УДК 372.853+536

В. С. СЕКЕРЖИЦКИЙ, А. И. СЕРЫЙ
Брест, БрГУ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ФЕРМИ-ГАЗА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ В ОТСУТСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Расчет характеристик ферми-газов имеет важное значение, например, для физики твердого тела и астрофизики. При этом следует отметить, что алгоритм расчета основных характеристик ферми-газа при низких, но отличных от нуля температурах хорошо разработан для нерелятивистского приближения [1, с. 596–597], которое не всегда может считаться корректным. В связи с этим возникает необходимость вывода некоторых основных формул заново; в данной работе это предполагается сделать для расчета плотности энергии.

В соответствии с [1, с. 190–192] запишем выражение для плотности энергии w ферми-газа при произвольной температуре T в отсутствие внешнего магнитного поля и спиновой поляризации:

$$w = 2 \cdot \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon p^2 \left(exp\left((\varepsilon - \mu)/(kT) \right) + 1 \right)^{-1} dp, \qquad (1)$$

где $\hbar$ и k – постоянные Планка и Больцмана, μ – химический потенциал p и ε – импульс и энергия фермиона. В нерелятивистском случае величины ε и μ не содержат энергии покоя фермиона mc^2 (m – масса фермиона, c – скорость света в вакууме), поэтому взаимосвязь между ε и p такова, что при переходе к от переменной p к ε в (1) нижний предел интеграла остается равным нулю. Это и позволяет применять формулы приближенного вычисления для интеграла при $kT/\mu << 1$, приведенные в [1, с. 597].

В релятивистском случае связь между ε и p выражается формулой

$$\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \qquad (2)$$

а μ так же, как и ε, содержит mc^2. Тогда (1) можно переписать в виде

$$w = \pi^{-2} (\hbar c)^{-3} \int\limits_{mc^2}^{+\infty} \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - m^2c^4} \left(\exp\left((\varepsilon - \mu)/(kT) \right) + 1 \right)^{-1} d\varepsilon. \qquad (3)$$

Нижний предел интеграла в (3) уже не равен нулю, поэтому применение упомянутого выше алгоритма к (3) недопустимо. Данная проблема устраняется выполнением замены

$$\varepsilon = x + mc^2, \ \mu = \nu + mc^2. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), после несложных преобразований получим:

$$w = \pi^{-2}(\hbar c)^{-3}\left(I_{5/2} + 2mc^2 I_{3/2} + m^2c^4 I_{1/2}\right), \tag{5}$$

$$I_j = \int\limits_0^{+\infty} x^j \sqrt{x + 2mc^2}\left(\exp((\varepsilon - \mu)/(kT)) + 1\right)^{-1} dx. \tag{6}$$

Для возможности применения к интегралам (6) рассуждений, приведенных в [1, с. 596–597], требуется, чтобы функции

$$\varphi_j(x) = x^j \sqrt{x + 2mc^2} \tag{7}$$

при $x \to \infty$ возрастали не быстрее, чем $\exp(x/(kT))$, а при $x \to 0$ не возрастали быстрее, чем x^{-1}. Легко видеть, что эти условия выполняются. Поэтому в соответствии с [1, с. 597] в общем виде можно приближенно записать:

$$I_j \approx \int\limits_0^{\nu} \varphi_j(x)dx + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right)_{x=\nu}. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8) и после несложных преобразований возвращаясь от ν к μ в соответствии с (4), для w в (5) получаем:

$$w \approx \frac{\mu}{8}\sqrt{\mu^2 - m^2c^4}\left(2\mu^2 - m^2c^4\right) - \frac{m^4c^8}{8} ln\left|\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2c^4}}{mc^2}\right| + \\ + \frac{\pi^2}{12}(kT)^2 \frac{2\mu\left(3\mu^2 - 2m^2c^4\right)}{\sqrt{\mu^2 - m^2c^4}}. \tag{9}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: учеб. пособие. / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.