О. В. МАТЫСИК, А. А. БУДИК
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

В гильбертовом пространстве *H* решается некорректное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где *A* – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого $\lambda = 0$ – собственное значение (случай неединственного решения). Поэтому рассматриваемая задача некорректна. Для решения уравнения (1) применим итерационный процесс явного типа

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A\right)^2 x_n + A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A\right)^2\right] y, \;\; x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь *E* – тождественный оператор, α – итерационный параметр.

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива [1–2]

Теорема. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2/\|A\|$. *Тогда для итерационного метода* (2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *процесс* (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение.*

Замечание. *Так как* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т. е. явный итерационный процесс* (1) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.

2. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.