УДК 372.853+537

А.И. СЕРЫЙ
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ЗАМЕЧАНИЯ О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ УРАВНЕНИЯМИ МАКСВЕЛЛА

Учебная программа по теоретической физике для специальности «Физика и информатика» в разделе «Электродинамика» предусматривает, в частности, изучение системы уравнений Максвелла [1, с. 32; 2, с. 33–40; 3, с. 98–99, 108–111; 4, с. 351–355; 5, с. 79] для квазистационарного и быстропеременного электромагнитных полей (ЭМП). При этом, в частности, отмечается, что не являются независимыми следующие два уравнения системы (где $\vec{B}$ – индукция магнитного поля, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, c – скорость света в вакууме, t – время).

$$div\vec{B} = 0,\ rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (1)$$

Обычно на первом шаге доказательства находится дивергенция от обеих частей второго уравнения (1) с учетом того, что дивергенция от ротора тождественно равна нулю; второй шаг заключается в замене порядка дифференцирования по координатам и времени. В результате получаем:

$$divrot\vec{E} = -\frac{1}{c}div\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{c}div\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{B} = 0, \qquad (2)$$

Из (2) следует, что в любой точке пространства $div\vec{B}$ не зависит от времени, т.е. равно константе, которая, вообще говоря, может быть отличной от нуля и различной для каждой точки пространства.

На последнем (третьем) этапе остается показать, что эта константа везде одинакова и равна нулю. Для этого можно применить метод от противного. Предположим, что в начальный момент времени выполнялось условие $div\vec{B} = const \neq 0$, после чего из данной области удалось устранить все токи и магнетики (с соблюдением условий квазистационарности в случае квазистационарного ЭМП и с меньшими ограничениями в случае быстропеременного ЭМП). В результате для каждой точки будут справедливыми соотношения $\vec{B}=\vec{0}$ и, следовательно, $div\vec{B}=0$. Но тогда получается, что в течение какого-то промежутка времени значение $div\vec{B}$ в разных точках пространства должно меняться от конечного до нулевого, т.е. соответствующая производная по времени в (2) должна быть отличной от нуля. Мы пришли к противоречию. Исходное утверждение доказано.

Другая пара уравнений Максвелла для квазистационарного и быстропеременного случаев имеет, соответственно, вид (где $\vec{D}$ – вектор электрической индукции, ρ – плотность зарядов, $\vec{j}$ – плотность тока, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля)

$$div\vec{D}=4\pi\rho\,,\; rot\vec{H}\approx\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \tag{3}$$

$$div\vec{D}=4\pi\rho\,,\; rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,. \tag{4}$$

Можно отметить некоторые общие черты между процессом доказательства наличия взаимосвязи между уравнениями пары (1) и процессом доказательства наличия взаимосвязи между уравнениями пары (4). Указанную аналогию проследим ниже в форме таблицы.

Таблица – Сравнение хода доказательства взаимосвязи между уравнениями в парах (1) и (4)

	Пара уравнений (1)	Пара уравнений (4)
Первый шаг доказательства	берем дивергенцию от обеих частей второго уравнения и учитываем, что дивергенция от ротора тождественно равна нулю	
Второй шаг доказательства	$div\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{B}$	$div\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{D}$ (*)
Третий шаг доказательства	с применением метода от противного (см. выше), что приводит нас к первому уравнению пары (1)	подставляем правую часть первого уравнения (4) в правую часть (*), после чего, учитывая результат первого шага, приходим к уравнению непрерывности (УН)
Таким образом	дополнительные уравнения на третьем шаге не используются	на третьем шаге используется УН, не входящее в систему уравнений Максвелла
В случае квазистационарного ЭМП	доказательство остается в силе без изменений	вместо (4) используется (3), где уравнения уже независимы, так как после первого шага автоматически получаем УН для квазистационарного случая, где связь с первым уравнением (3) отсутствует

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, С. И. Основы электродинамики : учеб. пособие для вузов / С. И. Баскаков. – М. : Совет. радио, 1973. – 248 с.

2. Физическая энциклопедия / гл. ред. А. М. Прохоров ; редкол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1992. – Т. 3 : Магнито-плазменный – Пойнтинга теорема. – 672 с.

3. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в X т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 8-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. II : Теория поля. – 536 с.

4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – Т. 3 : Электричество. – 688 с.

5. Левич, В. Г. Курс теоретической физики: в 2 т. / В. Г. Левич. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – Т. I. Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. Электромагнитные процессы в веществе.– 911 с.