МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина»

XXIV РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Сборник материалов

Брест, 12 мая 2022 года

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук
А. Е. Будько

Брест
БрГУ имени А. С. Пушкина
2022

УДК 378:001:061.3
ББК 74.584я431
Д 22

Рекомендовано редакционно-издательским советом учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина»

Рецензенты:
Т. С. Будько, С. Ф. Бут-Гусаим, С. М. Винидиктова, П. И. Гарбуль, О. И. Грядунова, А. В. Демидчик, Н. М. Матусевич, Д. А. Петрукович

Д 22 **XXIV Республиканская** научно-практическая конференция молодых ученых, Брест, 12 мая 2022 г. : сб. материалов / М-во образования Респ. Беларусь, Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. Е. Будько. – Брест : БрГУ, 2022. – 289 с.
ISBN 978-985-22-0497-2.

В сборник включены материалы, посвященные решению актуальных научных проблем естественных, гуманитарных и общественных наук, а также проблемам обучения и воспитания.

Материалы могут быть использованы научными работниками, аспирантами, преподавателями и студентами высших учебных заведений, учителями школ.

УДК 378:001:061.3
ББК 74.584я431

ISBN 978-985-22-0497-2

Научное издание

XXIV РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Сборник материалов

Подписано в печать 25.10.2022. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 16,86. Уч.-изд. л. 22,05.
Тираж 134 экз. Заказ № 331.
Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/55 от 14.10.2013.
Ул. Мицкевича, 28, 224016, Брест.

УДК 517.954

Т. А. ЯЦУК
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина
Научный руководитель – А. И. Басик, канд. физ.-мат. наук, доцент

РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПО ДУГЛИСУ – НИРЕНБЕРГУ СИСТЕМ В $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$

В статье рассматривается множество эллиптических по Дуглису – Ниренбергу [1] систем двух дифференциальных уравнений с частными производными в пространстве $\mathbf{R}^n (n \geq 3)$ вида

$$\begin{cases} a_0 u + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \upsilon}{\partial x_j} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{j,k=1}^{n} d_{jk} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_0, b_j, c_j, d_{jk} (j, k = 1, 2, ..., n)$ – заданные действительные числа, $u, v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – искомые функции. Эллиптичность (1) по Дуглису – Ниренбергу означает, что, во-первых, характеристическая матрица (главная часть) системы (1) имеет вид

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} a_0 & \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j \\ \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k & \sum_{j,k=1}^{n} d_{jk} \xi_j \xi_k \end{bmatrix},$$

т. к. существует набор чисел $s_1 = -1, s_2 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$, для которого выполняются неравенства $\deg a_{kj}(\xi) \leq s_k + t_j \; (k, j = 1, 2)$, и, во-вторых, для любого ненулевого вектора $\xi \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство $\det A(\xi) \neq 0$. Отметим, что рассматриваемое множество систем вида (1) имеет четыре компоненты гомотопической связности [2].

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 3)$ – ограниченная односвязная область, гомеоморфная шару, границей которой $\partial\Omega$ является гладкая $(n-1)$-мерная поверхность Ляпунова. Задача Римана–Гильберта состоит в отыскании пары функций $u \in C^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\upsilon \in C^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющей в области Ω системе дифференциальных уравнений (1) и граничному условию

$$g_1(y) u(y) + g_2(y) \upsilon(y) = f(y), \quad y \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $g_1, g_2, f : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции; $C^n(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно; $C^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно, все частные производные которых до порядка n включительно допускают непрерывное продолжение на замыкание области и продолжения всех производных непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0;1]$ в $\overline{\Omega}$.

В плоском ($n = 2$) случае, когда система (1) представляет собой систему Коши – Римана, задача Римана – Гильберта (задача Гильберта в терминологии Ф.Д. Гахова [3]) является одной из основных краевых задач теории аналитических функций и достаточно подробно изучена (см. [3, с. 217] и [4, с. 144] и имеющуюся там библиографию).

В случае, если $n = 3$ и система (1) либо принадлежит классу трехмерных аналогов системы Коши-Римана [5], либо является эллиптической кососимметрической системой [6], либо эллиптической системой ортогонального типа [7] для задачи Римана-Гильберта получено условие регуляризуемости, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач и вычислен их индекс. При $n = 4$ известны примеры систем [8–10], обладающих свойством, что никакие граничные условия не могут образовать вместе с системой регуляризуемую краевую задачу.

Напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполняется условие Я. Б. Лопатинского. Это условие накладывает дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и обеспечивает нетеровость краевой задачи, как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [1]. Последнее означает, что однородная задача (1), (2) имеет конечное число линейно независимых решений, а решение неоднородной задачи существует при выполнении конечного числа линейно независимых условий. В настоящей работе доказывается критерий регуляризуемости краевой задачи Римана–Гильберта (1), (2).

Теорема. *Краевая задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $y \in \partial\Omega$ *и при каждом ненулевом векторе* τ, *касательном к поверхности* $\partial\Omega$, *выполняется неравенство*

$$-g_1(y)b(\lambda_1\nu + \tau) + a_0 g_2(y) \neq 0, \tag{3}$$

где $b(\xi) = \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j$, λ_1 *– корень уравнения* $\det A(\lambda\nu + \tau) = 0$, *лежащий в верхней* λ*– полуплоскости,* ν *– единичный вектор внутренней нормали к* $\partial\Omega$ *в точке* y, $A(\xi)$ *– характеристическая матрица системы* (1).

Доказательство. Условие Я. Б. Лопатинского задачи (1), (2) состоит в том, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом векторе τ, касательном к $\partial\Omega$ в точке y, ранг матрицы

$$L(y;\tau) = \frac{1}{2\pi i}[g_1(y) \quad g_2(y)] \cdot \int_\gamma A^{-1}(\lambda\nu + \tau)(E, \lambda E)d\lambda \tag{4}$$

является максимальным, т. е. равным 1. В формуле (4) γ – простой гладкий замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий λ_1, E – единичная матрица второго порядка. Непосредственные вычисления показывают, что с точностью до ненулевого множителя

$$L(y;\tau) = (g_1(y)d(\lambda_1\nu+\tau) - g_2(y)c(\lambda_1\nu+\tau))e_1 + (a_0 g_2(y) - g_1(y)b(\lambda_1\nu+\tau))e_2,$$

где $e_1 = (1;0;\lambda_1;0)$, $e_2 = (0;1;0;\lambda_1)$, $c(\xi) = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j$, $d(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} d_{jk}\xi_j\xi_k$.

Т. к. при любом $\lambda_1 \in \mathbf{C}$ векторы e_1 и e_2 линейно независимы, то условие максимальности ранга матрицы (4) равносильно выполнению в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом векторе $\tau \in T_y\partial\Omega$ неравенства

$$|g_1(y)d(\lambda_1\nu+\tau) - g_2(y)c(\lambda_1\nu+\tau)| + |a_0 g_2(y) - g_1(y)b(\lambda_1\nu+\tau)| \neq 0. \quad (5)$$

Очевидно, что если выполняется условие (3), то выполняется неравенство (5) и, следовательно, для задачи (1), (2) выполняется условие Я. Б. Лопатинского.

Обратное утверждение докажем методом от противного. Пусть задача (1), (2) регуляризуема и найдутся точка $y_0 \in \partial\Omega$ и ненулевой вектор $\tilde{\tau} \in T_{y_0}\partial\Omega$ такие, что

$$-g_1(y_0)b(\lambda_1\nu+\tilde{\tau}) + a_0 g_2(y_0) = 0. \quad (6)$$

Выразив из формулы (6) $g_2(y_0)$ ($a_0 \neq 0$ в силу эллиптичности системы (1)), получим

$$g_1(y_0)d(\lambda_1\nu+\tilde{\tau}) - g_2(y_0)c(\lambda_1\nu+\tilde{\tau}) = \frac{g_1(y_0)\det A(\lambda_1\nu+\tilde{\tau})}{a_0} = 0,$$

что противоречит (5).

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волевич, Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Мат. сб. – 1965. – Т. 68, № 3. – С. 373–416.

2. Басик, А. И. Гомотопическая классификация одного класса эллиптических по Дуглису-Ниренбергу систем двух уравнений в $\mathbf{R}^n (n \geq 3)$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Яцук // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 нояб. 2021 г. : в 2 ч. / сост. В. В. Лепин ; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики, Белгосуниверситет. – Минск : Беларус. навука, 2021. – Ч. 1. – С. 17–18.

3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1977. – 640 с.

4. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М. : Наука, 1968. – 511 с.

5. Усс, А. Т. Краевая задача Римана–Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши-Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

6. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик,

Е. В. Грицук. // Математика. Інформац. технології. Освіта Зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С 12–18.

7. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$/ А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16.

8. Соломяк, М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.

9. Басик, А. И. О краевых задачах для систем Янушаускаса / А. И. Басик, А. Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26–28.

10. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412