УДК 536+537.6

Алексей Игоревич Серый
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Alexey Sery
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: alexey_sery@mail.ru

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследовано влияние температуры и интенсивного магнитного поля на некоторые термодинамические характеристики идеальных газов заряженных фермионов. В приближении абсолютного нуля температуры получена зависимость химического потенциала нерелятивистского и релятивистского электронного газа, а также степени спиновой поляризации релятивистского электронного газа от индукции магнитного поля при заполнении одного или двух уровней Ландау. Для крайне невырожденного релятивистского электронного газа получены выражения для химического потенциала, степени спиновой поляризации, энтропии, средней энергии и намагниченности. Для промежуточных температур получено выражение для большого термодинамического потенциала газа заряженных фермионов.
Ключевые слова: *электронный газ, магнитное поле, спиновая поляризация, химический потенциал.*

On the Thermodynamic Description of an Electron Gas in a Magnetic Field

The influence of temperature and intense magnetic field on some thermodynamic characteristics of ideal gases of charged fermions is investigated. The dependence of the chemical potential of a non-relativistic and relativistic electron gas, as well as the degree of spin polarization of a relativistic electron gas on the magnetic field induction when filling one or two Landau levels is obtained in the approximation of absolute zero temperature. Expressions for the chemical potential, the degree of spin polarization, entropy, average energy and magnetization are obtained for an extremely non-degenerate relativistic electron gas. For intermediate temperatures, an expression is obtained for the large thermodynamic potential of a gas of charged fermions.
Key words: *electron gas, magnetic field, spin polarization, chemical potential.*

Введение

Расчет термодинамических характеристик газов заряженных фермионов в магнитном поле представляет интерес для различных астрофизических приложений. Исследования в данной предметной области ведутся уже на протяжении нескольких десятилетий, причем многие важные результаты уже прочно вошли не только в научную, но и в учебную литературу.

Так, для случая высоких температур и слабых магнитных полей, т. е. когда выполняются соотношения

$$\zeta << kT\,, \quad \mu B << kT\,, \tag{1}$$

получено выражение для намагниченности электронного газа через квантовые функции Ланжевена [1, с. 245–246]. При этом B – индукция магнитного поля, T – температура, k – постоянная Больцмана, ζ – химический потенциал (отсчитываемый от энергии покоя), μ – соответствующий магнетон (магнетон Бора в случае электронов).

Для нерелятивистского электронного газа в приближении абсолютного нуля температуры найдены:

а) выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала и магнитной восприимчивости [1, с. 291–294], числа частиц, давления и средней энергии [2, с. 28];

б) выражения для указанных величин (за исключением большого термодинамического потенциала) в пределе слабых магнитных полей [2, с. 29–30] и в квантовом пределе [2, с. 31];

в) система уравнений, связывающих B, ζ, спиновую поляризацию и концентрацию электронов [2, с. 13–20], выполнены дальнейшие исследования этой системы для некоторых частных случаев [3, с. 75; 4, с. 15].

Уравнение для химического потенциала исследовалось также в [5, с. 12–14].

Для нерелятивистского электронного газа в случае низких отличных от нуля температур, т. е. когда

$$\zeta >> kT, \tag{2}$$

найдены выражения для большого термодинамического потенциала [6, с. 205–209] химического потенциала [1, с. 295], магнитной восприимчивости [1, с. 295; 6, с. 205] и намагниченности [6, с. 210]. При этом отдельно исследовались случаи, когда

$$\zeta >> kT >> \mu B, \tag{3}$$

и

$$\zeta >> \mu B \geq kT. \tag{4}$$

Те же величины (а также давление, энтропия и полная энергия) несколько иным способом найдены в [7, с. 12–15].

Для нерелятивистского электронного газа в случае высоких температур найдены выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала и намагниченности [1, с. 297], числа частиц, давления, спиновой поляризации, энтропии, средней энергии [2, с. 52–54].

Для релятивистского электронного газа:

а) в приближении абсолютного нуля температуры найдены выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала (в неявном виде), магнитной восприимчивости, давления и средней энергии [2, с. 39–45], уравнение для химического потенциала исследовалось также в [5, с. 12–14];

б) в случае низких отличных от нуля температур, т.е. когда справедливо условие (2), найдены выражения для большого термодинамического потенциала, давления, энтропии, намагниченности и полной энергии [8, с. 11–14];

в) в случае высоких температур получены выражения для большого термодинамического потенциала, химического потенциала (в неявном виде), магнитной восприимчивости, энтропии и средней энергии [2, с. 63–64], но результаты требуют пересмотра.

Несмотря на то что многие вопросы, относящиеся к данному проблемному полю, уже достаточно хорошо исследованы, ряд вопросов остается не до конца изученным. Исследованию некоторых из таких вопросов посвящена данная публикация.

Во всех исследуемых далее случаях газ будет считаться идеальным.

Химический потенциал крайне вырожденного идеального нерелятивистского электронного газа в магнитном поле

Рассмотрим нерелятивистский электронный газ в квантующем магнитном поле при абсолютном нуле температуры.

Уравнение, связывающее химический потенциал $\zeta_e(B)$ (отсчитываемый от энергии покоя электрона) такого газа с его концентрацией n_e в магнитном поле с индукцией B (где m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора), может быть записано на основе сведений из [2, с. 19] (без учета аномального магнитного момента электрона) в виде соотношений:

$$n_e = A\left(\sqrt{\zeta_e(B)} + 2\sum_{j=1}^{r}\sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B\cdot 2j}\right), \tag{5}$$

$$A = \frac{(2m_e)^{3/2}\mu_B B}{2\pi^2\hbar^3}. \tag{6}$$

Суммирование в (5) выполняется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не окажется отрицательным. Рассмотрим некоторые частные случаи (в т. ч. те, которые не затрагивались ранее).

При $r = 0$ сумма в правой части (5) пропадает, и тогда величина $\zeta_e(B)$ с учетом (6) легко выражается через остальные:

$$\zeta_e(B) = \frac{n_e^2\pi^4\hbar^6}{2m_e^3(\mu_B B)^2}. \tag{7}$$

При $r = 1$ для $\zeta_e(B)$ из (5) получается квадратное уравнение, которое для удобства анализа значений корней после предварительных несложных преобразований можно переписать в виде

$$9\zeta_e^2(B) - \left(48\mu_B B + 10\frac{n_e^2}{A^2}\right)\zeta_e(B) + \left(8\mu_B B + \frac{n_e^2}{A^2}\right)^2 = 0. \tag{8}$$

Общее выражение для обоих корней уравнения (8) выглядит следующим образом:

$$\zeta_{e(\pm)}(B) = \frac{1}{18}\left(48\mu_B B + 10\frac{n_e^2}{A^2} \pm \sqrt{384\mu_B B\frac{n_e^2}{A^2} + 64\frac{n_e^4}{A^4}}\right). \tag{9}$$

Поскольку $\zeta_e(B)$ определяется однозначно, следует оставить только один корень. Из (5) при $r = 1$ можно сделать оценки для химического потенциала, если положить в правой части (5) все подкоренные выражения равными $\zeta_e(B)$ (тогда правая часть будет больше левой) или $\zeta_e(B) - 2\mu_B B$ (тогда левая часть будет больше правой). В результате запишем:

$$\frac{n_e^2}{9A^2} < \zeta_e(B) < \frac{n_e^2}{9A^2} + 2\mu_B B. \tag{10}$$

При этом для установления границ корней уравнения (9) можно либо пренебрегать слагаемым, зависящим от B, под радикалом, либо дополнять подкоренное выражение до полного квадрата. В результате можно получить следующие границы:

$$\frac{n_e^2}{9A^2} + \frac{4}{3}\mu_B B < \zeta_{e(-)}(B) < \frac{n_e^2}{9A^2} + \frac{8}{3}\mu_B B, \tag{11}$$

$$\frac{n_e^2}{A^2} + \frac{8}{3}\mu_B B < \zeta_{e(+)}(B) < \frac{n_e^2}{A^2} + 4\mu_B B. \tag{12}$$

Неравенства (11) и правое неравенство (12) не противоречат неравенствам (10), а левое неравенство (12) противоречит правому неравенству (10). Поэтому в (9) следует оставить только корень $\zeta_{e(-)}(B)$.

С дальнейшим ростом r получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней.

Химический потенциал крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле

Теперь рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, только для релятивистского газа. Уравнение, аналогичное (5), для химического потенциала $\chi_e(B)$ (который, в отличие от нерелятивистского случая, содержит энергию покоя электрона) может быть записано на основе сведений из [2, с. 45] следующим образом:

$$n_e = F\left(\sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2c^4} + 2\sum_{j=1}^{r}\sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2c^4 - 4jm_ec^2\mu_B B}\right), \tag{13}$$

$$F = \frac{m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}, \tag{14}$$

Суммирование в (13), как и в (5), ведется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не станет отрицательным. Как и для нерелятивистского газа, рассмотрим некоторые частные случаи (в т. ч. те, которые не затрагивались ранее).

При $r = 0$ сумма в правой части (13) исчезает, поэтому величина $\chi_e(B)$ может быть легко выражена через остальные:

$$\chi_e(B) = \sqrt{n_e^2\pi^4\hbar^6c^2/(m_e\mu_B B)^2 + m_e^2c^4}\,. \tag{15}$$

При $r = 1$ из (13) получается квадратное уравнение относительно величины

$$y = \chi_e^2(B) - m_e^2c^4. \tag{16}$$

Для удобства анализа корней такого уравнения после несложных преобразований можно переписать его следующим образом:

$$9y^2 - \left(96\mu_B Bm_ec^2 + 10\frac{n_e^2}{F^2}\right)y + \left(16\mu_B Bm_ec^2 + \frac{n_e^2}{F^2}\right)^2 = 0. \tag{17}$$

Корни уравнения (17) находятся по формулам:

$$y_\pm = \frac{1}{18}\left(96\mu_B Bm_ec^2 + 10\frac{n_e^2}{F^2} \pm \sqrt{768\mu_B Bm_ec^2\frac{n_e^2}{F^2} + 64\frac{n_e^4}{F^4}}\right). \tag{18}$$

Поскольку $\chi_e(B)$ определяется однозначно, следует, как и в нерелятивистском случае, оставить только один корень в (18). Из (13) при $r = 1$ можно, выполняя рассуждения, аналогичные приведенным в абзаце перед (10), сделать следующие оценки:

$$\frac{n_e^2}{9F^2} < y < \frac{n_e^2}{9F^2} + 4\mu_B Bm_ec^2. \tag{19}$$

Для установления границ корней (18) можно, как и при получении (11) – (12), либо пренебрегать слагаемым, зависящим от B, под радикалом, либо дополнять подкоренное выражение до полного квадрата. В этом случае получаем следующие оценки:

$$\frac{n_e^2}{9F^2}+\frac{8}{3}m_e c^2\mu_B B<y_-<\frac{n_e^2}{9F^2}+\frac{16}{3}m_e c^2\mu_B B\,, \tag{20}$$

$$\frac{n_e^2}{F^2}+\frac{16}{3}m_e c^2\mu_B B<y_+<\frac{n_e^2}{F^2}+8m_e c^2\mu_B B\,. \tag{21}$$

Оба неравенства (20), а также правое неравенство (21) не противоречат неравенствам (19). В противоположность этому, левое неравенство (21) противоречит правому неравенству (19). Поэтому в (18) оставляем только корень y_-, и тогда из (18) и (16) следует, что

$$\chi_e(B)=\sqrt{\frac{96\mu_B B m_e c^2+10\dfrac{n_e^2}{F^2}-\sqrt{768\mu_B B m_e c^2\dfrac{n_e^2}{F^2}+64\dfrac{n_e^4}{F^4}}}{18}+m_e^2c^4}\,. \tag{22}$$

По аналогии с нерелятивистским случаем, с дальнейшим ростом r получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней относительно величины (16).

Степень поляризации крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле

Рассмотрим предыдущую модель электронного газа, оставляя все ее параметры без изменений, но теперь будем исследовать вопрос о спиновой поляризации электронов.

На основе соотношений [2, с. 45] можно записать систему уравнений, связывающих степень спиновой поляризации p_{0e} и химический потенциал $\chi_e(B)$ такого газа:

$$n_e(1+p_{0e})=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=0}^{r}\sqrt{\chi_e^2(B)-m_e^2c^4-4jm_e c^2\mu_B B}\,, \tag{23}$$

$$n_e(1-p_{0e})=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=1}^{r}\sqrt{\chi_e^2(B)-m_e^2c^4-4jm_e c^2\mu_B B}\,. \tag{24}$$

Здесь, как и в предыдущих задачах, не учитывается аномальный магнитный момент электрона, а суммирование ведется с прежними замечаниями. Можно исключить величину $\chi_e^2(B)-m_e^2c^4$ из (23) и (24) или выразить ее в явном виде, вычитая (24) из (23). Тогда в правой части остается только одно слагаемое – то, в котором под корнем присутствует лишь $\chi_e^2(B)-m_e^2c^4$:

$$n_e p_{0e}=\frac{m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sqrt{\chi_e^2(B)-m_e^2c^4}\,. \tag{25}$$

Из (25) легко получить, что

$$\chi_e^2(B)-m_e^2c^4=\frac{n_e^2p_{0e}^2\pi^4\hbar^6c^2}{(m_e\mu_B B)^2}\,. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (23), получаем:

$$n_e\left(1+p_{0e}\right)=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=0}^{r}\sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2\pi^4\hbar^6 c^2}{\left(m_e\mu_B B\right)^2}-4jm_e c^2\mu_B B}\,. \tag{27}$$

Можно подставить (26) также в (24), в результате чего получаем:

$$n_e\left(1-p_{0e}\right)=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=1}^{r}\sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2\pi^4\hbar^6 c^2}{\left(m_e\mu_B B\right)^2}-4jm_e c^2\mu_B B}\,. \tag{28}$$

Вычитание (28) из (27) уже не приводит к новым уравнениям, но вместо вычитания можно выполнить сложение, в результате чего получим:

$$2n_e=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\left(\frac{n_e p_{0e}\pi^2\hbar^3 c}{m_e\mu_B B}+2\sum_{j=1}^{r}\sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2\pi^4\hbar^6 c^2}{\left(m_e\mu_B B\right)^2}-4jm_e c^2\mu_B B}\right). \tag{29}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи полученных уравнений.

Легко убедиться, что если в (27) $r=0$, то $p_{0e}=1$. При $r=1$ из (27), (28) или (29) независимыми способами можно получить одно и то же квадратное уравнение относительно p_{0e}, которое внешне не отличается от аналогичного уравнения для нерелятивистского газа [4, с. 15]:

$$3p_{0e}^2+2p_{0e}-1-\frac{16\left(m_e\mu_B B\right)^3}{n_e^2\pi^4\hbar^6}=0\,. \tag{30}$$

Корни уравнения (30) находятся по формуле

$$p_{0e}^{(\pm)}=\frac{1}{3}\left(-1\pm\sqrt{1+3\left(1+16\left(m_e\mu_B B\right)^3\big/\left(n_e^2\pi^4\hbar^6\right)\right)}\right). \tag{31}$$

Легко убедиться в том, что корень $p_{0e}^{(-)}$ отрицателен по знаку, а также превосходит единицу по модулю при любых, отличных от нуля значениях B, что лишено физического смысла. Кроме того, в соответствии со смыслом величины p_{0e}, который подразумевается в [2, с. 45], для уравнения (30) берется только положительный корень, а таким корнем при любых, отличных от нуля значениях B, как можно убедиться, является только корень $p_{0e}^{(+)}$.

Как и в случае химического потенциала, с дальнейшим ростом r получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней.

Химический потенциал крайне невырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле

Перейдем к исследованию электронного газа при высоких температурах. Уравнение, связывающее химический потенциал такого газа с другими величинами, было получено в [2, с. 62–64]. Выполненные преобразования, однако, требуют уточнения, поэтому получим указанное уравнение заново.

Введем обозначения: χ – химический потенциал (содержащий энергию покоя частиц), N_e – число электронов, V – объем, s = 1/2. Смысл остальных величин был приведен ранее. Запишем исходные соотношения (без учета аномального магнитного момента электрона):

$$N_e = N_e^- + N_e^+, \tag{32}$$

$$N_e^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_e \mu_B BV}{2\pi^2 \hbar^3} exp\left(\frac{\chi - \varepsilon_{n\pm}}{kT} \right) dp_z, \tag{33}$$

$$\varepsilon_{n\pm} = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_z^2 + 2m_e c^2 \mu_B B(2n + 1 \pm 2s)}. \tag{34}$$

При этом $N_e^{\pm}$ – число электронов со спинами, направленными, соответственно, по направлению и против направления вектора индукции магнитного поля (направления собственных магнитных моментов противоположны), n – номер уровня Ландау, p_z – проекция импульса отдельного электрона на ось z.

Перепишем (32) с учетом (33) и (34) следующим образом:

$$N_e = \frac{m_e \mu_B BV}{\pi^2 \hbar^3 c} exp\left(\frac{\chi}{kT} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon_{n1}}^{+\infty} exp\left(-\frac{\varepsilon_{n-}}{kT} \right) d\sqrt{\varepsilon_{n-}^2 - m_e^2 c^4 - 4nm_e c^2 \mu_B B} + \right.$$

$$\left. + \int_{\varepsilon_{n2}}^{+\infty} exp\left(-\frac{\varepsilon_{n+}}{kT} \right) d\sqrt{\varepsilon_{n+}^2 - m_e^2 c^4 - 4(n+1)m_e c^2 \mu_B B} \right), \tag{35}$$

$$\varepsilon_{n1} = \sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B}, \tag{36}$$

$$\varepsilon_{n2} = \sqrt{m_e^2 c^4 + 4(n+1)m_e c^2 \mu_B B}. \tag{37}$$

Соотношение (35) можно также переписать следующим образом:

$$N_e = \frac{m_e \mu_B BV}{\pi^2 \hbar^3 c} exp\left(\frac{\chi}{kT} \right) \left(\int_{m_e c^2}^{+\infty} exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right) d\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4} + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon_{n1}}^{+\infty} exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right) d\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4 - 4nm_e c^2 \mu_B B} \right). \tag{38}$$

Введем обозначения:

$$x = \frac{\varepsilon}{m_e c^2},\ y_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B}}, \tag{39}$$

$$\nu_n = \frac{\sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B}}{kT} = \eta \sqrt{1 + \frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}},\ \eta = \frac{m_e c^2}{kT} = \nu_0. \tag{40}$$

С учетом (39) и (40) можно переписать (38) в виде

$$N_e = exp\left(\frac{\chi}{kT} \right) \left(\frac{m_e^2 c \mu_B BV}{\pi^2 \hbar^3} \int_1^{+\infty} exp(-\eta x) d\sqrt{x^2 - 1} +, \right.$$

$$\left. + \frac{2m_e \mu_B BV}{\pi^2 \hbar^3 c} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m_e^2 c^4 + 4nm_e c^2 \mu_B B} \int_1^{+\infty} exp(-y_n \nu_n) d\sqrt{y_n^2 - 1} \right). \tag{41}$$

Учитывая выражение для функции Бесселя

$$K_1(\lambda)=\int_1^{+\infty}exp(-\lambda x)\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (42)$$

можно окончательно переписать (41) в виде

$$N_e=\frac{m_e^2 c\mu_B BV}{\pi^2\hbar^3}exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)\left(K_1(\eta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}}K_1(\nu_n)\right). \quad (43)$$

Таким образом,

$$N_e^-=\frac{m_e^2 c\mu_B BV}{\pi^2\hbar^3}exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{1+\frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}}K_1(\nu_n), \quad (44)$$

$$N_e^+=\frac{m_e^2 c\mu_B BV}{\pi^2\hbar^3}exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}}K_1(\nu_n). \quad (45)$$

Кроме того, с учетом соотношения

$$n_e=N_e/V, \quad (46)$$

можно из (43) выразить химический потенциал через остальные величины:

$$\chi=kT\,ln\left(\frac{\pi^2\hbar^3 n_e}{m_e^2 c\mu_B B\left(K_1(\eta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{4n\mu_B B}{m_e c^2}}K_1(\nu_n)\right)}\right). \quad (47)$$

Степень поляризации и другие термодинамические характеристики крайне невырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле

В электронном газе во внешнем магнитном поле при любой температуре возникает поляризация спинов (и собственных магнитных моментов). Степень такой поляризации в общем случае можно найти по формуле

$$p_{0e}=\left(N_e^- - N_e^+\right)/\left(N_e^- + N_e^+\right), \quad (48)$$

где выражения для $N_e^{\pm}$ были получены ранее. Подставляя (44), (45) в (48), получим:

$$p_{0e}=K_1(\nu_0)\Big/\left(K_1(\nu_0)+2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+4n\mu_B B/\left(m_e c^2\right)}K_1(\nu_n)\right). \quad (49)$$

Далее нам также понадобится обозначение (помимо (40)):

$$\alpha=\frac{\mu_B B}{kT}. \quad (50)$$

Общие выражения для энтропии S, средней энергии E и намагниченности M имеют, соответственно, вид [2, с. 49, 53]:

$$S=-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{\chi,V}, \tag{51}$$

$$E=\Omega+\chi N+TS, \tag{52}$$

$$M=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial B}\right)_{\chi,V,B}. \tag{53}$$

При этом Ω – большой термодинамический потенциал, выражение для которого в случае крайне невырожденного газа имеет вид [2, с. 49]:

$$\Omega=-N_e kT\ . \tag{54}$$

Подставляя (54) в (51) – (52), с учетом (43) получим:

$$S=N_e k\left(2-\frac{\chi}{kT}+\frac{\eta^2K_0(\eta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^2K_0(\nu_n)}{\eta K_1(\eta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\nu_nK_1(\nu_n)}\right), \tag{55}$$

$$E=N_e kT\left(1+\frac{\eta^2K_0(\eta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^2K_0(\nu_n)}{\eta K_1(\eta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\nu_nK_1(\nu_n)}\right), \tag{56}$$

$$M=\frac{N_e kT}{VB}\left(1-\frac{4\eta\alpha\sum_{n=1}^{\infty}nK_0(\nu_n)}{\eta K_1(\eta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\nu_nK_1(\nu_n)}\right). \tag{57}$$

При получении (55) – (57) было использовано соотношение [9, с. 168]

$$K_1'(y)=-K_0(y)-K_1(y)/y. \tag{58}$$

Омега-потенциал идеального нерелятивистскиого газа заряженных фермионов в магнитном поле при конечных температурах

Теперь перейдем к исследованию нерелятивистского газа при конечных, но не очень высоких температурах. Общее выражение для большого термодинамического потенциала газа заряженных фермионов в магнитном поле при конечных температурах имеет вид [2, с. 48, 50, 51]

$$\Omega=-kT\frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_s\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ln\left(1+exp\left(\frac{\chi-\varepsilon_n}{kT}\right)\right)dp_z\ . \tag{59}$$

В (59) приняты обозначения: m – масса частицы, ε_n – энергия фермиона, n – номер уровня Ландау, μ – соответствующий магнетон (магнетон Бора для электронов или позитронов, ядерный магнетон для протонов), p_z – проекция импульса отдельного фермиона на ось z.

Таким образом, соотношение (59), как и все последующие, применимы не только к электронам, но и к другим заряженным фермионам (позитронам, протонам и др.).

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда для любых физически допустимых значений ε_n справедливо соотношение

$$exp\left(\frac{\varepsilon_n-\chi}{kT}\right)>1. \tag{60}$$

Для энергии и химического потенциала выполняются соотношения:

$$\chi=\zeta+mc^2,\ \ \varepsilon_n=\frac{p_z^2}{2m}+mc^2+(2n+1+2\sigma s)\mu B, \tag{61}$$

где c – скорость света, σ – отношение собственного магнитного момента фермиона к соответствующему магнетону.

Если величина s принимает значения, равные $\pm 1/2$, а минимальное значение n равно нулю, то из (61) следует, что (60) справедливо при

$$\zeta<(1-|\sigma|)\mu B. \tag{62}$$

При выполнении (62) для логарифма в (59) можно выполнить следующее разложение:

$$ln\left(1+exp\left(\frac{\chi-\varepsilon_n}{kT}\right)\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\chi-\varepsilon_n}{kT}\right). \tag{63}$$

С учетом (63) можно переписать (59) в виде:

$$\Omega=-kT\frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right)\sum_s exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma\mu B}{kT}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right)dp_z. \tag{64}$$

Далее учтем, что [10, с. 277]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right)dp_z=\sqrt{\frac{2\pi mkT}{j+1}}. \tag{65}$$

Выполняя суммирование, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right)=\frac{1}{2sh\left((j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}, \tag{66}$$

$$\sum_s exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma\mu B}{kT}\right)=2ch\left((j+1)\frac{\sigma\mu B}{kT}\right). \tag{67}$$

Подставляя (65) – (67) в (64), окончательно получаем:

$$\Omega=-2\mu BV\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+1)^{3/2}}exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right)\frac{ch\left((j+1)\frac{\sigma\mu B}{kT}\right)}{sh\left((j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}. \qquad (68)$$

Если в сумме (68) оставить только слагаемое, соответствующее $j=0$, то получится уже известный результат для высоких температур [2, с. 51].

Заключение

Исследовано влияние температуры и квантующего магнитного поля на избранные термодинамические характеристики идеальных газов заряженных фермионов. В приближении абсолютного нуля температуры получена зависимость химического потенциала нерелятивистского и релятивистского электронного газа, а также степени спиновой поляризации релятивистского электронного газа от индукции магнитного поля при заполнении одного или двух уровней Ландау. Для крайне невырожденного релятивистского электронного газа получены выражения для химического потенциала, степени спиновой поляризации, энтропии, средней энергии и намагниченности. Для отличных от нуля, но не очень высоких температур получено выражение для большого термодинамического потенциала газа заряженных фермионов. Результаты могут представлять интерес для теоретического исследования замагниченных сверхплотных астрофизических объектов и замагниченной межзвездной среды.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.

2. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

3. Секержицкий, В. С. О поляризации крайне вырожденных идеальных ферми-газов в магнитном поле / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. – 2020. – Вып. 16, ч. 2. Прыродазн. навукі. – С. 70–78.

4. Секержицкий, В. С. О частично поляризованном идеальном электронном газе в квантующем магнитном поле / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Астрофизические исследования в БрГУ имени А. С. Пушкина : сб. материалов науч.-практ. семинара, Брест, 12 апр. 2022 г. ; под общ. ред. А. И. Серого. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 14–15.

5. Секержицкий, В. С. Об использовании программы MathCAD для вычисления химического потенциала газа нерелятивистских фермионов / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2018 г. / Брест, гос. ун-т ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2018. – С. 12–14.

6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 5 : Статистическая физика : в 2 ч. – Ч. I. – 616 с.

7. Секержицкий, В. С. О вычислении термодинамических характеристик нерелятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле при низких отличных от нуля температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Современные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. XVIII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2021. – С. 12–15.

8. Секержицкий, В. С. О вычислении некоторых термодинамических характеристик релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле при низких отличных от нуля температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. XIX Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч. – Пенза : МЦНС «Наука и Просвещение», 2021. – Ч. 1. – С. 11–14.

9. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М. : Наука, 1973. – 228 с.

10. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев [и др.] ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.

REFERENCES

1. Rumier, Yu. B. Tiermodinamika, statistichieskaja fizika i kinetika : uchieb. posobije / Yu. B. Rumier, M. Sh. Ryvkin. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.

2. Siekierzhickij, V. S. Ravnoviesnyje sistiemy fiermionov i bozonov v magnitnykh poliakh : monografija / V. S. Siekierzhickij ; Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Briest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.

3. Siekierzhickij, V. S. O poliarizacii krajnie vyrozhdiennykh idieal'nykh fiermi-gazov v magnitnom polie / V. S. Siekierzhickij, A. I. Sieryj // Vuchon. zap. Bresc. dziarzh. un-ta imia A. S. Pushkina : zb. navuk. pr. – 2020. – Vyp. 16., ch. 2. Pryrodazn. navuki. – S. 70–78.

4. Siekierzhickij, V. S. O chastichno poliarizovannom idieal'nom eliektronnom gazie v kvantujushchiem magnitnom polie / V. S. Siekierzhickij, A. I. Sieryj // Astrofizichieskije issliedovanija v BrGU imieni A. S. Pushkina : sb. matierialov nauch.-prakt. sieminara, Briest, 12 apr. 2022 g. ; pod obshch. ried. A. I. Sierogo. – Briest : BrGU, 2022. – S. 14–15.

5. Siekierzhickij, V. S. Ob ispol'zovanii programmy MathCAD dlia vychislienija khimichieskogo potenciala gaza nierieliativistskikh fiermionov / V. S. Siekierzhickij, A. I. Sieryj // Matiematichieskoje modelirovanije i novyje obrazovatiel'nyje tiekhnologii v matiematike : matierialy riesp. nauch.-prakt. konf., Briest, 24–25 apr. 2018 g. / Briest. gos. un-t ; pod obshch. ried. A. I. Basika. – Briest : BrGU im. A. S. Pushkina, 2018. – S. 12–14.

6. Landau, L. D. Tieorietichieskaja fizika : uchieb. posobije dlia vuzov : v 10 t. / L. D. Landau, Ye. M. Lifshic. – 5-je izd., stier. – M. : FIZMATLIT, 2001. – T. V : Statistichieskaja fizika : v 2 ch. – Ch. 1. – 616 s.

7. Siekierzhickij, V. S. O vychislienii tiermodinamichieskikh kharaktieristik nierieliativistskogo eliektronnogo gaza v kvantujushchiem magnitnom polie pri nizkikh otlichnykh ot nulia tiempieraturakh / V. S. Siekierzhickij, A. I. Sieryj // Sovriemiennyje nauchnyje issliedovanija: aktual'nyje voprosy, dostizhenija i innovacii : sb. st. XVIII Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2021. – S. 12–15.

8. Siekierzhickij, V. S. O vychislienii niekotorykh tiermodinamichieskikh kharaktieristik rieliativistskogo eliektronnogo gaza v kvantujushchiem magnitnom polie pri nizkikh otlichnykh ot nulia tiempieraturakh / V. S. Siekierzhickij, A. I. Sieryj // Sovriemiennyje nauchnyje issliedova-nija: aktual'nyje voprosy, dostizhenija i innovacii : sb. st. XIX Miezhdunar. nauch.-prakt. konf. : v 2 ch. – Pienza : MCNS «Nauka i Prosvieshchienije», 2021. – Ch. 1 – S. 11–14.

9. Dvajt, G. B. Tablicy integralov i drugije matiematichieskije formuly / G. B. Dvajt. – M. : Nauka, 1973. – 228 s.

10. Osnovnyje matiematichieskije formuly : spravochnik / V. T. Vodniev [i dr.] ; pod red. Yu. S. Bogdanova. – Minsk : Vysh. shk., 1995. – 380 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.10.2022