О. В. МАТЫСИК, О. С. ЯРОЦКИЙ
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

АПОСТЕРИОРНЫЙ ВЫБОР ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ В ЯВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = f_\delta$, где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор. Здесь $\| f - f_\delta \| \le \delta$ и $0 \in SpA$ (но нуль не является собственным значением A), поэтому рассматриваемая задача некорректна. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим явный метод итераций

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right) x_{n,\delta} + \alpha A f_\delta, \; x_{0,\delta} = 0, \qquad (1)$$

где $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|^2}$ – итерационный параметр.

Метод (1) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по малости невязки:

$$\|Ax_{n,\delta} - f_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \; \|Ax_{m,\delta} - f_\delta\| \le \varepsilon.$$

Справедливы

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (1) *выбирается из правила останова по невязке. Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если* $x = A^s z, s > 0$, *то справедливы оценки*

$$m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}},$$

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2\alpha^{\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{2}} \delta.$$