Лагранжа). *Если выполняются условия теоремы 5.3, то на графике функции f существует такая точка $M(c, f(c))$, что касательная к кривой Γ_f в точке M параллельна секущей, проведенной через точки $M_1(a, f(a))$ и $M_2(b, f(b))$.*

Следствие 5.4 (другие формы записи формулы Лагранжа).

$$\text{а)}\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \tag{5.2}$$

$$\text{б)}\ f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a), \tag{5.3}$$

где θ – некоторое действительное число из интервала $(0,1)$:

$$\left(0 < \frac{c-a}{b-a} = \theta < 1;\ \ c = a + \theta(b-a)\right),$$

$$\text{в) } \Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x, \tag{5.4}$$

где приращения Δx и Δy могут быть конечными (по этой причине формула Лагранжа называется формулой конечных приращений).

Берем любую точку $x \in [a,b]$ и придаем ей любое приращение $\Delta x \neq 0$, но такое, что $x+\Delta x \in [a,b]$. Тогда на $[x, x+\Delta x]$ ($[x+\Delta x, x]$) выполняются условия теоремы Лагранжа. Отсюда вытекает справедливость формулы (5.4) (смотри (5.3)).

Следствие 5.5 (критерий постоянства функции на промежутке). *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ является постоянной на невырожденном промежутке X тогда и только тогда, когда функция непрерывна на промежутке X, дифференцируема во внутренних точках указанного промежутка, и для любых $x \in X$ $f'(x) = 0$.*

◀**Необходимость.** Справедливость необходимого условия вытекает из того, что $(\mathrm{const})' = 0$.

Достаточность. Берем любую точку $x_0 \in X$, фиксируем ее, а также берем переменную точку $x \in X$, $x \neq x_0$. На отрезке $[x_0, x]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, поэтому справедливо ее заключение: существует такая точка $c \in (x_0, x)$, что $f'(c) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$. Однако $f'(c) = 0$, тогда $f(x) = f(x_0)$. ▶

5.4 Теорема Коши

Теорема 5.4. *Если функции $f, g \in C([a,b])$ дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то существует такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.5}$$

◀Прежде всего заметим, что из условий теоремы следует, что $g(b) \neq g(a)$, потому что в противном случае для функции g на отрезке $[a,b]$ выполнялись бы условия теоремы Ролля, а это значит, существовала бы точка $c \in (a,b)$ такая, что $g'(c) = 0$ (на (a,b) $g'(x) \neq 0$).

Вводим дополнительную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x),$$

где λ – некоторое действительное число. Очевидно, что функция $\varphi \in C([a,b])$ дифференцируема хотя бы на интервале (a,b) – а это два условия теоремы Ролля для φ. Потребуем, чтобы и $\varphi(a) = \varphi(b)$ (третье условие теоремы Ролля):

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b).$$

Тогда $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. При таком выборе λ для функции φ выполняются все условия теоремы Ролля, а поэтому существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $\varphi'(c) = 0$, или $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$. Отсюда следует справедливость формулы (5.5).►

Замечание 5.2. Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши при $g(x) = x$.

5.5 Приложения основных теорем дифференциального исчисления

Пример 5.1. Пользуясь теоремой Лагранжа, докажите неравенство:

$$e^x > 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{5.6}$$

◄Возьмем любое $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Для отрезка $[0,x]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, если $f(x) = e^x - x - 1$ (покажите самостоятельно). Тогда

$$f(x) - f(0) = f'(\theta x) \cdot x, (f'(\theta x) = f'(c_x), c_x \in (0,x)), 0 < \theta < 1. \tag{5.7}$$

Для нашей функции равенство (5.7) примет вид

$$e^x - x - 1 = \left(e^{\theta x} - 1\right) x. \tag{5.8}$$

Так как в (5.8) $x > 0$, то и $e^{\theta x} - 1 > 0$, то есть $e^{\theta x} - x - 1 > 0$. Если же $x < 0$, то и $e^{\theta x} - 1 < 0$, значит, $e^x - x - 1 > 0$. Неравенство (5.6) доказано. ►

Пример 5.2. Докажите, что если функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ – дифференцируема и не ограничена на конечном интервале (a,b), то и ее производная также является неограниченной на этом интервале.

◄Так как функция f не ограничена на интервале (a,b), то

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\ \ \exists\,x'\in\ (a,b)\quad f\,(x')>\alpha.$$

Дальше допустим, что f' ограничена на (a,b), то есть

$$\exists\,\beta\in\mathbb{R}_+\ \ \forall\,x\in(a,b)\quad |f'\,(x)|\leqslant\beta.$$

Берем любое $x_1\in(a,b)$ и фиксируем, а также берем любое $x\in(a,b)$. На отрезке $[x_1,x]$ для функции f выполняются условия теоремы Лагранжа.

Тогда

$$|f\,(x)|-|f\,(x_1)|\leqslant|f\,(x)-f\,(x_1)|\leqslant|f'\,(c_x)|\cdot|x-x_1|\,,$$
$$|f\,(x)|\leqslant|f\,(x_1)|+|f'\,(c_x)|\cdot|x-x_1|\leqslant|f\,(x_1)|+\beta\,(b-a)=D\in\mathbb{R}_+.$$

Получили противоречие.►

Пример 5.3. Покажите, что уравнение $x^3+3x-6=0$ имеет только один вещественный корень.

◄Рассмотрим функцию $f(x)=x^3+3x-6$. Она непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет производную $f'(x)=3(x^2+1)$.

Легко видеть, что $f'(x)\neq 0$ при любых действительных значениях x. Но тогда наше уравнение может иметь не более одного действительного корня, так как если бы оно имело, например, два корня c_1 и c_2, то $f(c_1)=f(c_2)=0$, и, по теореме Ролля, между c_1 и c_2 нашлась бы такая точка c, что $f'(c)=0$. Последнее невозможно. Существование же действительного корня следует из того, что f есть многочлен нечетной степени.►

Пример 5.4. Докажите, что если x_1 является корнем многочлена f кратности k, то для производной f' он будет корнем кратности $k-1$.

◀Пусть многочлен f имеет k-кратный корень x_1. Тогда, как известно из курса алгебры, этот многочлен можно представить в виде: $f(x) = (x - x_1)^k \varphi(x)$, где φ – многочлен, не делящийся на $x - x_1$. Найдем производную:

$$f'(x) = k(x - x_1)^{k-1}\varphi(x) + (x - x_1)^k \varphi'(x) = (x - x_1)^{k-1}\left[k\varphi(x) + (x - x_1)\varphi'(x)\right].$$

Так как $(x - x_1)\varphi'(x)$ делится на $(x - x_1)$, а $\varphi(x)$ не делится на $(x - x_1)$, то выражение в квадратных скобках не делится на $(x - x_1)$, откуда следует, что f' делится на $(x - x_1)^{k-1}$, но не делится на $(x - x_1)^k$, это означает, что $x = x_1$ – корень $k - 1$-й кратности для производной f'. ▶

Пример 5.5. Пусть $f(x) = (x-4)^2(x+2)^2$. Докажите, что функция $f''(x)$ имеет на промежутке $(-2, 4)$ два корня.

◀Так как f – многочлен четвертой степени, то f'' – квадратный многочлен, а потому имеет не более двух вещественных корней. Так как $f(-2) = f(4) = 0$, то, по теореме Ролля, на отрезке $[-2, 4]$ есть точка c такая, что $f'(c) = 0$. Но $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$ – корни второй кратности многочлена f. Поэтому $f'(-2) = f'(4) = 0$. Применим теорему Ролля к функции f' на отрезках $[-2, c]$ и $[c, 4]$. Получим, что существуют точки c_1 и c_2, $-2 < c_1 < c$, $c < c_2 < 4$, такие, что $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$. Значит, оба нуля функции f'' вещественны и лежат на интервале $(-2, 4)$. ▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа).

   В чем заключается их геометрический смысл?
2. Сформулируйте теорему Коши.
3. Докажите с помощью теоремы Ролля, что уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ не может иметь более двух вещественных корней, а с помощью теоремы Больцано – Коши установите, что два вещественных корня действительно существуют.
4. Докажите, что все корни производной многочлена $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ вещественны, и укажите границы, между которыми они заключены.

ЛЕКЦИЯ 6
Правила Лопиталя

6.1 Правила Лопиталя[1] (раскрытие неопределенностей при нахождении пределов)

Теорема 6.1 (первое правило Лопиталя). *Если функции* $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ *и* $g : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в проколотой окрестности* $\mathring{U}_a$*, причем:*

1) *для любых* $x \in \mathring{U}_a$ $g'(x) \neq 0$;
2) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

◀Возьмем любую последовательность $(x_n) \subset \mathring{U}_a$, $x_n > a$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Пусть $f(a) = g(a) = 0$. На отрезке $[a, x_n]$ выполняются все условия теоремы Коши для функций f и g, поэтому существует $\xi_n \in (a, x_n)$, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ (принять во внимание, что $f(a) = g(a) = 0$). В последнем равенстве переходим к пределу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(мы использовали тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = a$ и условие 3 теоремы). А тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[1] Гийом Франсуа Лопиталь (1661–1704) – французский математик.

Аналогично доказывается теорема и для левостороннего предела. А так как существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.\ \blacktriangleright$$

Замечание 6.1. Если функции f' и g' непрерывны в точке a и $g'(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Замечание 6.2. Если функции f' и g' удовлетворяют тем же условиям, что и f, g, то правило Лопиталя можно применить повторно.

Пример 6.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

◀Условия теоремы 6.1 выполняются, поэтому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.\ \blacktriangleright$$

Теорема 6.2 (второе правило Лопиталя). *Если функции* $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ *и* $g : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на интервале* $(c, +\infty)$, *причем:*

1) $\forall x \in (c, +\infty)\ g'(x) \neq 0$;
2) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;
3) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\ (A \in \overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

◀Вводим подстановку $x = \frac{1}{t}$, $t \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to +0} \frac{F(t)}{G(t)},$$

где $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$.

Но $\lim\limits_{t \to +0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim\limits_{t \to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Для функций F и G выполняются условия теоремы 6.1, значит,

$$\exists \lim_{t \to +0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to +0} \frac{F'(t)}{G'(t)},$$

или

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacktriangleright$$

Замечание 6.3. Теоремы 6.1 и 6.2 позволяют раскрывать неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$. Теорему 6.2 аналогично можно рассмотреть и при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$.

Теорема 6.3 (третье правило Лопиталя). *Если функции* $f:\mathring{U}_a\to\mathbb{R}$ *и* $g:\mathring{U}_a\to\mathbb{R}$ *дифференцируемы в проколотой окрестности* $\mathring{U}_a$*, причем:*

1) $\forall\, x\in\mathring{U}_a\;\; g'(x)\neq 0$;

2) $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ (*любого знака, можно и разного для каждой из функций*);

3) $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ $(A\in\overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

◀Возьмем любую последовательность $(x_n)\subset\mathring{U}_a$, $x_n<a$. Возьмем натуральные числа n_1, n_2 ($n_1<n_2$ и числа достаточно большие). На отрезке $[x_{n_1},x_{n_2}]$ выполняются условия теоремы Коши, тогда существует точка $\xi_{n_1,n_2}\in(x_{n_1},x_{n_2})$ такая, что

$$\frac{f(x_{n_2})-f(x_{n_1})}{g(x_{n_2})-g(x_{n_1})}=\frac{f(x_{n_2})}{g(x_{n_2})}\cdot\frac{1-\frac{f(x_{n_1})}{f(x_{n_2})}}{1-\frac{g(x_{n_1})}{g(x_{n_2})}}=\frac{f'(\xi_{n_1,n_2})}{g'(\xi_{n_1,n_2})},$$

или

$$\frac{f(x_{n_2})}{g(x_{n_2})}=\frac{f'(\xi_{n_1,n_2})}{g'(\xi_{n_1,n_2})}\cdot\frac{1-\frac{g(x_{n_1})}{g(x_{n_2})}}{1-\frac{f(x_{n_1})}{f(x_{n_2})}}.$$

Для любого $\varepsilon>0$ фиксируем n_1 таким большим, чтобы для любых $n_2>n_1$ выполнялось неравенство $\left|\frac{f'(\xi_{n_1,n_2})}{g'(\xi_{n_1,n_2})}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Для этого фиксированного n_1 существует n_2', что для любых $n_2\geqslant n_2'$ (условие 2 теоремы): $\left|\frac{1-\frac{g(x_{n_1})}{g(x_{n_2})}}{1-\frac{f(x_{n_1})}{f(x_{n_2})}}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2\left(|A|+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$.

Тогда при $n_2 > n_2'$ имеем:

$$\left|\frac{f\left(x_{n_2}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)} - A\right| = \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} \cdot \frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - A\right| =$$

$$= \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} \cdot \frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - A\frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} + A\frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - A\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} - A\right| \left|\frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1 + 1\right| + |A| \left|\frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} - A\right| \left|\frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1\right| + \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} - A\right| + |A| \left|\frac{1-\dfrac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\frac{\varepsilon}{2\left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{\varepsilon}{2} + |A|\frac{\varepsilon}{2\left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \varepsilon.$$

Теорема доказана для случая $x_n < a$.
Аналогично доказывается и для $x_n > a$. А значит справедливо будет и само заключение теоремы 6.3.▶

Теорема 6.4 (четвертое правило Лопиталя). *Если функции* $f:(c,+\infty)\to\mathbb{R}$ *и* $g:(c,+\infty)\to\mathbb{R}$ *дифференцируемы на интервале* $(c,+\infty)$, *причем*

1) $\forall\, x\in(c,+\infty)\ g'(x)\neq 0$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$ (*любого знака, можно и разного для каждой функции*);

3) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (A\in\overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

◀Вводится подстановка $x=\frac{1}{t}$, и используются методы, рассмотренные при доказательстве теоремы 6.2 и теоремы 6.3.▶

Замечание 6.4. При нахождении пределов можно использовать правила Лопиталя при раскрытии неопределенностей вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^∞), (0^0), (∞^0) и других, которые сводятся к неопределенностям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

$$◀ \lim_{x\to+0} x^x=\lim_{x\to+0} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}}\overset{\text{Пр.Л.}}{=}e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^0=1.▶$$

Замечание 6.5. При нахождении предела $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to+\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ (который существует) может быть и так, что предел функции $\frac{f'}{g'}$ в указанной точке и не существует, тогда правило Лопиталя применять нельзя, необходимы другие способы нахождения таких пределов.

Пример 6.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

◀ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$, а функция $y = \sin \frac{1}{x}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $a = 0$. С другой стороны, если

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin x,$$

то предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} + \left(-\frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right) \right)$$

не существует в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ – не существует (не существует $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$, а $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$).▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте правила Лопиталя раскрытия неопределенностей типа:

   а) $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$;

   б) $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$;

   в) $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$;

   г) $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

2. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Правила Лопиталя

Задание 1. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}.$$

◀Указанный предел вычислялся на практическом занятии 9 в задании 8 без применения правила Лопиталя. С применением правила Лопиталя вычисление предела значительно упрощается.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-33x^{10}}{50x^{49}+60x^{29}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-33x^{9}}{50x^{48}+60x^{28}}=-\frac{31}{110}.\ ▶$$

Задание 2. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

$$◀=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.\ ▶$$

Задание 3. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}.$$

◀Имеем неопределенность (1^∞). Преобразуем предел, используя формулу

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}. \qquad (6.1)$$

В нашем случае:

$$I = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x-1\right)x} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =\right.$$

$$\left.= \lim_{x\to+\infty}(-1)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{x^2+1} = -\frac{2}{\pi}\right] = e^{-\frac{2}{\pi}}. \blacktriangleright$$

Задание 4. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I = \lim_{x\to+0}\sqrt[n]{x}\cdot\ln^2 x.$$

◀Имеем неопределенность $(0\cdot\infty)$.

$$I = \lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-\frac{1}{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2 x^{-\frac{1}{n}-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{2}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2}\sqrt[n]{x} = 0. \blacktriangleright$$

Задание 5. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left((x+1)\cdot x^{x}+x^{x+1}\ln x\right)(\ln x+1)+x^{x+1}\cdot\frac{1}{x}-1}{-1}=-2. \blacktriangleright$$

Задание 6. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

$$\blacktriangleleft I=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{0-\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\right)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(-1)(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{-x^2(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+1-1}{2x}=\frac{e}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 7. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I=\lim_{x\to+0}|\ln x|^{2x}.$$

$$\blacktriangleleft I=\left(\infty^0\right)=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\lim_{x\to+0}\frac{2\ln|\ln x|}{\frac{1}{x}}\overset{\text{Пр.Л.}}{=}e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{2\cdot\frac{1}{-\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{-2x}{\ln x}}=e^0=1. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\cos x-1}$;

1.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$;

1.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$;

1.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$;

1.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$;

1.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

1.8 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$;

1.9 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

1.10 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$;

1.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x}$;

1.12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+\sin x}{x+\sin x}$;

1.13 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\operatorname{tg}x-\frac{1}{1-\sin x}\right]$;

1.14 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$;

1.15 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$;

1.16 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

1.17 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x(e^{2x}+1)}\right]$;

1.18 $\lim\limits_{x\to+0}x^x$;

1.19 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$;

1.20 $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

1.21 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$;

1.22 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$;

1.23 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

1.24 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$;

1.25 $\lim\limits_{x\to -a}\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{a}$.

ЛЕКЦИЯ 7
Формула Тейлора и ее приложения

7.1 Формула Тейлора[1]

Рассмотрим задачу о локальном представлении функции в виде многочлена

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-a)^n\right), \ x \to a.$$

При $n = 1$ такая задача привела нас к понятию дифференцируемости.

Легко видеть (убедитесь в этом самостоятельно), что алгебраический многочлен можно записать с помощью его производных в некоторой точке:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Естественно рассмотреть многочлен такого типа для произвольной функции f:

$$T_n(x, a; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{7.1}$$

Будем называть (7.1) **полиномом Тейлора** n-го порядка для функции $f : U_a \to \mathbb{R}$ в точке a. Для его существования необходимо существование $f^{(n)}(a)$ (а тогда производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ должны существовать в окрестности точки a).

[1] Тейлор Брук (1685–1731) – английский математик.

Теорема 7.1. *Если функция* $f : \overset{\circ}{U}_a \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ *раз* $(n \in \mathbb{N})$ *дифференцируема в окрестности* $\overset{\circ}{U}_a$ *и* p *– любое положительное действительное число, то для любого* $x \in \overset{\circ}{U}_a$ *существует* ξ *между* a *и* x *такое, что справедлива следующая формула Тейлора:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x), \tag{7.2}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi) \tag{7.3}$$

есть остаток формулы Тейлора в форме Шлемильха[2] *– Роша*[3].

◀Пусть

$$\varphi(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ и } R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x,a).$$

Для определенности считаем, что $x > a$. Введем дополнительно переменную $t \in [a, x]$. Обозначим:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x,t) - (x-t)^p Q(x),$$

где $Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$. Тогда

$$\psi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - (x-t)^p Q(x).$$

---

[2]Оскар Ксавер Шлемильх (1823–1901) — немецкий математик.
[3]Эдуард Альбер Рош (1820–1883) – французский астроном и математик.

На отрезке $[a,x]$ функция ψ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому существует точка $\xi \in (a,x)$ такая, что $\psi'(\xi)=0$. У нас

$$\psi'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} k\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^{k-1} +$$

$$+p(x-t)^{p-1}Q(x) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x);\ \ \psi'(\xi)=0,$$

тогда $Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$ и $R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$.

Аналогично рассматривается случай, когда $x<a$. При $x=a$ формула также справедлива.▶

Следствие 7.1. *При выполнении условий теоремы 7.1 справедливо представление:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\ p} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),$$

где $0<\theta<1$ *– некоторое действительное число* $\left(0<\frac{\xi}{x-a}=\theta<1 \Rightarrow \xi = a+\theta(x-a)\right)$.

Следствие 7.2. *Если выполняются условия теоремы 7.1,* $p=n+1$, $n\in\mathbb{N}$, *то получим остаток формулы Тейлора в так называемой форме Лагранжа:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{7.4}$$

Если же $p=1$, *то*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))\cdot(1-\theta)^n}{n!}(x-a)^{n+1} \tag{7.5}$$

(остаток в форме Коши).

Замечание 7.1. Если в теореме 7.1 взять $a=0$, то формула Тейлора называется формулой Маклорена[4].

Теорема 7.2. *Если функция* $f:\mathring{U}_a\to\mathbb{R}$ $(n-1)$ *раз* $(n\in\mathbb{N})$ *дифференцируема в окрестности* $\mathring{U}_a$ *и существует* $f^{(n)}(a)$, *то справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано*[5]

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right), \tag{7.6}$$

где $\lim\limits_{x\to a}\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}=0$.

7.2 Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

1. $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1\ \forall n\in\mathbb{N}$,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{7.7}$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ \ 0<\theta<1 \text{ (форма Лагранжа)}. \tag{7.8}$$

$$R_{n+1}(x)=o\left(x^n\right),\ x\to 0 \text{ (форма Пеано)}. \tag{7.9}$$

На любом отрезке $[-r,r]$, $r>0$ справедлива оценка остатка (7.8) (учесть, что на $[-r,r]$ $\left|e^{\theta x}\right|<e^r$):

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r. \tag{7.10}$$

[4]Колин Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.
[5]Джузеппе Пеано (1858–1932) – итальянский математик.

2. $f(x) = \sin x$, $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m, \ m = 0, 1, 2, \ldots, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n = 2m - 1. \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7.11}$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}\sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2} + \pi\right)}{(2n+1)!}, \ 0<\theta<1 \text{ (форма Лагранжа)}, \tag{7.12}$$

$$R_{2n+1}(x) = o\left(x^{2n-1}\right), \ x \to 0 \text{ (форма Пеано)}. \tag{7.13}$$

На любом отрезке $[-r, r]$, $r > 0$ справедлива оценка остатка (7.12):

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7.14}$$

3. $f(x) = \cos x$, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m - 1, \ m = 1, 2, \ldots, \\ (-1)^{n/2}, & \text{если } n = 2m, \ m = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7.15}$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}\cos\left(\theta x + 2n\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\right)}{(2n+2)!}, \ 0 < \theta < 1 \text{ (форма Лагранжа)}, \tag{7.16}$$

$$R_{2n+2}(x) = o\left(x^{2n}\right), \ x \to 0 \text{ (форма Пеано)}. \tag{7.17}$$

На любом отрезке $[-r, r]$, $r > 0$ справедлива оценка остатка (7.16)

$$|R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{7.18}$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n},\ f(0) = 0,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),\ \forall x \in [-1, 1], \tag{7.19}$$

причем для $0 \leqslant x \leqslant 1$ используем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ 0 < \theta < 1, \tag{7.20}$$

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}. \tag{7.21}$$

Для $-1 < x \leqslant 0$ берем остаток в форме Коши

$$R_{n+1}(x) = (-1)\,x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}, \tag{7.22}$$

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r},\ -r \leqslant x \leqslant 0,\ 0 < r < 1. \tag{7.23}$$

Остаток в форме Пеано для $f(x) = \ln(1+x)$:

$$R_{n+1}(x) = o(x^n),\ x \to 0. \tag{7.24}$$

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n} \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1)),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + R_{n-1}(x), \tag{7.25}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1 \text{ (форма Лагранжа)}, \tag{7.26}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}}{n!}(1-\theta)^n x^n, \ 0 < \theta < 1 \text{ (форма Коши)}, \tag{7.27}$$

$$R_{n+1}(x) = o(x^n), \ x \to 0 \text{ (форма Пеано)},$$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0, \tag{7.28}$$

$\forall x \in (-1,1)$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Если $\alpha > 0$, то равенство (7.28) справедливо и при $x = \pm 1$; если $-1 < \alpha < 0$, то (7.28) справедливо при $x = 1$.

Замечание 7.2. Формулы Маклорена используют при приближенных вычислениях и вычислениях пределов.

Пример 7.1. Вычислить $e^{0,11}$ с точностью до 10^{-3}.

◀Используем формулу (7.7) при $x = 0,11$. По формуле (7.8) $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(x+1)!}e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$,

$$|R_{n+1}(0,11)| = \frac{0,11^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta \cdot 0,11} < \frac{3}{9^{n+1}(n+1)!} < 0,001,$$

последнее неравенство выполняется при $n = 2$.

$$\left|\frac{3}{9^{n+1}(n+1)!}\right|_{n=2} = \frac{3}{9^3 \cdot 3!} = \frac{1}{18 \cdot 81} = \frac{1}{1458} < 10^{-3}$$

$$\left(\text{при } n = 1: \quad \left|\frac{3}{9^{n+1}(n+1)!}\right|_{n=1} = \frac{3}{9^2 \cdot 2!} = \frac{1}{27 \cdot 2} = \frac{1}{54} > 10^{-3}\right).$$

Тогда

$$e^{0,11} \approx 1 + \frac{0,11}{1!} + \frac{0,11^2}{2!} = 1,11 + 0,00605 \approx 1,116. \blacktriangleright$$

Пример 7.2. Найти $I = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

$$\blacktriangleleft\ I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4!}}{1} = \frac{1}{24}. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Запишите формулу Тейлора с остатком в форме Шлемильха – Роша, в форме Лагранжа, в форме Коши, в форме Пеано.
2. Запишите разложение по формуле Маклорена элементарных функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \ln(1 + x)$, $y = (1 + x)^\alpha$.
3. Объясните суть приближенных вычислений значений функции и пределов с помощью разложений элементарных функций по формуле Маклорена.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

Формула Тейлора и ее приложения

Задание 1. Вычислить с помощью формулы Тейлора $\sqrt[3]{25}$ с точностью до 10^{-3}.

$$◀ \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27-2} = \sqrt[3]{27\left(1-\frac{2}{27}\right)} = 3\left(1+\left(-\frac{2}{27}\right)\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{27}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{2}{27}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!}\left(-\frac{2}{27}\right)^n+R_{n+1}\left(-\frac{2}{27}\right)\right).$$

Запишем остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа и оценим сверху его модуль.

$$3R_{n+1}\left(-\frac{2}{27}\right) = 3\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n\right)\left(1+\theta\cdot\left(-\frac{2}{27}\right)\right)^{\frac{1}{3}-(n+1)}}{(n+1)!}\left(-\frac{2}{27}\right)^{n+1},$$

где $0<\theta<1$.

Возьмем $n=2$.

$$3R_3\left(-\frac{2}{27}\right) = 3\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(1-\frac{2\theta}{27}\right)^{\frac{1}{3}-3}}{3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3.$$

Тогда

$$3\left|R_3\left(-\frac{2}{27}\right)\right| \leqslant 3\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot 8}{6\cdot 27^3} = \frac{40}{3^{12}} < \frac{1}{3^8} = \frac{1}{6561} = 0,0001524\ldots$$

При $n = 2$:

$$\sqrt[3]{25} \approx 3 - \frac{2}{27} - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27^2} = 3 - \frac{2\cdot 3\cdot 27 + 4}{3\cdot 27^2} = 3 - \frac{166}{2187} = 3 - 0,07590\ldots =$$
$$= 2,92409\ldots \approx 2,924.$$

С учетом ошибки округления и оценки остатка формулы Тейлора получим, что $\sqrt[3]{25} \approx 2,924$ с точностью до 10^{-3}. ▶

Задание 2. Вычислить с помощью формулы Тейлора $\sin 12^\circ$ с точностью до 10^{-4}.
◀По формуле Тейлора ($12^\circ = \frac{\pi}{15}$ радиан)

$$\sin\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right).$$

Запишем остаток формулы Тейлора для функции $y = \sin x$ в точке $x = \frac{\pi}{15}$ в форме Лагранжа

$$R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta\cdot\frac{\pi}{15} + (2n+1)\frac{\pi}{2} + \pi\right).$$

Оценим модуль остатка $R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)$ сверху $\left(\frac{\pi}{15} < \frac{1}{4}\right)$:

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right| < \frac{1}{4^{2n+1}\cdot(2n+1)!} \tag{7.29}$$

Возьмем $n = 1$. Тогда

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right| < \frac{1}{4^3\cdot 6} = \frac{1}{64\cdot 6} = \frac{1}{384} > 10^{-4}.$$

Возьмем $n = 2$. В этом случае

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right| < \frac{1}{4^5\cdot 5!} = \frac{1}{64\cdot 16\cdot 120} = \frac{1}{122880} = 0,0000081\ldots < 10^{-4}.$$

Тогда

$$\sin 12^\circ \approx \frac{\pi}{15} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{3!} = 0,20943951\ldots - 0,00153117\ldots =$$
$$= 0,207908\ldots \approx 0,2079$$

с точностью до 10^{-4}. ►

Задание 3. Используя формулу Тейлора с остатком в форме Пеано вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} = I.$$

◄При вычислении указанного предела используем принцип отбрасывания бесконечно малых более высокого порядка, а также асимптотические формулы для функций $y = \cos x$, $y = (1+x)^\alpha$, $y = \ln(1+x)$.

1) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$, $x \to 0$;

2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$, $x \to 0$;

3) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o\left(x^n\right), x \to 0.$

Тогда

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{1 + x\left(1 + o(x)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}2x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}4x^2 + o\left(x^2\right)\right)}{x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + x - 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}{-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -1. ►$$

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
118
Приложение
Закрыть

Задания для самостоятельного решения

1. Многочлен $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ разложить по целым неотрицательным степеням двучлена $x + 1$.
2. Написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно:

   2.1 e^{2x-x^2} до члена x^5; 2.2 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена x^{13}; 2.3 $\ln\cos x$ до члена x^6; 2.4 $\sin(\sin x)$ до члена x^3; 2.5 $\operatorname{tg} x$ до члена x^5; 2.6 $\ln\frac{\sin x}{x}$ до члена x^6.
3. Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

   3.1 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

   3.2 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

   3.3 $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 0,1$;

   3.4 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.
4. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:

   4.1 $\sqrt[3]{30}$; 4.2 $\sqrt{e}$; 4.3 $\sin 18^\circ$; 4.4 $\ln 1,2$; 4.5 $\operatorname{arctg} 0,8$; 4.6 $\arcsin 0,8$; 4.7 $(1,1)^{1,2}$.
5. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, найти пределы функций:

   5.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$;

   5.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x}{\operatorname{tg}^3 x}$;

   5.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^3\right)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$;

   5.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

   5.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

   5.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$;

   5.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

ЛЕКЦИЯ 8
Применение дифференциального исчисления к исследованию свойств функций

8.1 Возрастание и убывание функции в точке. Критерий строгой монотонности функции на промежутке

Определение 8.1. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***возрастающей*** (***убывающей***) ***в точке*** $x_0 \in X$*, если существует такая окрестность* $U_{x_0} \subset X$*, что для любых* $x \in U_{x_0}$*:*

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))\,; \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0))\,.$$

Пример 8.1. Функция $f(x) = \begin{cases} \{x\}\,, & \text{если } 0 < |x| < 0,5; \\ 0,5, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ (рисунок 8.1) убывает в точке $x_0 = 0$, однако в каждом из интервалов $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция возрастает (в каждой из точек этих интервалов функция f тоже возрастает).

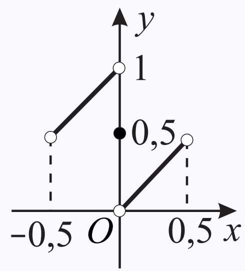


Рисунок 8.1

Теорема 8.1. *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, то эта функция возрастает (убывает) в точке x_0.*

◀Докажем теорему для случая, когда $f'(x_0) > 0$. По определению

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : \quad \forall \varepsilon > 0 \left(\varepsilon = \frac{1}{2} f'(x_0)\right) \exists \delta > 0 \, \forall x \in D(f)$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \frac{f'(x_0)}{2},$$

$$\frac{1}{2} f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3}{2} f'(x_0).$$

Тогда получаем, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. А это значит, что

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) < f(x_0).$$

Теорема доказана для случая возрастания функции в точке. Аналогично получаем справедливость утверждения об убывании функции в точке.▶

Замечание 8.1. $f'(x_0) > 0$ $(<)$ является только достаточным условием (а не необходимым) возрастания (убывания) функции в точке. Например, $f(x) = x^3$ возрастает в точке $x_0 = 0$, но $f'(0) = 0$.

Теорема 8.2 (критерий строгой монотонности функции на промежутке). *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток числовой прямой, функция $f \in C(I)$ и дифференцируема хотя бы во внутренних точках указанного промежутка. Функция f будет возрастающей (убывающей) на промежутке I тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ в точках существования производной на промежутке I, причем $f'(x) = 0$ может быть только в отдельных точках промежутка I, а не на частичных невырожденных промежутках из I.*

◄**Необходимость.** Допустим для определенности, что f возрастает на промежутке I. Тогда для любой внутренней точки $x \in I$ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем: $f'(x) \geqslant 0$.

Допустим, что существует $I_1 \subset I$ (I_1 – невырожденный промежуток) такой, что для любых $x \in I_1$ $f'(x) = 0$. Тогда (критерий постоянства функции на промежутке) $f(x) = \text{const}$ на I_1. Получили противоречие (по условию f – возрастает на I_1). Утверждение необходимого условия доказано.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ на промежутке I и $f'(x) = 0$ может быть только в отдельных точках указанного промежутка. Возьмем любые $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1, x_2]$ функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, значит, справедливо и заключение этой теоремы:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$, $f'(c) \geqslant 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$. Значит, функция f является неубывающей на промежутке I. Докажем, что на самом деле она возрастает на I. Допустим, что это не так: существуют $x_1, x_2 \in I$ $x_1, < x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$. С другой стороны (f неубывающая на $[x_1, x_2]$): для любых $x \in [x_1, x_2]$ $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Отсюда вытекает, что $f(x) = \text{const}$ на $[x_1, x_2]$. Поэтому $f'(x) = 0$ на $[x_1, x_2]$, что противоречит условию. Значит, f возрастает на I. ►

Пример 8.2. Функция $f(x) = x^3$ возрастает на числовой прямой, так как для любых $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 \geqslant 0,$$

причем $f'(x) = 0$ только в точке $x = 0$.

8.2 Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума

Теорема 8.3 (необходимое условие экстремума). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, и x_0 – точка экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$.*

◀Для функции f в окрестности U_{x_0} выполняются условия теоремы Ферма, а значит, справедливо и заключение указанной теоремы: $f'(x_0) = 0$. ▶

Замечание 8.2. Указанное в теореме условие не является достаточным для существования экстремума функции в точке. Например, $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, значит, $f'(0) = 0$, однако наша функция в точке $x = 0$ экстремума не имеет.

Замечание 8.3. Функция f может иметь экстремум и в точках, в которых она производных не имеет. Например, $y = |x|$ в точке $x = 0$ не дифференцируема, однако имеет в ней минимум.

Определение 8.2. *Внутренние точки области определения функции f, в которых производная функции f равна нулю или не существует, называются* ***критическими****, причем если $f'(x_0) = 0$, то x_0 называется* ***стационарной точкой****.*

Теорема 8.4 (первый достаточный признак строгого экстремума функции в точке). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на $\mathring{U}_{x_0}$, причем при переходе через x_0 производная функции меняет знак с «+» на «−» (с «−» на «+»), то x_0 – точка строгого максимума (строгого минимума) функции f.*

◀Пусть существует $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ и для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$. Для промежутков $(x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta)$ выполняются все условия достаточного признака строгой монотонности функции f (теорема 8.2), поэтому на $(x_0 - \delta, x_0]$ f – убывает, а на $[x_0, x_0 + \delta)$ – возрастает, значит, $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$. Таким образом, x_0 – точка минимума функции f. Аналогично доказывается и для случая точки максимума.▶

Пример 8.3. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = |x^2 - x|$.

◀ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, \text{ если } x \leqslant 0 \text{ или } x \geqslant 1; \\ x - x^2, \text{ если } 0 < x < 1. \end{cases}$ Если обозначить: $f_1(x) = x^2 - x$ и $f_2(x) = x - x^2$ (на соответствующих промежутках), то $f_1'(x) = 2x - 1$ для $x < 0$ или $x > 1$; $f_1'(0-0) = -1$ и $f_1'(1-0) = 1$; $f_2'(x) = 1 - 2x$, $f_2'(0+0) = 1$, $f_2'(1-0) = -1$; $f_2'(x) = 0$, если $1 - 2x = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$. Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, значит, непрерывна и в точках x_i, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, для каждой из указанных точек существуют проколотые окрестности, где f дифференцируема, причем при переходе через $x_1 = 0$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$», через $x_2 = 1$ с «$-$» на «$+$», а через $x_3 = \frac{1}{2}$ с «$+$» на «$-$».

Вывод: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ – точки строгого минимума, а $x_3 = \frac{1}{2}$ – строгого максимума функции f; $f_{\min}(0) = f_{\min}(1) = 0$; $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ (рисунок 8.2).▶

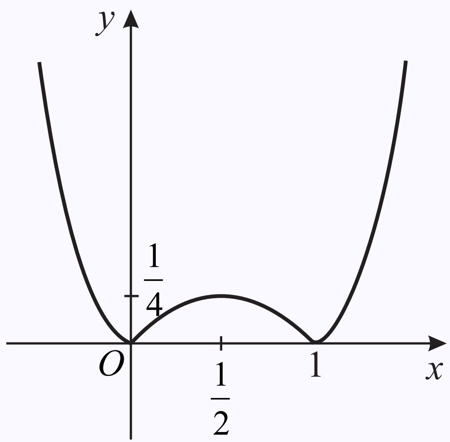


Рисунок 8.2 – Максимумы и минимумы функции

Теорема 8.5 (второй достаточный признак строгого экстремума функции в точке). *Если x_0 – стационарная точка функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ и существует $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$, то x_0 – точка строгого максимума (строгого минимума) функции f.*

◀Для определенности считаем, что $f''(x_0) > 0$. Раз существует $f''(x_0)$, то существует $f'(x)$ в некоторой окрестности U_{x_0}. x_0 – стационарная точка функции f, поэтому $f'(x_0) = 0$. По определению

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

А тогда (по теореме о сохранении функцией знака предела): $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ в некоторой окрестности $\mathring{U}_{x_0}$. Значит, $f'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$» при переходе через точку x_0, причем f непрерывна в точке x_0 (следует из дифференцируемости функции f в точке x_0). Из теоремы 8.4 следует, что x_0 – точка строгого минимума функции f.

Аналогично доказывается и для точки строгого максимума.▶

Пример 8.4. Исследовать на экстремум следующую функцию $f(x) = \sin x - \sin 2x$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

◀Находим критические точки функции $f(x)$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x) = \cos x - 2\cos 2x; \;\; f'(x) = 0; \;\; \cos x - 2\cos 2x = 0;$$

$$\cos x - 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0; \;\; 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0;$$

$$t = \cos x, \;\; 4t^2 - t - 2 = 0; \;\; t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8;},$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}; \;\; x = \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Только $x_0 = \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Далее находим

$$f''(x) = -\sin x + 4\sin 2x = \sin x\,(8\cos x - 1)\,.$$

$f''(x_0) = \sin x_0 \left(8\frac{1+\sqrt{33}}{8} - 1\right) > 0$. Значит, $x_0 = \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ – точка минимума нашей функции.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения возрастающей и убывающей функции в точке.
2. Сформулируйте достаточное условие возрастания и убывания функции в точке.
3. Сформулируйте критерий строгой монотонности функции на промежутке.
4. Дайте определения точек максимума, минимума, экстремума, критических точек.
5. Сформулируйте необходимое условия экстремума.
6. Как найти точки, «подозрительные» на экстремум?
7. Сформулируйте достаточные условия экстремума.
8. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 9
Применение дифференциального исчисления к исследованию свойств функций

9.1 Наибольшее и наименьшее значения функции

Известно (теорема Вейерштрасса), что если функция $f \in C([a,b])$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений, причем эти значения функции принимаются или в точках экстремума из интервала (a,b), или – на концах отрезка. Откуда следует порядок (алгоритм) нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции f:

1. Находим критические точки функции f из интервала (a,b).

2. Находим значения функции в указанных критических точках и в точках $x = a$ и $x = b$. Сравниваем полученные значения функции. Наибольшее из них – наибольшее значение функции f, а наименьшее – наименьшее значение функции f на указанном отрезке.

Пример 9.1. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

исследовать на наибольшее и наименьшее значение в ее области определения.

◀Функция f непрерывна на отрезке $[0;4]$, так как

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x = 1 = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1}{x} = f(1+0) = f(1) = 1,$$

а в остальных точках она непрерывна (на $[0,1)$ $y = x$ непрерывна как многочлен, а на $(1,4)$ $y = \frac{1}{x}$ непрерывна как дробно-рациональная функция в своей области определения). Видно, что

$$f'(1-0) = (x)'_{x=1} = 1,\ f'(1+0) = \left(\frac{1}{x}\right)'_{x=1} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=1} = -1.$$

Значит, в точке $x = 1$ и функция f производной не имеет, а в остальных точках интервала $(0, 4)$ производная функции существует и она не равна нулю.

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{если } 1 < x < 4. \end{cases}$$

Таким образом, $x = 1$ – критическая точка функции f на интервале $(0, 4)$.

$$f(1) = \left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1} = 1;\ f(0) = x\big|_{x=0} = 0;\ f(4) = \left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=4} = \frac{1}{4}.$$

Функция f в точке $x = 1$ принимает наибольшее значение, оно равно 1, а в точке $x = 0$ – наименьшее, оно равно 0.▶

Замечание 9.1. Если $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток числовой прямой, не являющийся отрезком, и функция $f \in C(I)$, то ее исследование на наибольшее (наименьшее) значение заключается в следующем (для определенности допустим, что $I = (a, +\infty)$):

1) находим критические точки промежутка I,

2) находим пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$,

3) сравниваем значения функции f в указанных критических точках с найденными предельными значениями α и β.

Если наибольшее (наименьшее) значение из сравниваемых чисел будет среди значений функции в критических точках, то это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке I. Если же наибольшее (наименьшее) значение будет среди чисел α и β, то функция f на промежутке I наибольшего (наименьшего) значения не имеет.

Замечание 9.2. Если функция f непрерывна на конечном промежутке I (например $I=(a,b]$), и если функцию можно непрерывно продолжить на отрезок $[a,b]$, то ее исследование на наибольшее и наименьшее значение можно провести на отрезке. И если это наибольшее или наименьшее значение функция достигает в точках из промежутка I, то оно будет искомым, если нет (например, в точке $x=a$), то функция соответствующего значения на I не имеет.

Пример 9.2. Исследовать функцию $f(x)=x-2\sqrt{x}$ на наибольшее и наименьшее значение на промежутке $(0,2]$.

◀Очевидно, что $f\in C([0,2])$, поэтому исследуем функцию на отрезке $[0,2]$. Находим критические точки функции.

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow x=1.$$

Критическими точками функции будут точки $x=0$ и $x=1$ (в точке $x=0$ производная не существует, а в точке $x=1$ производная функции равна нулю). Находим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(0)=0,\quad f(1)=-1,\quad f(2)=2-2\sqrt{2}.$$

Среди полученных значений наименьшим будет -1, а наибольшим 0.

Наименьшее значение достигается в точке $1\in(0,2]$, а наибольшее значение получено при $x=0\notin(0,2]$, поэтому наименьшим значением функции f на промежутке $(0,2]$ будет $f(1)=-1$, а наибольшего значения функция f на промежутке $(0,2]$ не имеет.▶

Замечание 9.3. Пусть $I\subset\mathbb{R}$ – промежуток числовой прямой. Если функция $f\in C(I)$ и имеет на этом промежутке один экстремум – максимум (минимум), то это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции f на промежутке I.

Пример 9.3. Какие размеры должны иметь радиус основания и высота открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме V на его производство пошло наименьшее количество листового металла?

◀Найдем в условии задачи величину, к которой относится слово наименьшее. В нашем случае это будет площадь поверхности открытого цилиндрического бака. Обозначим ее через S. Далее обозначим другие величины, через которые выражаем S. R – радиус основания бака, H – его высота. Получаем:

$$S = 2\pi RH + \pi R^2 = S\left(R, H\right). \tag{9.1}$$

Составим уравнение, связывающее R и H:

$$V = \pi R^2 H. \tag{9.2}$$

Составим аналитическое выражение для функции S переменной R. Из (9.2) имеем: $H = \frac{V}{\pi R^2}$.

$$S(R) = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + \pi R^2 = \frac{2V}{R} + \pi R^2. \tag{9.3}$$

С учетом условия задачи область определения функции

$$D\left(S\right) = \left(0, +\infty\right). \tag{9.4}$$

Получили математическую модель задачи: функцию (9.3) с областью определения (9.4) исследовать на наименьшее значение. Так как область определения не есть отрезок, то функцию S будем исследовать на экстремум.

$$S' = -\frac{2V}{R^2} + 2\pi R = \frac{2\pi R^3 - 2V}{R^2}.$$

Методом интервалов исследуем знак производной. В точке $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ $S'\left(R\right) = 0$; если $R > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, то $S'\left(R\right) > 0$; $R < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, для $S'\left(R\right) < 0$. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ – точка минимума, а так как она единственная точка экстремума и функция S непрерывна на $D(S)$, то в этой точке и будет наименьшее значение функции на указанном множестве. Тогда $H = \frac{\frac{V}{\pi}}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. ▶

9.2 Выпуклые функции. Достаточное условие выпуклости функции на интервале

Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Возьмем любые $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Проведем через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ графика функции f секущую. Ее уравнение имеет вид: $\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ или

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = l(x).$$

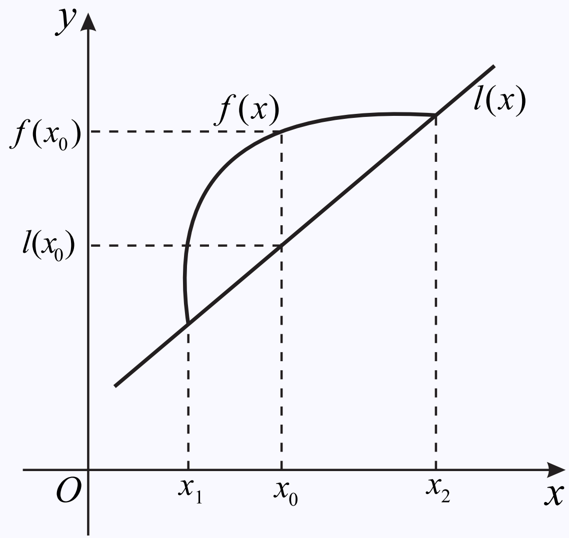


Рисунок 9.1 – Выпуклая вверх на (x_1, x_2) функция

Определение 9.1. *Функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ называется* ***выпуклой вверх*** *(****выпуклой вниз****) на интервале (a,b), если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, и любой точки $x_0 \in (x_1, x_2)$ $l(x_0) \leqslant f(x_0)$ $(l(x_0) \geqslant f(x_0))$ (рисунок 9.1).*

Замечание 9.4. Если неравенства в определении 9.1 строгие, то функция f называется **строго выпуклой вверх** (**строго выпуклой вниз**) на интервале (a,b).

Теорема 9.1 (достаточное условие выпуклости функции на интервале). *Если функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ два раза дифференцируема на интервале (a,b) и для любых $x\in(a,b)$ $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$, то функция f строго выпукла вниз (строго выпукла вверх) на интервале (a,b).*

◀Берем любые x_1, $x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, $x \in (x_1, x_2)$. Оценим разность $l(x) - f(x)$:

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x-x_1) + f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} - f(x) =$$

$$= \frac{(f(x_2)-f(x))(x-x_1) - (f(x)-f(x_1))(x_2-x)}{x_2-x_1} = (\text{по теореме Лагранжа } 5.3) =$$

$$= \frac{f'(c_2)(x_2-x)(x-x_1) - f'(c_1)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(f'(c_2)-f'(c_1))(x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1} = [x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2] =$$

$$= (\text{по теореме Лагранжа } 5.3) = \frac{f''(\bar{c})(x_2-x)(x-x_1)(c_2-c_1)}{x_2-x_1},\ c_1 < \bar{c} < c_2.$$

Откуда видно, что $l(x) < f(x)$, если $f''(x) < 0$ на (a,b) $(l(x) > f(x)$, если $f''(x) > 0$ на $(a,b))$. ▶

Замечание 9.5. Доказанный признак выпуклости не является необходимым. Например, функция $f(x) = x^4$ строго выпукла вниз (можно доказать) на $\mathbb{R}$, но $f''(0) = 0$ (в остальных точках $f''(x) > 0$).

9.3 Точки перегиба. Необходимое и достаточные условия перегиба

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема при $x = x_0$ и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$.

Определение 9.2. *Точка x_0 называется* ***точкой перегиба*** *функции f, если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.*

Точка $(x_0, f(x_0))$ называется в этом случае ***точкой перегиба графика функции*** *f.*

Пример 9.4. Точка $x_0 = 0$ является точкой перегиба функции $f(x) = x^3$, потому что существует $f'(0)$ и разница между $f(x)$ и касательной $L(x) = 0$ меняет знак (с «$-$» на «$+$» при переходе через точку $x_0 = 0$.

Теорема 9.2 (необходимый признак перегиба). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в окрестности U_{x_0}, в точке $x = x_0$ f'' непрерывна и x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.*

◀Предположим, что $f''(x_0) \neq 0$, например, $f''(x_0) > 0$. Тогда существует U_{x_0}, что для любых $x \in U_{x_0}$ $f''(x) > 0$ (свойство непрерывных функций), значит (теорема 9.1), функция f является строго выпуклой вниз на указанной окрестности точки x_0, а это противоречит тому, что x_0 – точка перегиба функции f. ▶

Замечание 9.6. Подозрительными на перегиб будут и точки, в которых f'' не существует. Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geqslant 0, \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

$f''(0)$ не существует, но при этом $x = 0$ – точка перегиба функции.

Теорема 9.3 (первое достаточное условие перегиба). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в проколотой окрестности $\mathring{U}_{x_0}$, а $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба функции f.*

◀ $L(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ – касательная к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Оценим $f(x) - L(x)$:

$$f(x) - L(x) = (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (\text{применяем теорему Лагранжа } 5.3 \text{ два раза}, \; x_0 - \delta < x_0 < \bar{c} < c < x < x_0 + \delta) =$$

$$= f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) = f''(\bar{c})(c - x_0)(x - x_0).$$

Видно, что знак разности $f(x) - L(x)$ совпадает со знаком $f''(\bar{c})$. ▶

Теорема 9.4 (второе достаточное условие перегиба). *Если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

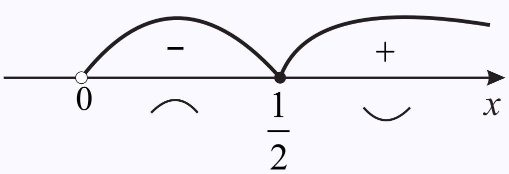
Пример 9.5. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$f(x) = 2x^2 + \ln x, \;\; x \in (0, +\infty).$$

◀ $f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$;

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}.$$

Методом интервалов находим промежутки знакопостоянства второй производной при $x > 0$.



Видно, что на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция f является строго выпуклой вверх, а на $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ – строго выпуклой вниз (теорема 9.1); $x = \frac{1}{2}$ – точка перегиба функции (теорема 9.3).▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$.
2. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке $(a, +\infty)$.
3. Дайте определение выпуклости функции на интервале.
4. Сформулируйте достаточное условие выпуклости функции на интервале.
5. Дайте определение точки перегиба функции.
6. Сформулируйте необходимые условия перегиба функции.
7. Сформулируйте достаточные условия перегиба функции.
8. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

Приложения производной к исследованию свойств функций

Задание 1. Определите промежутки монотонности функций:

$$1)\ f(x) = x^5 + 2x^3 + x;\ 2)\ \varphi(x) = 1 - x^3;\ 3)\ \psi(x) = \frac{x^2}{10} - \ln x.$$

◄Поскольку все эти функции имеют непрерывную производную, обращающуюся в нуль не более чем в конечном числе точек, то решение задачи сводится к установлению для каждой из данных функций промежутков, где производная не меняет знака. Функция будет монотонно возрастающей (убывающей) там, где ее производная больше (меньше) нуля.

1. Для первой функции производная равна $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$. Легко видеть, что $f'(x) > 0$ в любой точке числовой оси. Следовательно, f монотонно возрастает на $\mathbb{R}$.

2. Для функции φ производная равна $\varphi'(x) = -3x^2$. Так как $\varphi'(x) < 0$ при всех x, и лишь в одной точке производная обращается в нуль ($\varphi'(x) = 0$ при $x = 0$), то функция φ будет монотонно убывающей на $\mathbb{R}$.

3. Функция ψ определена при $x > 0$, и ее производная равна $\psi'(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$.

Для определения промежутков монотонности функции ψ исследуем методом интервалов знак производной функции, при условии, что $x > 0$. Так как в промежутке $\left(0, \sqrt{5}\right)$ $\psi'(x) < 0$, то функция ψ монотонно убывает на указанном промежутке; на промежутке $\left(\sqrt{5}, +\infty\right)$ $\psi'(x) > 0$, поэтому функция ψ монотонно возрастает на указанном промежутке. ►

Задание 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3,\ x \in \mathbb{R}$.

◀Функция непрерывна на всей числовой оси. Ее производная

$$f'(x) = 5(x-2)(x+1)^2\left(x - \frac{4}{5}\right)$$

непрерывна на $\mathbb{R}$. Следовательно, «подозрительными» на экстремум будут лишь точки, в которых производная равна нулю. Решая уравнение $5(x-2)(x+1)^2\left(x-\frac{4}{5}\right) = 0$, получим: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = 2$. Эти стационарные точки разбивают область определения функции на следующие промежутки:

$$(-\infty, -1)\,,\ \left(-1, \frac{4}{5}\right),\ \left(\frac{4}{5},\ 2\right),\ (2, +\infty)\,.$$

Знак «+» производная имеет на промежутках $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \frac{4}{5}\right)$, $(2, +\infty)$. Знак «−» производная имеет на промежутке $\left(\frac{4}{5}, 2\right)$.

Откуда получаем, что при переходе через точку $x_1 = -1$ производная знак не меняет, значит, экстремума нет. При переходе через точку $x_2 = \frac{4}{5}$ производная меняет знак с «+» на «−», а значит, это точка строгого максимума $f_{\max}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 8,4$. При переходе через точку $x_3 = 2$ производная меняет знак с «−» на «+», а значит, это точка строгого минимума $f_{\min}(2) = 0$.

Заметим также, что постоянство знака производной внутри каждого из промежутков указывает на монотонность функции в каждом промежутке.▶

Задание 3. Исследовать на экстремум функцию $y = |x|$.

◀Находим производную. Для $x > 0$ будет $|x| = x$ и $y' = 1$, для $x < 0$ будет $|x| = -x$ и $y' = -1$. В точке $x = 0$ производная не существует, но функция непрерывна. Однако в этой точке производная меняет знак с «−» на «+», а значит, это точка строгого минимума $f_{\min}(0) = 0$. ▶

Задание 4. Исследовать на экстремум функцию $y = x^{\frac{2}{3}}$.

◀Найдем производную $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. В точке $x = 0$ производная не существует. Следовательно, эта точка является «подозрительной» на экстремум (рисунок 1.2). Однако в этой точке производная меняет знак с «−» на «+», а значит, это точка строгого минимума $f_{\min}(0) = 0$. ▶

Задание 5. Кривую $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$ исследовать на направление выпуклости и найти точки перегиба.

◀Находим производные:

$$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x,\ y'' = 36\,(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Решая уравнение $y'' = 0$, получим $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Вся область определения функции разбивается этими точками на три промежутка: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $(1, +\infty)$. Определяя знак второй производной на каждом промежутке, получим знак «+» на промежутках $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $(1, +\infty)$ и знак «−» на промежутке $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$. На промежутках $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $(1, +\infty)$ функция выпукла вниз, а на промежутке $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ выпукла вверх. Точки $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$ являются точками перегиба, так как при переходе через эти точки вторая производная меняет знак.▶

Задание 6. Кривую $y = \sqrt[3]{x^5}$ исследовать на направление выпуклости и найти ее точки перегиба.

◀Находим производные $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. В данном случае y'' нигде в нуль не обращается. В точке $x = 0$ вторая производная y'' не существует. Но так как $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$, то в точке $x = 0$ кривая имеет перегиб, и направление выпуклости вверх сменяется на направление выпуклости вниз.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Покажите, что функция $y = \operatorname{arctg} x - x$ убывает на всей числовой оси.
2. Покажите, что функция $y = x - \sin x$ возрастает на всей числовой оси.
3. Определите промежутки возрастания и убывания функций:

   3.1 $f(x) = 3x^2 - 2x$;

   3.2 $f(x) = e^x + 5x$.
4. Докажите неравенства, используя достаточное условие критерия строгой монотонности (убывания или возрастания) функции на промежутке:

   4.1 $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$;

   4.2 $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $x > 0$;

   4.3 $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $x \geqslant 0$;

   4.4 $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $x \geqslant 0$;

   4.5 $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2!}$, $x \geqslant 0$;

   4.6 $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$, $x \geqslant 0$;

   4.7 $\ln(1 + x) \leqslant x$, $x \geqslant 0$;

   4.8 $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$, $x \geqslant 0$;

   4.9 $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n}$, $x \geqslant 0$;

   4.10 $\ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \geqslant 0$.

5. Найдите максимумы и минимумы функций:

5.1 $y = x^2 - 6x + 8$;

5.2 $y = x^2(x-4)$;

5.3 $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2}$;

5.4 $y = x^3 - 12x + 1$;

5.5 $y = \sin x + \cos x$;

5.6 $y = e^x + e^{-x}$;

5.7 $y = -x^2 \sqrt[5]{(x-2)^2}$;

5.8 $y = \frac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$;

5.9 $y = x^2 e^{-x}$;

5.10 $y = \sin x - x$.

6. Покажите, что кривая $y = x^2 + x^4$ всюду выпукла вниз.

7. Покажите, что кривая $y = \ln(x^2 - 1)$ всюду выпукла вверх.

8. Покажите, что кривая $y = (x+1)^4 + e^x$ всюду выпукла вниз.

9. Исследуйте данные кривые на направление выпуклости и перегиб:

9.1 $y = x^4 - 6x^2 + 5$;

9.2 $y = x^4(12\ln x - 7)$;

9.3 $y = a - \sqrt[3]{x-b}$;

9.4 $y = \ln(1 + x^3)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

Наибольшее и наименьшее значения функции

Задание 1. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны. Найти наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

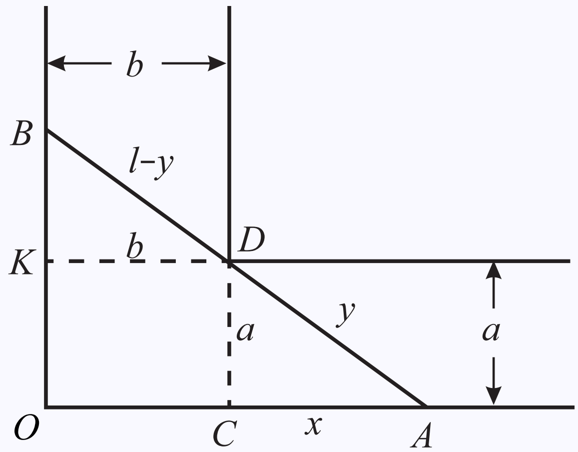


Рисунок 9.2

◀Исследуемая величина $AB = l$ (рисунок 9.2). Считаем, что точка D совпадает с точкой бревна. В этом случае среди множества длин бревен, для которых точка D совпадает с некоторой точкой бревна, надо найти наименьшую длину. Пусть $CA = x$, $DA = y$, тогда $BD = l - y$. Из треугольника CDA находим: $y = \sqrt{a^2 + x^2}$. Треугольники BKD и DCA подобны, поэтому $\frac{x}{y} = \frac{b}{l-y}$. Тогда

$$l - y = \frac{by}{x}; \quad l - y = \frac{b\sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

Пусть

$$l(x)=\frac{b\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+x^2}\cdot\frac{b+x}{x},$$

$$l^2(x)=\frac{\left(a^2+x^2\right)(x+b)^2}{x^2}=f\left(x\right),\;\; x\in(0,+\infty). \tag{9.5}$$

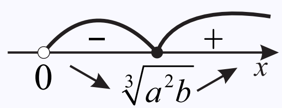
Функции f и l будут иметь наименьшее значение при одном и том же значении x.

Получили математическую модель задачи: функцию f (9.8) исследовать на наименьшее значение на промежутке $(0,+\infty)$. Будем исследовать функцию на экстремум.

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(2x\left(x+b\right)^2+2\left(x+b\right)\left(a^2+x^2\right)\right)x^2-2x\left(a^2+x^2\right)\left(x+b\right)^2}{x^4}=\frac{2\left(x+b\right)\left(x^3-a^2b\right)}{x^3}.$$

Критической точкой функции, при условии, что $x>0$, будет точка $x=\sqrt[3]{a^2b}$.

Методом интервалов исследуем f' на интервалы знакопостоянства.



Значит, $x=\sqrt[3]{a^2b}$ – точка минимума как функции f, так и l. Так как экстремум единственный и он минимум, то он и будет наименьшим значением непрерывной функции в ее области определения. Найдем его

$$l\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2b}+b\right)\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}}{\sqrt[3]{a^2b}}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Из сказанного выше следует, что наибольшая длина бревна, которое можно справлять по этим каналам, будет равна $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (ед. длины).▶

Задание 2. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A (рисунок 9.3); в точке B ($AB = a$) подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен k. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой? Момент уравновешивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага.

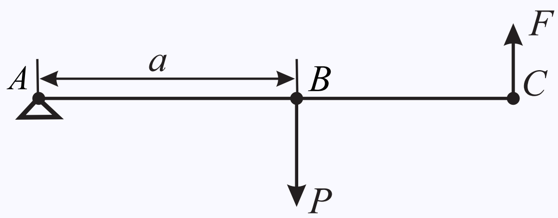
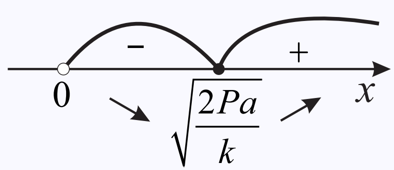


Рисунок 9.3

◀В качестве исследуемой на наименьшее значение величины возьмем уравновешивающую силу F. Пусть $AC = x$ – длина рычага. Из условия $F \cdot x = \frac{x \cdot k}{2} \cdot x + Pa$ (условие равновесия) имеем:

$$F(x) = \frac{k}{2}x + \frac{Pa}{x}, \quad x \in (0, +\infty). \tag{9.6}$$

Функцию F исследуем на экстремум: $F'(x) = \frac{k}{2} - \frac{Pa}{x^2} = \frac{kx^2 - 2Pa}{2x^2}$; $\quad F'(x) = 0$; $\quad x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}$.



Видно, что $x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}$ – единственная точка экстремума непрерывной функции F, которая является

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

точкой минимума. По этой причине в указанной точке функция будет принимать наименьшее значение, то есть искомая длина рычага $x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}$. ►

Задание 3. Дождевая капля, начальная масса которой m_0 падает под действием силы тяжести равномерно испаряясь так, что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей? Какова она? Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

◄Используем формулу для вычисления кинетической энергии: $E = \frac{mv^2}{2}$.

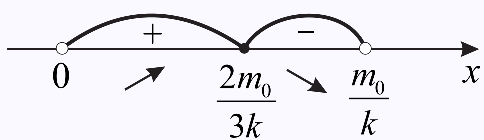
Берем любой момент времени t (капля падает и не испарилась в это время). Тогда убыль массы к указанному моменту времени t будет kt, а масса капли станет равна $m_0 - kt$. Скорость падения капли в этот момент времени t будет gt. Тогда кинетическая энергия капли в момент времени t будет

$$E(t) = \frac{(m_0 - kt)\,g^2t^2}{2}. \tag{9.7}$$

Для функции E находим область определения: $m_0 - kt = 0$, $t = \frac{m_0}{k}$. Тогда $D(E) = \left(0, \frac{m_0}{k}\right)$ (при этом считаем, что капля испарилась, не долетая до Земли).

Функцию E исследуем на экстремум.

$$E'(t) = \frac{g^2}{2}\left(-kt^2 + (m_0 - kt)\cdot 2t\right) = \frac{g^2t}{2}(2m_0 - 3kt); \quad E'(t) = 0,\ 2m_0 - 3kt = 0,\ 0 < t = \frac{2m_0}{3k} < \frac{m_0}{k}.$$

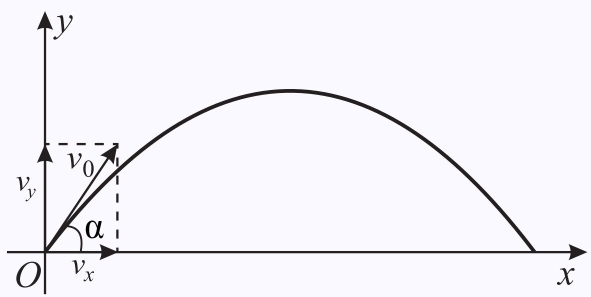


$t = \frac{2m_0}{3k}$ – единственная точка экстремума непрерывной функции E, которая является точкой максимума. Найдем значение функции в этой точке:

$$E\left(\frac{2m_0}{3k}\right) = \frac{4}{27} \cdot \frac{m_0^3 g^2}{k^2}.$$

Значит, через время $t = \frac{2m_0}{3k}$ после начала падения кинетическая энергия E капли будет наибольшей и будет равна $218\frac{4m_0^3g^2}{27k^2}$. ►

Задание 4. Камень брошен с заданной начальной скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком угле α дальность полета камня будет наибольшей.



◄Находим проекцию вектора $\overrightarrow{\upsilon_0}$ начальной скорости на координатные оси ($|\overrightarrow{\upsilon_0}| = \upsilon_0$):

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha, \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha.$$

Берем любой текущий момент времени полета камня и определяем горизонтальные и вертикальные составляющие закона расстояния полета камня:

$$x\left(t\right) = \upsilon_x t = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t, \tag{9.8}$$

и

$$y(t) = v_y t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \tag{9.9}$$

Полное время полета находим из уравнения

$$v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0,\ \ t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{9.10}$$

Тогда камень пролетел расстояние от точки бросания до точки падения на Землю

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Функцию

$$x(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha,\ \ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{9.11}$$

исследуем на экстремум.

$$x' = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha \cdot 2;\ \ x' = 0,\ \ \cos 2\alpha = 0,\ \ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Для интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $n = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Находим

$$x'' = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 2\alpha,\ \ x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Тогда $\alpha = \frac{\pi}{4}$ – точка строгого максимума для функции (9.11), а так как экстремум единственный в области определения непрерывной функции, то это и есть искомый угол.▶

Задание 5. Светящаяся точка C находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена между этими шарами. При каком положении точки C сумма освещенных частей поверхностей шаров (площадей этих поверхностей) будет наибольшей? Длина отрезка линии центров этих шаров равна a и

$$a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}. \tag{9.12}$$

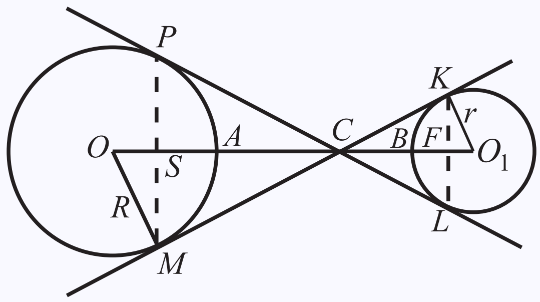
◀Введем обозначение: $OC = x$, тогда $CO_1 = a - x$.

Из подобия ΔOMC и ΔOSM получим: $R^2 = OS \cdot x$, $OS = \frac{R^2}{x}$, $SA = R - \frac{R^2}{x}$. Аналогично: $BF = r - \frac{r^2}{a-x}$. Дальше находим площадь освещенных частей указанных сфер.

$$S = 2\pi R \cdot SA + 2\pi r \cdot BF = 2\pi R\left(R - \frac{R^2}{x}\right) + 2\pi r\left(r - \frac{r^2}{a-x}\right).$$

Получили функцию

$$S(x) = 2\pi\left(R^2 + r^2\right) - 2\pi\left(\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{a-x}\right), \quad x \in [R, a-r]. \tag{9.13}$$



Кафедра МАДУП

Функция S будет иметь наибольшее значение в той точке области определения, в которой функция

$$f(x) = \frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{a-x}$$

будет иметь наименьшее значение.

$$f'(x) = -\frac{R^3}{x^2} + \frac{r^3}{(a-x)^2} = \frac{r^3x^2 - R^3(a-x)^2}{x^2(a-x)^2};$$

$$f'(x) = 0;\ r^3x^2 = R^3(a-x)^2;$$

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{R^3}{r^3};\ \frac{x}{a-x} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{r^3}};\ \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}};\ x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}.$$

Проверим, является ли точка $x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}$ точкой области определения функции.

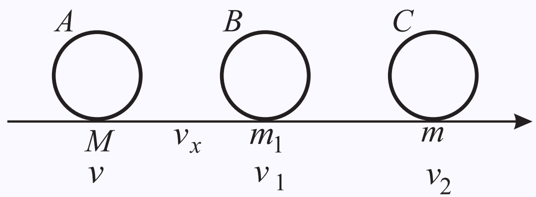
$$\frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}} \leqslant a - r;\ \sqrt{R^3}a \leqslant a\left(\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}\right) - r\left(\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}\right);$$

$$a\sqrt{r^3} \geqslant r\left(\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}\right);\ a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Условие (9.12) выполняется.

Находим $f'' = \frac{2R^3}{x^3} + \frac{2r^3}{(a-x)^3} > 0$. Вывод: точка $x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}$ есть единственная точка минимума непрерывной функции f, а значит, точка максимума функции S, а поэтому при $x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}$ площадь освещенности шаров будет наибольшей. ▶

Задание 6. Центры трех вполне упругих шаров A, B, C расположены на одной прямой. Шар A массы M со скоростью v ударяет в шар C массы m. Какова должна быть масса шара B, чтобы скорость C оказалась наибольшей?



◀Обозначим: m_1 – масса шара B, v_1 – скорость шара B, v_2 – скорость шара C, v_x – скорость шара A после удара.

Используя законы сохранения количества движения и энергии, получим

$$\begin{cases} Mv = Mv_x + m_1 v_1, \\ \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_x^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2}; \end{cases} \tag{9.14}$$

$$\begin{cases} \frac{M(v-v_x)}{M(v^2-v_x^2)} = \frac{m_1 v_1}{m_1 v_1^2}, \\ Mv = Mv_x + m_1 v_1; \end{cases} \tag{9.15}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{v+v_x} = \frac{1}{v_1}, \\ \frac{m_1 v_1}{M} = v - v_x; \end{cases} \quad \begin{cases} v + v_x = v_1, \\ v - v_x = \frac{m_1 v_1}{M}; \end{cases} \quad 2v = v_1 + \frac{m_1 v_1}{M}; \quad v_1 = \frac{2vM}{M + m_1}. \tag{9.16}$$

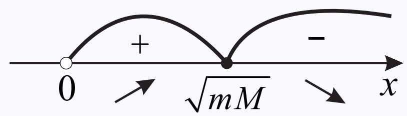
Аналогично (9.16) будет

$$v_2 = \frac{2v_1 m_1}{m_1 + m} = \frac{2 \cdot \frac{2vM}{M+m_1} m_1}{m_1 + m} = \frac{4vMm_1}{(m_1 + m)(M + m_1)} = v_2(m_1). \tag{9.17}$$

Обозначим $m_1 = x$. Функция $v_2 = v_2(m_1)$ примет наибольшее значение при тех значениях m_1, при которых функция $f(x) = \frac{x}{(x+m)(M+x)}$ примет $(x \in (0, +\infty))$ также наибольшее значение.

$$f'(x) = \frac{(x+m)(x+M) - x(x+M+x+m)}{(x+m)^2(x+M)^2} = \frac{mM - x^2}{(x+m)^2(x+M)^2},$$

$$x = \sqrt{mM}, \text{ если } f'(x) = 0.$$



Точка $x = \sqrt{mM}$ есть единственная точка максимума непрерывной функции f, а значит, и функции v_2, а поэтому при $m_1 = \sqrt{mM}$ скорость шара C будет наибольшей.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите наибольшие и наименьшие значения функций:

   1.1 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на отрезке $[0, 3]$;

   1.2 $y = x - 2\ln x$ на отрезке $[1, e]$;

   1.3 $y = 2\sin x + \cos 2x$ на полуинтервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   1.4 $y = \sqrt{5 - 4x}$ на полуинтервале $[-1, 1)$;

   1.5 $y = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$.
2. Какое положительное число, будучи сложенным с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?
3. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3, причем стороны основания относились бы как $1 : 2$. Каковы должны быть размеры всех ребер, чтобы полная поверхность была наименьшей?
4. На окружности дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.
5. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?
6. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?
7. Требуется изготовить коническую воронку с образующей $l = 20$ см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
8. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.
9. В конус, радиус основания которого R и высота H, требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность. Найдите радиус цилиндра.
10. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают).

11. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.
12. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.
13. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определите размеры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре.
14. Картина высотой $1,4$ м повешена на стену так, что ее нижний край на $1,8$ м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятно для осмотра картины (то есть чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим)?
15. Статуя высотой 4 м стоит на колоне, высота которой $5,6$ м. На каком расстоянии должен встать человек ростом (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?
16. На странице текст должен занимать 384 см^2. Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, правое и левое – по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?
17. Камень брошен вверх с поверхности земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая ускорение силы свободного падения $g \approx 9,8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, найдите: 1) наибольшую высоту подъема камня в зависимости от начальной скорости v_0; 2) скорость камня в самом верхнем положении; 3) время, через которое камень упадет на землю, если скорость измеряется в метрах в секунду.
18. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?
19. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой F. Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против сдвигающей силы. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен k. Под каким углом φ к горизонту надо приложить силу F, чтобы величина ее оказалась наименьшей? Определить наименьшую величину сдвигающей силы.
20. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

21. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.
22. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр равен P. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?
23. Дан ящик с квадратным основанием и объемом V. Каковы должны быть его размеры для того, чтобы поверхность (без крышки) была наименьшей?
24. Прямо над центром круглой площадки радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка (степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?
25. Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? Сопротивлением воздуха пренебрегаем.
26. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S, а уровень воды равен h.
27. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V.
28. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?
29. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный от шоссе в 15 км от упомянутой точки шоссе (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

ЛЕКЦИЯ 10
Исследование функции и построение ее графика

10.1 Вертикальная, горизонтальная и наклонная асимптоты. Критерий горизонтальных и наклонных асимптот

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a – предельная точка множества X.

Определение 10.1. *Прямая $x = a$ называется* ***вертикальной асимптотой*** *графика функции f, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ равен $-\infty$ или $+\infty$.*

Пример 10.1. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, так как

$$f(0+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty.$$

Замечание 10.1. Если функция f дробно-рациональная (отношение многочленов: $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$), то вертикальные асимптоты находим в следующем порядке:

1. Находим действительные нули знаменателя $Q_m(x)$, которые не являются нулями числителя $P_n(x)$. Допустим, это будут x_k, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant m$.

2. Тогда прямые $x = x_k$ будут вертикальными асимптотами (при необходимости находим односторонние пределы $f(x_k \pm 0)$).

Определение 10.2. *Прямая $y = kx + b$ называется* ***наклонной асимптотой*** *графика функции $f : X \to \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$, $x \to \infty$), если функция f представима в виде*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0 \ \left(\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0\right)$.

Следствие 10.1. *Если* $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– дробно-рациональная функция, то:*
при $n < m$ *прямая* $y = 0$ *– горизонтальная асимптота;*
при $n = m$ *прямая* $y = a$ *– горизонтальная асимптота, где* $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$*;*
при $n = m + 1$ *функция* f *представима в виде* $f(x) = kx + b + \alpha(x)$*, где* $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$*, и* $y = kx + b$ *– наклонная асимптота.*
В других случаях дробно-рациональная функция наклонных (горизонтальных) асимптот не имеет.

Пример 10.2. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

◀Находим нули знаменателя.

$$2x^2 - x - 1 = 0,\ D = 1^2 + 8 = 9;\ x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Видно, что нули знаменателя не являются нулями числителя. Значит, $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$ – вертикальные асимптоты.

Так как $n = m + 1$, то функция f имеет и наклонную асимптоту при $x \to \infty$. Выделим целую часть делением числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1 & 2x^2 - x - 1 \\ \underline{2x^3 - x^2 - x} & \overline{x - 2} \\ -4x^2 + 5x + 1 & \\ \underline{-4x^2 + 2x + 2} & \\ 3x - 1 & \end{array}$$

Тогда $f(x) = x - 2 + \frac{3x-1}{2x^2-x-1}$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-1}{2x^2-x-1} = 0$. Значит, $y = x - 2$ – наклонная асимптота при $x \to \infty$. ▶

Теорема 10.1. *График функции* $f : X \to \mathbb{R}$ *имеет при* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty,\ x \to \infty)$ *асимптоту* $y = kx + b$ *тогда и только тогда, когда:*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty,\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad \textit{и} \quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty,\infty)}} (f(x) - kx) = b \in \mathbb{R}.$$

◀**Необходимость.** Так как $y = kx + b$ – асимптота при $x \to +\infty$, то

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$, а из критерия существования у функции конечного предела следует, что $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. ▶

Пример 10.3. Найти асимптоты графика функции $f(x) = 4x + \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$.

◀Вертикальных асимптот функция не имеет, так как она определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдем:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(4 + \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{4}}{x}\right) = 4;$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2};$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{2}.$

Значит, $y = 4x + \frac{\pi}{2}$ – асимптота графика функции f при $x \to +\infty$, а $y = 4x - \frac{\pi}{2}$ – при $x \to -\infty$. ▶

10.2 Применение дифференциального исчисления к исследованию функции и построению ее графика

Примерный план исследования функции и построения ее графика

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование функции на четность-нечетность.
3. Исследование функции на периодичность.
4. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат и нулей функции.
5. Исследование функции на непрерывность. Пределы в бесконечных точках.
6. Нахождение интервалов знакопостоянства функции.
7. Нахождение асимптот графика функции.
8. Исследование функции на экстремум и монотонность.
9. Нахождение множества значений функции.
10. Нахождение интервалов выпуклости функции и точек перегиба.

Замечание 10.2. Порядок пунктов исследования (при необходимости) можно менять. Например, когда (пункт 8) получается, что наша функция строго монотонная в своей области определения ($D(f)$ допускает разбиения на конечное число промежутков, на каждом из которых f возрастает или убывает), то функция будет непериодической.

Замечание 10.3. Если исследование функции в некоторых точках слишком громоздко или его практически точно нельзя выполнить, то такие точки исследования опускаются, или применяются приближенные методы.

Пример 10.4. Исследовать функцию $f(x)=\frac{x^3-x+1}{x^2}$ и построить ее график.

◀1. $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. Функция не является четной и не является нечетной, так как

$$\exists x=2\in D(f),\quad f(2)=\frac{7}{4},\quad f(-2)=-\frac{5}{4},\quad f(-2)\neq f(2) \text{ и } f(-2)\neq -f(2).$$

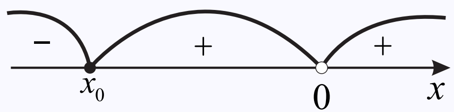
3. Точки пересечения с осями координат:

а) с Oy – нет $(x\neq 0)$,

б) с Ox – $x_0\approx -1,3$ – нуль функции (использование графического метода и теоремы Больцано – Коши).

4. Функция непрерывна в своей области определения как дробно-рациональная.

5. Интервалы знакопостоянства функции (применим метод интервалов):



$f(x)>0$, если $x\in(x_0,0)$ или $x\in(0,+\infty)$;

$f(x)<0$, если $x\in(-\infty,x_0)$.

6. Асимптоты. Так как

$$f(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^3-x+1}{x^2}=+\infty=f(0+0),$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x+1}{x^2}=-\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x+1}{x^2}=+\infty,$$

то $x=0$ – вертикальная асимптота.

$f(x)=\frac{x^3-x+1}{x^2}=x+\frac{-x+1}{x^2}$. Значит, $y=x$ – наклонная асимптота.

7. Исследование на монотонность и экстремум.

$$y' = \left(x - \frac{x-1}{x^2}\right)' = 1 - \frac{2-x}{x^3} = \frac{x^3+x-2}{x^3};$$

$$x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right) = 0,$$

$$y'' = 2\frac{3-x}{x^4}, \text{ причем } y''\Big|_{x=1} > 0.$$

Значит, $x = 1$ – точка минимума, $y_{\min}(1) = 1$. На промежутках $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ функция возрастает (по знаку $f'(x)$), а на промежутке $(0, 1)$ – убывает.

8. Функция непериодическая, так как она строго кусочно-монотонная в своей области определения.

9. Множество значений функции. На промежутке $(-\infty, 0)$ функция непрерывна,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty,$$

значит, $E(f) = \mathbb{R}$.

10. Интервалы выпуклости и точки перегиба. $y'' = 2\frac{3-x}{x^4}$; $y'' = 0$ при $x = 3$. Находим (методом интервалов) интервалы знакопостоянства y'': $(-\infty, 0)$; $(0, 3)$ – интервалы строгой выпуклости вниз; $(3, +\infty)$ – интервалы строгой выпуклости вверх. $x = 3$ – точка перегиба, $f(3) = \frac{26}{9}$.

Далее будем строить график функции в следующем порядке.

1. Строим асимптоты.

2. Наносим точки экстремума, перегиба, точки пересечения с осями координат.

3. При необходимости находим другие точки графика функции. Например: а) $x = 2$, $y = \frac{7}{4}$ б) $x = 0,5$, $y = 1,5$; в) $x = -1$, $y = 1$; г) $x = -2$, $y = -\frac{5}{4}$.

График функции изображен на рисунке 10.1.▶

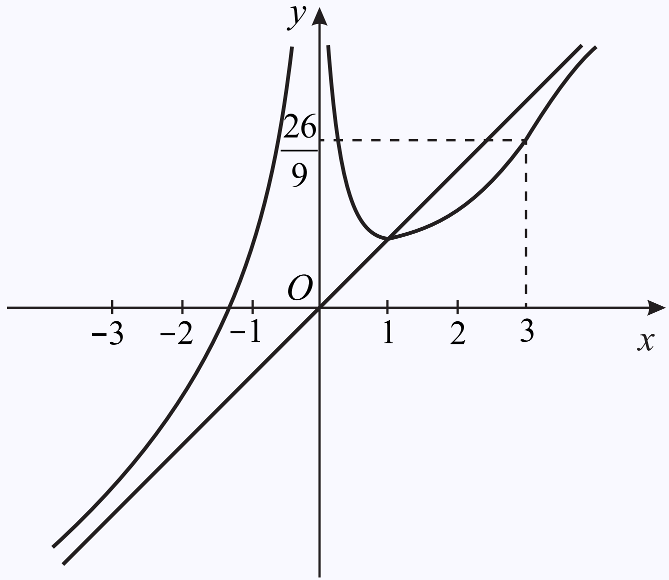


Рисунок 10.1 – График функции $f\left(x\right)=\frac{x^3-x+1}{x^2}$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?
2. Как найти наклонные, вертикальные и горизонтальные асимптоты дробно-рациональной функции?
3. Сформулируйте план исследования функции.
4. Исследуйте и постройте график функции $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Исследование функции и построение ее графика

Задание 1. Исследовать функцию $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

◀1. Область определения функции: $D(f) = (0, +\infty)$.

2. Исследование функции на четность-нечетность.

Функция не является четной и не является нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Точки пересечения графика функции с осями координат.

Точки пересечения с осью Oy: точек пересечения с осью нет, так как $x > 0$.

Точки пересечения с осью Ox: $y = 0: \quad x + \frac{\ln x}{x} = 0$ или $x^2 = -\ln x$.

Построим графики функций $y = x^2$ и $y = -\ln x$ (рисунок 10.2).

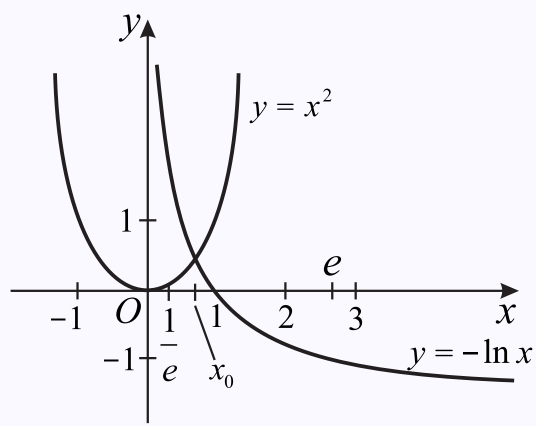


Рисунок 10.2

Используя теорему Больцано – Коши об обращении непрерывной на отрезке функции в нуль и рисунок 10.2, находим, что

$$0,65 < x_0 < 0,66.$$

Вывод: x_0 – нуль функции.

4. Исследование функции на непрерывность.

Функция непрерывна в своей области определения (обосновать самостоятельно).

5. Асимптоты графика функции.

$\lim\limits_{x\to+0}\left(x+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$, значит, $x=0$ – вертикальная асимптота. Других вертикальных асимптот функция не имеет, так как для любых $x=x_0>0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$ (в силу непрерывности функции в точке x_0).

Исследуем функцию на наличие наклонных и горизонтальных асимптот вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{\ln x}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x^2}\right)=$$

$$=\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0\right]=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Вывод: $y=x$ – наклонная асимптота графика функции.

6. Предельное значение функции в точке $x=+\infty$. Множество значений функции.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty.\ E(f)=\mathbb{R}$$

(докажите это самостоятельно, используя теорему о множестве значений функции, непрерывной на промежутке).

7. Исследование функции на монотонность и экстремум.

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$$

Для исследования знака производной изобразим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = \ln x$ (рисунок 10.3). Из рисунка 10.3 видно, что $x^2 + 1 > \ln x$ при $x > 0$.

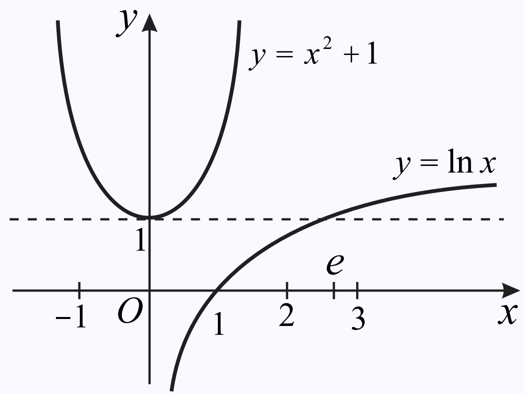


Рисунок 10.3

Вывод: Функция возрастает в своей области определения, а поэтому она экстремумов не имеет.
8. Исследование функции на выпуклость и точки перегиба.

$$f''(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - 2x\left(1 - \ln x\right)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Найдем нули второй производной: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2}$, $4,48 < x_1 < 4,49$, $x_1 \approx 4,49$ (рисунок 10.4).

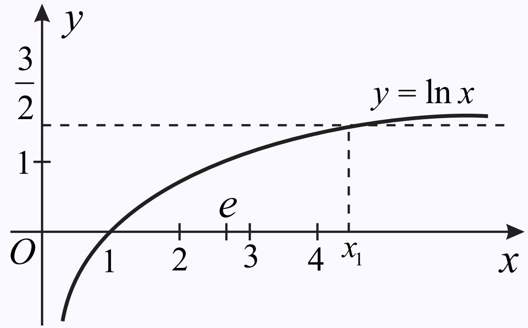


Рисунок 10.4

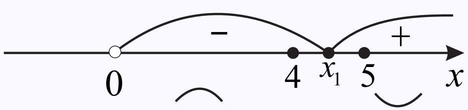


Рисунок 10.5

Методом интервалов исследуем вторую производную на интервалы знакопостоянства (рисунок 10.5): x_1 – точка перегиба, $f\,(x_1) \approx 4,82$.

В интервале $(0, x_1)$ функция f выпукла вверх, а в интервале $(x_1, +\infty)$ – выпукла вниз.

9. Исследование функции на периодичность.

Функция будет непериодической, так как функция возрастает на $D(f)$, а поэтому каждое свое значение принимает в единственной точке. Периодическая же функция любое свое значение принимает на бесконечном множестве точек.

10. Область значений функции $E(f) = (-\infty, +\infty)$.

11. Найдем значения функции в некоторых «рядовых» точках.

а) Найдем точку пересечения графика функции с наклонной асимптотой $y = x$.

$$x + \frac{\ln x}{x} = x, \ \ln x = 0, \ x = 1, \ y = 1, \ A_1 (1, 1) .$$

б) $f(3) \approx 3,37$; $f(4) \approx 4,35$; $f(5) \approx 5,32$; $f(6) \approx 6,3$; $f(0,5) \approx -0,9$.
Строим график функции (рисунок 10.6).►

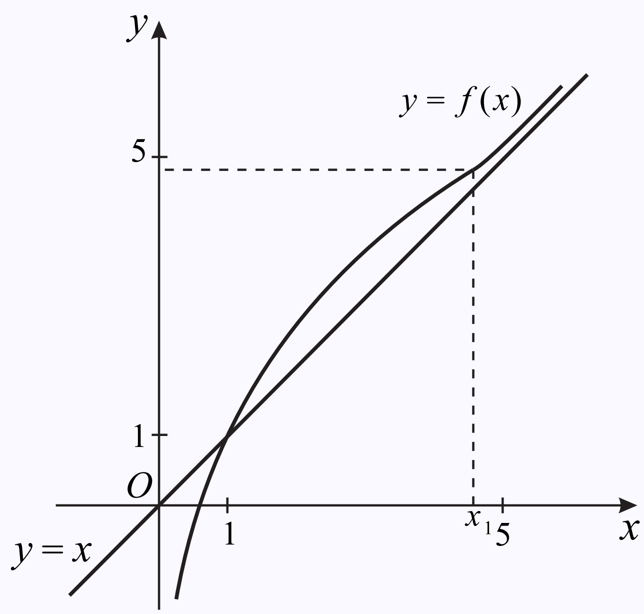


Рисунок 10.6

Задание 2. Исследуйте функцию $y = \frac{3x^2}{3x-1}$ и постройте ее график.

◀1. Область определения функции $D(f) = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

2. Функция не является четной и не является нечетной, так как область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат: $(0, 0)$.

4. Исследуем функцию на непрерывность и выясним характер точек разрыва. Очевидно, что данная функция непрерывна на $D(f)$.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{3x-1} = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{3x-1} = +\infty.$$

6. Найдем интервалы знакопостоянства функции (рисунок 10.7).

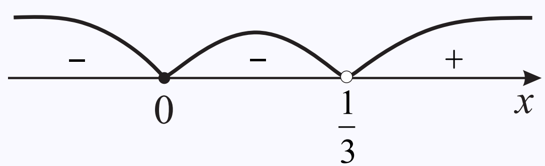


Рисунок 10.7

7. Так как $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}-0} \frac{3x^2}{3x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}+0} \frac{3x^2}{3x-1} = +\infty$, то прямая $x = \frac{1}{3}$ является вертикальной асимптотой.

Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот. Найдем угловой коэффициент k наклонной асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{3x-1} = 1$.

Найдем предел разности $y - kx$ при $x \to \pm\infty$: $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2}{3x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$.

Прямая $y = x + \frac{1}{3}$ является наклонной асимптотой данной кривой.

8. Найдем экстремумы и промежутки возрастания и убывания функции:

$$y' = \frac{6x(3x-1) - 3\cdot 3x^2}{(3x-1)^2} = \frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}.$$

Производная равна нулю в точках $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$.

Производная не существует при $x = \frac{1}{3}$, однако эта точка не принадлежит области определения функции. Поэтому точками, «подозрительными» на экстремум, будут только точки $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$. Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
		max				min	

В точке $x = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x = \frac{2}{3}$ функция имеет минимум.

9. Исследуем функцию на наличие точек перегиба и найдем промежутки выпуклости вверх и вниз

$$y'' = \frac{(18x-6)(3x-1)^2 - (9x^2-6x)(3x-1)\cdot 6}{(3x-1)^4} = \frac{6}{(3x-1)^3}.$$

Нет точек, в которых $y'' = 0$. y'' не существует при $x = \frac{1}{3}$, но $x = \frac{1}{3} \notin D(f)$. Функция не имеет точек перегиба. Составим таблицу:

x	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
y	$\cap$	$\nexists$	$\cup$
y''	$-$	$\nexists$	$+$

10. Функция непериодическая (обосновать самостоятельно с учетом пункта 8 исследования функции).

11. Область значений функции $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

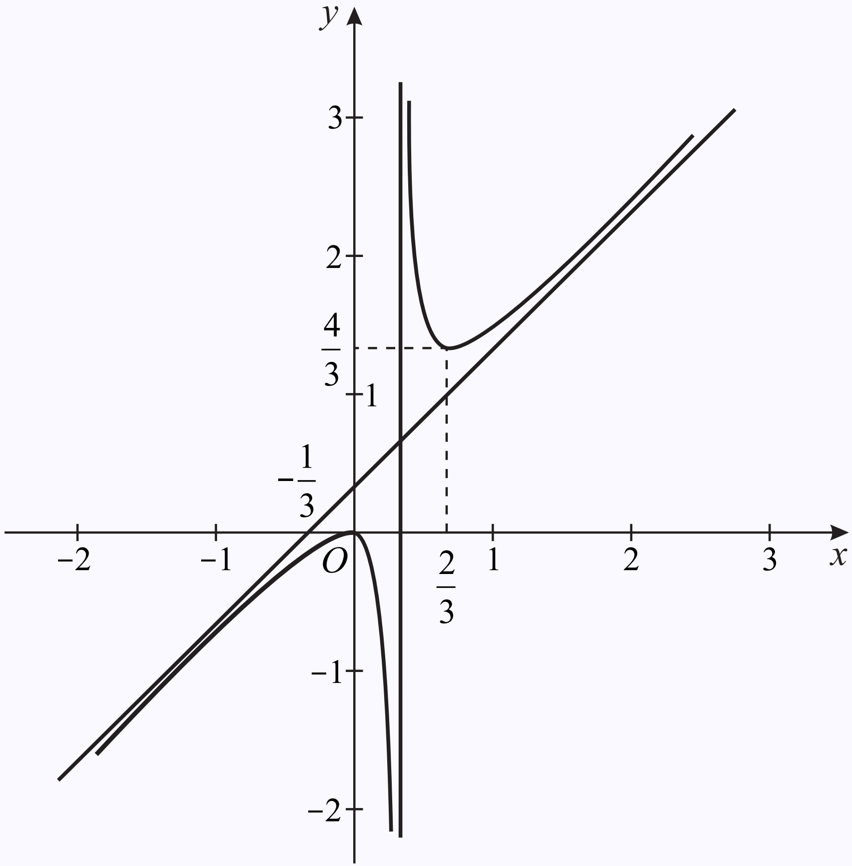


Рисунок 10.8

Используя полученные результаты, построим график функции (рисунок 10.8).▶

Задание 3. Исследовать функцию и построить ее график:

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

◀1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Исследование функции на четность-нечетность.

Функция не является четной и не является нечетной, так как область определения не симметрична относительно начала координат (для точки $x = -1$ симметричная ей точка относительно начала координат $x = 1$ не принадлежит области определения функции).

3. Исследование функции на периодичность.

Функция непериодическая:

$$\forall T \in \mathbb{R},\ T \neq 0,\ x = -T + 1 \in D(f),$$

но

$$x + T = -T + 1 + T = +1 \notin D(f).$$

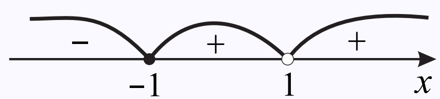
4. Точки пересечения графика функции с осями координат, нули функции.

Точки пересечения с осью Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 1$, $(0, 1)$.

Точки пересечения с осью Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -1$, $(-1, 0)$.

$x = -1$ – нуль функции.

5. Интервалы знакопостоянства функции.



В интервале $(-\infty, -1)$ $f(x) < 0$, а в интервалах $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ $f(x) > 0$.

6. Исследование функции на непрерывность. Пределы в бесконечных точках.

В своей области определения функция непрерывна как дробно-линейная.

Найдем пределы функции в бесконечных точках:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=-\infty.$$

7. Множество значений функции.

С учетом $f\,(1-0)$ и $\lim \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=-\infty$ на основании теоремы о множестве значений непрерывной на промежутке функции заключаем, что $E\,(f)=\mathbb{R}$.

8. Асимптоты графика функции. Так как

$$f\,(1-0)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty,\ \ f\,(1+0)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty,$$

то $x=1$ – вертикальная асимптота.

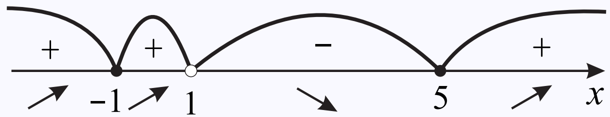
Дальше выделяем целую часть функции.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+3x+1 & x^2-2x+1 \\ \underline{x^3-2x^2+x} & \overline{x+5} \\ -\,5x^2+2x+1 & \\ \underline{5x^2-10x+5} & \\ 12x-4 & \end{array}\qquad f\,(x)=x+5+\frac{12x-4}{x^2-2x+1}.$$

Значит, $y=x+5$ – наклонная асимптота графика функции как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

9. Исследование функции на монотонность и экстремум

$$y'=\frac{3\,(x+1)^2\,(x-1)^2-2\,(x-1)\,(x+1)^3}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2\,(3x-3-2x-2)}{(x-1)^3}=\frac{(x+1)^2\,(x-5)}{(x-1)^3}.$$



Методом интервалов исследуем производную f' на интервалы знакопостоянства.

На промежутках $(-\infty, 1)$ и $[5, +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $(1, 5]$ – убывает (обоснуйте самостоятельно).

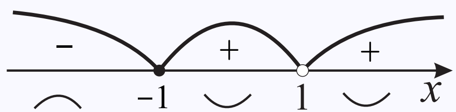
В точке $x = 5$ функция имеет строгий минимум $f(5) = \frac{27}{2}$.

10. Исследование функции на выпуклость и наличие точек перегиба.

$$y'' = \frac{\left(2(x+1)(x-5) + (x+1)^2\right)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x+1)\left((3x-9)(x-1) - (3x^2-12x-15)\right)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)\left(3x^2-12x+9-3x^2+12x+15\right)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)\cdot 24}{(x-1)^4}.$$

Методом интервалов исследуем вторую производную на интервалы знакопостоянства. $x = -1$ – точка перегиба, $f(-1) = 0$. В интервале $(-\infty, -1)$ функция выпукла вверх, а в интервалах $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ – выпукла вниз.



$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{27}{2};\ f(7) = \frac{8^3}{6^2} = \frac{8\cdot 4^2}{3^2} = 14\frac{2}{9};\ f(-4) = \frac{(-4+1)^3}{(-4-1)^2} = -\frac{27}{25}.$$

Строим график функции (рисунок 10.9).▶

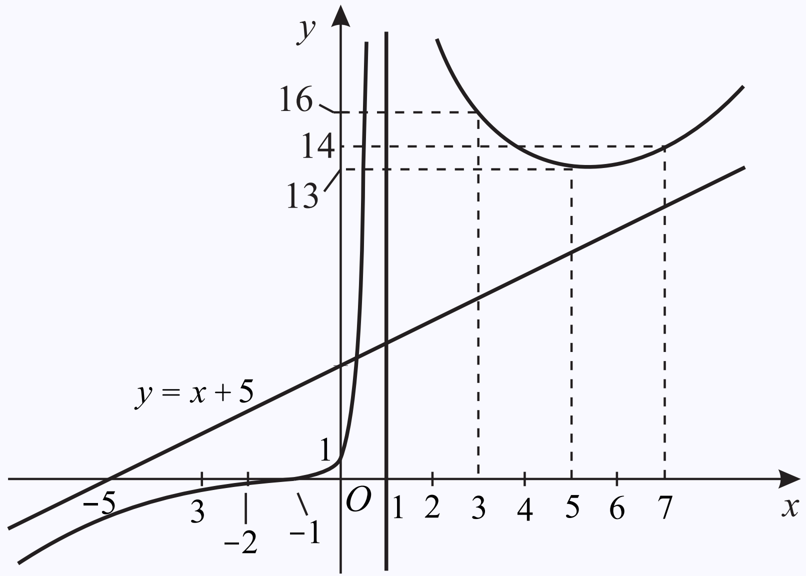


Рисунок 10.9

Задания для самостоятельного решения

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

1.1 $y = \frac{x}{1-x^2}$;

1.2 $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$;

1.3 $y = \frac{x^2-1}{x^2+4}$;

1.4 $y = \frac{(x-1)^4}{x(x^2-4)}$;

1.5 $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$;

1.6 $y = x(x-1)^3$.

2. Исследуйте функции и постройте их графики:

2.1 $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$;

2.2 $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$;

2.3 $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

2.4 $y = x + \sqrt[3]{(x^2 - 1)^3}$.

3. Исследуйте функции и постройте их графики:

3.1 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3.2 $y = e^{x^2 - 2x}$;

3.3 $y = x^3 e^{-x}$;

3.4 $y = \frac{e^{-x^2}}{x+1}$;

3.5 $y = e^{\frac{1-x^2}{x^4}}$;

3.6 $y = x - \ln(x + 1)$;

3.7 $y = x^2 + \frac{\ln 2x}{x}$;

3.8 $y = x^3 \ln^2 x$;

3.9 $y = x - \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

Исследование функции и построение ее графика

Задание 1. Исследовать функцию $f(x) = \cos^2 x - \cos x$ и построить ее график.

◀1. Область определения функции: $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Исследование функции на четность-нечетность.

а) $D(f) = \mathbb{R}$ – симметрична относительно начала координат;

б) $\forall x \in D(f)$ $f(-x) = \cos^2(-x) - \cos(-x) = \cos^2 x - \cos x = f(x)$.

Функция четная.

3. Функция периодическая, основной ее период $T = 2\pi$.

Замечание 10.4. С учетом четности и периодичности функции ее дальнейшее исследование можно проводить только для отрезка $[0, \pi]$. График для всей области определения получим отображением построенного графика относительно оси Oy и периодическим продолжением.

4. Точки пересечения графика функции с осями координат. Нули функции.

Точки пересечения с осью Oy: $x = 0$, $f(0) = \cos^2 0 - \cos 0 = 0$. График функции проходит через начало координат.

Точки пересечения с осью Ox: $\cos^2 x - \cos x = 0$, $\cos x(\cos x - 1) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = 2\pi n, \end{array}\right. \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Отрезку $[0, \pi]$ принадлежат нули функции: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

5. Исследование функции на непрерывность. Пределы в бесконечных точках.

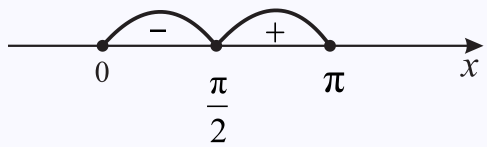
Функция непрерывна на $\mathbb{R}$ (обосновать самостоятельно). Пределы в бесконечных точках функции не существуют (обоснуйте самостоятельно).

6. Интервалы знакопостоянства функции.

Выбираем для проверки точки $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3}{4}\pi$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0;$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos^2\frac{3}{4}\pi - \cos\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$



Таким образом, $f(x) > 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; $f(x) < 0$, если $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Асимптоты графика функции.

1) вертикальных асимптот функция не имеет (в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция непрерывна, поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$);

2) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x} = 0$;

3) $b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (\cos^2 x - \cos x)$ – пределы не существуют.

Наклонных и горизонтальных асимптот функция не имеет.

8. Исследование функции на экстремум и монотонность.

$$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + \sin x = \sin x(1 - 2\cos x).$$

Находим критические точки (они будут стационарными).

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.\end{array}\right.$$

Методом интервалов исследуем производную на отрезке $[-\pi, \pi]$ на интервалы знакопостоянства. Вначале определим кратность нулей первой производной. Находим вторую производную

$$f''(x) = \cos x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = \cos x - 2\cos 2x = \varphi(x)\,.$$

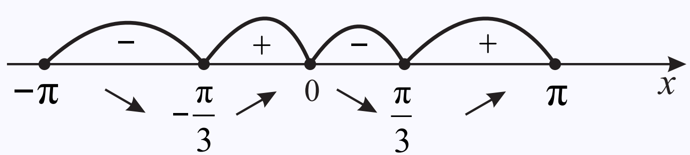
Функция φ – четная.

$$f''(0) = -1,\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = f''\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

Все нули f' первой кратности, так как в этих точках $f''(x) \neq 0$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0;$$

при переходе через нули знаки f' меняются, так как все нули первой кратности.



Множество промежутков убывания функции f:

$$A = \left\{\left[-\pi + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], \left[2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]\right\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Множество промежутков возрастания функции f:

$$B = \left\{ \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n \right], \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n \right] \right\}, n \in \mathbb{Z}.$$

Множество точек строгого максимума: $C = \{2\pi n, \pi + 2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, причем $f(0) = 0$, $f(\pi) = 2$.
Множество точек строгого минимума:

$$D = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right\}, \ n \in \mathbb{Z},$$

причем $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$.

Замечание 10.5. Можно для исследования на экстремум применить второй достаточный признак строгого экстремума функции в точке.

Найдем значения функции в точках экстремума:
а) $f(0) = 0$ – строгий максимум;
б) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$ – строгий минимум;
в) $f(\pi) = 2$ – строгий максимум.
9. Множество значений функции: $E(f) = \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$.
10. Исследование функции на выпуклость и наличие точек перегиба.

$$f''(x) = \cos x - 2\cos 2x; \ f''(x) = 0; \ \cos x - 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0;$$

$$4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0; \ t = \cos x; 4t^2 - t - 2 = 0; \ D = 1 + 8 \cdot 4 = 33;$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}; \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0,84, \\ t_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx -0,59; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}, \\ \cos x = \frac{1-\sqrt{33}}{8}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2\pi n, \\ x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} + 2\pi n, \end{array} \right. n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, то $x \approx 0,57$ $(x \approx 32,86^\circ)$; если $\cos x = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$, то $x \approx 2,20$ $(x \approx 126,16^\circ)$.

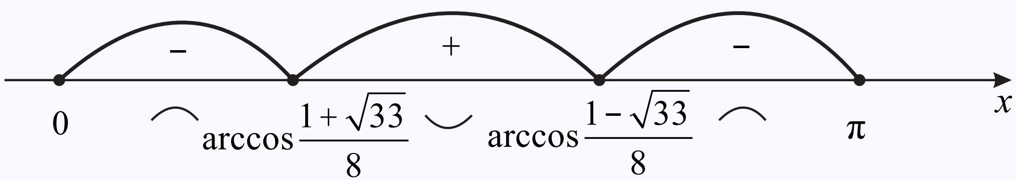
Методом интервалов исследуем знаки f'' на отрезке $[0, \pi]$.
Определим кратность нулей второй производной:

$$f'''(x) = -\sin x + 4\sin 2x; \;\; f'''(x) = 0; \;\; -\sin x + 8\sin x \cdot \cos x = 0;$$

$$\sin x\,(-1 + 8\cos x) = 0; \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{8}. \end{array} \right.$$

Очевидно, что нули f''' на отрезке $[0, \pi]$ не совпадают с нулями f'' на этом промежутке, то есть имеем простые нули f'', а поэтому f'' меняет знаки при переходе через свои нули.

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\pi = 2 > 0.$$



Вывод: $x_1 = \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ и $x_2 = \arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}$ – точки перегиба.

$$f(x_1) = \left(\cos\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)^2 - \cos\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{33}}{8} = \frac{1+\sqrt{33}}{8}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8} - 1\right) \approx -0,13.$$

$$f\left(x_2\right)=\frac{1-\sqrt{33}}{8}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}-1\right)\approx 0,94.$$

Множество интервалов выпуклости вверх графика функции:

$$\left\{\left(-\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}+2\pi n,\ \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}+2\pi n\right);\right.$$

$$\left.\left(\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}+2\pi n,\ -\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}+2\pi\left(n+1\right)\right)\right\},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Множество интервалов выпуклости вниз графика функции:

$$\left\{\left(\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}+2\pi n,\ \arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}+2\pi n\right);\right.$$

$$\left.\left(-\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}+2\pi n,\ -\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}+2\pi n\right)\right\},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

x_1', x_2' – также точки перегиба:

$$x_1'=-\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8},\quad x_2'=-\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}. \blacktriangleright$$

График функции $f\left(x\right)=\cos^2 x-\cos x$ изображен на рисунке 10.10.

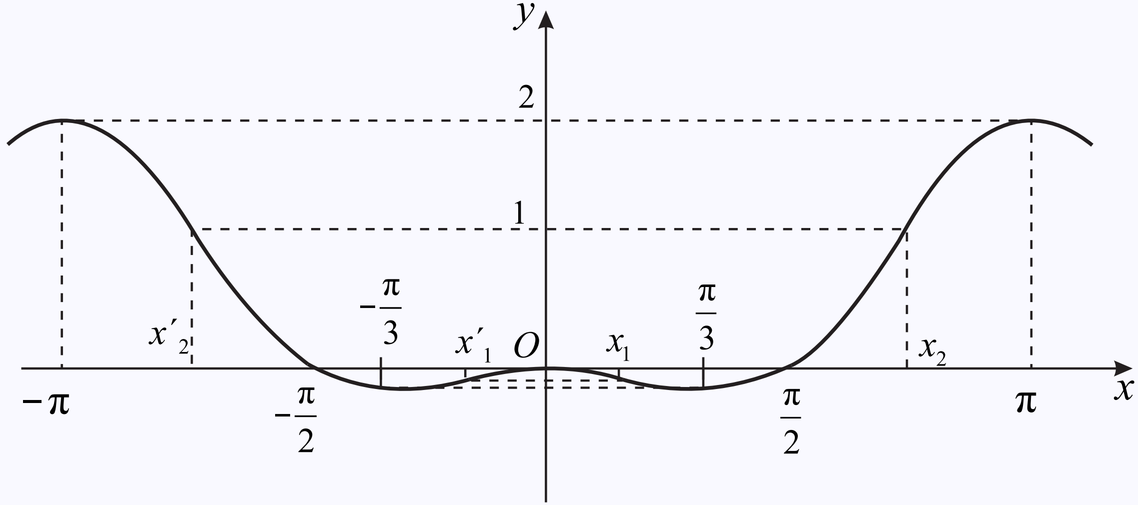


Рисунок 10.10

Задание 2. Построить кривую, заданную параметрически:

$$x\left(t\right)=\frac{t^2}{t-1},\ y\left(t\right)=\frac{t}{t^2-1}.$$

◄1. Находим общую часть областей определения функций x и y, отметив те значения t_i, включая $t_i=\pm\infty$, для которых хотя бы один из пределов $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0}x\left(t\right)$, $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0}y\left(t\right)$ равен $+\infty$ или $(-\infty)$. Получаем:

$$t\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(1,+\infty\right).$$

При этом:

$$\lim_{t\to-\infty}x(t)=-\infty,\ \lim_{t\to-1-0}x(t)=-\frac{1}{2},\ \lim_{t\to-1+0}x(t)=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = -\infty,\quad \lim_{t\to 1+0} x(t) = +\infty,\quad \lim_{t\to +\infty} x(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to -\infty} y(t) = 0,\quad \lim_{t\to -1-0} y(t) = -\infty,\quad \lim_{t\to -1+0} y(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to 1-0} y(t) = -\infty,\quad \lim_{t\to 1+0} y(t) = +\infty,\quad \lim_{t\to +\infty} y(t) = 0.$$

2. Находим асимптоты кривой.

а) из пункта 1 видно, что $x = -\frac{1}{2}$ – вертикальная асимптота:

$$\lim_{\substack{t\to -1-0\\ x\to -\frac{1}{2}-0}} y\,(t) = -\infty,\quad \lim_{\substack{t\to -1+0\\ x\to -\frac{1}{2}+0}} y\,(t) = +\infty.$$

б) $y = 0$ – горизонтальная асимптота:

$$\lim_{\substack{t\to -\infty\\ x\to -\infty}} y\,(t) = 0,\quad \lim_{\substack{t\to +\infty\\ x\to +\infty}} y\,(t) = 0.$$

в) для нахождения наклонных асимптот воспользуемся соответствующим критерием для нахождения асимптот вида $y = kx + b$

$$\left(k = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f\,(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{y}{x},\quad b = \lim_{x\to +\infty} (y - kx)\right).$$

У нас $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{\substack{t\to \infty\\ t\to 1}} \frac{1}{t(t+1)} = \begin{cases} 0, & \text{при а), б);}\\ \frac{1}{2}, & \text{при в), г).}\end{cases}$

а) $t \to -\infty$ $(x \to -\infty)$, в) $t \to 1 - 0$ $(x \to -\infty)$,

б) $t \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, г) $t \to 1 + 0$ $(x \to +\infty)$.

а,б) $\lim\limits_{t\to \infty} (y - 0x) = \lim\limits_{t\to \infty} \frac{t}{t^2-1} = 0$ $(y = 0)$;

$$\lim_{\substack{x\to\pm\infty\\ t\to 1\pm 0}}\left(y-\tfrac{1}{2}x\right)=\lim_{t\to 1\pm 0}\tfrac{-t^2-2t}{2(t+1)}=-\tfrac{3}{4}.$$

Таким образом, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ – наклонная асимптота.

3. Устанавливаем, обладает ли кривая симметрией, позволяющей сократить и упростить выкладки.

Приведем ниже общую теорию для соответствующих свойств (для нашей задачи ни одно из указанных свойств не имеет места).

Обозначим через T – общую часть областей определения функций x, y.

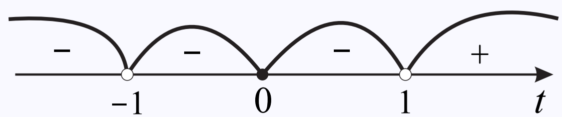
а) $\forall t\in T\ x(-t)=x(t),\ y(-t)=-y(t)$ (симметрия относительно оси Ox);

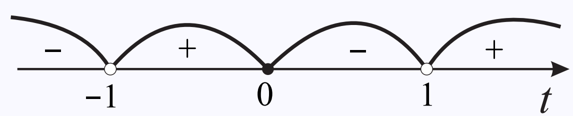
б) $\forall t\in T\ x(-t)=-x(t),\ y(-t)=y(t)$ (симметрия относительно оси Oy);

в) $\forall t\in T\ x(-t)=-x(t),\ y(-t)=-y(t)$ (симметрия относительно начала координат);

г) $\forall t\in T\ x(-t)=x(t),\ y(-t)=y(t)$ (наложение).

4. Находим нули функций x, y и интервалы знакопостоянства этих функций (учитываем общие нули).

$x(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$ 

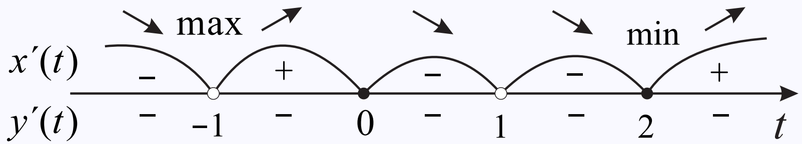
$y(t)=\dfrac{t}{t^2-1}$ 

5. Находим точки t_k, в которых хотя бы одна из производных x' или y' равна нулю или не существует.

$$x'(t)=\frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2};$$

$$y'(t)=\frac{t^2-1-2t^2}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{-1-t^2}{\left(t^2-1\right)^2}=-\frac{1+t^2}{\left(t^2-1\right)^2}.$$

Устанавливаем точки максимума и минимума: $x_{\max}(0)=0$, $x_{\min}(2)=4$; функция y точек эстремума не имеет (для любых $t\neq\pm1$ функция принимает отрицательные значения).



Отметим, что точки t_i, определенные в пункте 1, и точки t_k, определенные в пункте 5, разбивают область T на интервалы (t_p,t_{p+1}) знакопостоянства функций x' и y'. Отсюда следует, что на любых таких интервалах (t_p,t_{p+1}) система функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$ задает функцию $y=f(x)$ ($x=x(t)$ – строго монотонна на указанных интервалах).

6. Исследуем f'' на интервалы знакопостоянства:

$$f'(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{-\left(1+t^2\right)}{(t-1)^2(1+t)^2}}{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}}=\frac{-\left(1+t^2\right)}{(1+t)^2\,t\,(t-2)};$$

$$f''=\frac{\frac{d}{dt}\left(f'\right)}{x'(t)}=\frac{\frac{2(t-1)\left(t^3+3t+1\right)}{(t+1)^3t^2(t-2)^2}}{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}}=\frac{2\,(t-1)\left(t^3+3t+1\right)}{(t+1)^3\,t^3\,(t-2)^3}.$$

Найдем корни уравнения

$$t^3+3t+1=0\Leftrightarrow t^3=-3t+1.$$

Из рисунка 10.11 следует, что указанное выше уравнение имеет только один действительный корень $t \approx -\frac{1}{3}$.

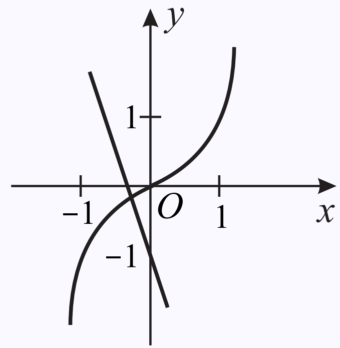
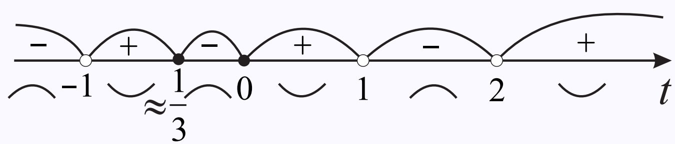


Рисунок 10.11

Интервалы знакопостоянства f'':



7. Составляем таблицу:

(t_p, t_{p+1})	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \approx -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\approx -\frac{1}{3}, 0\right)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
(x_p, x_{p+1})	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \approx -\frac{1}{12}\right)$	$\left(\approx -\frac{1}{12}, 0\right)$	$(0, -\infty)$	$(+\infty, 4)$	$(4, +\infty)$
(y_p, y_{p+1})	$(0, -\infty)$	$\left(-1, \approx -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\approx -\frac{1}{3}, 0\right)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Знак f''	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Используя таблицу, строим ветви кривой, соответствующие указанным интервалам (рисунок 10.12).►

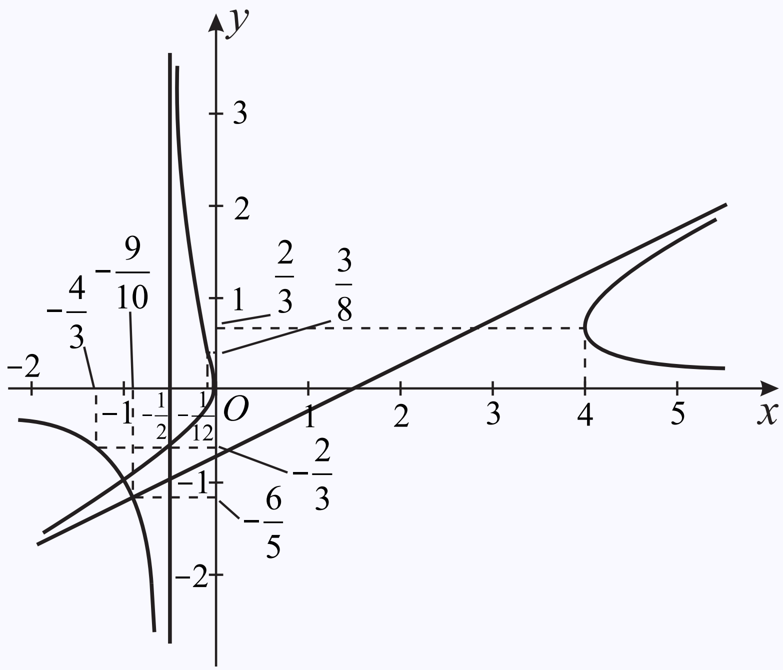


Рисунок 10.12

Задания для самостоятельного решения

1. Исследуйте и постройте графики следующих тригонометрических функций:

1.1 $y = \sin x + \sin 2x$;

1.2 $y = \cos 3x - 3\cos x$;

1.3 $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$;

1.4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

2. Исследуйте и постройте графики сложных функций:

2.1 $y = \ln \sin x$;

2.2 $y = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{x^2+4}$;

2.3 $y = \arcsin \frac{x}{x^2-1}$;

2.4 $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$.

3. Исследуйте и постройте графики функций, заданных параметрически:

3.1 $x(t) = \frac{t^2}{t^2-1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t-1}$;

3.2 $x(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t+1}$;

3.3 $x(t) = \frac{\ln t}{t^2}$, $y(t) = t^2 \ln t$;

3.4 $x(t) = \frac{2t}{t^2+1}$, $y(t) = t^3 - 3t$;

3.5 $x(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}$;

3.6 $x(t) = \frac{t}{3-t^2}$, $y(t) = \frac{t(2-t^2)}{3-t^2}$;

3.7 $x(t) = \frac{t^3}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 1.
Вариант 2.
Вариант 3.
Вариант 4.
Вариант 5.
Вариант 6.
Вариант 7.
Вариант 8.
Вариант 9.
Вариант 10.
Вариант 11.
Вариант 12.

Итоговый тест

Ответьте на вопросы теста.

Задания для подготовки к экзамену и зачету

1. Пользуясь определением, найдите производные функций:

   1.1 $y = \arcsin\sqrt{x}$; 1.3 $y = e^{x^2}$;

   1.2 $y = \cos(x-1)^2$; 1.4 $y = \operatorname{tg}(x-1)$.

2. Покажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ не имеет производной в точке $x = 0$.
3. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенно значение функции $f(x) = x\ln(x-2)$ при $x = 3,001$.
4. Докажите, что функция
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ -\frac{1}{n}, & -\frac{1}{n} \leqslant x < -\frac{1}{n+1}, \end{cases}$$
дифференцируема в точке $x = 0$.
5. Докажите, что многочлен $P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ имеет n корней на $(-1, 1)$.
6. Докажите, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$
7. Докажите неравенство $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.
8. Используя формулу Тейлора – Маклорена, вычислите значение $\cos 9^\circ$ с точностью до 10^{-3}.
9. Докажите, что если $a^2 - 3b < 0$, то уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет один и только один, причем простой, действительный корень.
10. Покажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ на отрезке $[0, 2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа.

11. Исследуйте функции на монотонность и экстремумы:

11.1 $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2}$;

11.2 $y = \cos 2x - 2\cos x$;

11.3 $y = x^3 - 3x$;

11.4 $y = x^4(x-12)^2$;

11.5 $y = \cos^2 x - \cos x$;

11.6 $y = \sqrt{|x|}(x-3)$.

12. Вычислите пределы, используя правила Лопиталя:

12.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$;

12.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$;

12.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

12.4 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\mathrm{tg} x - \frac{1}{1-\sin x}\right]$;

12.5 $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$;

12.6 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2 x\right)$;

12.7 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\, x\right)^x$;

12.8 $\lim\limits_{x\to +\infty} \pi\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x\right)^{\frac{1}{x}}$.

13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - \sin 2x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки шоссе (шоссе считаем прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

15. Лампа подвешена на высоте 12 м над прямой горизонтальной дорожкой, по которой идет человек, рост которого равен $1,8$ м. С какой скоростью удлиняется его тень, если он удаляется со скоростью 50 м/мин?

16. Круглый металлический диск расширяется при нагревании так, что его радиус равномерно увеличивается на $0,01$ см/с. С какой скоростью увеличивается его площадь в тот момент, когда его радиус равен 2 см?

17. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Определите: а) на какой высоте от поверхности земли оно будет через 1 с; б) через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от Земли (считать $g = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$)?
18. Расходы на топливо для корабля делятся на две части. Первая из них не зависит от скорости и равна 480 у. е. в час. А вторая часть расходов пропорциональна кубу скорости, причем при скорости 10 км/ч эта часть расходов равна 30 у. е. в час. Требуется определить, при какой скорости общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей.
19. Три пункта A, B, C не лежат на одной прямой, причем угол $\angle ABC = 60°$. Одновременно из точки A выходит автомобиль, а из точки B – поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, поезд – к пункту C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?
20. Картина высотой $1,4$ м подвешена на стену так, что ее нижний край на $1,8$ м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (то есть чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим).
21. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определите параметры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре.
22. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.
23. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны. Найдите наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.
24. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A; в точке B ($AB = a$) подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен k. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силы (момент уравновешивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага)?

25. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найдите значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при которой вместимость желоба будет наибольшей.

26. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r и расположена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшей, если длина отрезка линии центров этих шаров равна a и $a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$?

27. Камень брошен с заданной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каком α дальность полета камня будет наибольшей.

28. Сосуд с вертикальной стенкой высоты h стоит на горизонтальной плоскости. Определите положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричели равна $\sqrt{2gx}$, где x – глубина расположения отверстия.

29. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Докажите, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

30. Канат висящего моста имеет вид параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точек подвеса. Найдите угол между канатом и опорными колоннами.

31. Тяжелая балка длинной l м опускается на землю так, что ее нижний конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот, который разматывается со скоростью v м/с. При этом балка опускается и вагонетка откатывается. Определите ускорение, с которым откатывается вагонетка в тот момент, когда расстояние от нее до стены равно b м.

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету

1. Задачи, приводящие к понятию производной (задачи Ньютона и Лейбница).
2. Понятие производной, ее геометрический и механический смысл. Касательная и нормаль к графику функции. Понятие односторонней производной.
3. Понятие дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
4. Понятие дифференциала функции. Геометрический и механический смысл.
5. Производная и дифференциал суммы, произведения, частного. Производные основных элементарных функций.
6. Производная композиции (сложной) функции. Дифференциал композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала.
7. Производная обратной функции.
8. Логарифмическая производная. Производная показательно-степенной функции.
9. Производная и дифференциал высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциалы высших порядков.
10. Параметрически заданные кривые. Параметрически заданные функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
11. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля).
12. Основные теоремы дифференциального исчисления (Лагранжа, Коши).
13. Правила Лопиталя.
14. Формула Тейлора – Маклорена. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций ($y = e^x$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \ln(1+x)$, $y = (1+x)^\alpha$).
15. Возрастание и убывание функции в точке. Критерий строгой монотонности функции на промежутке.

16. Понятие максимума и минимума функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные признаки максимума и минимума.
17. Выпуклые функции. Достаточный признак выпуклости функции на интервале.
18. Точки перегиба. Необходимый и достаточный признаки перегиба.
19. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Критерий горизонтальных и наклонных асимптот.

Литература

1. Математический анализ. Ч. 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление : учеб.-методич. комплекс для студентов физ. специальностей ун-тов / сост. Н. П. Семенчук [и др.] ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. — Брест : БрГУ, 2012. — 255 с.

2. Кротов, В. Г. Лекции по математическому анализу : учеб. пособие / В. Г. Кротов. — Минск : БГУ, 2016. — 372 с.

3. Элементарные функции : пособие для студентов физ.-мат. специальностей ун-та / сост.: Н. П. Семенчук, Н. Н. Сендер, С. А. Марзан ; Брест. гос. ун-т. – Брест : БрГУ, 2007. – 41 с.

4. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 687 с.

5. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 599 с.

6. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 1 : Основы математического анализа. – 440 с.

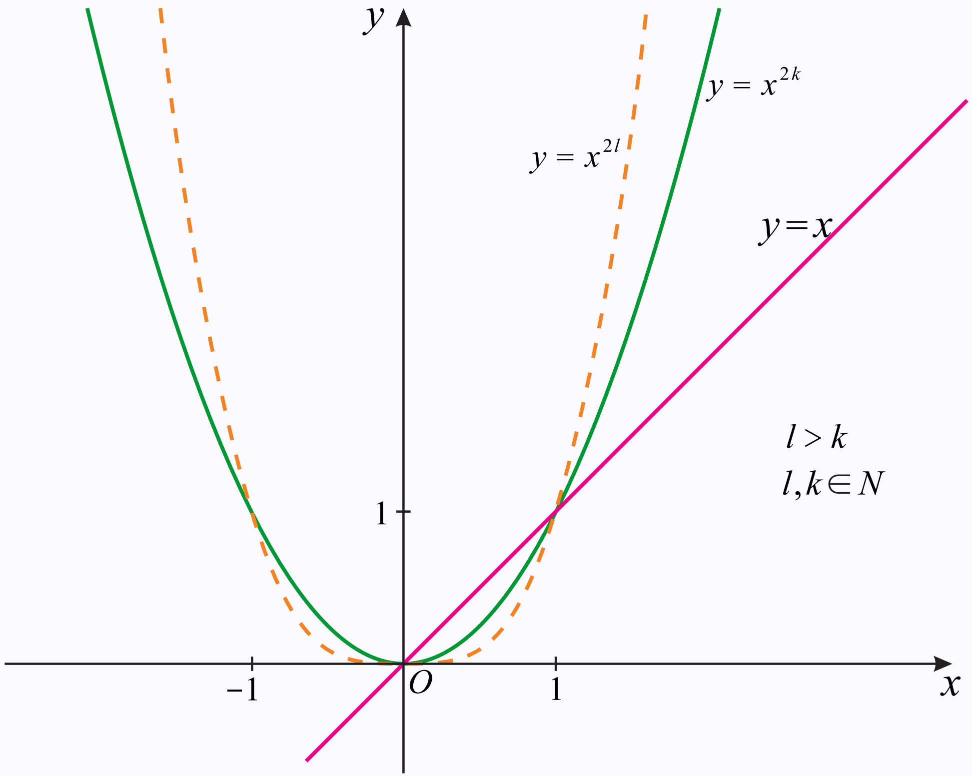
7. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под ред. В. А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 2002. – Кн. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – 725 с.

8. Давыдов, Н. А. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский ; под ред. Н. А. Давыдова. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.

Приложения

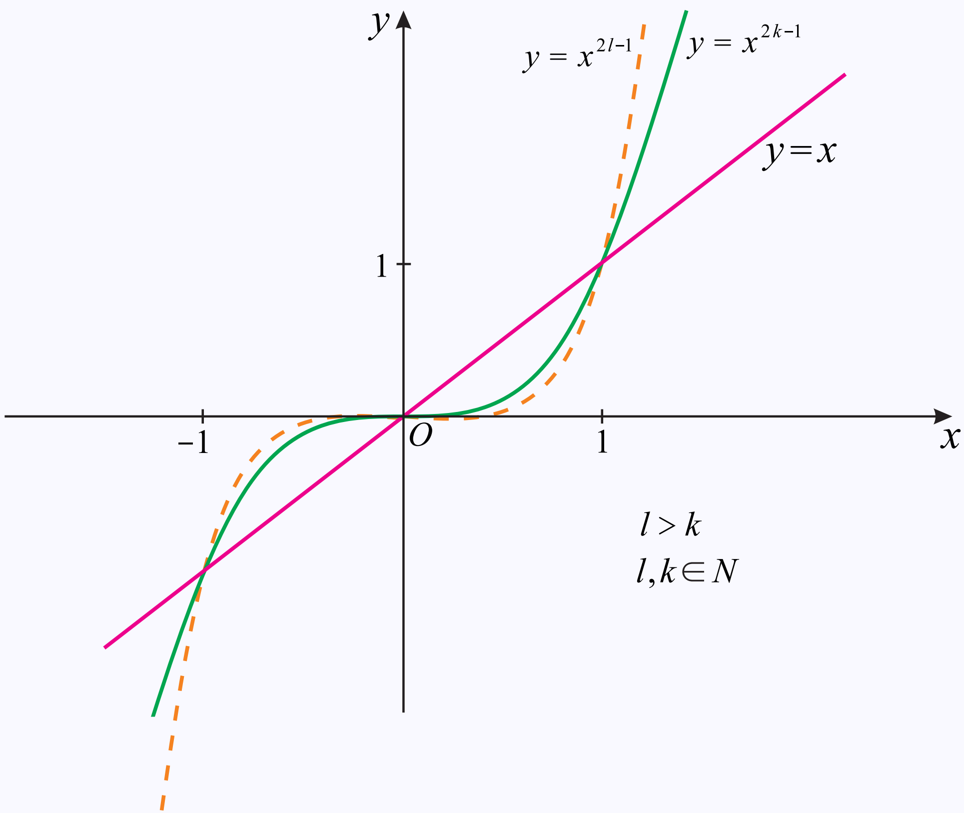
1. Графики основных элементарных функций.
2. Таблица производных.
3. Варианты заданий для индивидуальной работы

Степенная функция



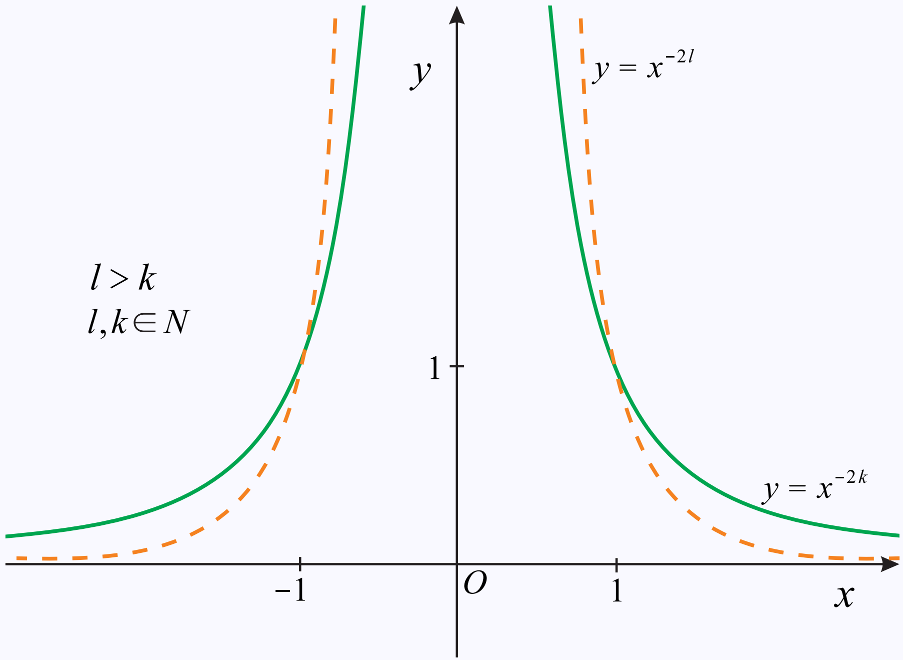
Степенная функция с натуральным четным показателем

Степенная функция



Степенная функция с натуральным нечетным показателем

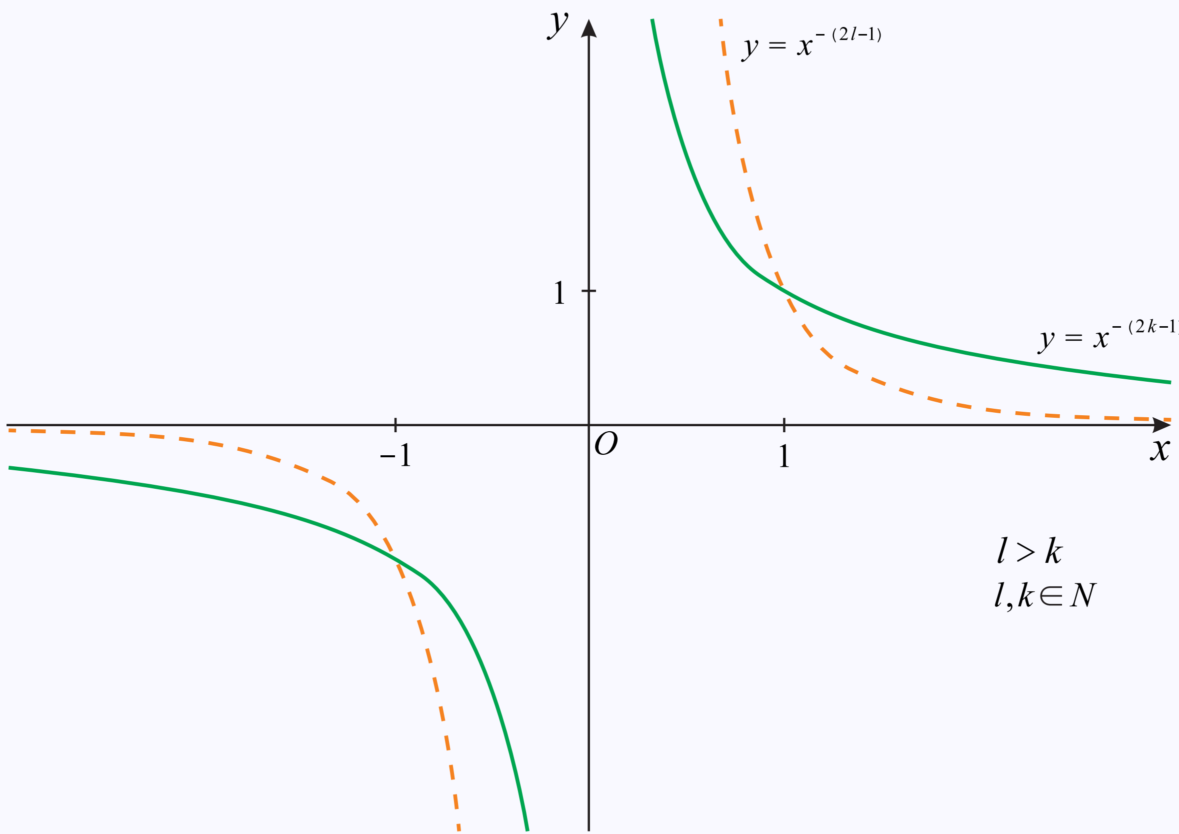
Степенная функция



Степенная функция с четным отрицательным показателем

Далее

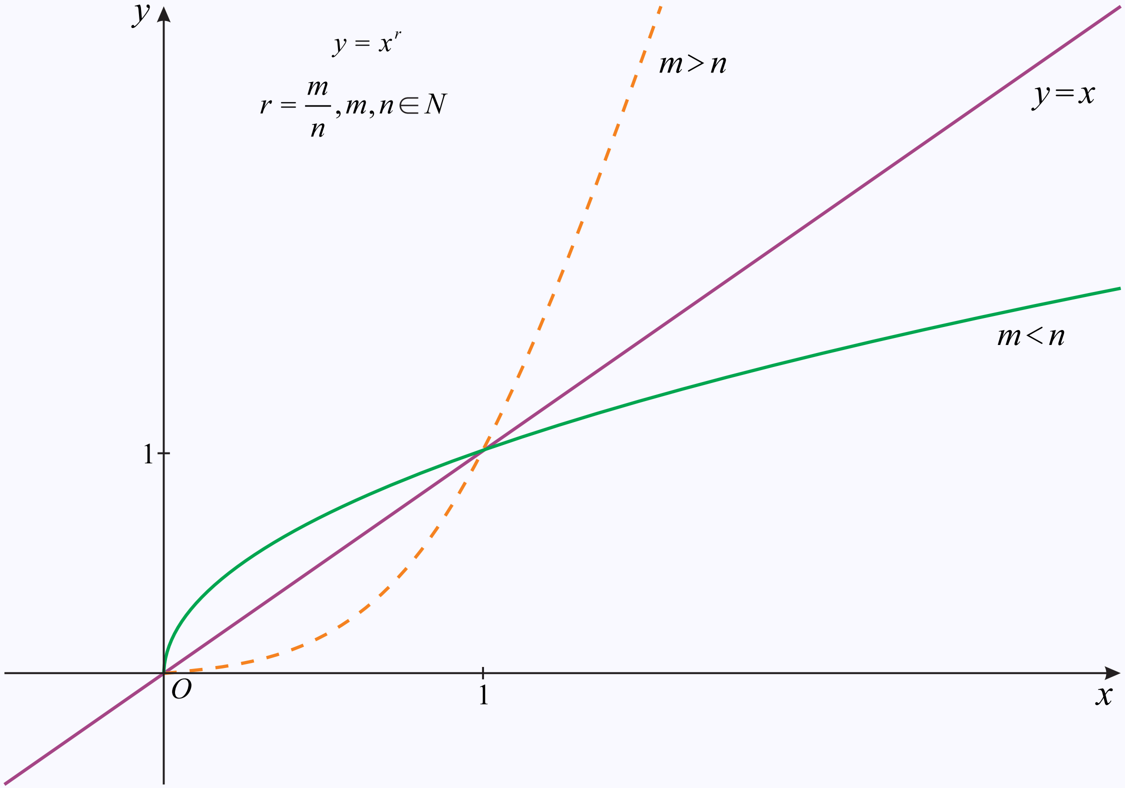
Степенная функция



Степенная функция с нечетным отрицательным показателем

Графики основных элементарных функций

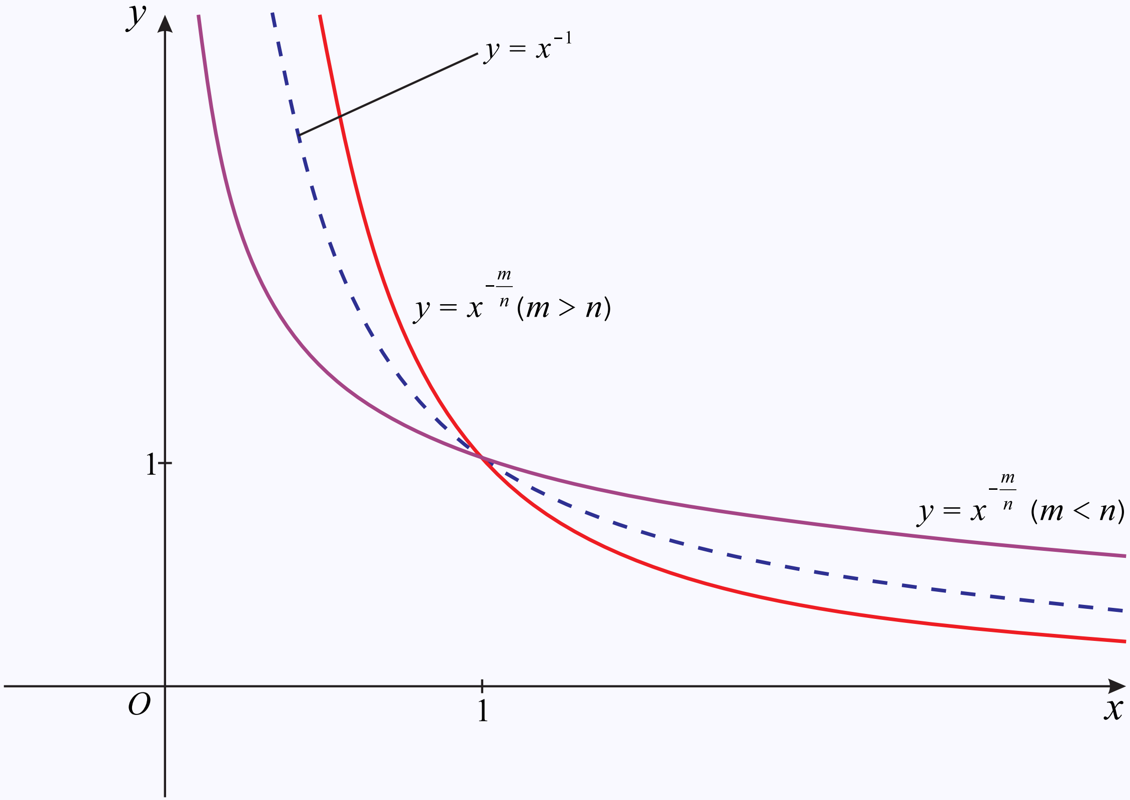
Степенная функция



Степенная функция с рациональным положительным показателем

Далее

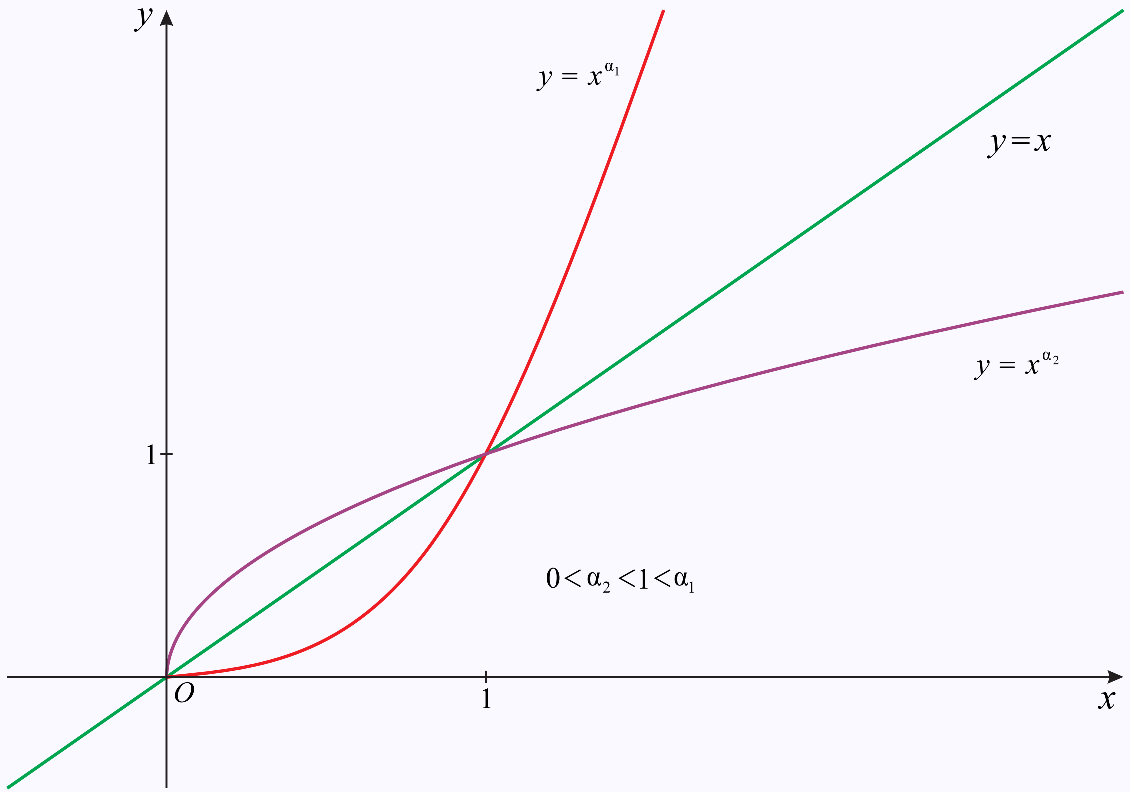
Степенная функция



Степенная функция с рациональным отрицательным показателем

Далее

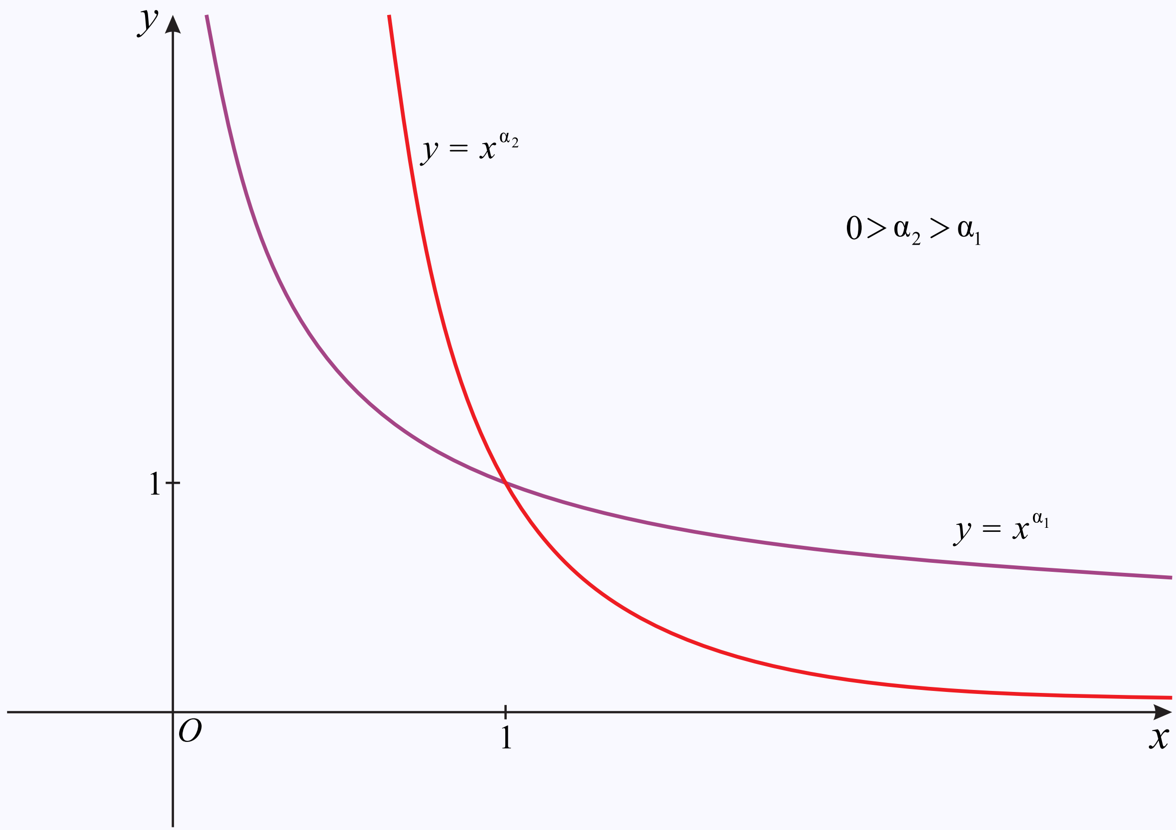
Степенная функция



Степенная функция с действительным положительным показателем

Далее

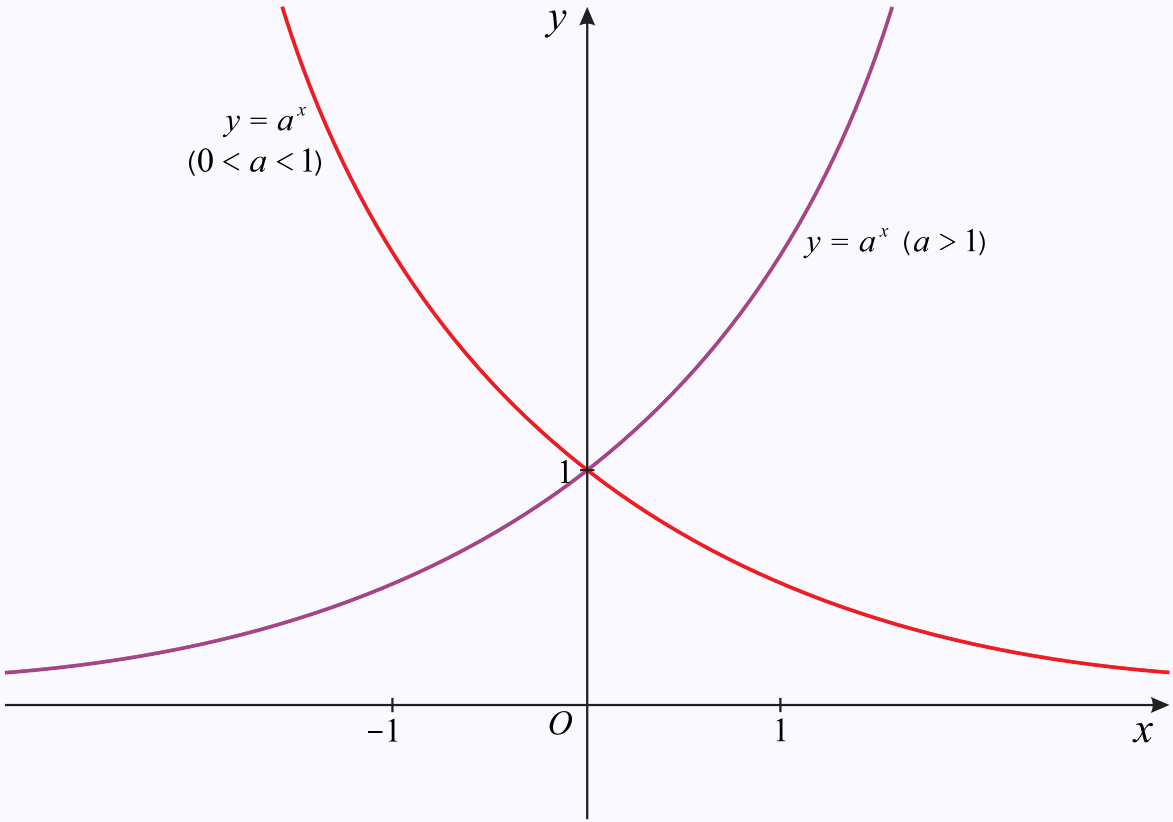
Степенная функция



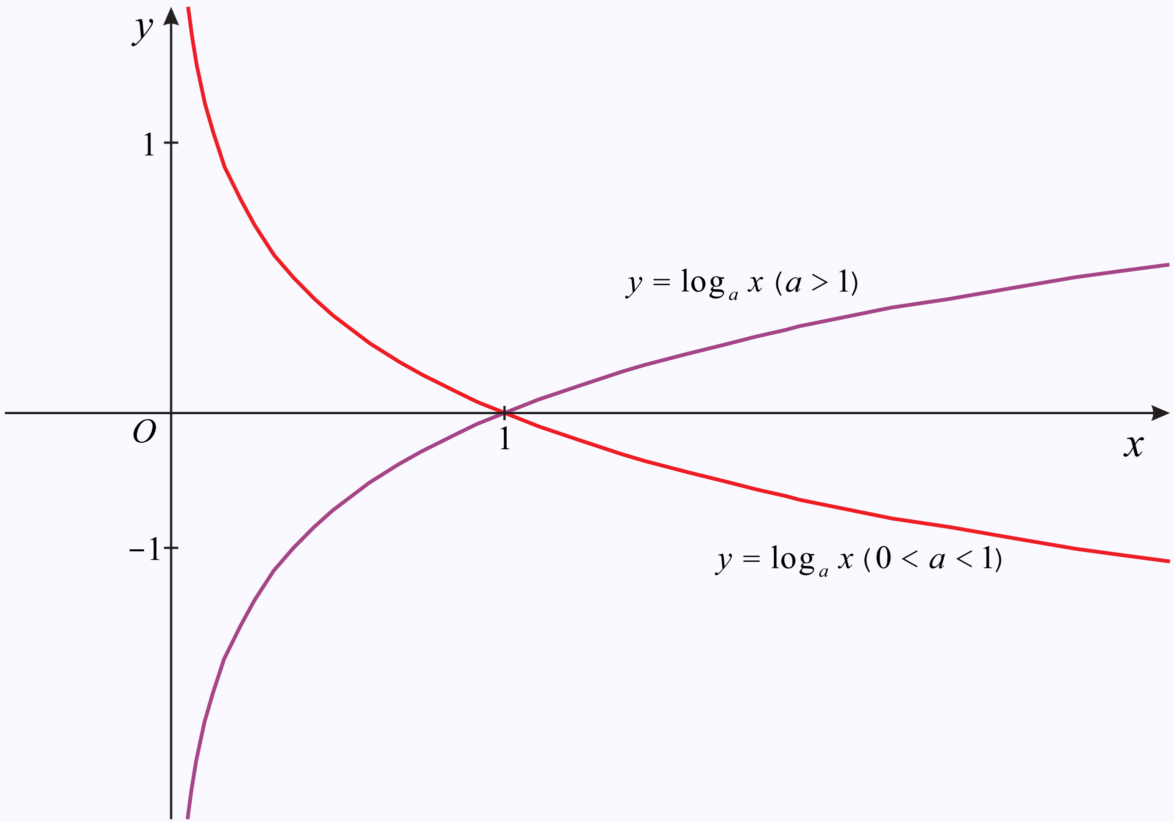
Степенная функция с действительным отрицательным показателем

Графики основных элементарных функций

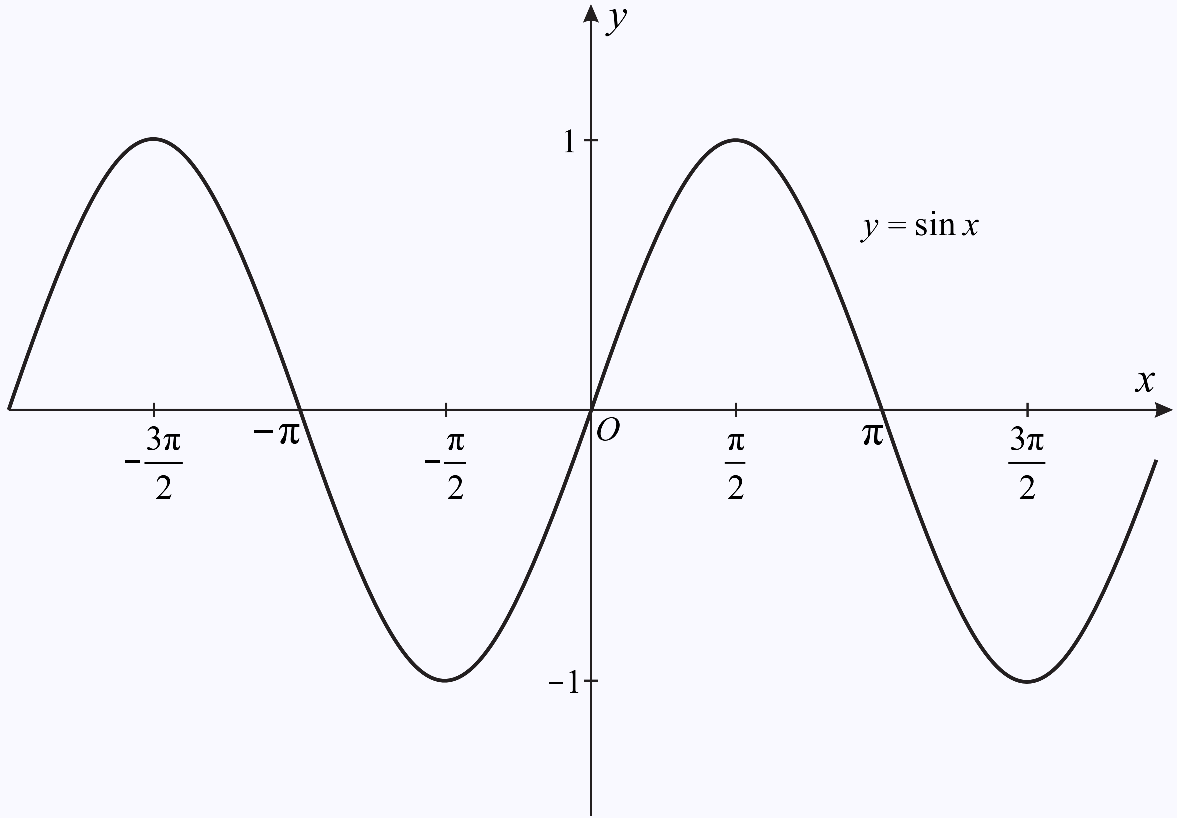
Показательная функция



Логарифмическая функция

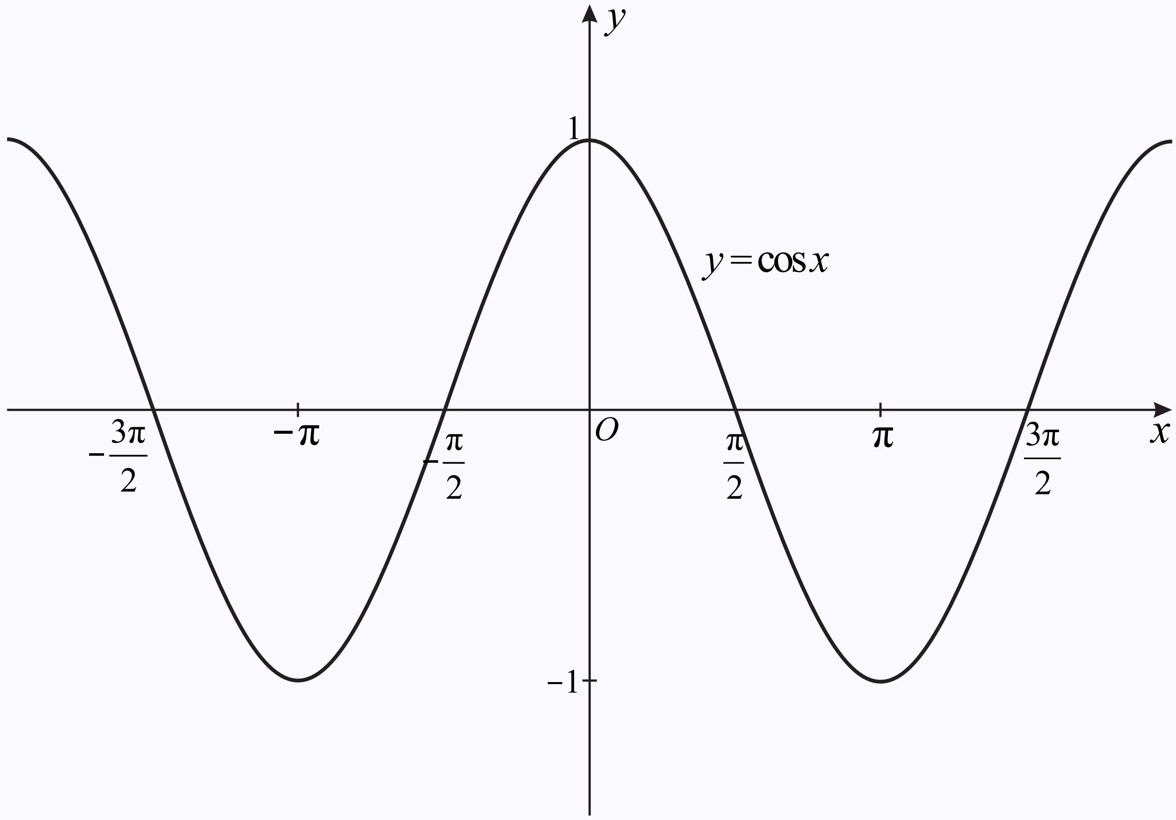


Тригонометрическая функция синус

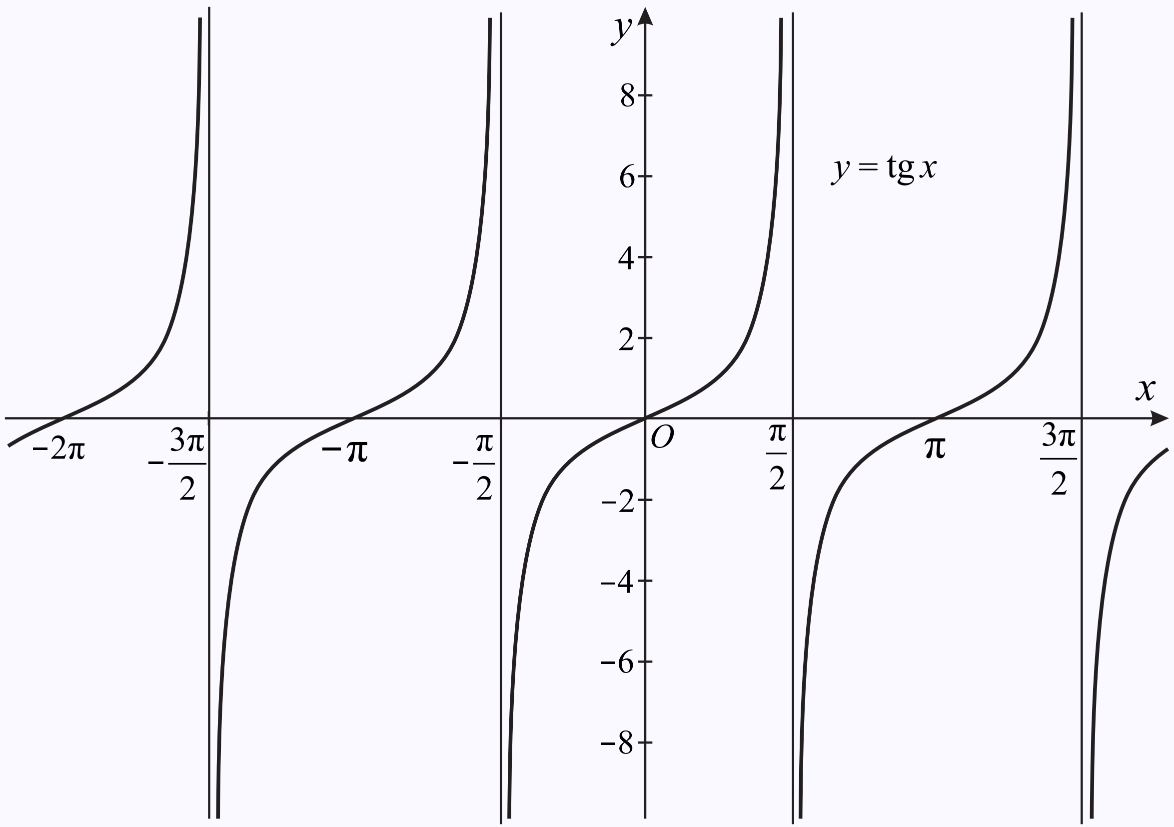


Графики основных элементарных функций

Тригонометрическая функция косинус

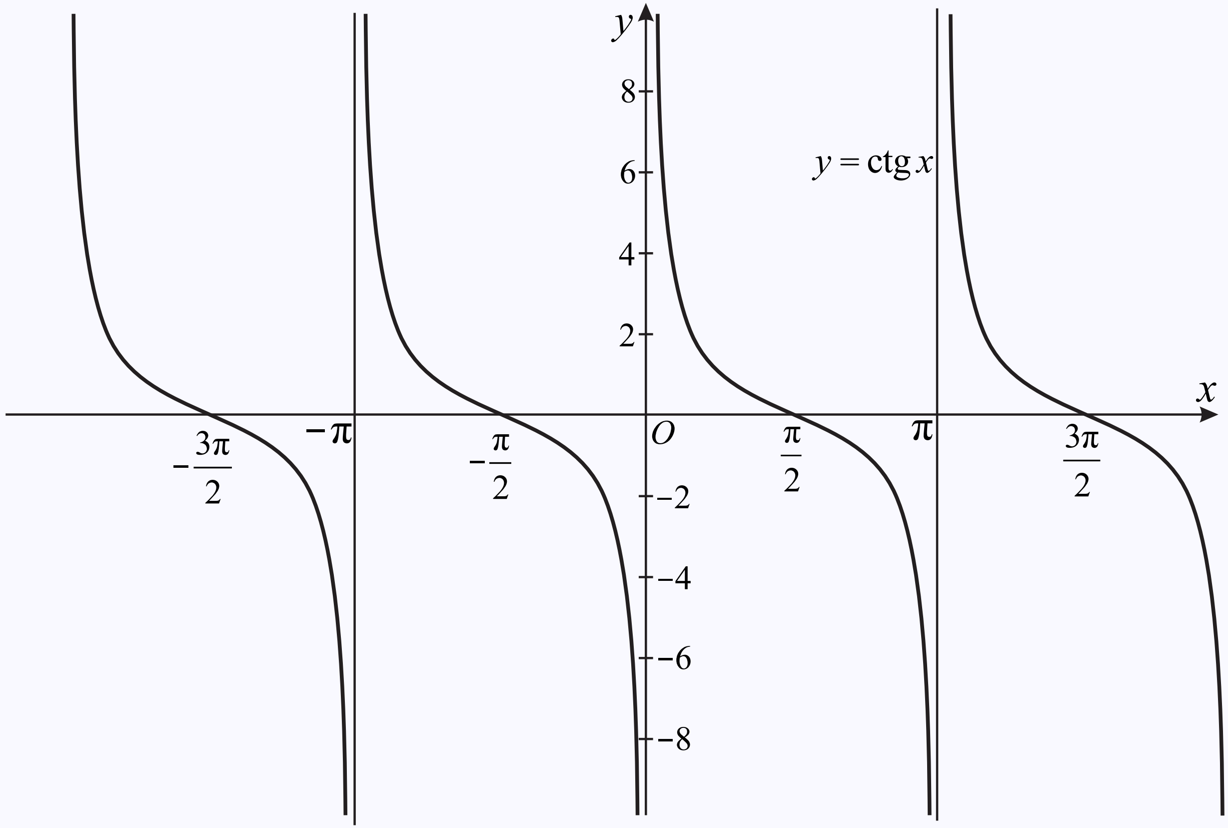


Тригонометрическая функция тангенс

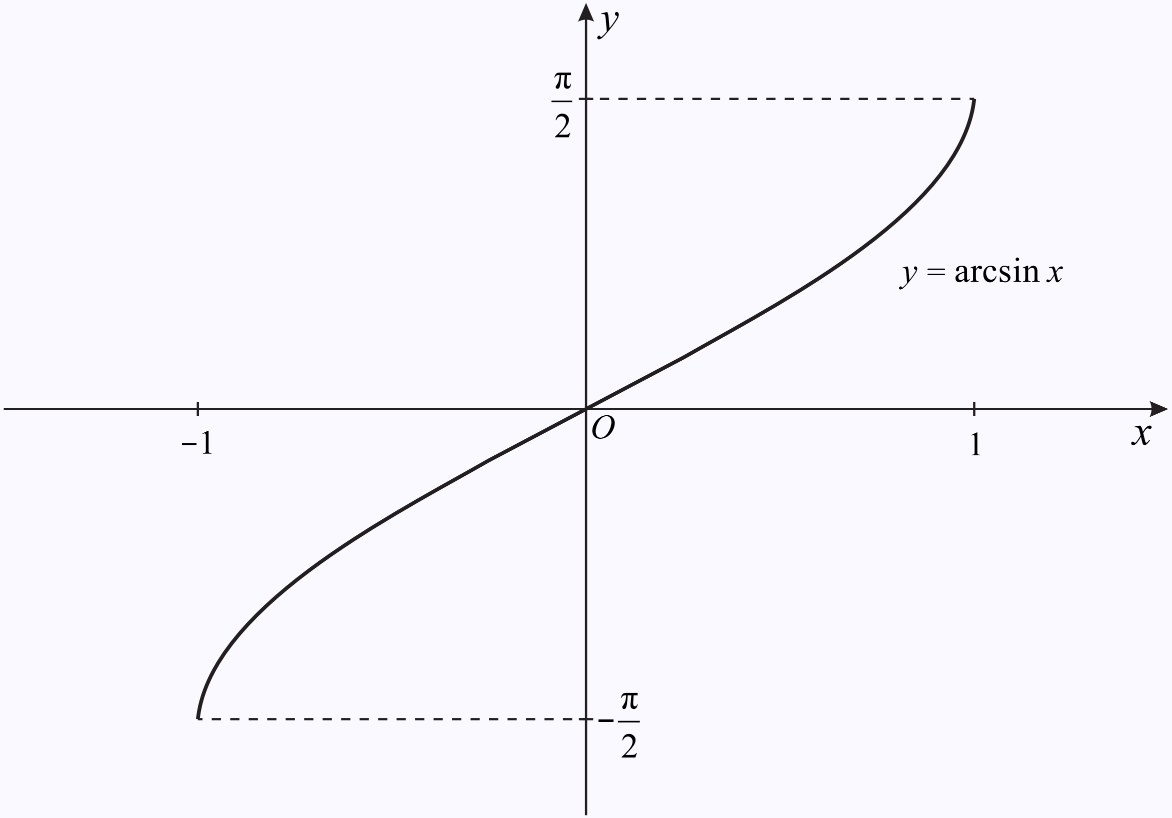


Графики основных элементарных функций

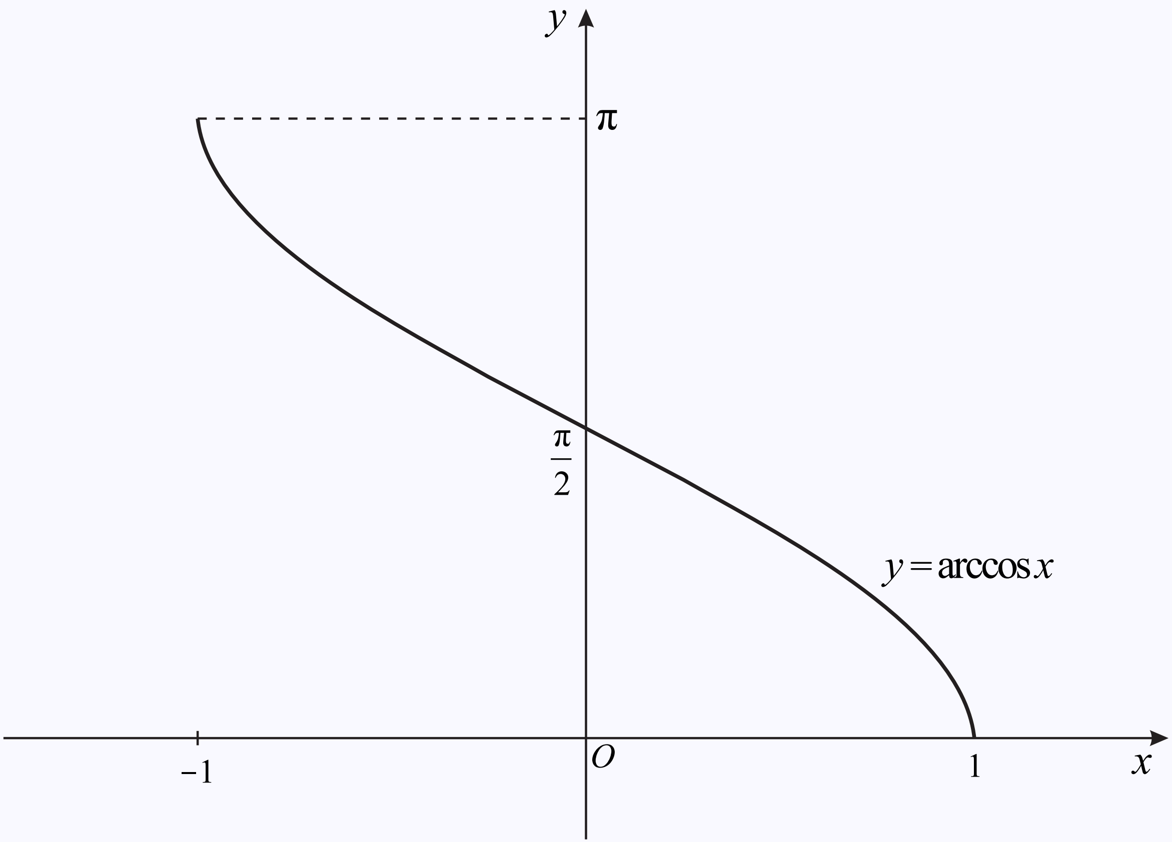
Тригонометрическая функция котангенс



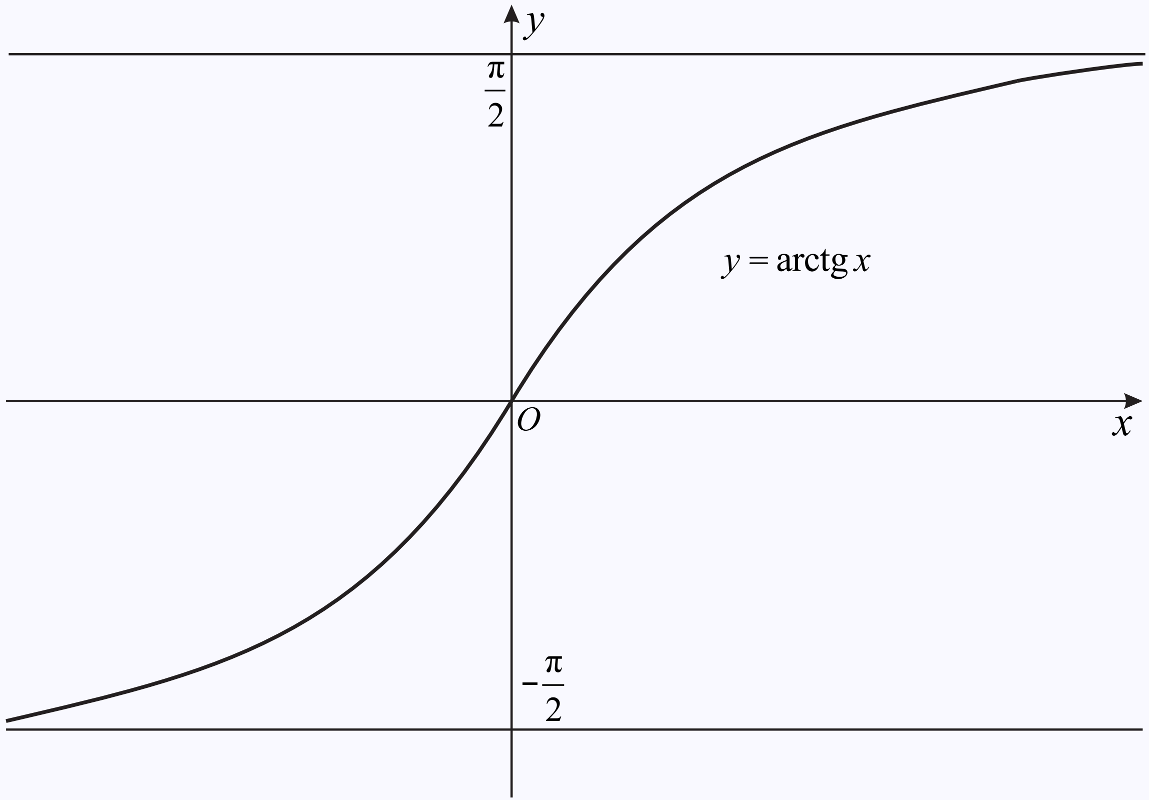
Обратная тригонометрическая функция арксинус



Обратная тригонометрическая функция арккосинус



Обратная тригонометрическая функция арктангенс



Обратная тригонометрическая функция арккотангенс

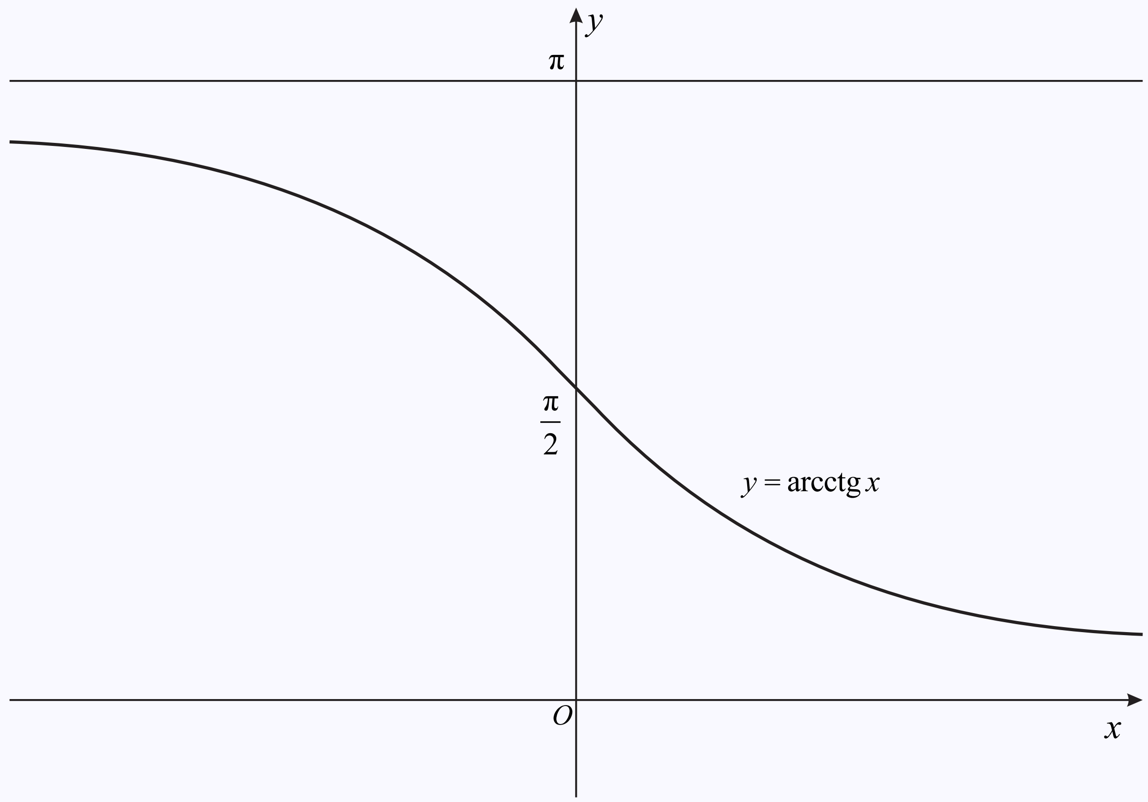


Таблица производных

$C' = 0$, где $C \in \mathbb{R}$.

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$, в частности $(e^x)' = e^x$.

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$(\sin x)' = \cos x$.

$(\cos x)' = -\sin x$.

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 1

1. Решите неравенство: $\left|\frac{3-x}{4+5x}\right| - x < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{\log_{(x-1)} \frac{3x-2}{x+4}} + \frac{3-x}{x^2+4x}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{(-1)^{n-1}\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-4}{2+x} = -\frac{1}{3}$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \sin^2 x$;

   5.2 $f(x) = \cos(3x+2)$.
6. Постройте график функции $y = \frac{3}{2}\sin(2x+3)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-2x}{3x-2}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

   7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 7x}{10x^2}$;

   7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.
8. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $(x \neq -2)$ непрерывна в точке $x = 3$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2+2, & -1 \leqslant x < 1; \\ 2x, & x \geqslant 1 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Вариант 2

1. Решите неравенство: $\left|\frac{7x^2-2x+1}{x+3}\right| - 2 < x$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\log_x(3-x)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{n}{n+3}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3-n} = -2$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \cos^2 x$;

   5.2 $f(x) = \sin(4x+2)$.
6. Постройте график функции $y = \frac{4}{5}\cos(3x+1)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

   7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$;

   7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.
8. Докажите, что функция $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leqslant -1; \\ x^2+1, & -1 < x \leqslant 1; \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 3

1. Решите неравенство: $\left|\frac{x-2}{x^2+2x-3}\right| - 3 < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\log_2(2x+1)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2-n} = -1$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \sin 3x$;

   5.2 $f(x) = \operatorname{tg} 4x$.
6. Постройте график функции $y = \frac{5}{3}\cos(4x+1)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

   7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$;

   7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.
8. Докажите, что функция $f(x) = (x-2)^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0; \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2; \\ x-3, & x \geqslant 2 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 4

1. Решите неравенство: $\left|\frac{x-5}{x^2+2x-10}\right| - 3 < 0$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \frac{1}{\log_2(3x+5)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{(-1)^{n-1}\left(4+\frac{1}{2n}\right)\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{2-n} = 1$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \cos 5x$; 5.2 $f(x) = \sin 2x$.
6. Постройте график функции $y = \frac{2}{3}\sin(5x-2)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; 7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; 7.5 $\lim\limits_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.
8. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0; \\ x^2+1, & 0 < x < 1; \\ x, & x \geqslant 1 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Вариант 5

1. Решите неравенство: $|x-2|-|x-3|<3$.
2. Найдите допустимое множество $X\subset\mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x)=\sqrt{\sin^2 x-0,5}+\frac{1}{\log_3(2x-1)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{2n}{n+4}\right\}$, где $n\in\mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{3-n}=1$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x)=\sin(4x-1)$;

   5.2 $f(x)=\cos^2(3x+1)$.
6. Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\sin(5x-3)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

   7.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$;

   7.4 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.
8. Докажите, что функция $f(x)=\sqrt[3]{x}+x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0;\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi;\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Вариант 6

1. Решите неравенство: $|4x+5|-x<1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x)=\sqrt[3]{\log_x \frac{5x}{2-x}}+\frac{1}{x^2-2x+5}.$$

3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{4+\frac{2}{n}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{10-n^2}{n}=-\infty$.
5. Исследуйте функцию $y=\frac{x^2-10}{x^2-4}$ на ограниченность на интервале $(2,5)$.
6. Постройте график функции $y=6\cos(7-10x)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin x}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

8. Докажите, что функция $f(x)=2x^2-1$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0;\\ \cos x, & 0<x\leqslant\pi;\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Вариант 7

1. Решите неравенство: $\left|\frac{6x^2-2x+1}{x-1}\right| < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{\log_{3x+2}\frac{6x-1}{4-x}} + \frac{1}{x+2}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{n}{6-n}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.
5. Исследуйте функцию $y = 6^{\sin 2x}$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\sin(6x-5)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} (x-5)\left(\ln(x-3)-\ln x\right)$.

8. Докажите, что функция $f(x) = |x-3|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leqslant -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leqslant 0; \\ x, & x > 0 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Вариант 8

1. Решите неравенство: $\left|\frac{6-x}{x^2-2x+3}\right| < 2$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \sqrt[5]{\log_{\frac{1}{2}} \frac{7x+5}{x^2-4x}} + \frac{1}{3x-1}.$$

3. Решите уравнение $\sin x - \frac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1} \sin^2 x = \sin^2 x$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n (n+1) = 0$.
5. Исследуйте функцию $y = 2^{|\cos 2x|}$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = -6\arcsin(2x+3)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - x + 1$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}; \\ 2, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 9

1. Решите неравенство: $\left|\frac{3x^2-4}{3+2x}\right| - x \leqslant 2$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3 - \log_6(x-2)).$$
3. Решите уравнение $\frac{6}{|x+2|-1} = |x-4|$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-2}{n} = +\infty$.
5. Исследуйте функцию $y = \sin^2 x + \cos x$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = 2 - \arccos(4x-3)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = 4x - x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 0; \\ x^2+1, & 0 < x \leqslant 1; \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 10

1. Решите неравенство: $|x^2 + x - 4| - |x - 3| < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \frac{1}{4 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{5-x}} + \sqrt{x - 0,5}.$$

3. Решите уравнение $\frac{|4-x|}{x} = 5 + |x|$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-5}{2n-1} = \frac{3}{2}$.
5. Исследуйте функцию $y = \cos^2 x - \sin x$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = x - \sin(3x + 2)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^5+3x}{6x^5-2}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} 5x \operatorname{ctg} 3x$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = 3|x| - x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leqslant 0; \\ -x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 11

1. Решите неравенство: $|4-5x|-|1-x^2| \leqslant x$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x)=\frac{1}{3^x-3^{-x}+2}+\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}.$$

3. Решите уравнение $\frac{|4+x|}{x}=5+|x|$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-5}{2n-1}=\frac{3}{2}$.
5. Исследуйте функцию $y=\cos^2 x+\sin x$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y=x+\sin(3x+2)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-5}{3x^2+2x+1}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{4x-10}-\sqrt{6}}{x-4}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

8. Докажите, что функция $f(x)=5|x-3|-x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x)=\begin{cases} 4-x, & x\leqslant 0;\\ -(x+3)^2, & 0<x\leqslant 3;\\ \sin x, & x>3 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 12

1. Решите неравенство: $\frac{|4-x|}{x+2} - |x| \leqslant 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \frac{1}{6^{2x} - 6^{x} + 27} + \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(4-x)}.$$

3. Решите уравнение $\frac{x}{|3-x|} - |x| = 4$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.
5. Исследуйте функцию $y = \operatorname{arctg}(x+4)$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = 3x - \cos(x+2)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-5x^5}{4+3x}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{6+x}{\sqrt{4x}-4}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 1} (4-2x)^{\frac{x}{5x-1}}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{\sin^2 4x}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = |x-3| - x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0; \\ -(4-x)^2, & 0 < x \leqslant 4; \\ |x|, & x > 4 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 1

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = 3x^2 - 4x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \left[\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right] e^{-x}$;

   2.2 $y = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right)^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{t}}$.
4. Колесо крутится так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Определите угловую скорость ω через 32 с после начала движения.
5. Найдите приближенное значение $\sqrt[3]{64,0081}$, используя понятие дифференциала, а также совершаемые при этом абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cos x}{\cos x - 1}$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

7. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может идти пешком по 5 км/ч, а на веслах по 4 км/ч, то к какой точке берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

   8.2 $y = x\ln x$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 2

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{x}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$;   2.2 $y = \arccos(\sin^2 x - \cos^2 x)$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$.
4. Два самолета вылетают (не одновременно) из пункта A и летят, один со скоростью 850 км/ч в южном направлении, второй – со скоростью 900 км/ч в северном направлении. С какой скоростью увеличивается расстояние между самолетами во время полета? Какова эта скорость в тот момент, когда расстояние от первого самолета до пункта A равно 75 км, а от второго до пункта A 180 км?
5. Найдите приближенное значение $(5,07)^3$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\, x)\ln x$;   6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x}$;   6.3 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\sin^{-2} bx}$.

7. Прямо над центром круглой площадки радиусом R надо повесить фонарь. На какой высоте необходимо это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которая ограничивает эту площадку ($I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, φ – угол падения лучей, r – расстояние от источника света до освещенной площадки, k – сила источника света).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$;   8.2 $y = \sin x + \sin 2x$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 3

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sqrt{x}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$;

   2.2 $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$.
4. Крутится маховое колесо (останавливаемое тормозом), за t сек поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a, b, c – дополнительные постоянные. Определите угловую скорость и ускорение вращения.
5. Найдите приближенное значение $\log_2 1,9$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-0,01x}$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Картина высотой $1,4$ м повешена на стену так, что ее нижний край на $1,8$ м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (это значит, чтобы угол обзора был наибольшим).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

   8.2 $y = e^{-\frac{1}{x-1}}$.

Вариант 4

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \cos 3x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+3}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$;

   2.2 $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.
3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$.
4. Имеется тонкий неоднородный стержень AB длиной 20 см. Известно, что для любой точки C стержня, которая находится от A на расстоянии l см, масса куска стержня вычисляется по формуле $m = 3l^2 + 5l$. Найдите линейную плотность стержня: а) в точке, которая находится от точки A на $l = 5$ см; б) в самой точке A; в) в конце стержня.
5. Найдите приближенное значение $\arcsin 0,54$, используя понятие дифференциала, а также совершаемые при этом абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to 0+0} x^3 \ln x$.
7. Капля дождя, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести равномерно испаряясь, так, что уменьшение массы пропорционально времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько минут после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением ветра пренебречь).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x}{x^2-4}$;

   8.2 $y = \frac{\ln x}{x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 5

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{x^2}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$; 2.2 $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
4. Закон движения задан формулой $S = a + bt + ct^2$. Покажите, что действующая сила постоянная.
5. Найдите приближенное значение $\operatorname{arctg}\sqrt{3,2}$, используя понятие дифференциала, а также совершаемые при этом абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}4x - 12\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$; 6.2 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$; 6.3 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

7. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A; в точке B $(AB = a)$ подвешен груз P. Масса единицы длины рычага равна ρ. Какая должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой? (момент уравновешенной силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$; 8.2 $y = \arcsin\frac{x}{x^2-1}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 6

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \arcsin x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$;   2.2 $y = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = e^{2t}\cos^2 t,\quad y = e^{2t}\sin^2 t$.
4. Распад радия происходит по закону $R = R_0 e^{-kt}$, где R_0 – количество радия в начальный момент времени $t = 0$, а R – количество радия, который не распался к моменту времени t. Определите закон зависимости скорости распада радия от времени. Покажите, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия.
5. Найдите приближенное значение $\ln \operatorname{tg} 46^\circ$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;   6.2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$;   6.3 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

7. Три пункта A, B и C расположены не на одной прямой. Угол $\angle ABC = 60^\circ$. Из пункта A выходит автомобиль, а в это время из пункта B – поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени после начала движения расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^3}{9-x^3}$;   8.2 $y = e^{\frac{1-x^2}{x^4}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 7

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{x^2+2}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$;
   2.2 $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
4. Постоянный ток определяется как количество электричества, которое протекло через поперечное сечение проводника за единицу времени. Дайте в соответствии с этим определение переменного тока. Определите ток в конце пятой секунды, если известно, что количество электричества, которое протекает через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, задается формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов).
5. Найдите приближенное значение $\lg 10,1$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$;
   6.2 $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$;
   6.3 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стены каналов прямолинейны. Найдите наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$;
   8.2 $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 8

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y=\sqrt{4x+1}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y=\sqrt[3]{\frac{e^{\sin x+\cos x}}{(4x^3+2)^6}}$; 2.2 $y=(x^2+1)^{2x}$.

3. Найдите вторую производную функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $x=2\ln\operatorname{ctg} t$, $y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t$.
4. Тело кинули вертикально вверх с начальной скоростью a м/с. На какой высоте будет оно через t секунд? Определите скорость движения тела. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте от земли?
5. Найдите приближенное значение $\sin 31^\circ$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$; 6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$; 6.3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. Светящаяся точка находится на линии, соединяющей центры двух не пересекающих друг друга шаров радиусами R и r $(R>r)$, и размешена не внутри этих шаров. При каком размещении точки сумма осветленных частей поверхности шаров будет наибольшей?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$; 8.2 $y=x-\sqrt[3]{x^2}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 9

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

2.1 $y = (x^3-2)^2 \sqrt[3]{(x^3+6)^2 e^{\cos^3 x}}$;

2.2 $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a > 0,\ x > 0)$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$x = k\sin t - \sin kt, \quad y = k\cos t + \cos kt.$$

4. С какой скоростью изменяются площадь и диагональ прямоугольника в тот момент, когда одна его сторона $x = 20$ м, а вторая сторона $y = 15$ м, если первая сторона прямоугольника уменьшается со скоростью 1 м/с, а вторая увеличивается со скоростью 2 м/с?
5. Найдите приближенное значение $\operatorname{tg} 44^\circ$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

6.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$;

6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Суточные затраты при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономным?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

8.1 $y = \frac{x^2}{x^2-16}$;

8.2 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Вариант 10

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sqrt[3]{x}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = x + x^x + x^{x^x}\ \ (x > 0)$;

   2.2 $y = \ln\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)(x+2)^3}{(x-2)e^{\operatorname{arctg} x}}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = t^3 + 3t + 1,\quad y = t^3 - 3t + 1$.
4. С какой скоростью увеличивается площадь круга в тот момент, когда радиус круга $R = 10$ см, если радиус колеса увеличивается равномерно со скоростью 2 см/с?
5. Найдите приближенное значение $2^{2,1}$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\pi x-1}{2x^2} - \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right]$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. Груз массой P, который лежит горизонтально на шероховатой плоскости, надо сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения равен k?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{2x^2+4x+2}{2-x}$;

   8.2 $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 11

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sin 3x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right]$;   2.2 $y = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{e^{\arcsin^4 x + 5}}$.
3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$x = (\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

4. Резервуар, который имеет форму полусферы с внутренним радиусом R(м), наполняется водой со скоростью Q л в секунду. Определите скорость поднятия уровня воды в резервуаре в тот момент, когда он будет равен $0,5R$.
5. Найдите приближенное значение $\cos 59^\circ$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} - 1)}\right)$;   6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x + 2\ln x}{x}$;   6.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.
7. Сосуд с вертикальной стеной высотой h стоит на горизонтальной плоскости. Определите положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x – глубина расположения отверстия.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{1}{x} + 4x^2$;   8.2 $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 12

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \sqrt[x]{(2x\sin x + 1)^2}$;

   2.2 $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1+x^2}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$.
4. Точка массой m качается вдоль оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = e^{-at}\cos(at + b)$. Найдите скорость движения точки и силу, которая действует на нее.
5. Найдите приближенное значение $e^{2,01}$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to a} \arcsin\frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a)$.

7. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найдите угол α, при котором дальность полета будет наибольшей.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = x^4 - 2x^3 - 1$;

   8.2 $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Предметный указатель

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть