



УДК 524.354.6-33

Владимир Станиславович Секержицкий¹, Алексей Игоревич Серый²
*^{1,2}канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
Vladimir Sekerzhitsky¹, Alexey Sery²
*^{1,2}PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University*
e-mail: svs@brsu.brest.by

О ПОЛЯРИЗАЦИИ КРАЙНЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ФЕРМИ-ГАЗОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследовано влияние сильного магнитного поля на поляризацию крайне вырожденных идеальных нерелятивистских нейтронного, электронного и протонного газов. Показано, что критерий полной поляризации для электронов совпадает с критерием квантового предела сверхсильного магнитного поля, а для протонов критерий квантового предела более жесткий, чем критерий полной поляризации.

On the Polarization of Extremely Degenerate Ideal Fermi-Gases in Magnetic Field

The influence of strong magnetic field on the polarization of extremely degenerate ideal nonrelativistic neutron, electron and proton gases is investigated. It is shown that the total polarization criterion for electrons coincides with the criterion of the quantum limit of super strong magnetic field, and for protons the criterion of the quantum limit is tougher than the total polarization criterion.

1. Как известно из учебной и научной литературы по термодинамике и статистической физике [1; 2], для крайне вырожденного нерелятивистского ферми-газа понятие «энергия Ферми» означает как максимальную полную, так и максимальную кинетическую энергии фермиона, численно равные химическому потенциалу. Если магнитное поле отсутствует, то данное утверждение возражений не вызывает. Однако для системы фермионов в магнитном поле положение существенно меняется.

Рассмотрим идеальный парамагнитный ферми-газ (например, нейтронный при достаточной для стабильности нейтронов концентрации электронов сверхплотного вещества) при температуре абсолютного нуля в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Полная (с точностью до слагаемого $m_n c^2$) энергия нейтрона с собственным магнитным моментом μ_n

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{nk} + 2s\mu_n B, \quad (1)$$

где кинетическая энергия $\varepsilon_{nk} = \frac{p_n^2}{2m_n}$, p_n и m_n – импульс и масса нейтрона, $s = \mp 1/2$.

При этом химический потенциал (в данном случае максимальная полная энергия, отсчитываемая от $m_n c^2$)

$$\zeta_n(B) = \tau_{n\uparrow} - \mu_n B = \tau_{n\downarrow} + \mu_n B, \quad (2)$$

$\tau_{n\uparrow}$ и $\tau_{n\downarrow}$ – максимальные кинетические энергии нейтронов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю. Соответствующие графики зависимости ε_n от p_n имеют вид ветвей параболы, вдоль которых распре-



делены квантовые состояния. В отсутствие магнитного поля заполнение квантовых состояний нейтронами с магнитными моментами, параллельными и антипараллельными полю, одинаково (рисунок 1а, сплошные линии). В магнитном поле обе ветви параболы смещаются друг относительно друга на величину $2\mu_n B$ (рисунок 1б). При этом нарушается энергетическая равноправность обеих ориентаций магнитных моментов и в соответствии с принципом запрета Паули и стремлением энергии системы к минимуму часть нейтронов меняет ориентацию магнитных моментов на противоположную (рисунок 1в). Соответствующие графики зависимости ε_{nk} от p_n представлены на рисунках 1г, 1д и 1е.

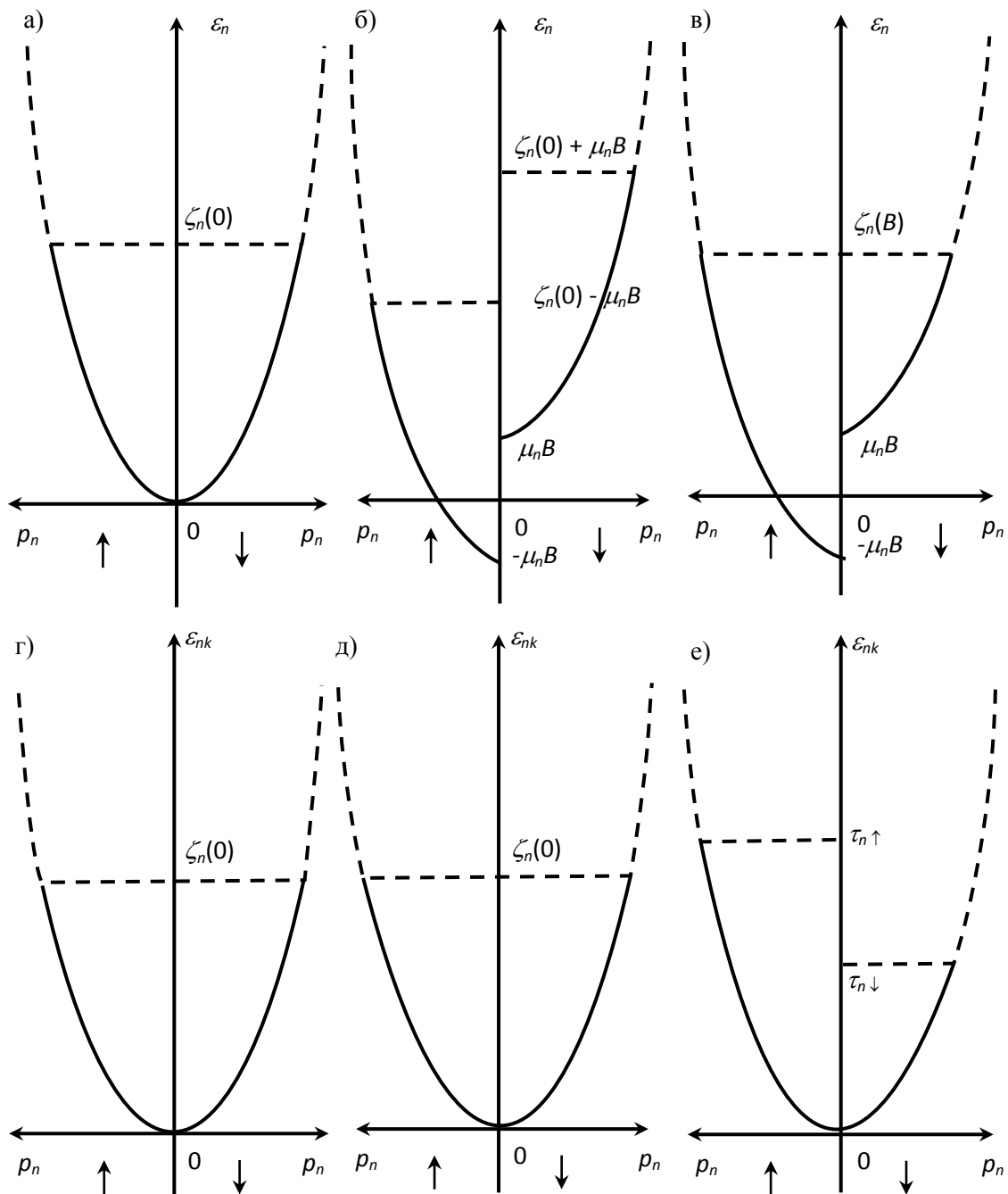


Рисунок 1



Концентрация нейтронов в магнитном поле находится из условия нормировки:

$$\begin{aligned} n_n &= n_{n\uparrow} + n_{n\downarrow} = 2\pi \frac{(2m_n)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\int_0^{\tau_{n\uparrow}} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk} + \int_0^{\tau_{n\downarrow}} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk} \right) = \\ &= \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} (\tau_{n\downarrow}^{3/2} + \tau_{n\uparrow}^{3/2}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} \left((\zeta_n(B) + \mu_n B)^{3/2} + (\zeta_n(B) - \mu_n B)^{3/2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь учтено, что число квантовых состояний для нейтрона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего импульсом от p_n до $p_n + dp_n$, при наличии магнитного поля такое же, как и в отсутствие последнего:

$$dG_n = \frac{4\pi p_n^2 dp_n V}{(2\pi\hbar)^3} = 2\pi \frac{(2m_n)^{3/2} V}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk}. \quad (4)$$

Таким образом, в магнитном поле происходит частичная или полная поляризация парамагнитного ферми-газа. Степень поляризации

$$p_{0n} = \frac{n_{n\uparrow} - n_{n\downarrow}}{n_n}, \quad (5)$$

$n_{n\uparrow}$ и $n_{n\downarrow}$ – концентрации нейтронов с магнитными моментами, направленными по и против вектора индукции внешнего магнитного поля. Из (3) и (5) следует:

$$n_n (1 + p_{0n}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} (\zeta_n(B) + \mu_n B)^{3/2}, \quad (6)$$

$$n_n (1 - p_{0n}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} (\zeta_n(B) - \mu_n B)^{3/2}, \quad (7)$$

$$(1 + p_{0n})^{2/3} - (1 - p_{0n})^{2/3} = \frac{4m_n\mu_n B}{(3\pi^2\hbar^3 n_n)^{2/3}}. \quad (8)$$

Последнее соотношение позволяет вычислять степень поляризации нейтронного газа заданной концентрации в зависимости от индукции магнитного поля.

Полная поляризация ($n_{n\uparrow} = n_n$, $n_{n\downarrow} = 0$) имеет место при $\mu_n B \geq \zeta_n(B)$. В этом случае

$$\tau_{n\uparrow} = 2^{2/3} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n} = 2^{2/3} \zeta_n(0), \quad (9)$$

$$\zeta_n(B) = 2^{2/3} \zeta_n(0) - \mu_n B. \quad (10)$$

Итак, при $B \neq 0$ термин «энергия Ферми» оказывается двусмысленным: то ли его следует отнести к максимальной полной энергии, то ли к максимальной кинетической, которые существенно различаются. Данная двусмысленность и неопределенность терминологии, приводящая иногда даже к физически некорректным выводам, присуща значительному количеству научных публикаций. На наш взгляд, имеет смысл от термина «энергия Ферми» по отношению к ферми-газу в магнитном поле вообще отказаться и оперировать такими понятиями, как «максимальная полная энергия» («химический



потенциал») и «максимальная кинетическая энергия», достаточно точно отражающими физическую сущность данных величин.

Аналогичная ситуация, очевидно, имеет место и при описании газа заряженных фермионов в магнитном поле с учетом диамагнетизма Ландау.

2. Рассмотрим теперь крайне вырожденный идеальный нерелятивистский электронный газ в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . В первом приближении пренебрегаем величиной аномального магнитного момента электрона и полагаем собственный магнитный момент электрона равным магнетону Бора μ_B . Используя результаты [3], выражение для полной энергии электрона в магнитном поле представим в виде:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{ek} + 2s\mu_B B = \frac{p_{ez}^2}{2m_e} + \mu_B B(2n+1) + 2s\mu_B B, \quad (11)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер квантового уровня Ландау, p_{ez} – проекция импульса p_e электрона на направление индукции магнитного поля, m_e – масса электрона, $s = \mp 1/2$.

Для электронного газа график зависимости ε_e от p_{ez} в присутствии магнитного поля (рисунок 2а) представляет собой семейство парабол, вдоль которых распределены квантовые состояния (заполненные состояния изображены сплошными линиями). Каждому значению n соответствуют две ветви параболы, смещенные друг относительно друга на величину $2\mu_B B$ (рисунок 2а). Соответствующий график зависимости ε_{ek} от p_{ez} представлен на рисунке 2б.

Число квантовых состояний электрона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего проекцией импульса от p_{ez} до $p_{ez} + dp_{ez}$, при наличии магнитного поля определяется выражением [3]:

$$\begin{aligned} dG_e &= \frac{m_e \mu_B B V}{2\pi^2 \hbar^3} dp_{ez} = \frac{m_e^{3/2} \mu_B B V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} = \\ &= \frac{m_e^{3/2} \mu_B B V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_e}{\sqrt{\varepsilon_e - \mu_B B(2n+1+2s)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом $d\varepsilon_{ek} = d\varepsilon_e$. Легко видеть, что плотность числа квантовых состояний в энергетических переменных $g_e = \frac{1}{V} \frac{dG_e}{d\varepsilon_e} = \frac{1}{V} \frac{dG_e}{d\varepsilon_{ek}}$ является разрывной функцией энергии (как полной, так и кинетической), а для фиксированных значений B , n и s убывает с ростом энергии. Для фиксированных значений ε_e , n и s (или ε_{ek} , n и s) величина g_e с ростом индукции магнитного поля увеличивается; при этом увеличиваются «энергетические зазоры» между параболой с одинаковыми s и различными n , а также величина $2\mu_B B$ относительного смещения ветвей параболы для заданного n и различных s (рисунок 2). Таким образом, при увеличении индукции магнитного поля все большее число электронов крайне вырожденного газа попадают в состояния с меньшими значениями номера квантового уровня Ландау и $s = -1/2$, т. е. растет степень поляризации,



и при достаточно больших значениях B принципиально возможна полная поляризация ферми-газа заданной концентрации. Графики зависимостей ε_e и ε_{ek} от g_e представлены на рисунке 3а, б.

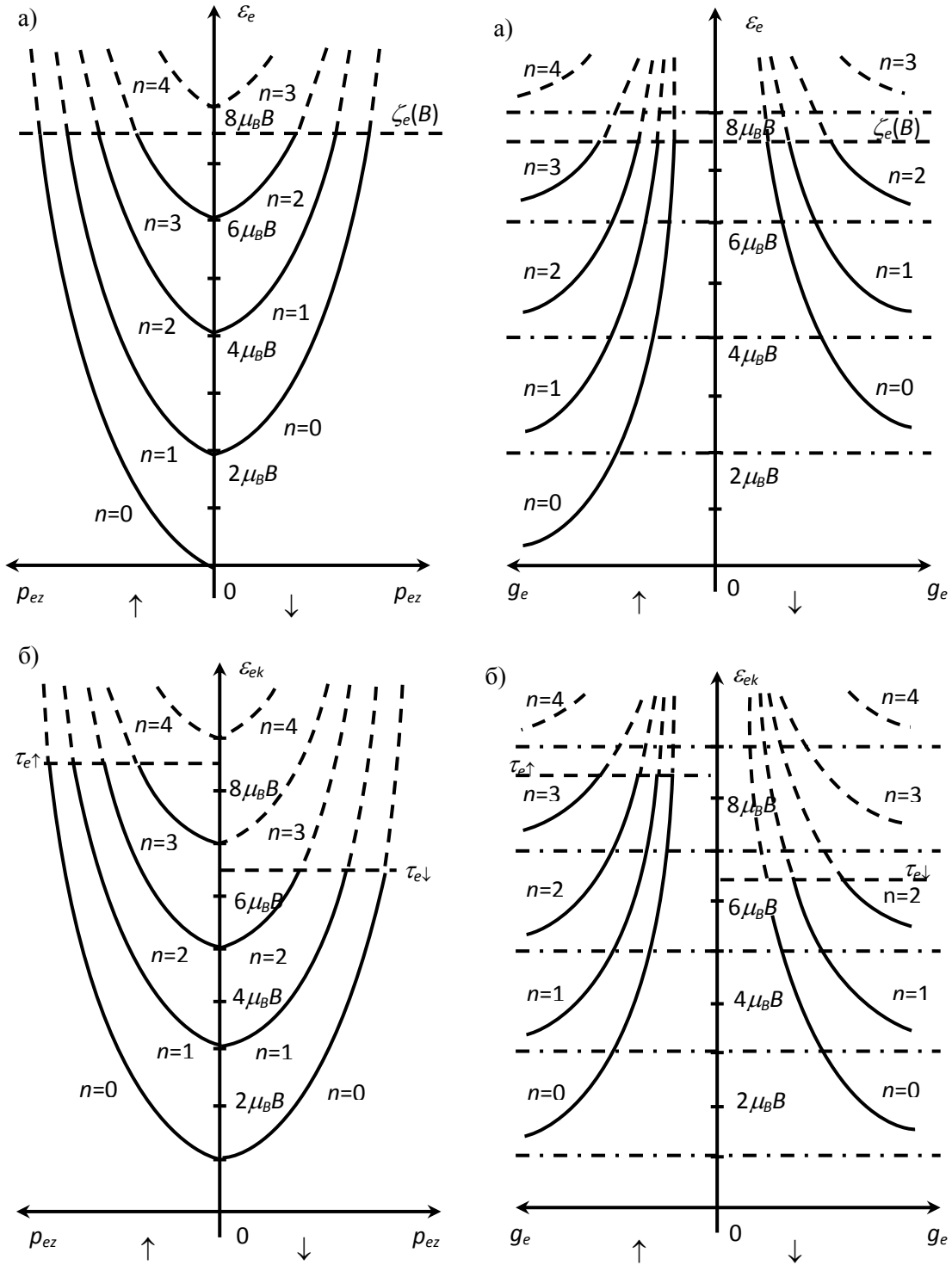


Рисунок 2

Рисунок 3



Концентрация электронов в магнитном поле находится из условия нормировки:

$$\begin{aligned} n_e = n_{e\uparrow} + n_{e\downarrow} &= \frac{m_e^{3/2} \mu_B B}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\int_0^{\tau_{e\uparrow}} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} + \int_0^{\tau_{e\downarrow}} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} \right) = \\ &= \frac{2^{1/2} m_e^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\tau_{e\uparrow} - \mu_B B(2n+1)} + \sqrt{\tau_{e\downarrow} - \mu_B B(2n+1)} \right) = \\ &= \frac{2^{1/2} m_e^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B(2n+2)} + \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2n} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\zeta_e(B)$ – химический потенциал электронного газа, измеренный с точностью до слагаемого $m_e c^2$ (максимальная полная энергия электрона), $\tau_{e\uparrow}$ и $\tau_{e\downarrow}$ – максимальные кинетические энергии электронов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю.

Суммирование в (13) ведется от нуля до максимальных значений n , при которых выражения под знаками радикалов неотрицательны.

Степень поляризации электронного газа

$$p_{0e} = \frac{n_{e\uparrow} - n_{e\downarrow}}{n_e}, \quad (14)$$

$n_{e\uparrow}$ и $n_{e\downarrow}$ – концентрации электронов с магнитными моментами, направленными по и против индукции внешнего магнитного поля.

Из (13) и (14) находим:

$$n_e (1 + p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2n}, \quad (15)$$

$$n_e (1 - p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B(2n+2)}. \quad (16)$$

Исключив величину $\zeta_e(B)$ из (15) и (16), получим

$$n_e (1 + p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^2}{2m_e^3 \mu_B^2 B^2} p_{0e}^2 - \mu_B B \cdot 2n}, \quad (17)$$

что позволяет вычислять степень поляризации электронного газа заданной концентрации в зависимости от индукции магнитного поля.

Полная поляризация (рисунок 2а) имеет место при

$$\zeta_e(B) \leq 2\mu_B B. \quad (18)$$

Это дает

$$B \geq \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_e^{2/3}}{2^{2/3} m_e \mu_B} = B^{(e)}, \quad (19)$$



что соответствует условию квантового предела для электронов в магнитном поле ($n = 0, s = -1/2$).

3. Перейдем к рассмотрению крайне вырожденного идеального нерелятивистского протонного газа в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Выражение для полной энергии протона в магнитном поле запишем в виде:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pk} + 2s\sigma_p\mu_\alpha B = \frac{p_{pz}^2}{2m_p} + \mu_\alpha B(2n+1) + 2s\sigma_p\mu_\alpha B, \quad (20)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $s = \mp 1/2$; p_{pz} – проекция импульса p_p протона на направление индукции магнитного поля, m_p – масса протона, $\sigma_p \approx 2,793$ – величина отношения собственного магнитного момента протона к ядерному магнетону μ_α .

Для нерелятивистских протонов в приближении крайнего вырождения графики зависимостей ε_p и ε_{pk} от p_{pz} представлены на рисунке 4 (а, б).

Число квантовых состояний протона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего проекцией импульса от p_{pz} до $p_{pz} + dp_{pz}$, при наличии магнитного поля определяется выражением, аналогичным (12):

$$\begin{aligned} dG_p &= \frac{m_p\mu_\alpha BV}{2\pi^2\hbar^3} dp_{pz} = \frac{m_p^{3/2}\mu_\alpha BV}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_\alpha B(2n+1)}} = \\ &= \frac{m_p^{3/2}\mu_\alpha BV}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \frac{d\varepsilon_p}{\sqrt{\varepsilon_p - \mu_\alpha B(2n+1+2s\sigma_p)}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Несложно убедиться, что $\frac{dG_p}{dp_{pz}} = \frac{dG_e}{dp_{ez}}$, поскольку $m_p\mu_\alpha = m_e\mu_B$, но при этом

$$g_p = \frac{1}{V} \frac{dG_p}{d\varepsilon_p} = \frac{1}{V} \frac{dG_p}{d\varepsilon_{pk}} \neq g_e.$$

Здесь g_p также является разрывной функцией энергии, а для фиксированных значений ε_p , n и s (или ε_{pk} , n и s) величина g_p увеличивается с ростом B .

При увеличении индукции магнитного поля, как и в случае электронов, растет степень поляризации протонного газа и имеется принципиальная возможность его полной поляризации. Графики зависимостей ε_p и ε_{pk} от g_p представлены на рисунке 5 (а, б).

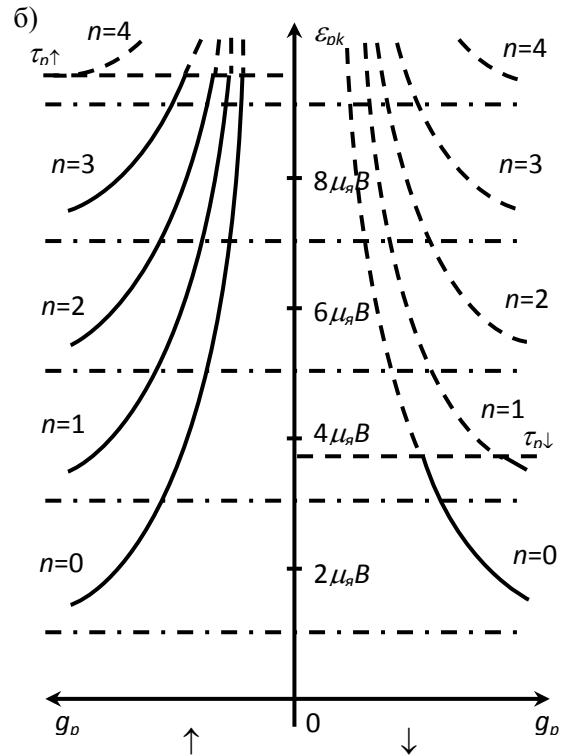
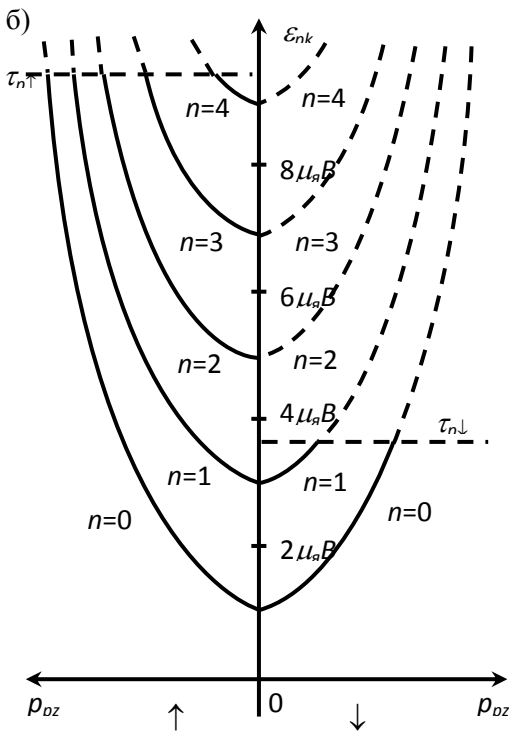
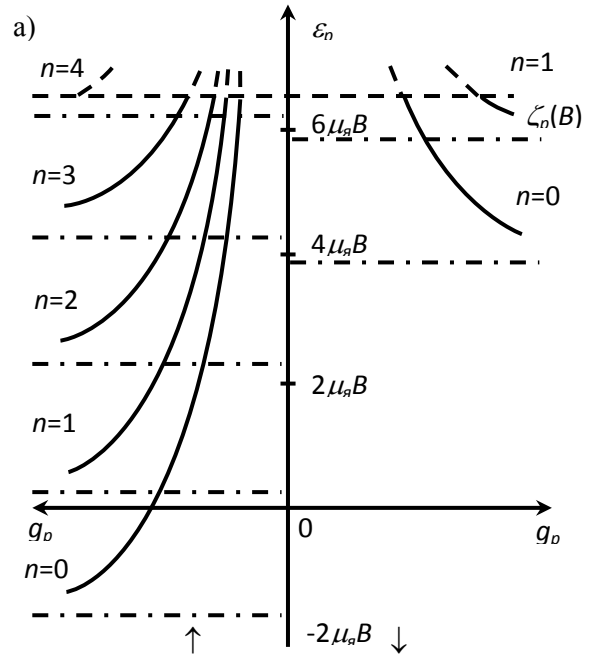
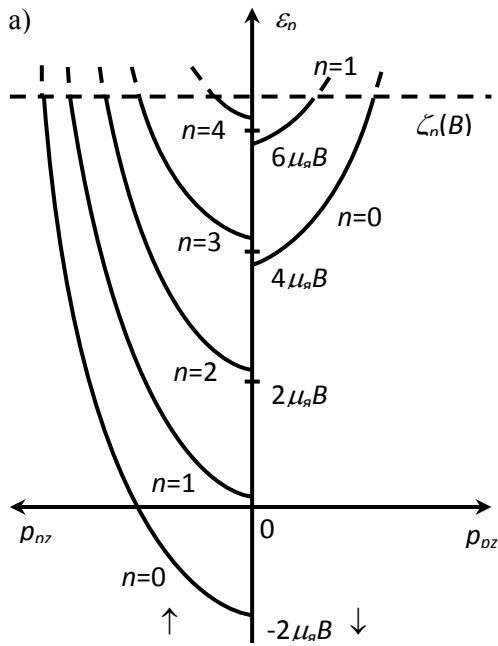


Рисунок 4

Рисунок 5

Концентрация протонов в магнитном поле определяется аналогично концентрации электронов (13):



$$\begin{aligned}
 n_p &= n_{p\uparrow} + n_{p\downarrow} = \frac{m_p^{3/2} \mu_\alpha B}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\int_0^{\tau_{p\uparrow}} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_\alpha B(2n+1)}} + \int_0^{\tau_{p\downarrow}} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_\alpha B(2n+1)}} \right) = \\
 &= \frac{2^{1/2} m_p^{3/2} \mu_\alpha B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\tau_{p\uparrow} - \mu_\alpha B(2n+1)} + \sqrt{\tau_{p\downarrow} - \mu_\alpha B(2n+1)} \right) = \\
 &= \frac{2^{1/2} m_p^{3/2} \mu_\alpha B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\alpha B(2n+1 + \sigma_p)} + \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\alpha B(2n+1 - \sigma_p)} \right), \quad (22)
 \end{aligned}$$

где $\zeta_p(B)$ – химический потенциал протонного газа, измеренный с точностью до слагаемого $m_p c^2$ (максимальная полная энергия протона); $\tau_{p\uparrow}$, $n_{p\uparrow}$ и $\tau_{p\downarrow}$, $n_{p\downarrow}$ – максимальные кинетические энергии и концентрации протонов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю. Суммирование в (22), как и в (13), ведется от нуля до максимальных значений n , при которых выражения под знаками радикалов неотрицательны.

Учитывая, что степень поляризации протонного газа

$$p_{0p} = \frac{n_{p\uparrow} - n_{p\downarrow}}{n_p}, \quad (23)$$

из (22) и (23) получаем:

$$n_p (1 + p_{0p}) = \frac{(2m_p)^{3/2} \mu_\alpha B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\alpha B(2n+1 - \sigma_p)}, \quad (24)$$

$$n_p (1 - p_{0p}) = \frac{(2m_p)^{3/2} \mu_\alpha B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\alpha B(2n+1 + \sigma_p)}. \quad (25)$$

Исключить величину $\zeta_p(B)$ из (24) и (25) или выразить в явном виде не представляется возможным.

Полная поляризация имеет место, если

$$\zeta_p(B) \leq \mu_\alpha B(1 + \sigma_p). \quad (26)$$

Подставляя это выражение в (24), находим

$$\frac{\pi^2 \hbar^3 n_p}{2m_p^{3/2} \mu_\alpha^{3/2} B^{3/2}} \leq \sqrt{\sigma_p} + \sqrt{\sigma_p - 1} + \sqrt{\sigma_p - 2}. \quad (27)$$

Итак, протонный газ полностью поляризован, если

$$B \geq \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2^{2/3} m_p \mu_\alpha (\sigma_p^*)^{1/3}} = \frac{B^{(p)}}{(\sigma_p^*)^{1/3}}, \quad (28)$$

где

$$\sigma_p^* = \left(\sqrt{\sigma_p} + \sqrt{\sigma_p - 1} + \sqrt{\sigma_p - 2} \right)^2 \approx 15,214, \quad (29)$$



$B^{(p)}$ – значенне індукцыі, адпаведнае квантаваму межу суперсильнага магнітнага поля для пратонаў (пры $B \geq B^{(p)}$ $n = 0$, $s = -1/2$, $\zeta_p(B) \leq \mu_p B(3 - \sigma_p)$).

Как отмечалось в [4], $B^{(p)} = B^{(e)} \approx 3,8 \cdot 10^{-7} n_p^{2/3}$ Гс при $n_p = n_e$.

Таким образом, критерий полной поляризации для электронов совпадает с критерием квантового предела, а для протонов критерий квантового предела более жесткий, чем критерий полной поляризации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1977. – 552 с.
2. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
3. Ландау, Л. Д. Диамагнетизм металлов / Л. Д. Ландау // Собр. тр. : в 2 т. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – С. 47–55.
4. Липовецкий, С. С. Термодинамические характеристики ферми-газов в магнитном поле / С. С. Липовецкий, А. А. Олесик, В. С. Секержицкий // Изв. вузов. Физика. – 1987. – № 5. – С. 21–25.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 04.09.2020