СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шубин, М. А. Лекции об уравнениях математической физики / М. А. Шубин. – М. : МЦНМО, 2003. – 303 с.

Т. А. ЯЦУК, А. И. БАСИК
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ (СЛУЧАЙ $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$)

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\Omega = \{(t;x) \in \mathbf{R}^2 \mid t > 0, x > 0\}$. Рассмотрим задачу отыскания решения $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ уравнения

$$u_{tt} + (\lambda_1 + \lambda_2)u_{xt} + \lambda_1\lambda_2 u_{xx} = 0 \quad ((t,x) \in \Omega), \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \quad (x \ge 0) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u\big|_{x=0} = \alpha(t) \quad (t \ge 0). \tag{3}$$

В настоящей работе доказывается, что при выполнении естественных требований на гладкость и согласованность начальных и граничных условий задача (1), (2), (3) имеет бесконечно много решений. Неединственность решения вызвана тем, что при выполнении неравенства $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ две характеристики уравнения (1), проходящие через точку (0;0), пересекают область Ω в отличие от случая $\lambda_1 = -\lambda_2 = a > 0$, который подробно рассматривается в курсе «Уравнения математической физики» [1, с. 34].

Пусть $u \in \overline{\Omega}$ – классическое решение рассматриваемой задачи. Тогда

$$u(0;0) = (u\big|_{t=0})\big|_{x=0} = \varphi(x)\big|_{x=0} = \varphi(0)$$

и

$$u(0;0) = (u\big|_{x=0})\big|_{t=0} = \alpha(t)\big|_{t=0} = \alpha(0),$$

следовательно,

$$\varphi(0) = \alpha(0). \tag{4}$$

Далее

$$u_t(0;0)=(u_t\big|_{t=0})\Big|_{x=0}=\psi(x)\big|_{x=0}=\psi(0)$$

и

$$u_t(0;0)=(u\big|_{x=0})_t\Big|_{t=0}=(\alpha(t))_t\Big|_{t=0}=\alpha'(t)\big|_{t=0}=\alpha'(0),$$

следовательно,

$$\psi(0)=\alpha'(0). \tag{5}$$

Так как

$$u_{tt}(0;0)+(\lambda_1+\lambda_2)\cdot u_{xt}(0;0)+\lambda_1\lambda_2\cdot u_{xx}=$$

$$=(u\big|_{x=0})_{tt}\Big|_{t=0}+(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(u_t\big|_{t=0})_x\Big|_{x=0}+\lambda_1\lambda_2\cdot(u\big|_{t=0})_{xx}\Big|_{x=0}=$$

$$=\alpha''(0)+(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\psi'(0)+\lambda_1\lambda_2\cdot\varphi''(0)=0,$$

то необходимо

$$\alpha''(0)+(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\psi'(0)+\lambda_1\lambda_2\cdot\varphi''(0)=0. \tag{6}$$

Покажем, что при выполнении условий (4), (5) и (6) решение смешанной задачи существует.

«Общим» решением дифференциального уравнения (1) является семейство функций вида

$$u(t;x)=f(x-\lambda_1 t)+g(x-\lambda_2 t), \tag{7}$$

где $f,g\in C^2(\mathbf{R})$ произвольны. Подставив «общее» решение (7) в начальные и граничные условия (2), (3), получим систему для определения неизвестных функций f и g:

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x) \quad (x\ge 0),\\ -\lambda_1 f'(x)-\lambda_2 g'(x)=\psi(x) \quad (x\ge 0),\\ f(-\lambda_1 t)+g(-\lambda_2 t)=\alpha(t) \quad (t\ge 0). \end{cases} \tag{8}$$

Из первых двух уравнений системы (8) нетрудно найти, что при $x\ge 0$

$$f(x)=\frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi(x)-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^x\psi(\xi)d\xi-C,$$

$$g(x)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi(x)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^x\psi(\xi)d\xi+C,$$

где C – произвольная постоянная. Для определения функций f и g при $x \le 0$ выберем произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h:(-\infty;0] \to \mathbf{R}$ и положим, что при $x \le 0$ $(g(x) \equiv h(x))$. Тогда из третьего уравнения системы (8) найдем, что

$$f(-\lambda_1 t) = \alpha(t) - g(-\lambda_2 t) = \alpha(t) - h(-\lambda_2 t),$$

следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\varphi(x) - \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi - C, & \text{если} \quad x \ge 0, \\ \alpha\left(-x/\lambda_1\right) - h\left(\lambda_2 x/\lambda_1\right), & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\varphi(x) + \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi + C, & \text{если} \quad x \ge 0, \\ h(x), & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найдем условия, при которых построенные f и g являются функциями класса $C^2(\mathbf{R})$. Функция f является непрерывной на $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$f(+0) = f(-0) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\varphi(0) - C = \alpha(0) - h(0),$$

что с учетом формулы (4) принимает вид

$$C = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\varphi(0) + h(0).$$

Функция

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\varphi'(x) - \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\psi(x), & \text{если} \quad x \ge 0, \\ -\dfrac{1}{\lambda_1}\alpha'\left(-\dfrac{x}{\lambda_1}\right) - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}h'\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right), & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

является непрерывной на $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$f'(+0) = f'(-0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\varphi'(0) - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\psi(0) = -\frac{1}{\lambda_1}\alpha'(0) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}h'(0),$$

что с учетом (5) примет вид

$$h'(0)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi(0)+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi'(0). \qquad (9)$$

Функция

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi''(x)-\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi'(x), & \text{если} \quad x\ge 0,\\ \left(\alpha''(-x/\lambda_1)-\lambda_2{}^2h''(\lambda_2x/\lambda_1)\right)/\lambda_1{}^2, & \text{если} \quad x<0\end{cases}$$

является непрерывной на $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$f''(+0)=f''(-0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi''(0)-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi'(0)=\frac{1}{\lambda_1{}^2}\alpha''(0)-\frac{\lambda_2{}^2}{\lambda_1{}^2}h''(0),$$

что с учетом (6) примет вид

$$h''(0)=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\psi'(0)+\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\varphi''(0). \qquad (10)$$

Таким образом, если $C=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi(0)+h(0)$ и функция $h\in C^2(-\infty;0]$ удовлетворяет условиям (9), (10), то $f\in C^2(\mathbf{R})$. Покажем, что при найденных условиях на h функция $g\in C^2(\mathbf{R})$.

Непрерывность функции g следует из равенств

$$g(+0)=h(0)=g(-0).$$

Так как

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi'(x)+\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi(x), & \text{если} \quad x\ge 0,\\ h'(x), & \text{если} \quad x<0\end{cases}$$

и

$$g'(+0)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi(0)+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi'(0)=h'(0)=g'(-0),$$

то g непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$.

Так как

$$g''(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi''(x)+\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi'(x), & \text{если} \quad x\ge 0,\\ h''(x), \quad \text{если} & (x<0)\end{cases}$$

и

$$g''(+0)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi'(0)+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi''(0)=h''(0)=g''(-0),$$

то $g\in C^2(\mathbf{R})$.

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема. *Пусть* $\varphi,\alpha\in C^2[0;+\infty),\psi\in C^1[0;+\infty)$. *Классическое решение задачи* (1), (2), (3) *класса* $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ *существует тогда и только тогда, когда выполняются условия* (4), (5), (6). *При выполнении этих условий задача имеет бесконечно много решений:*

$$u=\begin{cases}-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi(x-\lambda_1 t)+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi(x-\lambda_2 t)+\displaystyle\int_{x-\lambda_1 t}^{x-\lambda_2 t}\psi(\xi)d\xi, \quad \text{если} \quad x>\lambda_1 t,\\ \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\displaystyle\int_0^{x-\lambda_2 t}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi(x-\lambda_2 t)+\alpha\left(-\dfrac{x-\lambda_1 t}{\lambda_1}\right)-h\left(\dfrac{\lambda_2(x-\lambda_1 t)}{\lambda_1}\right)+\\ +\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi(0)+h(0), \quad \text{если} \quad \lambda_2 t\le x\le\lambda_1 t,\\ \alpha\big(-(x-\lambda_1 t)/\lambda_1\big)-h\big(\lambda_2(x-\lambda_1 t)/\lambda_1\big)+h(x-\lambda_2 t), \quad \text{если} \quad 0\le x<\lambda_2 t,\end{cases}$$

где $h:(-\infty;0]\to\mathbf{R}$ *– произвольная функция класса* $C^2(-\infty;0]$, *удовлетворяющая условиям* (9), (10).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шубин, М. А. Лекции об уравнениях математической физики / М. А. Шубин. – 2-е изд., испр. – М. : МЦНМО, 2003. – 303 с.