

УДК 001.891.57+004.94+517.9+519.62

**Зоя Николаевна Серая<sup>1</sup>, Алексей Игоревич Серый<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Zoya Seraya<sup>1</sup>, Alexey Sery<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Simulation  
of the Brest State A. S. Pushkin University<sup>2</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of the Brest State A. S. Pushkin Universitye-mail: <sup>1</sup>szn2006@yandex.ru; <sup>2</sup>alexey\_sery@mail.ru

## О РАЗНОВИДНОСТЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РОСТА ДЕРЕВА

На основе формулы, выражающей зависимость высоты дерева от времени в модели Басса, сформулирована задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева. Получено численное решение такой задачи методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Полученные результаты дают удовлетворительное согласие с данными наблюдений. Также получены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева на основе других эмпирических зависимостей высоты дерева от времени.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, дифференциальные уравнения, метод Рунге – Кутты, модель Полетаева, модель Басса.

### *On the Varieties of Differential Equations of Tree Growth*

Based on the formula expressing the dependence of the height of a tree on time in the Bass model, the Cauchy problem for an ordinary differential equation describing the dependence of the stem volume of a tree on time in the Poletaev model is formulated. A numerical solution of such a problem is obtained by the fourth-order Runge – Kutta method. The obtained results give a satisfactory agreement with the observational data. Ordinary differential equations describing the dependence of the stem volume of a tree on time in the Poletaev model are also obtained, based on other empirical dependences of the height of a tree on time.

**Key words:** mathematical modeling, differential equations, Runge – Kutta method, Poletaev model, Bass model.

### **Введение**

Исследования в области математического моделирования роста дерева ведутся уже не одно десятилетие, о чем свидетельствуют публикации [1–12]. Одной из основополагающих работ в этой области можно считать [1, с. 171–190], где были заложены теоретические основы данного направления в моделировании. В [2, с. 125–138] исследовалась модель роста (в т. ч. в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений) для одновидового и двухвидового сообщества в условиях конкуренции за свет, когда геометрическое подобие между приростом объема и высоты отсутствует; найдены условия прекращения роста дерева. В [3, с. 22] получены: а) зависимость диаметра дерева от времени в модели Полетаева; б) обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее динамику роста дерева с учетом влияния со стороны окружающего древостоя. В [4, с. 8] приводится также другой вариант системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученный в рамках модели Полетаева. В [5, с. 55–70] дается обзор и сравнительный анализ (в т. ч. критического характера) различных концепций моделирования хода роста древостоев. В [6, р. 247] приводятся различные варианты за-

висимости диаметра дерева от времени, в [7, р. 244] – различные варианты зависимости высоты дерева от времени. В [8, р. 11] приводятся различные соотношения между высотой и диаметром дерева. В [8, р. 17; 9, р. 14–15] приводятся различные эмпирические зависимости между объемом, высотой и диаметром дерева (не учитывающие зависимость от времени), более сложные по сравнению с полуэмпирическими, предложенными в [2, с. 128; 4, с. 8]. Исследования в [7; 10–12] посвящены также моделированию ветвления дерева в процессе роста.

### Исходная постановка задачи

В [2, с. 127–128] рассмотрена модель роста дерева в условиях ограниченности световых ресурсов. На основе закона сохранения энергии получена следующая система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) P_{max} Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) Q + P_{max} p_0 V^d} b V^d - c V H, \quad (1)$$

$$\frac{dH}{dt} = (k + mH) \left( R(Q) - \frac{H}{H_{max}} \right). \quad (2)$$

При этом использованы следующие обозначения:  $V$  – объем ствола дерева,  $H$  – его высота,  $t$  – время,  $Q$  – доля солнечной радиации, падающей на наружную поверхность кроны ( $0 < Q < 1$ ),  $R(Q)$  – коэффициент конкуренции,  $H_{max}$  – потенциальная высота дерева,  $d$  – фрактальная размерность кроны ( $\frac{2}{3} \leq d < 1$ ),  $k, m$  – видоспецифичные параметры,  $P_{max}$  – максимальная интенсивность фотосинтеза единицы листовой поверхности,  $a = \alpha I_0$ , где  $I_0$  – начальная интенсивность светового потока,  $\alpha$  – один из коэффициентов исходного уравнения в теории Полетаева [1, с. 176], параметры  $b$  и  $c$  также зависят от коэффициентов исходного уравнения в указанной теории,  $p_0 = c_1 k$ , где  $c_1$  – коэффициент пропорциональности между площадью поверхности дерева  $S$  и объемом его ствола в формуле

$$S = c_1 V^d. \quad (3)$$

Уравнение (1) получено на основе модели Полетаева, уравнение (2) – на основе модели Басса. Задание начальных условий ( $H = H_0, V = V_0$  при  $t = t_0$ ) позволяет численно решить задачу Коши для системы (1) – (2).

### Решение одного из исходных уравнений в элементарных функциях

Оказывается, что систему (1) – (2) можно свести к одному уравнению, поскольку уравнение (2) относится к уравнениям с разделяющимися переменными [13, с. 72]. Выполнив разделение переменных, можно привести (2) к виду

$$\frac{dH}{H^2 + \left( \frac{k}{m} - H_{max} R(Q) \right) H - \frac{k H_{max} R(Q)}{m}} = - \frac{m}{H_{max}} dt. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$p = \frac{k}{m} - H_{max}R(Q), \quad (5)$$

$$q = -\frac{kH_{max}R(Q)}{m}. \quad (6)$$

Результат интегрирования левой части (4) зависит от знака величины  $p^2 - 4q$ . Расписывая ее с учетом (5) и (6), получаем:

$$\left(\frac{k}{m} - H_{max}R(Q)\right)^2 + \frac{4kH_{max}R(Q)}{m} = \left(\frac{k}{m} + H_{max}R(Q)\right)^2 > 0. \quad (7)$$

Учитывая, что при выполнении условия

$$p^2 - 4q > 0 \quad (8)$$

справедливо соотношение [14, с. 227]

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \ln \left| \frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 - 4q}} \right|, \quad (9)$$

после интегрирования (4) по высоте от  $H_0$  до  $H$ , а по времени – от  $t_0$  до  $t$ , получаем:

$$-\frac{m}{H_{max}}(t - t_0) = \frac{1}{\frac{k}{m} + H_{max}R(Q)} \left( \ln \left| \frac{H - H_{max}R(Q)}{H + \frac{k}{m}} \right| - \ln \left| \frac{H_0 - H_{max}R(Q)}{H_0 + \frac{k}{m}} \right| \right). \quad (10)$$

На ранних стадиях роста со всей очевидностью выполняется соотношение

$$H < H_{max}R(Q). \quad (11)$$

Если бы по мере роста удалось достичь равенства в (11), то числитель дроби под знаком первого логарифма в скобках правой части (10) обратился бы в ноль, а само значение логарифма – в бесконечность с отрицательным знаком. Из выражения для левой части (10) следует, что за конечное время этого достичь невозможно. Это означает, что неравенство (11) справедливо на протяжении всей жизни дерева. Из этого следует, что справедливо также неравенство

$$H_0 < H_{max}R(Q). \quad (12)$$

Дальнейшие преобразования (10) с учетом (11) и (12) приводят к следующей зависимости:

$$H(t) = \frac{\left(H_0 + \frac{k}{m}\right)H_{max}R(Q)}{H_{max}R(Q) - H_0} - \frac{k}{m} \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q)\right)(t - t_0)\right) \frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max}R(Q) - H_0} + \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q)\right)(t - t_0)\right). \quad (13)$$

**Постановка задачи Коши для одного уравнения**

Для упрощения исходной задачи Коши для системы двух уравнений подставим (13) в правую часть (1), в результате чего получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) P_{max} Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) Q + P_{max} p_0 V^d} b V^d -$$

$$- cV \frac{\left( H_0 + \frac{k}{m} \right) H_{max} R(Q)}{H_{max} R(Q) - H_0} - \frac{k}{m} \exp\left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) (t - t_0) \right)}{\frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max} R(Q) - H_0} + \exp\left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) (t - t_0) \right)}.$$
(14)

При  $t_0 = 0$ ,  $H_0 = 0$  уравнение (14) упрощается и принимает вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) P_{max} Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) Q + P_{max} p_0 V^d} b V^d -$$

$$- \frac{cV k}{m} \frac{1 - \exp\left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) t \right)}{\frac{k}{m H_{max} R(Q)} + \exp\left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) t \right)}.$$
(15)

При этом ни в (14), ни в (15) сингулярностей во второй дроби, стоящей в правой части, не возникает.

Это означает, что на выбор значения  $H_0$  нет дополнительных ограничений помимо (12), поэтому для простоты его действительно можно положить равным нулю.

Кроме того, следует отметить, что допущения, принятые в модели Полетаева, не позволяют считать ее точность очень высокой, особенно на ранних стадиях развития дерева (сразу после посадки саженцев, черенков или семян), в связи с чем глубина посадки (в пределах, реализуемых на практике) не должна играть заметной роли в рамках этой модели.

Это означает, что высоту можно отсчитывать от поверхности почвы, а не от корневой системы.

При этом и в (14), и в (15) возникает неопределенность вида  $\{0/0\}$  в первой дроби правой части при выборе начального приближения  $V_0 = 0$ .

Таким образом, в отличие от высоты дерева, для его объема нулевое начальное приближение недопустимо.

В качестве такого приближения можно условно взять начальный объем семени, черенка или саженца соответствующего дерева.

**Численное решение задачи Коши**

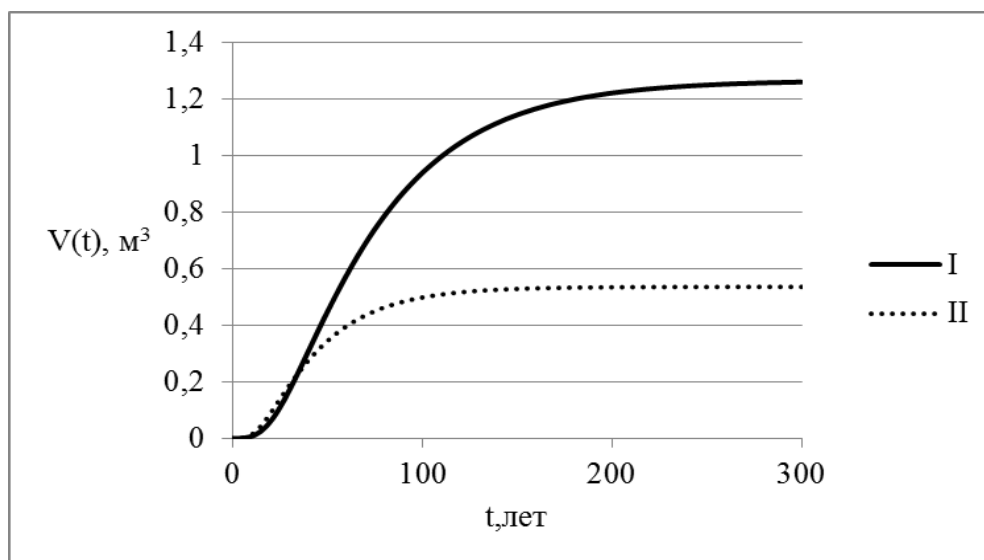
В качестве примеров рассмотрим задачу Коши для ели сибирской и пихты белокорой. Соответствующие значения коэффициентов, присутствующих в уравнении (15) [2, с. 134], представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Значения коэффициентов, входящих в уравнение (15), для ели сибирской и пихты белокорой

Коэффициент	Ель сибирская	Пихта белокорая
$a$	300	38
$p$	85	37
$P_m$	12	7,6
$b$	0,0107	0,025
$c$	0,00096	0,00196
$H_m$	25	20

Значения других параметров, не представленные в [2], были выбраны следующими:  $d = 0,8$ ,  $Q = 0,5$ ,  $R(Q) = 0,5$ ,  $k = 25$ ,  $m = 0,5$ ,  $V = 0,0001$ . Следует отметить, что расчетные кривые наиболее чувствительны к значению параметра  $d$ .

В качестве численного метода был выбран метод Рунге – Кутты четвертого порядка. Исследуемый временной интервал равен 300 годам, размер шага по времени – три года (т. е. 100 точек). Расчеты выполнялись в средах Mathematica, Mathcad, а также на основе программного кода, написанного в Visual Basic. Результаты, представленные на рисунке 1 и в таблице 2, находятся в удовлетворительном согласии с данными наблюдений [2, с. 129].



I – Ель сибирская, II – Пихта белокорая

Рисунок 1. – Зависимость объема дерева от времени согласно уравнению (15)

Таким образом, с течением времени рост объема ствола дерева сначала ускоряется, затем выходит на постоянный (линейный по времени) уровень, после чего замедляется (т. е. наступает стадия, которую по аналогии с некоторыми физическими эффектами можно назвать стадией насыщения). У пихты белокорой эта стадия более ярко выражена и наступает раньше по сравнению с елью сибирской. Оба графика с математической точки зрения характеризуются наличием точки перегиба и горизонтальной асимптоты.

Таблица 2. – Значения объема в соответствии с решением уравнения (15) для ели сибирской и пихты белокорой, м<sup>3</sup>

Время, годы	Ель сибирская	Пихта белокорая	Время, годы	Ель сибирская	Пихта белокорая
0	0,0001	0,0001	150	1,143132	0,528634
3	0,000524	0,000732	153	1,150228	0,52931
6	0,00201	0,003398	156	1,156917	0,529921
9	0,005733	0,010436	159	1,163222	0,530474
12	0,013221	0,024005	162	1,169165	0,530975
15	0,025904	0,044498	165	1,174765	0,531427
18	0,044577	0,070297	168	1,180043	0,531837
21	0,069231	0,099152	171	1,185015	0,532207
24	0,099234	0,129233	174	1,1897	0,532542
27	0,133615	0,159307	177	1,194114	0,532845
30	0,171313	0,188596	180	1,198272	0,533119
33	0,211329	0,21663	183	1,202189	0,533367
36	0,252796	0,243139	186	1,205878	0,533592
39	0,295001	0,26799	189	1,209353	0,533795
42	0,337371	0,291133	192	1,212626	0,533978
45	0,379458	0,31258	195	1,215708	0,534144
48	0,420916	0,332377	198	1,218611	0,534294
51	0,461485	0,350594	201	1,221344	0,53443
54	0,500972	0,367316	204	1,223918	0,534553
57	0,539236	0,382634	207	1,226342	0,534664
60	0,576183	0,396641	210	1,228624	0,534764
63	0,611749	0,409432	213	1,230773	0,534855
66	0,645899	0,421098	216	1,232796	0,534937
69	0,678618	0,431727	219	1,234701	0,535012
72	0,709906	0,441403	222	1,236494	0,535079
75	0,739779	0,450204	225	1,238183	0,53514
78	0,768261	0,458204	228	1,239772	0,535195
81	0,795382	0,465473	231	1,241269	0,535244
84	0,821181	0,472073	234	1,242677	0,535289
87	0,845698	0,478064	237	1,244003	0,53533
90	0,868977	0,483499	240	1,245252	0,535367
93	0,891065	0,488429	243	1,246427	0,5354
96	0,912007	0,492899	246	1,247533	0,53543
99	0,931851	0,496951	249	1,248574	0,535458
102	0,950645	0,500623	252	1,249555	0,535482
105	0,968436	0,503951	255	1,250477	0,535504
108	0,985269	0,506965	258	1,251346	0,535525
111	1,001189	0,509695	261	1,252163	0,535543
114	1,01624	0,512168	264	1,252932	0,535559
117	1,030466	0,514407	267	1,253657	0,535574
120	1,043907	0,516434	270	1,254338	0,535588
123	1,056603	0,518269	273	1,25498	0,5356
126	1,068591	0,51993	276	1,255584	0,535611
129	1,07991	0,521434	279	1,256152	0,535621
132	1,090593	0,522794	282	1,256687	0,53563
135	1,100675	0,524026	285	1,257191	0,535638
138	1,110187	0,52514	288	1,257665	0,535645
141	1,11916	0,526149	291	1,258111	0,535652
144	1,127624	0,527061	294	1,25853	0,535658
147	1,135605	0,527887	297	1,258925	0,535664

### Другие варианты уравнений

В [4, с. 8] приводится следующая система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, похожая на систему (1) – (2):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max} b V^{2/3}}{p} \ln \left( \frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)} \right) - cVH, \quad (16)$$

$$\frac{dH}{dt} = (k + mH) \left( 1 - \frac{H}{H_{max}} \right). \quad (17)$$

При этом использованы следующие обозначения:  $V$  – объем ствола дерева,  $a$  – начальная крутизна кривой, показывающая зависимость уровня фотосинтеза от интенсивности освещения,  $p$  – параметр самозатенения,  $H_{max}$  – потенциальная высота дерева,  $k, m$  – видоспецифичные параметры,  $c$  – коэффициент, характеризующий расход энергии на транспорт ассимилятов во все части растения,  $b$  – коэффициент пропорциональности расходов энергии на построение живой ткани. Смысл остальных величин – тот же, что и в уравнениях (1) – (2).

Решая уравнение (17) так же, как и уравнение (2), получаем результат, аналогичный (13):

$$H(t) = \frac{\left( H_0 + \frac{k}{m} \right) H_{max} - \frac{k}{m} \exp \left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}{\frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max} - H_0} + \exp \left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}. \quad (18)$$

Подставляя правую часть (18) в правую часть (16), получаем, как и в случае (14), одно уравнение вместо двух, что упрощает задачу Коши:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max} b V^{2/3}}{p} \ln \left( \frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)} \right) - cV \frac{\left( H_0 + \frac{k}{m} \right) H_{max} - \frac{k}{m} \exp \left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}{\frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max} - H_0} + \exp \left( - \left( \frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}. \quad (19)$$

При  $t_0 = 0$ ,  $H_0 = 0$  уравнение (19) упрощается и принимает вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max} b V^{2/3}}{p} \ln \left( \frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)} \right) -$$

$$-\frac{cV_k}{m} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + m\right)t\right)}{\frac{k}{mH_{max}} + \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + m\right)t\right)}. \quad (20)$$

При этом, в отличие от (14) и (15), сингулярности в правых частях (19) и (20) полностью отсутствуют.

Важным также является вопрос о связи между объемом, высотой и диаметром  $D$  ствола дерева. Так, в [2, с. 129; 4, с. 8] используется следующая зависимость:

$$D = \sqrt{\frac{4V}{\pi H f(V)}}, \quad (21)$$

где  $f$  – видовое число, показывающее отклонение формы ствола от идеального цилиндра (причем наличие зависимости  $f$  от  $V$  подчеркивается лишь в [4, с. 8]). Если эта зависимость известна, то можно на основе численного решения уравнения (14) с учетом (13) (либо на основе численного решения уравнения (19) с учетом (18)) из (21) найти зависимость  $D(t)$ .

Иная зависимость предложена в [3, с. 18], где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – видоспецифичные параметры.

$$D = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp\left(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t - t_0)\right)}{1 + \exp\left(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t - t_0)\right)}. \quad (22)$$

Если условия применимости формулы (22) не противоречат условиям применимости соотношения (21), то можно приравнять правые части (21) и (22) и при найденных зависимостях объема и высоты от времени найти также зависимость  $f(t)$ . Зависимость  $f(V)$  можно получить в параметрическом виде, сопоставляя зависимости  $f(t)$  и  $V(t)$  (после решения уравнений (14), (15) или (19), (20)), где  $t$  играет роль параметра. Указанное замечание можно распространить и на иные зависимости  $D(t)$  [6, р. 247], предложенные с 1939 г. по 1993 г. Корфом, Вейбулом, Ричардсом, Кумарасвами и Зейде:

$$D = D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b\right)^c\right), \quad (23)$$

$$D = D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c, \quad (24)$$

$$D = D_{max} \exp(-bt^c), \quad (25)$$

$$D = g - a \exp(-bt^c). \quad (26)$$

При этом  $D_{max}$  – максимальный диаметр дерева,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $g$  – параметры, причем параметр  $a$  в (23) в некоторых случаях может интерпретироваться как максимальный возраст дерева, а параметр  $c$  в (25) должен быть отрицательным.

В [7, р. 244] приводятся следующие зависимости высоты дерева от времени (логистическая, Бергаланфи и Вейбула):

$$H(t) = H_{max} / (1 + (H_{max}/H_0 - 1) \exp(-g_1 t)), \quad (27)$$



$$H(t) = g_2(1 - g_3 \exp(-g_1 t))^3, \quad (28)$$

$$H(t) = g_2(1 - \exp(-g_1 t^\mu)). \quad (29)$$

При этом  $H_0$  – начальная высота,  $H_{max}$  – максимальная высота,  $g_1, g_2, g_3, \mu$  – параметры. Если подставить (27) – (29) вместо (13) в (1), то получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d))P_{max}Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d))Q + P_{max}p_0 V^d} bV^d - \frac{cVH_{max}}{1 + (H_{max}/H_0 - 1)\exp(-g_1 t)}, \quad (30)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d))P_{max}Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d))Q + P_{max}p_0 V^d} bV^d - cg_2 V(1 - g_3 \exp(-g_1 t))^3, \quad (31)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d))P_{max}Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d))Q + P_{max}p_0 V^d} bV^d - cg_2 V(1 - \exp(-g_1 t^\mu)). \quad (32)$$

Если же подставить (27) – (29) вместо (18) в (16), то получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max}bV^{2/3}}{p} \ln\left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)}\right) - \frac{cVH_{max}}{1 + (H_{max}/H_0 - 1)\exp(-g_1 t)}, \quad (33)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max}bV^{2/3}}{p} \ln\left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)}\right) - cg_2 V(1 - g_3 \exp(-g_1 t))^3, \quad (34)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max}bV^{2/3}}{p} \ln\left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)}\right) - cg_2 V(1 - \exp(-g_1 t^\mu)). \quad (35)$$

Можно также учитывать различные соотношения между высотой и диаметром дерева, приведенные в [8, p. 11]:

$$H(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2, \quad (36)$$

$$H(D) = 1,3 + D^2 / (a_0 + a_1 D + a_2 D^2), \quad (37)$$

$$H(D) = 1,3 + (D / (a_0 + a_1 D))^3, \quad (38)$$

$$H(D) = \exp(a_0 + a_1 \ln D + a_2 \ln^2(D^2)), \quad (39)$$

$$H(D) = a_0 + a_1 \ln D, \quad (40)$$

$$H(D) = \exp(a_0 + a_1 \ln D + a_2 D). \quad (41)$$

При этом  $a_0, a_1, a_2$  – регрессионные коэффициенты. Если считать известными зависимости (13), (18) или (27) – (29), то можно, подставляя правую часть (13), (18) или (27) – (29) в левую часть каждой из формул (36) – (41), получить неявную зависимость  $D(t)$ , которую во всех случаях, кроме (41), можно сделать явной. Таким образом, всего получается 30 вариантов зависимостей, 25 из которых могут быть сведены к явным. При этом остается в силе замечание, приведенное после (22). Конкретные численные расчеты требуют знания значений коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$ .

С другой стороны, если считать известными зависимости (22) – (26), то из (36) – (41) можно получить 30 новых зависимостей  $H(t)$ , альтернативных по отношению к (13), (18), (27) – (29):

$$H(t) = a_0 + a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right)^2, \quad (42)$$

$$H(t) = 1,3 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right)^2 \times \left( a_0 + a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (43)$$

$$H(t) = 1,3 + \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{3/2} \left( \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right)^3 \times \left( a_0 + a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right)^{-3}, \quad (44)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right) \right) + 4a_2 \ln^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right), \quad (45)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right), \quad (46)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))} \right) \right) + a_2 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t-t_0))}, \quad (47)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) + a_2 D_{max}^2 \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right)^2, \quad (48)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^2 \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right)^2 \times \left( a_0 + a_1 D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) + a_2 D_{max}^2 \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right)^2 \right)^{-1}, \quad (49)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^3 \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right)^3 \left( a_0 + a_1 D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right)^{-3}, \quad (50)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln \left( D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right) \right) + 4a_2 \ln^2 \left( D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right) \quad (51)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln \left( D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right), \quad (52)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln \left( D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right) + a_2 D_{max} \left( 1 - \left( 1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right). \quad (53)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c + a_2 D_{max}^2 (1 - a \exp(-bt))^{2c}, \quad (54)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^2 (1 - a \exp(-bt))^{2c} \times \\ \times \left( a_0 + a_1 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c + a_2 D_{max}^2 (1 - a \exp(-bt))^{2c} \right)^{-1}. \quad (55)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^3 (1 - a \exp(-bt))^{3c} \left( a_0 + a_1 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right)^{-3}, \quad (56)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln \left( D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right) + 4a_2 \ln^2 \left( D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right) \right), \quad (57)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln \left( D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right), \quad (58)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln \left( D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right) + a_2 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right). \quad (59)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 D_{max} \exp(-bt^c) + a_2 D_{max}^2 \exp(-2bt^c), \quad (60)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^2 \exp(-2bt^c) / \left( a_0 + a_1 D_{max} \exp(-bt^c) + a_2 D_{max}^2 \exp(-2bt^c) \right), \quad (61)$$

$$H(t) = 1,3 + \left( D_{max} \exp(-bt^c) / \left( a_0 + a_1 D_{max} \exp(-bt^c) \right) \right)^3, \quad (62)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln D_{max} - a_1 bt^c + 4a_2 \ln^2 D_{max} + 4a_2 b^2 t^{2c} \right), \quad (63)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln D_{max} - a_1 bt^c, \quad (64)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln D_{max} - a_1 bt^c + a_2 D_{max} \exp(-bt^c) \right). \quad (65)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 (g - a \exp(-bt^c)) + a_2 (g - a \exp(-bt^c))^2, \quad (66)$$

$$H(t) = 1,3 + (g - a \exp(-bt^c))^2 \left( a_0 + a_1 (g - a \exp(-bt^c)) + a_2 (g - a \exp(-bt^c))^2 \right)^{-1}, \quad (67)$$

$$H(t) = 1,3 + \left( (g - a \exp(-bt^c)) / \left( a_0 + a_1 (g - a \exp(-bt^c)) \right) \right)^3, \quad (68)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln (g - a \exp(-bt^c)) + 4a_2 \ln^2 (g - a \exp(-bt^c)) \right), \quad (69)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln (g - a \exp(-bt^c)), \quad (70)$$

$$H(t) = \exp \left( a_0 + a_1 \ln (g - a \exp(-bt^c)) + a_2 (g - a \exp(-bt^c)) \right). \quad (71)$$

Полученные зависимости можно подставить в (1) или (16), получая еще 60 вариантов дифференциальных уравнений. Для численного решения соответствующих задач Коши требуется знать конкретные значения соответствующих коэффициентов.

### Заключение

Исследована математическая модель роста дерева. На основе аналитического решения обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего зависимость высоты дерева от времени в модели Басса, сформулирована задача Коши для обыкно-

венного дифференциального уравнения, описывающего зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева. Показано, что в такой задаче начальное значение объема ствола дерева не может быть принято в точности равным нулю. Получено численное решение задачи методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с данными наблюдений. Получены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева на основе других эмпирических зависимостей высоты дерева от времени. Результаты могут представлять интерес для построения более точных математических моделей роста дерева, а также для экологии, лесного и сельского хозяйства.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полетаев, И. А. О математических моделях элементарных процессов в биогеоценозах / И. А. Полетаев // Проблемы кибернетики. – 1966. – Вып. 16. – С. 171–190.
2. Колобов, А. Н. Численно-аналитическое исследование модели роста дерева в условиях конкуренции за свет / А. Н. Колобов // Мат. биология и биоинформатика. – 2012. – Т. 7, № 1. – С. 125–138.
3. Моделирование динамики роста деревьев по данным геоботанических исследований (на примере постоянных пробных площадей на территории заповедника «Бастак») / А. Н. Колобов [и др.] // Регион. проблемы. – 2007. – № 8. – С. 17–24.
4. Колобов, А. Н. Моделирование пространственно-временной динамики древесных сообществ : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 03.01.02 / А. Н. Колобов ; Ин-т автоматизации и процессов управления ДВО РАН. – Владивосток, 2013. – 20 с.
5. Рогозин, М. В. Модели динамики и моделирование развития древостоев / М. В. Рогозин, Г. С. Разин // Сиб. лес. журн. – 2015. – № 2. – С. 55–70.
6. Sedmak, R. Modelling of tree diameter growth using growth functions parameterised by least squares and Bayesian methods / R. Sedmak, L. Scheer // Journal of Forest Science. – 2015. – Vol. 58, nr 6. – P. 245–252.
7. Tree Growth Modelling Constrained by Growth Equations / Lei Yi [et al.] // Computer Graphics Forum. – 2018. – Vol. 37, nr 1. – P. 239–253.
8. Nagel, J. Tree Growth Open Source Software [Electronic resource] / J. Nagel. – Mode of access: <http://treegross.sourceforge.net/treegross.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
9. Simulation of Individual Tree Growth and Stand Development in Loblolly Pine Plantations on Cutover, Site-Prepared Areas [Electronic resource]. – Mode of access: <https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/93565/FWS-1-87.pdf?sequence=1>. – Date of access: 13.09.2022.
10. Nagel, J. Computer Simulations of Biological Growth Patterns: Tree Modeling Success and Applications [Electronic resource] / J. Nagel, Robert L. Jr. – Mode of access: <https://digitalcommons.usu.edu/gradreports/1055>. – Date of access: 26.08.2022.
11. Branching Out: Modeling Leaf Weight by Tree Growth Simulation [Electronic resource]. – Mode of access: <https://sites.math.washington.edu/~morrow/mcm/16647.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
12. Random Tree Growth by Vertex Splitting [Electronic resource] / F. David [et al.]. – Mode of access: <https://arxiv.org/pdf/0811.3183v2.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
13. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Н. М. Матвеев. – 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.
14. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.

## REFERENCES

1. Polietajev, I. A. O matematicheskikh modeliakh elementarnykh processov v biogeoecozakh / I. A. Polietajev // Problemy kibernetiki. – 1966. – Vyp. 16. – S. 171–190.
2. Kolobov, A. N. Chislennno-analitichieskoje issliedovanie modeli rosta dierieva v uslovijakh konkurienciji za sviet / A. N. Kolobov // Mat. biologija i bioinformatika. – 2012. – T. 7, № 1. – S. 125–138.
3. Modelirovanija dinamiki rosta dieriev'jev pro dannym gieobotanichieskikh issliedovanij (na primierie postojannykh probnykh ploshchadiej na territoriji zapovednika «Bastak») / A. N. Kolobov [i dr.] // Rieion. problemi. – 2007. – № 8. – S. 17–24.
4. Kolobov, A. N. Modelirovanije prostranstvienno-vriemiennoj dinamiki dreviesnykh soobshchestv : avtorief. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk : 03.01.02 / A. N. Kolobov ; In-t avtomatiki i processov upravlenija DVO RAN. – Vladivostok, 2013. – 20 s.
5. Rogozin, M. V. Modeli dinamiki i modelirovanije razvitija drevostojev / M. V. Rogozin, G. S. Razin // Sib. lies. zhurn. – 2015. – № 2. – S. 55–70.
6. Sedmak, R. Modelling of tree diameter growth using growth functions parameterised by least squares and Bayesian methods / R. Sedmak, L. Scheer // Journal of Forest Science. – 2015. – Vol. 58, nr 6. – P. 245–252.
7. Tree Growth Modelling Constrained by Growth Equations / Lei Yi [et al.] // Computer Graphics Forum. – 2018. – Vol. 37, nr 1. – P. 239–253.
8. Nagel, J. Tree Growth Open Source Software [Electronic resource] / J. Nagel. – Mode of access: <http://treegross.sourceforge.net/treegross.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
9. Simulation of Individual Tree Growth and Stand Development in Loblolly Pine Plantations on Cutover, Site-Prepared Areas [Electronic resource]. – Mode of access: <https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/93565/FWS-1-87.pdf?sequence=1>. – Date of access: 13.09.2022.
10. Nagel, J. Computer Simulations of Biological Growth Patterns: Tree Modeling Success and Applications [Electronic resource] / J. Nagel, Robert L. Jr. – Mode of access: <https://digitalcommons.usu.edu/gradreports/1055>. – Date of access: 26.08.2022.
11. Branching Out: Modeling Leaf Weight by Tree Growth Simulation [Electronic resource]. – Mode of access: <https://sites.math.washington.edu/~morrow/mcm/16647.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
12. Random Tree Growth by Vertex Splitting [Electronic resource] / F. David [et al.]. – Mode of access: <https://arxiv.org/pdf/0811.3183v2.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
13. Matviejev, N. M. Metody integrirvanija obyknoviennykh differencial'nykh uravnenij : uchieb. posobie / N. M. Matviejev. – 5-je izd., dop. – SPb. : Lan', 2003. – 832 s.
14. Vodniev, V. T. Osnovnyje matematichieskije formuly : spravochnik / V. T. Vodniev, A. F. Naumovich, N. F. Naumovich ; pod ried. Yu. S. Bogdanova. – 3-je izd., pierierab. i dop. – Minsk : Vysh. shk., 1995. – 380 s.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 19.10.2022*