Например, $-3\ sin\ x + 4\ cos\ x$ = 5 $(-\frac{3}{5}\ sin\ x + \frac{4}{5}\ cos\ x)$ = –5 $(\frac{3}{5}\ sin\ x - \frac{4}{5}\ cos\ x)$ = = –5 $(sin\ x\ cos\ \gamma - cos\ x\ sin\ \gamma)$ = –5 $sin\ (x - \gamma)$, где $\gamma$ – любой из равных острых углов $arcsin\ \frac{4}{5}$, $arccos\ \frac{3}{5}$ или $arctg\ \frac{4}{3}$.

**Замечание.** Полагая в равенстве (2)

$$sin\ \beta\ = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } cos\ \beta\ = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (5)$$

получим формулу

$$a\ sin\ x + b\ cos\ x = \sqrt{a^2+b^2}\ cos\ (x - \beta), \qquad (6)$$

где $\beta$ – любой угол, удовлетворяющий соотношениям (5).

**Упражнение 2.** Проверьте, что вспомогательные углы $\alpha$ и $\beta$ связаны равен-
ством $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, где $m \in \boldsymbol{Z}$.

Аналогично предыдущему, модифицируя преобразование, указанное в замечании, в качестве вспомогательного угла можно выбрать любой из равных острых углов $arcsin\ \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $arccos\ \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $arctg\ \frac{|a|}{|b|}$ (если, конечно, $ab \neq 0$).

**Ю. П. ЗОЛОТУХИН**
Беларусь, Гродно, УО «ГрГУ имени Янки Купалы»

## ОДНОРОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕРИАЛ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Организация учебных исследований школьников – одна из обсуждаемых проблем среднего образования. Учебно-исследовательская деятельность не только способствует повышению уровня предметной подготовки, но и развивает личные качества учащихся, нужные для их успешной самоидентификации и сознательного выбора жизненного пути. Одной из ее простейших форм является решение исследовательской задачи, поставленной преподавателем, выполняемое под его руководством в рамках внеклассной проектной работы по предмету.

В данной статье предлагаются материалы, на основе которых учитель может организовать полноценное учебное исследование, посвященное однородным тригонометрическим уравнениям первой и второй степеней, а также некоторым неоднородным, сводимым к ним. Его содержание полностью отвечает необходимым требованиям. Задача исследования имеет учебную новизну и достаточную общность. Ее постановка понятна, ее решение основывается на школьной программе и доступно мотивированному ученику. Процесс решения моделирует настоящее научное исследование и предполагает всестороннее рассмотрение поставленной проблемы. Полученные результаты имеют применение как в математике, так и в смежных дисциплинах (см., например, [1]). Они могут быть востребованы при поступлении в вуз. Важно также, что исследование относится к области тригонометрии, которая, имея большую историко-культурную ценность, прикладной потенциал и развивающие возможности, в настоящее время по объективным причинам недостаточно представлена в школьном курсе математики.

Определимся с терминологией. Ограничимся рассмотрением тригонометрических уравнений, имеющих бесконечное множество корней. Если множество *корней* (*решений, частных решений*) такого уравнения можно записать (задать) формулой, разрешенной относительно неизвестной, или совокупностью таких формул, содержащих целочисленные параметры, то указанную формулу или совокупность формул будем называть *общим решением* данного уравнения. Следует иметь в виду, что одно и то же множество чисел может быть задано разными формулами. Соответственно, общее решение одного и того же тригонометрического уравнения может быть записано разными способами.

Всякое бесконечное подмножество корней (решений), заданное формулой, разрешенной относительно неизвестной и содержащей целочисленный параметр, будем называть *серией корней* (*решений*) соответствующего уравнения. Общее решение тригонометрического уравнения может быть представлено в виде совокупности серий его решений разными способами.

*Решить тригонометрическое уравнение с параметрами* – это значит определить, при каких значениях параметров оно имеет корни, а при каких – не имеет корней, и найти его общее решение для тех значений параметров, при которых уравнение имеет корни.

Приведем задание на проведение исследования. Предполагается, что оно разбивается на этапы. К каждому этапу даются указания, а также планируемые результаты и комментарии (последние в данной статье не приводятся). Они помогут учителю не только поставить задачу, но и провести консультирование и проверку полученных результатов.

**Этап 1.** Решите *однородное тригонометрическое уравнение первой степени* $a \sin x + b \cos x = 0$, где $x$ – переменная, $a$, $b$ – параметры ($x, a, b \in \boldsymbol{R}$).

*Указания.* Рассмотрите следующие случаи: 1) $a = b = 0$; 2) $a = 0,\ b \neq 0$; 3) $a \neq 0,\ b = 0$; 4) $ab \neq 0$.

В случае 4) докажите, что уравнение не имеет решений, для которых $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$. Поделите обе части уравнения на $\cos x$ (или $\sin x$).

**Этап 2.** Решите *однородное тригонометрическое уравнение второй степени* $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$, где $x$ – переменная, $a, b, c$ – параметры ($x, a, b, c \in \boldsymbol{R}$).

*Указания.* Рассмотрите следующие случаи: 1) $a = b = c = 0$; 2) $a = 0,\ b \neq 0,\ c = 0$; 3) $a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0$; 4) $a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$; 5) $a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$; 6) $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$; 7) $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$; 8) $abc \neq 0$.

В случаях 4) и 6) разложите левую часть уравнения на множители.

В случаях 7) и 8) докажите, что уравнение не имеет решений, для которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Поделите обе части уравнения на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$).

**Этап 3.** Решите уравнение $m\ sin^2\ x + n\ sin\ x\ cos\ x + p\ cos^2\ x = q$, где $x$ – переменная, $m, n, p, q$ – параметры ($x, m, n, p, q \in \boldsymbol{R}$, $q \neq 0$).

*Указание.* Воспользуйтесь очевидным тождеством $q = q\ (sin^2\ x + cos^2\ x)$ и приведите полученное уравнение к виду, рассмотренному на этапе 2.

**Этап 4.** Решите уравнение $r\ sin\ x + s\ cos\ x = t$, где $x$ – переменная, $r, s, t$ – параметры ($x, r, s, t \in \boldsymbol{R}$, $rst \neq 0$). Примените два способа решения этого уравнения.

*Способ 1* (сведение к уравнению вида $a\ sin^2 \frac{x}{2} + b\ sin \frac{x}{2} cos \frac{x}{2} + c\ cos^2 \frac{x}{2} = 0$).

*Указание.* Примените известные формулы $sin\ x = 2\ sin\ \frac{x}{2}\ cos\ \frac{x}{2}$, $cos\ x = cos^2 \frac{x}{2} - sin^2 \frac{x}{2}$, $sin^2 \frac{x}{2} + cos^2 \frac{x}{2} = 1$.

*Способ 2* (введение вспомогательного угла).

*Указание.* Выведите и примените формулы:

$$r\ sin\ x + s\ cos\ x = \sqrt{r^2 + s^2}\ sin\ (x + \alpha), \tag{1}$$

где $\alpha$ (вспомогательный угол) – любой из углов, удовлетворяющих системе

$$cos\ \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}} \text{ и } sin\ \alpha = \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}} \tag{2}$$

или

$$r\ sin\ x + s\ cos\ x = \sqrt{r^2 + s^2}\ cos\ (x - \beta), \tag{3}$$

где $\beta$ (вспомогательный угол) – любой из углов, удовлетворяющих системе

$$sin\ \beta = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}} \text{ и } cos\ \beta = \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

*Замечание 1.* Существуют и другие способы решения данного уравнения. Один из них основан на применении *формул универсальной подстановки*:

$$sin\ x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}},\ cos\ x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}. \tag{5}$$

Этот способ имеет существенный недостаток, связанный с тем, что указанные формулы не являются абсолютными тождествами: левые части определены при любых действительных $x$, а правые – при $x \neq \pi + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Их формальное применение приводит к потере корней $x = \pi + 2\pi$n, n ∈ Z, если, конечно, данное уравнение имеет такие корни.

*Замечание 2.* Когда $r = \pm\ s$, решение уравнения $r\ sin\ x + s\ cos\ x = t$ можно значительно упростить, разлагая его левую часть на множители.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотухин, Ю. П. Уравнение $a\ sin\ x + b\ cos\ x = c$ и его применения / Ю. П. Золотухин // Математика в шк. – 2005. – № 6. – С. 56–63.