УДК 539.12

В.М. Редьков

СПИНОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ

Развивается применение теории группы Лоренца в поляризационной оптике в рамках векторного формализма Стокса – Мюллера и спинорного формализма Джонса. 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времени-подобных векторов в рамках специальной теории относительности. Теоретико-групповая задача о способах построения этих векторов и сопутствующих им тензоров из биспиноров переформулируется как задача о связях между спинорным и тензорным описаниями полностью или частично поляризованного света. Полученные в явном виде формулы существенно различны для полностью и частично поляризованного света.

Введение

Известно, что при описании поляризации света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразовании SO(3,1), изоморфная группе Лоренца (см. [1; 2]; большой список литературы по этому вопросу приведен в [3]). Работа посвящена применению спинорного формализма группы Лоренца для описания полностью и частично поляризованного света.

Спинорный формализм и полностью поляризованный свет

Исходим из хорошо известных соотношений, определяющих связь между биспинором второго ранга и набором соответствующих тензорных полей (используем обозначения из [4]):

$$U = \Psi \otimes \Psi = \left[-i\Phi + \gamma^b \, \Phi_b + i\sigma^{ab}\Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^b\gamma^5 \, \tilde{\Phi}_b \right] E^{-1} \; ; \qquad (1.1)$$

Все формулы отнесены к спинорному базису (E обозначает метрическую матрицу в биспинорном пространстве):

$$U = \begin{vmatrix} \xi^\alpha \; \xi^\beta & \xi^\alpha \; \eta_{\dot\beta} \\ \eta_{\dot\alpha} \; \xi^\beta & \eta_{\dot\alpha} \; \eta_{\dot\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha\beta} & \Delta^{\alpha}{}_{\dot\beta} \\ H_{\dot\alpha}{}^{\beta} & \eta_{\dot\alpha\dot\beta} \end{vmatrix}, \qquad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar\sigma^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}, \qquad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a), \qquad \gamma^5 = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Обратные к (1.1) соотношения выглядят так:

$$\Phi_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[E\gamma_a U], \qquad \tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i}\,\mathrm{Sp}\,[E\gamma^5\gamma_a U],$$

$$\Phi = \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,[EU], \qquad \tilde{\Phi} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[E\gamma^5 U], \qquad \Phi_{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[E\sigma_{mn} U]. \qquad (1.3)$$

Сначала рассматриваем вектор

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}[(H_{\dot{2}}{}^{1} - H_{\dot{1}}{}^{2}) - (\Delta^{2}{}_{\dot{1}} - \Delta^{1}{}_{\dot{2}})] = \xi^1 \eta_{\dot{2}} - \xi^2 \eta_{\dot{1}} \,,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}[(H_{\dot{1}}{}^{1} - H_{\dot{2}}{}^{2}) + (\Delta^{1}{}_{\dot{1}} - \Delta^{2}{}_{\dot{2}})] = \xi^1 \eta_{\dot{1}} - \xi^2 \eta_{\dot{2}} \,,$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2}[(H_{\dot{1}}{}^{1} + H_{\dot{2}}{}^{2}) + (\Delta^{1}{}_{\dot{1}} + \Delta^{2}{}_{\dot{2}})] = i\,(\xi^1 \eta_{\dot{1}} + \xi^2 \eta_{\dot{2}}) \,,$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{2}[(H_{\dot{2}}{}^{1} + H_{\dot{1}}{}^{2}) + (\Delta^{2}{}_{\dot{1}} + \Delta^{1}{}_{\dot{2}})] = -\,(\xi^1 \eta_{\dot{2}} + \xi^2 \eta_{\dot{1}}) \,;$$

и псевдовектор

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{1}{2}[-(H_{\dot{2}}{}^{1} - H_{\dot{1}}{}^{2}) - (\Delta^{2}{}_{\dot{1}} - \Delta^{1}{}_{\dot{2}})] = 0 \,,$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{1}{2}[-(H_{\dot{1}}{}^{1} - H_{\dot{2}}{}^{2}) + (\Delta^{1}{}_{\dot{1}} - \Delta^{2}{}_{\dot{2}})] = 0 \,,$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{i}{2}[-(H_{\dot{1}}{}^{1} + H_{\dot{2}}{}^{2}) + (\Delta^{1}{}_{\dot{1}} + \Delta^{2}{}_{\dot{2}})] = 0 \,,$$

$$\tilde{\Phi}_3 = -\frac{1}{2}[-(H_{\dot{2}}{}^{1} + H_{\dot{1}}{}^{2}) + (\Delta^{2}{}_{\dot{1}} + \Delta^{1}{}_{\dot{2}})] = 0 \,.$$

Аналогично находим, что $\Phi = 0$, $\tilde{\Phi} = 0$, и антисимметричный тензор задается равенствами:

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}[\,(\xi^{11} - \xi^{22}) + (\eta_{\dot{1}\dot{1}} - \eta_{\dot{2}\dot{2}})\,] = \frac{i}{4}[\,(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) + (\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})\,] \,,$$

$$\Phi^{23} = \frac{1}{4}[\,(\xi^{11} - \xi^{22}) - (\eta_{\dot{1}\dot{1}} - \eta_{\dot{2}\dot{2}})\,] = \frac{1}{4}[\,(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) - (\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})\,] \,,$$

$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}[\,(\xi^{11} + \xi^{22}) + (\eta_{\dot{1}\dot{1}} + \eta_{\dot{2}\dot{2}})\,] = -\frac{1}{4}[\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) + (\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})\,] \,,$$

$$\Phi^{31} = -\frac{1}{4i}[\,(\xi^{11} + \xi^{22}) - (\eta_{\dot{1}\dot{1}} + \eta_{\dot{2}\dot{2}})\,] = -\frac{1}{4i}[\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) - (\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})\,] \,,$$

$$\Phi^{03} = -\frac{i}{4}[\,(\xi^{21} + \xi^{12}) + (\eta_{\dot{2}\dot{1}} + \eta_{\dot{1}\dot{2}})] = -\frac{i}{2}[\,\xi^1\xi^2 + \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}}] \,,$$

$$\Phi^{12} = -\frac{1}{4}[\,(\xi^{21} + \xi^{12}) - (\eta_{\dot{2}\dot{1}} + \eta_{\dot{1}\dot{2}})] = -\frac{1}{2}[\,\xi^1\xi^2 - \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}}] \,.$$

Собирая результаты вместе

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha} \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{vmatrix}, \qquad \Psi \otimes \Psi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = 0,\ \tilde{\Phi} = 0,\ \tilde{\Phi}_a = 0,\ \Phi_a \neq 0,\ \Phi_{mn} \neq 0 \,,$$

замечаем: чтобы иметь вещественный вектор и тензор необходимо наложить дополнительное условие, например, следующее:

$$\eta = +i\,\sigma^2\,\xi^* \qquad \Rightarrow \qquad \eta_{\dot{1}} = +\,\xi^{2*} \,,\ \eta_{\dot{2}} = -\,\xi^{1*} \,, \qquad (1.4)$$

что приводит к вещественным величинам:

$$\Phi_0 = -(\xi^1\,\xi^{1*} + \xi^2\,\xi^{2*}) < 0\,, \qquad \Phi_3 = (\xi^1\,\xi^{1*} - \xi^2\,\xi^{2*})\,,$$
$$\Phi_1 = (\xi^1\,\xi^{2*} + \xi^2\,\xi^{1*})\,, \qquad \Phi_2 = i\,(\xi^1\,\xi^{2*} - \xi^2\,\xi^{1*})\,;$$
$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{23} = \frac{1}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{31} = -\frac{1}{4i}[\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{03} = -\frac{i}{2}(\,\xi^1\,\xi^2 - \xi^{2*}\,\xi^{1*})\,, \qquad \Phi^{12} = -\frac{1}{2}[\,\xi^1\,\xi^2 + \xi^{2*}\,\xi^{1*}]\,. \tag{1.5}$$

Существует альтернативная возможность дополнительного условия:

$$\eta = -i\,\sigma^2\,\xi^* \qquad \Rightarrow \qquad \eta_{\dot 1} = -\xi^{2*}\,,\ \eta_{\dot 2} = +\xi^{1*}\,; \tag{1.6}$$

она дает

$$\Phi_0 = (\xi^1\,\xi^{1*} + \xi^2\,\xi^{2*}) > 0\,, \qquad \Phi_3 = -(\xi^1\,\xi^{1*} - \xi^2\,\xi^{2*})\,,$$
$$\Phi_1 = -(\xi^1\,\xi^{2*} + \xi^2\,\xi^{1*})\,, \qquad \Phi_2 = -i\,(\xi^1\,\xi^{2*} - \xi^2\,\xi^{1*})\,;$$
$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{23} = \frac{1}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{31} = -\frac{1}{4i}[\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$\Phi^{03} = -\frac{i}{2}(\,\xi^1\,\xi^2 - \xi^{2*}\,\xi^{1*})\,, \qquad \Phi^{12} = -\frac{1}{2}[\,\xi^1\,\xi^2 + \xi^{2*}\,\xi^{1*}]\,. \tag{1.7}$$

Последний случай (1.6) – (1.7) пригоден для того, чтобы описывать 4-вектор поляризации Стокса [1], и дает также возможность ввести соответствующий тензор поляризации:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta = -i\,\sigma^2\,\xi^* \end{vmatrix}, \qquad \Psi \otimes \Psi \qquad \Rightarrow \qquad S_a \neq 0,\ S_{mn} \neq 0\,,$$
$$S_0 = (\xi^1\,\xi^{1*} + \xi^2\,\xi^{2*}) > 0\,, \qquad S_3 = -(\xi^1\,\xi^{1*} - \xi^2\,\xi^{2*})\,,$$
$$S_1 = -(\xi^1\,\xi^{2*} + \xi^2\,\xi^{1*})\,, \qquad S_2 = -i\,(\xi^1\,\xi^{2*} - \xi^2\,\xi^{1*})\,;$$
$$a^1 = S^{01} = \frac{i}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$b^1 = S^{23} = \frac{1}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$a^2 = S^{02} = -\frac{1}{4}[\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$
$$b^2 = S^{31} = -\frac{1}{4i}[\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]\,,$$

$$a^3 = S^{03} = -\frac{i}{2}(\xi^1\,\xi^2 - \xi^{2*}\,\xi^{1*}), \qquad b^3 = S^{12} = -\frac{1}{2}(\xi^1\,\xi^2 + \xi^{2*}\,\xi^{1*}). \qquad (1.8)$$

Вычислим основной инвариант для вектора Стокса:

$$S_0 S_0 - S_j S_j = (\xi^1\,\xi^{1*} + \xi^2\,\xi^{2*})^2 - (\xi^1\,\xi^{1*} - \xi^2\,\xi^{2*})^2 -$$

$$-(\xi^1\,\xi^{2*} + \xi^2\,\xi^{1*})^2 + (\xi^1\,\xi^{2*} - \xi^2\,\xi^{1*})^2 = 4(\xi^1\xi^{1*})(\xi^2\xi^{2*}) - 4(\xi^1\xi^{2*})(\xi^2\xi^{1*}) = 0.$$

Следовательно, S_a может рассматриваться как вектор Стокса полностью поляризованного света [1]; соответственно, построенный тензор S_{mn} может рассматриваться как тензор поляризации полностью поляризованного света; обе эти тензорные величины построены из биспинора типа Джонса (обычно рассматривают только 2-компонентный спинор Джонса [1]). Вычислим два возможных инварианта для тензора поляризации S_{mn}. Первый инвариант равен

$$I_1 = -\frac{1}{2} S^{mn} S_{mn} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\{-[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]^2 - [\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} - \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]^2 +$$

$$+[\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) + (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]^2 + [\,(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2) - (\xi^{2*}\,\xi^{2*} + \xi^{1*}\,\xi^{1*})\,]^2 -$$

$$-4(\,\xi^1\,\xi^2 - \xi^{2*}\,\xi^{1*})^2 - 4(\,\xi^1\,\xi^2 + \xi^{2*}\,\xi^{1*})^2\,\} = 0. \qquad (1.9)$$

Второй инвариант равен

$$I_2 = \frac{1}{4}\varepsilon_{abmn} S^{ab} S^{mn} = \mathbf{ab} = \frac{i}{16}[\,(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2)^2 - (\xi^{1*}\,\xi^{1*} - \xi^{2*}\,\xi^{2*})^2 -$$

$$-(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2)^2 + (\xi^{1*}\,\xi^{1*} + \xi^{2*}\,\xi^{2*})^2 + 4(\,\xi^1\,\xi^2 - \xi^{2*}\,\xi^{1*})(\,\xi^1\,\xi^2 + \xi^{2*}\,\xi^{1*})\,] =$$

$$= \frac{i}{16}[\,(-4\xi^1\xi^1\xi^2\xi^2 + 4\xi^{1*}\xi^{1*}\xi^{2*}\xi^{2*}) + (4\xi^1\xi^1\xi^2\xi^2 - 4\xi^{1*}\xi^{1*}\xi^{2*}\xi^{2*})\,] = 0. \qquad (1.10)$$

Можно получить выражения для стоксовых 4-вектора и 4-тензора через параметры исходного биспинора Джонса (M, N, α, β):

$$\Psi = \begin{vmatrix} N\,e^{i\alpha} \\ +M\,e^{i\beta} \\ -M\,e^{-i\beta} \\ N\,e^{-i\alpha} \end{vmatrix}, \qquad \Psi \otimes \Psi \qquad \Rightarrow \qquad S_a \neq 0,\; S_{mn} \neq 0,$$

$$S_0 = M^2 + N^2,\; S_3 = M^2 - N^2,\; S_1 = -2MN\cos(\alpha - \beta),\; S_2 = 2MN\sin(\alpha - \beta); \qquad (1.11)$$

$$a^1 = S^{01} = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha - M^2 \sin 2\beta), \qquad b^1 = S^{23} = +\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha - M^2 \cos 2\beta),$$

$$a^2 = S^{02} = -\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha + M^2 \cos 2\beta), \qquad b^2 = S^{31} = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha + M^2 \sin 2\beta),$$

$$a^3 = S^{03} = +NM\sin(\alpha + \beta), \qquad b^3 = S^{12} = -NM\cos(\alpha + \beta). \qquad (1.12)$$

6 компонент векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ задаются 4 параметрами N, M, α, β, но дополнительно выполняются ограничения:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{4}, \qquad \mathbf{ab} = 0. \qquad (1.13)$$

Следовательно, величины $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ содержат 4 независимых параметра $N, M, \beta - \alpha, \beta + \alpha$, тогда как 4-вектор Стокса зависит только от трех: $N, M, \beta-\alpha$. Вместо вещественного тензора S_{ab} можно ввести 3-мерный комплексный вектор $\mathbf{s}=\mathbf{a}+i\mathbf{b}$:

$$s^1 = a^1 + ib^1 = S^{01} + iS^{23} = \frac{i}{2}(\xi^1\,\xi^1 - \xi^2\,\xi^2),$$

$$s^2 = a^2 + ib^2 = S^{02} + iS^{31} = -\frac{1}{2}(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2),$$

$$s^3 = a^3 + ib^3 = S^{03} = iS^{12} = -i\,\xi^1\,\xi^2 .$$

$$s_1 + is_2 = -i\,\xi^2\xi^2, \qquad s_1 - is_2 = +i\,\xi^1\xi^1, \qquad s^3 = -i\;\xi^1\,\xi^2 . \tag{1.14}$$

Величина $\mathbf{s}$ преобразуется как вектор относительно комплексной группы вращения $SO(3.C)$. Таким образом, для описания полностью поляризованного света, наряду со спинором Джонса, 4-вектором Стокса, 4-тензором Стокса, можно использовать и комплексный 3-вектор Стокса:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i\,(N^2 e^{2i\alpha} - M^2 e^{2i\beta}) \\ -\,(N^2 e^{2i\alpha} + M^2 e^{2i\beta}) \\ -2i\,NM\;e^{i(\alpha+\beta)} \end{vmatrix}. \tag{1.15}$$

Очевидно, этот комплексный вектор изотропен: $\mathbf{s}^2 = 0$.

Спинорный формализм и частично поляризованный свет

Исходим опять из известной связи между прямым произведением биспинора на себя с вектором и тензором:

$$U = \Psi \otimes \Psi = (\gamma^b\;\Phi_b + i\sigma^{ab}\Phi_{ab}\;)E^{-1};$$

$$U = \begin{vmatrix} \xi^\alpha\;\xi^\beta & \xi^\alpha\;\eta_{\dot\beta} \\ \eta_{\dot\alpha}\;\xi^\beta & \eta_{\dot\alpha}\;\eta_{\dot\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha\beta} & \Delta^\alpha{}_{\dot\beta} \\ H_{\dot\alpha}{}^\beta & \eta_{\dot\alpha\dot\beta} \end{vmatrix}, \qquad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar\sigma^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}, \qquad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a), \qquad \gamma^5 = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\Phi_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[E\gamma_a U], \qquad \Phi_{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[E\sigma_{mn}U]. \tag{2.2}$$

В явной форме они дают:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}[(H_{\dot 2}{}^1 - H_{\dot 1}{}^2) - (\Delta^2{}_{\dot 1} - \Delta^1{}_{\dot 2})] = \xi^1\eta_{\dot 2} - \xi^2\eta_{\dot 1},$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}[(H_{\dot 1}{}^1 - H_{\dot 2}{}^2) + (\Delta^1{}_{\dot 1} - \Delta^2{}_{\dot 2})] = \xi^1\eta_{\dot 1} - \xi^2\eta_{\dot 2},$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2}[(H_{\dot 1}{}^1 + H_{\dot 2}{}^2) + (\Delta^1{}_{\dot 1} + \Delta^2{}_{\dot 2})] = i\,(\xi^1\eta_{\dot 1} + \xi^2\eta_{\dot 2}),$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{2}[(H_{\dot 2}{}^1 + H_{\dot 1}{}^2) + (\Delta^2{}_{\dot 1} + \Delta^1{}_{\dot 2})] = -\,(\xi^1\eta_{\dot 2} + \xi^2\eta_{\dot 1});$$

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}[\,(\xi^{11} - \xi^{22}) + (\eta_{\dot 1\dot 1} - \eta_{\dot 2\dot 2})\,] = \frac{i}{4}[\,(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) + (\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1} - \eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2})\,],$$

$$\Phi^{23} = \frac{1}{4}[\,(\xi^{11} - \xi^{22}) - (\eta_{\dot 1\dot 1} - \eta_{\dot 2\dot 2})\,] = \frac{1}{4}[\,(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) - (\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1} - \eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2})\,],$$

$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}[\,(\xi^{11}+\xi^{22})+(\eta_{\dot 1\dot 1}+\eta_{\dot 2\dot 2})\,] = -\frac{1}{4}[\,(\xi^{1}\xi^{1}+\xi^{2}\xi^{2})+(\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1}+\eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2})\,],$$

$$\Phi^{31} = -\frac{1}{4i}[\,(\xi^{11}+\xi^{22})-(\eta_{\dot 1\dot 1}+\eta_{\dot 2\dot 2})\,] = -\frac{1}{4i}[\,(\xi^{1}\xi^{1}+\xi^{2}\xi^{2})-(\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1}+\eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2})\,],$$

$$\Phi^{03} = -\frac{i}{4}[\,(\xi^{21}+\xi^{12})+(\eta_{\dot 2\dot 1}+\eta_{\dot 1\dot 2})] = -\frac{i}{2}[\,\xi^{1}\xi^{2}+\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 2}],$$

$$\Phi^{12} = -\frac{1}{4}[\,(\xi^{21}+\xi^{12})-(\eta_{\dot 2\dot 1}+\eta_{\dot 1\dot 2})] = -\frac{1}{2}[\,\xi^{1}\xi^{2}-\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 2}]. \qquad (2.3)$$

Рассмотрим свойства возникающих таким образом 4-вектора и 4-тензора, когда никаких дополнительных условий на биспинор не накладывается:

$$\Phi_0^2-\Phi_3^2 = (\xi^1\eta_{\dot 2}-\xi^2\eta_{\dot 1})^2-(\xi^1\eta_{\dot 2}+\xi^2\eta_{\dot 1})^2 = -4\,\xi^1\xi^2\,\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 2},$$

$$\Phi_1^2+\Phi_2^2 = (\xi^1\eta_{\dot 1}-\xi^2\eta_{\dot 2})^2-(\xi^1\eta_{\dot 1}+\xi^2\eta_{\dot 2})^2 = -4\,\xi^1\xi^2\,\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 2},$$

$$\Phi^0\Phi^0-\Phi_1\Phi^j-\Phi_2\Phi^2-\Phi_3\Phi^3 = 0, \qquad (2.4)$$

т. е. комплексный вектор Φ_a изотропный. Выделим вещественную и мнимую части:

$$\Phi_0 = A+iB, \qquad \Phi_j = A_j+iB_j, \qquad A^2-\mathbf{A}^2 = B^2-\mathbf{B}^2, \qquad AB-\mathbf{AB} = 0. \qquad (2.5)$$

Два вещественных 4-вектора A_n и B_n имеют одну и ту же длину (не обязательно нулевую) и ортогональны друг другу.

Теперь обратимся к анализу 4-тензора. Основное уравнение связи и комплексно сопряженное к нему имеют вид:

$$E\,(\Psi\otimes\Psi) = \gamma^n\,\Phi_n + i\,\sigma^{mn}\,\Phi_{mn},$$

$$E\,(\Psi^*\otimes\Psi^*) = (\gamma^n)^*\,\Phi_n^* - i\,(\sigma^{mn})^*\,\Phi_{mn}^*. \qquad (2.6)$$

С учетом (используем спинорный базис) $(\gamma^n)^* = \gamma^2\,\gamma^n\,\gamma^2$, $(\sigma^{mn})^* = -\gamma^2\,\sigma^{mn}\,\gamma^2$ соотношения (2.6) дают

$$(\Psi\otimes\Psi) = [\,\gamma^n\,\Phi_n + i\,\sigma^{mn}\,\Phi_{mn}\,]\,E^{-1},$$

$$(\gamma^2\Psi^*\otimes\gamma^2\Psi^*) = [\,\gamma^n\,\Phi_n^* + i\,\sigma^{mn}\,\Phi_{mn}^*\,]\,E^{-1}. \qquad (2.7)$$

Таким образом, справедливы тождества:

$$A_n+iB_n = \Phi_n = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\gamma_n(\Psi\otimes\Psi)\,], \quad A_n-iB_n = \Phi_n^* = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\gamma_n(\gamma^2\Psi^*\otimes\gamma^2\Psi^*)\,],$$

$$\Phi_{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\sigma_{mn}(\Psi\otimes\Psi)\,], \qquad \Phi_{mn}^* = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\sigma_{mn}(\gamma^2\Psi^*\otimes\gamma^2\Psi^*)\,]. \qquad (2.8a)$$

С использованием обозначения $\gamma^2\Psi^* = \Psi^c$ они записываются короче:

$$A_n = \frac{1}{8}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\gamma_n(\Psi\otimes\Psi+\Psi^c\otimes\Psi^c)\,], \qquad iB_n = \frac{1}{8}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\gamma_n(\Psi^c\otimes\Psi^c-\Psi^c\otimes\Psi^c)\,],$$

$$\Phi_{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\sigma_{mn}(\Psi\otimes\Psi)\,], \qquad \Phi_{mn}^* = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\sigma_{mn}(\Psi^c\otimes\Psi^c)\,]. \qquad (2.8b)$$

Вычислим компоненты тензора в явном виде:

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}[\,(\xi^1\xi^1-\xi^2\xi^2)+(\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1}-\eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2})\,], \qquad \Phi^{23} = \frac{1}{4}[\,(\xi^1\xi^1-\xi^2\xi^2)-(\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1}-\eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2})\,],$$

$$s^1 = \Phi^{01}+i\Phi^{23} = \frac{i}{2}(\xi^1\xi^1-\xi^2\xi^2), \qquad t^1 = \Phi^{01}-i\Phi^{23} = \frac{i}{2}(\eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1}-\eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2});$$

$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}\,[\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) + (\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})\,]\,, \qquad \Phi^{31} = -\frac{1}{4i}\,[\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) - (\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})\,]\,,$$

$$s^2 = \Phi^{02} + i\Phi^{31} = -\frac{1}{2}\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2)\,, \qquad t^2 = \Phi^{02} - i\Phi^{31} = -\frac{1}{2}\,(\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})\,;$$

$$\Phi^{03} = -\frac{i}{2}\,(\,\xi^1\xi^2 + \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}})\,, \qquad \Phi^{12} = -\frac{1}{2}\,(\,\xi^1\xi^2 - \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}})\,,$$

$$s^3 = \Phi^{03} + i\Phi^{12} = -i\,\xi^1\xi^2\,, \qquad t^3 = \Phi^{03} - i\Phi^{12} = -i\,\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}}\,. \qquad (2.9)$$

Векторы **s** и **t** изотропные:

$$\mathbf{s}^2 = -\frac{1}{4}\,(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2)^2 + \frac{1}{4}\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2)^2 - (\xi^1\xi^2)^2 \equiv 0\,.$$

$$\mathbf{t}^2 = -\frac{1}{4}\,(\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})^2 + \frac{1}{4}\,(\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}})^2 - (\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}})^2 \equiv 0\,.$$

Кроме того,

$$\mathbf{s}\,\mathbf{t} = -\frac{1}{4}\,(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2)(\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}}) +$$

$$+\frac{1}{4}\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2)(\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}}) - \xi^1\xi^2\;\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}} = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_{\dot{2}} - \xi^2\eta_{\dot{1}})^2\,. \qquad (2.10)$$

Установим знак релятивистской длины вектора A_n (и длины вектора B_n):

$$2A_0 = (\xi^1\eta_{\dot{2}} - \xi^2\eta_{\dot{1}}) + (\xi^{1*}\eta^*_{\dot{2}} - \xi^{2*}\eta^*_{\dot{1}})\,,$$

$$2A_3 = -\,(\xi^1\eta_{\dot{2}} + \xi^2\eta_{\dot{1}}) - (\xi^{1*}\eta^*_{\dot{2}} + \xi^{2*}\eta^*_{\dot{1}})\,,$$

$$A_1 = (\xi^1\eta_{\dot{1}} - \xi^2\eta_{\dot{2}}) + (\xi^{1*}\eta^*_{\dot{1}} - \xi^{2*}\eta^*_{\dot{2}})\,,$$

$$A_2 = i\,(\xi^1\eta_{\dot{1}} + \xi^2\eta_{\dot{2}}) - i(\xi^{1*}\eta^*_{\dot{1}} + \xi^{2*}\eta^*_{\dot{2}})\,.$$

Учитывая тождества

$$4(A_0^2 - A_3^2) = -4\xi^1\xi^2\;\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}} - 4\xi^{1*}\xi^{2*}\;\eta^*_{\dot{1}}\eta^*_{\dot{2}} - 4\xi^1\xi^{1*}\;\eta_{\dot{2}}\eta^*_{\dot{2}} - 4\xi^2\xi^{2*}\;\eta_{\dot{1}}\eta^*_{\dot{1}}\,,$$

$$4(A_1^2 + A_2^2) = -4\xi^1\xi^2\;\eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}} - 4\xi^{1*}\xi^{2*}\;\eta^*_{\dot{1}}\eta^*_{\dot{2}} + 4\xi^1\xi^{1*}\;\eta_{\dot{1}}\eta^*_{\dot{1}} + 4\xi^2\xi^{2*}\;\eta_{\dot{2}}\eta^*_{\dot{2}}\,,$$

приходим к соотношению

$$A_0^2 - \mathbf{A}^2 = -(\xi^1\xi^{1*} + \xi^2\xi^{2*})\;\;(\eta_{\dot{1}}\eta^*_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta^*_{\dot{2}}) < 0\,. \qquad (2.11)$$

Следовательно, оба 4-вектора являются пространственноподобными и по этой причине не пригодны для описания частично поляризованного света [2].

Рассмотрим еще одну возможность построения 4-вектора и 4-тензора из биспинора:

$$\Psi \otimes (-i\Psi^c) = (\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot{1}}, \eta_{\dot{2}}) \otimes \begin{vmatrix} +\eta^*_{\dot{2}} \\ -\eta^*_{\dot{1}} \\ -\xi^{2*} \\ +\xi^{1*} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} +\xi^1\eta^*_{\dot{2}} & -\xi^1\eta^*_{\dot{1}} & -\xi^1\xi^{2*} & +\xi^1\xi^{1*} \\ +\xi^2\eta^*_{\dot{2}} & -\xi^2\eta^*_{\dot{1}} & -\xi^2\xi^{2*} & +\xi^2\xi^{1*} \\ +\eta_{\dot{1}}\eta^*_{\dot{2}} & -\eta_{\dot{1}}\eta^*_{\dot{1}} & -\eta_{\dot{1}}\xi^{2*} & +\eta_{\dot{1}}\xi^{1*} \\ +\eta_{\dot{2}}\eta^*_{\dot{2}} & -\eta_{\dot{2}}\eta^*_{\dot{1}} & -\eta_{\dot{2}}\xi^{2*} & +\eta_{\dot{2}}\xi^{1*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{11} & \xi^{12} & \Delta^1{}_{\dot{1}} & \Delta^1{}_{\dot{2}} \\ \xi^{21} & \xi^{22} & \Delta^2{}_{\dot{1}} & \Delta^2{}_{\dot{2}} \\ H_{\dot{1}}{}^1 & H_{\dot{1}}{}^2 & \eta_{\dot{1}\dot{1}} & \eta_{\dot{1}\dot{2}} \\ H_{\dot{2}}{}^1 & H_{\dot{2}}{}^2 & \eta_{\dot{2}\dot{1}} & \eta_{\dot{2}\dot{2}} \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

Соответствующий 4-вектор задается соотношениями:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}[\,(\eta_2\eta_2^* + \eta_1\eta_1^*) + (\xi^2\xi^{2*} + \xi^1\xi^{1*})\,] > 0\,,$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{2}[\,(\eta_2\eta_2^* - \eta_1\eta_1^*) + (-\xi^2\xi^{2*} + \xi^1\xi^{1*})\,]\,,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}[\,(\eta_1\eta_2^* + \eta_2\eta_1^*) - (\xi^1\xi^{2*} + \xi^2\xi^{1*})\,]\,,$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2}[(\eta_1\eta_2^* - \eta_2\eta_1^*) + (-\xi^1\xi^{2*} + \xi^2\xi^{1*})\,]\,.$$

Учитывая тождества

$$4(\Phi_0^2 - \Phi_3^2) = 4\eta_1\eta_1^*\ \eta_2\eta_2^* + 4\xi^1\xi^{1*}\ \xi^2\xi^{2*} + 4\eta_1\eta_1^*\ \xi^1\xi^{1*} + 4\eta_2\eta_2^*\ \xi^2\xi^{2*}\,,$$

$$4(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) = 4\eta_1\eta_1^*\ \eta_2\eta_2^* + 4\xi^1\xi^{1*}\ \xi^2\xi^{2*} - 4\eta_1\eta_2^*\ \xi^2\xi^{1*} - 4\eta_2\eta_1^*\xi^1\xi^{2*}\,,$$

приходим к равенству

$$\Phi^a\Phi_a = \Phi_0^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2 - \Phi_1^3 = \ \eta_1\eta_1^*\ \xi^1\xi^{1*} + \eta_2\eta_2^*\ \xi^2\xi^{2*} + \eta_1\eta_2^*\ \xi^2\xi^{1*} + \eta_2\eta_1^*\xi^1\xi^{2*}\,. \qquad (2.13)$$

Покажем, что введенный 4-вектор временноподобный. С использованием обозначений

$$\xi = \begin{vmatrix} N_1 e^{in_1} \\ N_2 e^{in_2} \end{vmatrix}, \qquad \eta = \begin{vmatrix} M_1 e^{im_1} \\ M_2 e^{im_2} \end{vmatrix} \qquad (2.14)$$

получаем

$$\Phi^a\Phi_a = N_1^2M_1^2 + N_2^2M_2^2 + 2N_1M_1\ N_2M_2\ \cos[(n_1 - n_2) - (m_1 - m_2)]\,.$$

Следовательно,

$$(N_1M_1 - N_2M_2)^2 < \Phi_0^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2 - \Phi_1^3 < (N_1M_1 + N_2M_2)^2\,. \qquad (2.15)$$

И следовательно, 4-vector Φ_a может рассматриваться как вектор Стокса S_a для частично поляризованного света [2]:

$$(N_1M_1 - N_2M_2)^2 < S_0^2 - \mathbf{S}^2 < (N_1M_1 + N_2M_2)^2\,. \qquad (2.16)$$

Соответственно, два 2-спинора в (2.14) следует рассматривать как образующие биспинор Джонса для частично поляризованного света.

Остается установить явный вид тензора поляризации S_{ab} частично поляризованного света:

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}[(\xi^1\eta_2^* + \xi^2\eta_1^*) - (\eta_1\xi^{2*} + \eta_2\xi^{1*})],\ \Phi^{23} = \frac{1}{4}[(\xi^1\eta_2^* + \xi^2\eta_1^*) + (\eta_1\xi^{2*} + \eta_2\xi^{1*})],$$

$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}[(\xi^1\eta_2^* - \xi^2\eta_1^*) + (-\eta_1\xi^{2*} + \eta_2\xi^{1*})],\ \Phi^{31} = \frac{i}{4}[(\xi^1\eta_2^* - \xi^2\eta_1^*) - (-\eta_1\xi^{2*} + \eta_2\xi^{1*})],$$

$$\Phi^{03} = -\frac{i}{4}[(\xi^2\eta_2^* - \xi^1\eta_1^*) + (-\eta_2\xi^{2*} + \eta_1\xi^{1*})],\ \Phi^{12} = -\frac{1}{4}[(\xi^2\eta_2^* - \xi^1\eta_1^*) - (-\eta_2\xi^{2*} + \eta_1\xi^{1*})];$$

$$s^1 = \frac{i}{2}(\xi^1\eta_2^* + \xi^2\eta_1^*)\,, \qquad s^2 = -\frac{1}{2}(\xi^1\eta_2^* - \xi^2\eta_1^*)\,, \qquad s^3 = -\frac{i}{2}(\xi^2\eta_2^* - \xi^1\eta_1^*)\,. \qquad (2.17)$$

Комплексный 3-вектор является неизотропным:

$$4\mathbf{s}^2 = -(\xi^1\eta_1^* - \xi^2\eta_1^*)^2 \neq 0\,.$$

Заключение

Полученные результаты могут представлять интерес не только в поляризационной оптике, но также и в контексте описания уравнений Максвелла в спинорном подходе, когда вместо электромагнитных 4-потенциала A_n и тензора F_{mn} можно ввести фундаментальный электромагнитный биспинор $\Psi = (\xi, \eta)$. Также эти результаты могут быть полезными в контексте явного построения моделей для пространства-времени со спинорной структурой (например, см. [3]).

Работа поддержана грантом БРФФИ Ф09К-123.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск, 1992. – 336 с.
2. Богуш, А.А. Бикватернионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.]. // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
3. Red'kov, V.M. Maxwell Equations in Media, Group Theory and Polarization of the Light. / V.M. Red'kov. – 73 pages, arxiv/0906.2482.
4. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.

B.M. Red'kov. **Spinor Formalism of the Lorentz Group and Polarized Light**

The application of Lorentz group theory in the optics of polarized light is developed in the frames of Stokes – Mueller real and Jones complex formalisms. Stokes vector of completely and partly polarized light is analogous to the isotropic and time-like 4-vectors respectively in the frame of special relativity. The group theoretical problem on constructing these vectors in terms of 4-spinors is formulated as a problem of connecting spinor and vector description of a polarized light. The formulas produced in explicit form are substantially different for completely and partly polarized light.