некоторого запаса опорных геометрических конструкций и создать условия для приобретения опыта их применения при решении задач.

Таким образом, для реализации эвристической функции геометрических конструкций при обучении решению планиметрических задач необходимо сформировать у учащихся следующие представления: геометрическая конструкция предоставляет контекст, который позволяет установить связи между данными и искомыми элементами, потому важно суметь «привязать» заданную конфигурацию к какому-либо многоугольнику или к окружности; если данная геометрическая конструкция схожа с рассмотренной ранее опорной геометрической конструкцией, то, выделив эту опорную конструкцию или дополнив до нее данную конструкцию, можно использовать ранее доказанные свойства опорной конструкции. Кроме того, необходимо сформировать фонд геометрических конструкций, зрительные образы которых помогут учащимся в нужный момент использовать доказанные ранее свойства опорных конструкций и создать условия для их применения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тухолко, Л. Л. Развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении стереометрии : монография / Л. Л. Тухолко. – Минск : БГПУ, 2019. – 248 с.

2. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач : учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев. – М., 1991. – 384 с.

Ю. П. ЗОЛОТУХИН
Беларусь, Гродно, УО «ГрГУ имени Янки Купалы»

КАК ВЫБИРАТЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ УГОЛ?

В процессе преобразования известного выражения $a \sin x + b \cos x$ (x – переменная, a, b – параметры; $x, a, b \in \boldsymbol{R}$, $ab \neq 0$) *методом введения вспомогательного угла* возникает необходимость выбора того или иного значения этого угла. Наш опыт показывает, что часто даже у сильных учеников нет четкого понимания, как следует осуществлять этот выбор. Рассмотрим данный вопрос в общем виде.

Напомним сначала общепринятую схему указанного преобразования. Вынося за скобки $\sqrt{a^2+b^2}$, запишем рассматриваемое выражение в виде:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x\right). \qquad (1)$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то одно из чисел, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, является синусом, а другое – косинусом некоторого (вспомогательного) угла.

Положим, например, что

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (2)$$

тогда равенство (1) примет вид:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \sin (x + \alpha), \qquad (3)$$

где α – *любой* угол, удовлетворяющий соотношениям (2).

Учитывая, что $ab \neq 0$, получаем: $-1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$, $-1 < \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$.

Это означает, что с точностью до $2\pi m$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, угол α может принадлежать одному из интервалов – $(0, \frac{\pi}{2})$ (если $a > 0$ и $b > 0$), $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (если $a < 0$ и в > 0), $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ (если $a < 0$ и в < 0) или $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (если $a > 0$ и $b < 0$).

В общем виде выбор конкретного значения угла α представляется достаточно кропотливым делом. Чтобы добиться понимания в этом вопросе, полезно выполнить следующее упражнение.

Упражнение 1. Покажите, что при $ab \neq 0$ на множестве $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ существует единственное решение α системы уравнений (2). Проверьте, что в зависимости от знаков коэффициентов a и b это решение может быть записано в видах, представленных в следующей таблице.

Таблица

№ п/п	Условия на коэффициенты	Значение угла α	Примечание
1	$a > 0, b > 0$	$\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$	$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$
2	$a < 0, b > 0$	$\pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$	$\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
3	$a < 0, b < 0$	$\pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$	$\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$
4	$a > 0, b < 0$	$2\pi + \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $2\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$	$\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

В учебных пособиях, как правило, вопрос о выборе значения вспомогательного угла не конкретизируется. Чаще всего авторы ограничиваются общим указанием, что в качестве такового можно взять любое решение системы (2). Иногда дополнительно обращается внимание на то, что в зависимости от знаков коэффициентов a и b значение вспомогательного угла следует искать в той или другой четверти.

Процедуру выбора вспомогательного угла можно упростить, несколько отклоняясь от приведенной схемы и сводя задачу к нахождению решения системы уравнений

$$\cos\gamma = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\gamma = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4}$$

(с положительными правыми частями!) из интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. Тогда в качестве вспомогательного угла (независимо от того, какие знаки имеют коэффициенты a и b!) можно взять любой из равных <u>острых</u> углов

$$\arcsin\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \arccos\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ или } \operatorname{arctg}\frac{|b|}{|a|}.$$

Чтобы унифицировать выбор вспомогательного угла, следует выполнить следующее преобразование:

$$a\sin x + b\cos x = \frac{a}{|a|}|a|\sin x + \frac{b}{|b|}|b|\cos x =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{|a|}\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{|b|}\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{|a|}\cos\gamma\sin x + \frac{b}{|b|}\sin\gamma\cos x\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\gamma), \text{если } a > 0 \text{ и } b > 0, \\ -\sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\gamma), \text{если } a < 0 \text{ и } b > 0, \\ -\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\gamma), \text{если } a < 0 \text{ и } b < 0, \\ \sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\gamma), \text{если } a > 0 \text{ и } b < 0 \end{cases},$$

где $\cos\gamma = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Итак, используя указанное преобразование в качестве вспомогательного угла можно выбрать любой из равных острых углов $\arcsin\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\arccos\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\operatorname{arctg}\frac{|b|}{|a|}$ (если, конечно, $ab \neq 0$).

Например, $-3\ sin\ x + 4\ cos\ x = 5\ (-\frac{3}{5}\ sin\ x + \frac{4}{5}\ cos\ x) = -5\ (\frac{3}{5}\ sin\ x - \frac{4}{5}\ cos\ x) =$ $= -5\ (sin\ x\ cos\ \gamma - cos\ x\ sin\ \gamma) = -5\ sin\ (x - \gamma)$, где γ – любой из равных острых углов $arcsin\ \frac{4}{5}$, $arccos\ \frac{3}{5}$ или $arctg\ \frac{4}{3}$.

Замечание. Полагая в равенстве (2)

$$sin\ \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } cos\ \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (5)$$

получим формулу

$$a\ sin\ x + b\ cos\ x = \sqrt{a^2+b^2}\ cos\ (x - \beta), \quad (6)$$

где β – любой угол, удовлетворяющий соотношениям (5).

Упражнение 2. Проверьте, что вспомогательные углы α и β связаны равен-
ством $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, где $m \in \boldsymbol{Z}$.

Аналогично предыдущему, модифицируя преобразование, указанное в замечании, в качестве вспомогательного угла можно выбрать любой из равных острых углов $arcsin\ \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $arccos\ \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $arctg\ \frac{|a|}{|b|}$ (если, конечно, $ab \neq 0$).

Ю. П. ЗОЛОТУХИН
Беларусь, Гродно, УО «ГрГУ имени Янки Купалы»

ОДНОРОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕРИАЛ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Организация учебных исследований школьников – одна из обсуждаемых проблем среднего образования. Учебно-исследовательская деятельность не только способствует повышению уровня предметной подготовки, но и развивает личные качества учащихся, нужные для их успешной самоидентификации и сознательного выбора жизненного пути. Одной из ее простейших форм является решение исследовательской задачи, поставленной преподавателем, выполняемое под его руководством в рамках внеклассной проектной работы по предмету.

В данной статье предлагаются материалы, на основе которых учитель может организовать полноценное учебное исследование, посвященное однородным тригонометрическим уравнениям первой и второй степеней, а также некоторым неоднородным, сводимым к ним. Его содержание полностью отвечает необходимым требованиям. Задача исследования имеет учебную новизну и достаточную общность. Ее постановка понятна, ее решение основывается на школьной программе и доступно мотивированному ученику. Процесс решения моделирует настоящее научное исследование и предполагает всестороннее рассмотрение поставленной проблемы. Полученные результаты имеют применение как