

Если направить ось y вертикально вверх и обозначить через v_x и v_y проекции скорости \vec{v} на оси x и y , то проекции силы сопротивления на оси x и y будут выглядеть следующим образом:

$$F_x^{comp} = -k_1(v_x - u) - k_2(v_x - u)\sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2}, \quad (2)$$

$$F_y^{comp} = -k_1v_y - k_2v_y\sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2}. \quad (3)$$

Учитывая, что

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt, \quad (4)$$

а сила тяжести направлена вертикально вниз, т. е. против положительного направления оси y , можно записать (1)–(3) в виде системы скалярных уравнений с учетом начальных условий, изложенных выше:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -k_1(v_x - u) - k_2(v_x - u)\sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2}, \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -k_1v_y - k_2v_y\sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2} - g, \\ v_x(0) &= v_{x0} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(0) = v_{y0} = v_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) решается только численно. Материалы данной публикации могут быть использованы на лабораторных занятиях по дисциплине «Основы математического моделирования».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – Т. 1 : Механика. – 520 с.
2. Расчет коэффициентов сопротивления движению по выбегу автомобиля при наличии ветра [Электронный ресурс] / В. П. Волков [и др.]. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/raschet-koeffitsientov-soprotivleniya-dvizheniyu-po-vybegu-avtomobilya-pri-nalichii-vetra>. – Дата доступа: 13.04.2021.

А. И. СЕРЫЙ, З. Н. СЕРАЯ

Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

О ЛИНЕЙНОСТИ МОДЕЛЕЙ И АЛГОРИТМОВ

В процессе изучения дисциплины «Основы математического моделирования» одним из важнейших понятий является линейность. Поскольку этот термин многозначен, представляется интересным дать сравнительную характеристику различных вариантов смыслового содержания этого термина. Результаты соответствующих исследований представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Смысл понятия «линейность» применительно к моделям и алгоритмам

Линейность	Модели	Алгоритма
1.1. Иными словами, это линейность	уравнений или систем уравнений (алгебраических, дифференциальных и т. д.), описывающих модель	алгоритма решения уравнений, описывающих модель
1.2. Смысл	Отсутствие нелинейных слагаемых в уравнениях	Отсутствие ветвлений и циклов в алгоритме
1.3. Понятие важно	на этапе создания модели	на этапе исследования модели
2.1. Сущность линеаризации	Выполнение приближенных разложений отдельных частей уравнений с последующим пренебрежением нелинейными слагаемыми	а) Ограничение исследований диапазоном значений параметра, в пределах которого аналитическое решение не меняется; б) запись цикла с параметром в виде линейного алгоритма
2.2. Всегда ли это возможно	Да	При: а) зависимости выражений для аналитического решения от значений какого-либо параметра; б) наличии циклов с параметром
2.3. Это приводит к	упрощению уравнений и одновременно к ограничению области применимости модели	а) ограничению области применимости модели; б) громоздкому программному коду

Таким образом, отказ от линеаризации модели приводит к ее математическому усложнению, зато расширяет область ее применимости. Отказ же от линеаризации алгоритма одновременно повышает область его применимости и делает его более компактным с точки зрения записи.

При этом возможны различные сочетания указанных типов линейности и нелинейности. Соответствующие примеры приведены в таблице 2. При этом анализируются следующие задачи.

1. Нахождение значений силы тока в ветвях разветвленной цепи, содержащей только омические сопротивления и источники постоянных ЭДС [1, с. 200], путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

2. Нахождение зависимости от времени для скорости тела, вертикально падающего в однородном гравитационном поле, если сила сопротивления со стороны атмосферы содержит слагаемые, линейное и квадратичное по скорости тела [2, с. 104].

3. Нахождение зависимости от времени для координаты тела, вертикально падающего в гравитационном поле, зависящем от высоты, если сила сопротивления со стороны атмосферы зависит от скорости тела [2, с. 104, 324].

Таблица 2 – Примеры сочетаний линейности и нелинейности уравнений и алгоритмов их решения

Алгоритм решения уравнений	Модель	
	Линейная	Нелинейная
Линейный	Решение задачи 1 прямыми (точными) методами [3, с. 17–35] без использования цикла с параметром	Решение задачи 2 методом разделения переменных с последующим интегрированием в элементарных функциях
Нелинейный	Решение задачи 1: а) прямыми (точными) методами с использованием цикла с параметром; б) итерационными методами (Якоби, Зейделя) [3, с. 35–49]	Решение задачи 3 через интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка методом Рунге – Кутты, Адамса и др.

При этом сделаем следующие замечания.

1. С широким распространением языков программирования, умеющих работать с высокоточными числами, снижается актуальность использования итерационных методов решения СЛАУ с контролем точности.

2. Несмотря на то что в общем случае интеграл, получающийся в задаче 2, берется двумя совершенно разными способами в зависимости от условий, налагаемых на некоторые параметры [4, с. 227] (т. е. получается, что алгоритм решения, вообще говоря, должен содержать ветвление, поэтому он нелинейный), можно убедиться в том, что всегда реализуется только один случай, поэтому алгоритм линейный.

3. Если в ходе решения той или иной задачи возникает необходимость интегрирования ОДУ (или просто взятия интеграла) в квадратурах, алгоритм (в случае если количество частей, на которые разбивается отрезок интегрирования, задано заранее) может быть записан через цикл (что рационально, хотя алгоритм становится нелинейным) либо без использования цикла (что нерационально, хотя при этом алгоритм становится линейным).

4. Вопросы классификационного характера, связанные с различием между задачами линейной алгебры и линейного программирования, ранее затрагивались в [5, с. 212–213]. При этом следует отметить, что линейное программирование следует отнести именно к характеристикам моделей (или методам их составления), а не к алгоритмам исследования моделей.

Таким образом, практическая важность линейности для математической модели и алгоритма ее исследования, вообще говоря, различна.

Предложенные таблицы могут быть использованы в образовательном процессе при обобщении и закреплении материала по дисциплине «Основы математического моделирования».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – Т. 3 : Электричество. – 688 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – Т. 1 : Механика. – 520 с.
3. Сборник задач по методам вычислений / под ред. П. И. Монастырного. – Минск : Изд-во БГУ, 1983. – 287 с.
4. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.
5. Серый, А. И. О численных методах линейной алгебры / А. И. Серый, З. Н. Сера, Н. В. Силаев // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов VII междунар. науч.-практ. конф., Брест, 19 окт. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. А. Козинского. – Брест : БрГУ, 2018. – С. 212–213.

А. И. СЕРЫЙ, З. Н. СЕРАЯ

Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И РАССТОЯНИЙ ДО НИХ В АСТРОНОМИИ

В курсе астрономии предусмотрено, в частности, изучение тем «Методы определения линейных размеров небесных тел» и «Методы определения расстояний до небесных тел». Поскольку обе указанные величины имеют размерность длины, у учащихся может возникать путаница при использовании соответствующих формул в силу их внешнего сходства.

В связи с этим представляется интересным выполнить сравнительный анализ различных вариантов формул для определения линейных размеров небесных тел и расстояний до них. Результаты соответствующих исследований представлены ниже в виде таблиц (при составлении которых могут быть использованы источники [1, с. 28, 30; 2, с. 48, 110, 111, 116]).

Таблица 1 – Применение горизонтального и годичного параллакса

	Параллакс	Суточный	Годичный
Применение для объектов	в пределах Солнечной системы (СС)	Да	Нет, так как прямое восхождение таких объектов периодически меняется в пределах от 0° до 360°
	за пределами СС	Нет, так как для таких объектов он чрезвычайно мал	Да, если расстояние до таких объектов не превышает 100 пк