СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаченкова, Л. А. Физика : учеб. пособие для 8-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Исаченкова, Ю. Д. Лещинский, В. В. Дорофейчик. – Минск : Нар. асвета, 2018. – 174 с.

2. Физика : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения (с электрон. прил. для повышенного уровня) / Е. В. Громыко [и др.]. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2019. – 264 с.

3. Жилко, В. В. Физика : учеб. пособие для 11-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Жилко, Л. Г. Маркович. – Минск : Нар. асвета, 2014. – 288 с.

4. Олимпиады по физике: 7–11 классы: (2019 год) / А. И. Слободянюк [и др.]. – Минск : Аверсэв, 2020. – 427 с.

5. Олимпиады по физике: 7–11 классы: (2018 год) / Г. С. Кембровский [и др.]. – Минск : Аверсэв, 2019. – 427 с.

6. Кембровский, Г. С. Олимпиады по физике: 7–11 классы: (2006 год) / Г. С. Кембровский, Л. Г. Маркович, А. И. Слободянюк. – Минск : Аверсэв, 2007. – 302 с.

И. А. ДОРДЮК, Н. Н. СЕНДЕР

Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И РЕЗОНАНС

Рассмотрим тело, на которое действует упругая сила $F = -kx$. Мы установили, что под действием этой силы тело колеблется с определенной частотой $\omega = \sqrt{k/m}$, так называемой частотой свободных колебаний или собственной частотой. В дальнейшем будем обозначать собственную частоту через ω_0, так что $\omega_0 = \sqrt{k/m}.$

Пусть на тело действует, кроме упругой силы, еще и периодическая внешняя сила с частотой ω. Тогда оказывается, что амплитуда колебаний, вызванных внешней силой, весьма сильно зависит от того, насколько частота внешней силы ω близка к частоте свободных колебаний. Это явление носит название резонанса и имеет очень большое практическое значение.

Явление это относится к любым системам, в которых возможны колебания. В механических системах такие колебания могут приводить к опасным деформациям и разрушению. Иногда резонанс сознательно используют для того, чтобы малой силой вызвать колебания рабочего инструмента с большой амплитудой.

В электрических системах резонанс дает возможность при действии нескольких периодических сил с разной частотой добиться того, чтобы колебания в нашей системе зависели только от одной из периодических сил – той, частота которой близка к собственной частоте системы. Благодаря этому можно настраивать радиоприемник на определенную станцию.

Репозиторий БрГУ

Составим уравнение колебаний

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - h\frac{dx}{dt} + f\cos\omega t. \qquad (1)$$

В этом уравнении $f\cos\omega t$ есть внешняя сила. Поделим обе части (1) на m и обозначим теперь $k/m = \omega_0^2$ в соответствии с тем, что с такой частотой происходят собственные колебания тела (без трения); отношение h/m обозначим 2γ (используя формулы $\gamma = +\frac{h}{2m}$ и $\omega_1^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}$). Получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\frac{dx}{dt} + \frac{f}{m}\cos\omega t.$$

Естественно ожидать, что под действием силы с частотой ω тело будет совершать колебания с той же частотой. Поэтому ищем решение в виде

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t. \qquad (2)$$

Подставляя выражения для x и его производных в уравнение (1), получим

$$-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t = -a\omega_0^2\cos\omega t - b\omega_0^2\sin\omega t +$$
$$+2\gamma a\omega\sin\omega t - 2\gamma b\omega\cos\omega t + \frac{f}{m}\cos\omega t.$$

Для того чтобы это равенство было верно при любых t, должны быть равны между собой в отдельности члены с $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. Приравнивая эти члены, получаем:

$$\begin{cases} -a\omega^2 = -a\omega_0^2 - 2\gamma b\omega + \dfrac{f}{m}, \\ -b\omega^2 = -b\omega_0^2 + 2\gamma a\omega. \end{cases} \qquad (3)$$

Из второго уравнения (3) находим:

$$b = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Подставляя это в первое уравнение (3), находим

$$a = \frac{f}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \qquad (4)$$

Репозиторий БрГУ

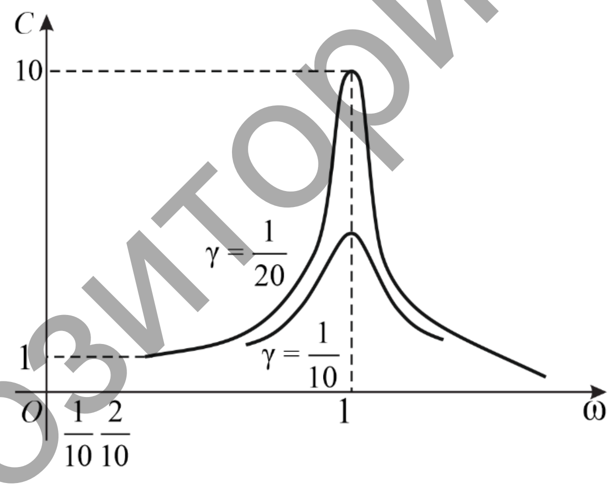
Тогда

$$b = \frac{f}{m}\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \qquad (5)$$

Переходя к виду $x = C\cos(\omega t + \gamma)$ и используя, что $C = \sqrt{a^2 + b^2}$, получаем амплитуду C колебаний, вызванных внешней силой:

$$C = \frac{f}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что C тем больше, чем ближе ω к ω_0. Кривая зависимости C от ω при данном ω_0 изображена на рисунке при двух значениях γ. Принято $\frac{f}{m} = 1,\ \omega_0 = 1$. Чем меньше трение, тем резче выражен подъем амплитуды колебаний при равенстве частоты внешней силы и собственной частоты.



Рисунок

Нетрудно убедиться, что сумма решения $x(t) = C_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 + a)$ уравнения $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - h\frac{dx}{dt}$ и общего решения (2) уравнения (1)

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t + C_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + a), \qquad (7)$$

где a и b даются формулами (4) и (5), также является решением уравнения (1). При помощи этого решения можно решить задачу с любыми начальными данными, выбирая соответственно C_0 и a. Действительно, пусть при $t = 0,\ x = x_0$, $\upsilon = \upsilon_0$. Тогда, пользуясь (7), находим:

Репозиторий БрГУ

$$\begin{cases} x_0 = a + C_0 \cos a, \\ \upsilon_0 = b\omega - C_0(\gamma \cos a + \omega_1 \sin a). \end{cases} \quad (8)$$

Из этой системы уравнений можно определить C_0 и a. Таким образом, (7) есть общее решение задачи о колебаниях тела под действием упругой силы и периодической внешней силы. Это общее решение подтверждает сделанное в начале предположение о том, что при длительном воздействии внешней силы с частотой ω тело будет колебаться с той же частотой ω. В самом деле, каковы бы ни были начальные условия, они влияют только на значения C_0 и a, т. е. только на последнее слагаемое решения (7). Однако с течением времени это слагаемое, имеющее частоту ω_0, становится сколь угодно близким к нулю за счет множителя $e^{-\gamma t}$, и им можно пренебречь при больших t. Оставшиеся слагаемые описывают колебания с частотой ω, которые не затухают с течением времени, потому что поддерживаются действием внешней силы.

А. В. ЗАРЕЦКИЙ, Н. Н. СЕНДЕР
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В СРЕДЕ, ОКАЗЫВАЮЩЕЙ СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЮ

Всякое тело испытывает при движении противодействие со стороны той среды, в которой происходит движение. Если сопротивление невелико, то зачастую его можно не принимать во внимание. Однако в ряде случаев такой подход неудовлетворителен, с сопротивлением среды приходится считаться. Установлено, что если тело движется в жидкости или газе, скорость движения невелика и тело имеет малые размеры, то сила сопротивления пропорциональна скорости движения:

$$F(t) = -kv(t). \quad (1)$$

Здесь коэффициент пропорциональности $k > 0$, а знак минус в (1) показывает, что сила сопротивления направлена противоположно скорости движения тела. Число k зависит от свойств среды, оно пропорционально вязкости среды. Кроме того, k зависит от формы и размеров тела. Например, для случая шара радиуса R формула (1) принимает вид

$$F = -6\pi R\eta\upsilon(t), \quad (2)$$

где η – вязкость среды. Для воздуха $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$, для воды $\eta = 0{,}01$ (при 20 ºC), $[\eta]$ = г/(см·с). Формула (2) справедлива при $\frac{\upsilon R\rho}{\eta} < 5$, где ρ – плотность среды. Эта величина называется числом Рейнольдса.

Репозиторий БрГУ