УДК 517.5

К.Н. Жигалло, Т.В. Жигалло

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА КЛАССАХ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Тема данной работы касается одного из направлений теории приближения функций, а именно изучения аппроксимативных свойств линейных методов суммирования рядов Фурье на классах периодических функций. Такое направление образовалось и активно развивалось на протяжении всего XX века под влиянием работ А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского, Б. Надя, И.П. Натансона, В.К. Дзядыка, С.Б. Стечкина, Н.П. Корнейчука, А.И. Степанца, В.П. Моторного и других математиков. В данной работе проведены исследования, которые касаются аппроксимативных свойств метода приближения интегралами Пуассона на сопряженных классах. С помощью методов, разработанных И.П. Натансоном, А.Ф. Тиманом, Б. Надем, получены точные равенства для верхних граней отклонений на классах $\overline{W}^{1}_{\infty}$ сопряженных интегралов Пуассона.

Пусть C – пространство 2π-периодических функций с нормой $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ – пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = ess\sup\limits_t |f(t)|$; L_1 – пространство 2π-периодических суммируемых функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Если $f \in L_1$ и $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – ее ряд Фурье, то ряд $\overline{S}[f] = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$ является сопряженным с рядом $S[f]$. Тогда сопряженной с $f(\cdot)$ называют функцию $\overline{f}(\cdot)$ [1; 2], которая почти всюду определяется соотношением

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{tg\frac{t}{2}}dt. \quad (1)$$

Пусть, далее, $f \in L_1$. Величину

$$P_\rho(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ 0 < \rho < 1, \quad (2)$$

где a_0, a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции f, называют интегралом Пуассона (см., например, [2]). Соответственно через $\overline{P_\rho}(f;x)$ обозначают сопряженный интеграл Пуассона $\overline{P_\rho}(f;x) = P_\rho(\overline{f};x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k(-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$.

Отметим (см., например, [2]) тот факт, что если функция f непрерывна на R, то для каждого $x \in R$: $\lim\limits_{\rho\to 1-} \overline{P}_\rho(f;x) = \overline{f}(x)$.

Обозначим через W^1_∞ множество 2π-периодических, абсолютно непрерывных функций $f(\cdot)$, для которых $\|f'(x)\|_\infty \le 1$, а через $\overline{W}^1_\infty$ – множество функций, сопряженных с функциями множества W^1_∞.

Главной целью работы является изучение асимптотического поведения величины

$$\varepsilon(\overline{W}^1_\infty; P_\rho)_C = \sup_{f\in W^1_\infty} \left\| \overline{f}(\cdot) - \overline{P}_\rho(f;\cdot) \right\|_C, \ \rho \to 1. \tag{3}$$

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho)$ такая, что

$$\varepsilon(\overline{W}^1_\infty; P_\rho)_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho)),$$

когда $\rho \to 1-$, то, следуя А.И. Степанцу [4, с. 198], скажем, что решена задача Колмогорова – Никольского (далее – К.– Н.) для сопряженного интеграла Пуассона $\overline{P}_\rho(f;\cdot)$ на классе $\overline{W}^1_\infty$ в метрике пространства C.

Приведем некоторые результаты решения задачи К. – Н. для интеграла Пуассона и случая классов периодических функций. На классах Соболева W^1_∞ такая задача была решена В.П. Натансоном в работе [5]. Точные значения верхних граней отклонений интегралов Пуассона от функций с класса W^r_∞, $r \in N$ получено в работе А.Ф. Тимана [6]. Решение задачи К.– Н. на классах Вейля – Надя найдено Л.И. Баусовым [7]. Следующим исследованиям аппроксимативных свойств метода приближения интегралами Пуассона на других классах дифференцируемых функций посвящены работы К.Н. Жигалло и Ю.И. Харкевича [8; 9].

Первые оценки величины (3) для сопряженного интеграла Пуассона были получены в работе Б. Надя [3], а именно:

$$\varepsilon(\overline{W}^1_\infty; P_\rho)_C = \frac{4}{\pi}\int_\rho^1 \frac{arctgt}{t}dt, \ 0 \le \rho < 1,$$

$$\varepsilon(\overline{W}^1_\infty; P_\rho)_C = (1-\rho) + O\left((1-\rho)^2\right), \ \rho \to 1-.$$

Позже, в работе К.Н. Жигалло и Ю.И. Харкевича [8] были получены полные асимптотические разложения величин типа (3) для классов $\overline{W}^r_\infty$ по степеням $(1-\rho)$, а в работе [9] найдены точные значения для этих же величин в равномерной и интегральной метриках. В данной статье получено полное разложение величины (3) по степеням $\ln\frac{1}{\rho}$, $0 < \rho < 1$.

Известно (см., например, [3]), что функцию $\overline{P}_\rho(f;x)$ можно представить так:

$$\overline{P}_\rho(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(\rho,t)dt, \tag{4}$$

где $K(\rho,t)$ – сопряженное ядро Пуассона вида

$$K(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \sin kt = \frac{\rho\sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2} = \frac{1}{2}ctg\frac{t}{2}\left(1 - \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}\right).$$

Отсюда, согласно с (1) и (3), получаем

$$\overline{f}(x) - \overline{P}(f;x) = -\frac{(1-\rho)^2}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)-f(x-t))\frac{ctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt.$$

Если взять во внимание периодичность функции $f(x)$, то

$$\overline{f}(x)-\overline{P}_{\rho}(f;x)=-\frac{(1-\rho)^2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x+t)-f(x-t))\frac{ctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt-$$

$$-\frac{(1-\rho)^2}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x+t)-f(x-t+2\pi))\frac{ctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt\,. \tag{5}$$

Поскольку неравенство $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|x_1-x_2\right|$ справедливо для функций $f(x)\in W_{\infty}^1$, то, воспользовавшись (5), находим

$$|\,\overline{f}(x)-\overline{P}_{\rho}(f;x)|\le\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt+\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(\pi-t)ctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt\,. \tag{6}$$

Далее: так как функция

$$f^*(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi,\end{cases} \tag{7}$$

принадлежит к классу W_{∞}^1 и, как следует из (3) и (5),

$$\begin{aligned}\varepsilon(\overline{W}_{\infty}^1;P_{\rho})_C\ge\overline{f}(0)-\overline{P}_{\rho}(f^*;0)=-\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt+\\ +\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(\pi-t)ctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt,\end{aligned} \tag{8}$$

то из (6) и (8) следует, что

$$\varepsilon(\overline{W}_{\infty}^1;P_{\rho})_C=\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f^*(t)ctg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt\,, \tag{9}$$

где $f^*(t)$ – функция из (8).

Обозначим $\ln\frac{1}{\rho}=\beta$ и для величины $\varepsilon(\overline{W}_{\infty}^1;P_{\rho})_C$ получаем теорему.

Теорема. *При* $\beta<\frac{\pi}{2}$ *имеет место точное равенство*

$$\varepsilon(\overline{W}_{\infty}^1;P_{\rho})_C=\beta+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\left[f^*(t)\right]_{2\pi}}{t^{2k+3}}dt-\frac{1}{2k+1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\right)\beta^{2k+2}\,, \tag{10}$$

где $\left[f^*(t)\right]_{2\pi}$ *– нечетное* 2π *-периодическое продолжение функции* $f^*(t)$, $0\le t\le\pi$.

Доказательство. Представим сопряженное ядро Пуассона следующим образом:

$$K(\rho,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin kt=\frac{1}{2}\varphi(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k),$$

где $\varphi_\rho(z)=\rho^z\sin zt$, и преобразуем его, используя косинус-преобразование $\Phi_\rho(\cdot)$ функции $\varphi(\cdot)$:

$$\Phi_\rho(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi_\rho(z)\cos zudz.$$

Дважды интегрируя по частям, находим

$$\Phi_\rho(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\rho^z\sin zt\cos zudz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{t+x}{\beta^2+(t+x)^2}+\frac{t-x}{\beta^2+(t-x)^2}\right].$$

Далее, применяя формулу суммирования Пуассона [10, с. 82], получаем представление ядра Пуассона в таком виде:

$$K(\rho,t)=\frac{t}{\beta^2+t^2}+\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{t+2k\pi}{\beta^2+(t+2k\pi)^2}+\frac{t-2k\pi}{\beta^2+(t-2k\pi)^2}\right).$$

Беря во внимание последнюю формулу, а также (3), для любой 2π-периодической функции $f(x)$ получаем:

$$\overline{P}_\rho(f;x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{f(x+t)}{\beta^2+t^2}tdt.$$

Кроме этого, воспользуемся известным фактом, что в каждой точке, где $\overline{f}(x)$ существует, она представима интегралом

$$\overline{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{f(x+t)}{t}dt\,.$$

Отсюда $\overline{f}(x)-\overline{P}_\rho(f;x)=-\dfrac{\beta^2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{f(x+t)}{t(\beta^2+t^2)}dt.$

Используя это интегральное представление, аналогично, как и при строении соотношения (10), находим

$$\varepsilon\left(\overline{W}_\infty^1;P_\rho\right)_C=\frac{2\beta^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\left[f^*(t)\right]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt, \tag{11}$$

где $\left[f^*(t)\right]_{2\pi}$ – непарное 2π-периодическое продолжение функции $f^*(t)$, которая определена с помощью (7).

Найдем значения интеграла с правой части (11) на каждом из промежутков $[0;\pi/2]$ и $(\pi/2;\infty)$. Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left[f*(t)\right]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\beta^2+t^2}=\left(\int_0^\infty-\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\right)\frac{dt}{\beta^2+t^2}:=I_1-I_2\,. \tag{12}$$

Так как $I_1=\displaystyle\int_0^\infty\frac{dt}{\beta^2+t^2}=\frac{\pi}{2\beta}$ (13)

и при $\beta<\dfrac{\pi}{2}$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{dt}{\beta^2+t^2}=\frac{1}{\beta}\int_{\frac{\pi}{2\beta}}^\infty\frac{dt}{u^2+1}=\frac{1}{\beta}\int_{\frac{\pi}{2\beta}}^\infty\left(\frac{1}{u^2}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{u^{2k}}\right)du=\frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{2k+1}, \tag{14}$$

то с (12 – 14) следует, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[f^*(t)\right]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)} dt = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{2k+1}\right).$ (15)

При $\beta < \frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\left[f^*(t)\right]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta^{2k} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\left[f^*(x)\right]_{2\pi}}{t^{2k+3}} dt . \quad (16)$$

Объединяя соотношения (15–16) из (11), получаем (10). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (проект Ф25.1/043).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барии, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Барии. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 936 с.
2. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т.1. – 615 с.
3. Sz.-Nagy, B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson / B. Sz.-Nagy // Acta Math. Acad. Sei Hungar. – 1950. – 1. – P. 183–188.
4. Степанец, А.И. Методы теории приближения / А.И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – ч. I. – 427 с.
5. Натансон, В. П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72, № 1. – С. 11–14.
6. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тимман // Докл. АН СССР. – 1950. – 74, № 1. – С. 17–20.
7. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с задаными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. Математика. – 1965. – 46, № 3. – С. 15–31.
8. Жигало, К.М. Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона / К.М. Жигало, Ю.І. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 1. – С. 43–52.
9. Жигалло, К.М. Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля-Пуассона / К.М. Жигало, Ю.І. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 1. – С. 73–82.
10. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М. – Л. : Гостехиздат, 1948. – 460 с.

K.N. Jigallo, T.V. Jigallo. **Approximational Properties of Poisson's Integrals on the Classes of Conjured Functions**

The theme of this article concerns one of the directions of the theory of approximation of functions, namely, the study of approximational properties of linear methods of summing up Fourier series on the classes of periodical functions. Such direction appeared and was actively developed during the XX th century under the influence of A. N. Kolmogoroff, S.M. Nikolskiy, B. Nagy, I.P. Natanson, V.K. Dzyadyk, S. B. Stechkin, N. P. Korneychuk, A.I. Stepanets, V.P. Motorny and other mathematicians works. The researches concerning the approximational properties of the method of approximation by Poisson's integrals on conjured classes are described in this work. Using the methods developed by I.P. Natanson, A. F. Timan, B. Nagy we have got exact equalities for the upper bounders of defluxions on the classes $\overline{W}^1_\infty$ of the conjured integrals of Poisson.