ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№3 (52) 2022

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (52) 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

ИНФОРМАТИКА

ТЕХНИКА

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:
– технические;
– физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 08.09.22. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,56. Уч.-изд. л. 10,94. Тираж 102 экз. Заказ № 398.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 3 (52) 2022

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS

INFORMATION SCIENCE

TECHNICS

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

– Technics;

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67
EDN: GFUZYC

К ВОПРОСУ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

А.И. Басик[1], Е.В. Грицук[1], Т.В. Копайцева[2]

[1]*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*
[2]*Брестский государственный технический университет*

ON THE QUESTION OF REGULARIZABILITY OF THE OBLIQUE DERIVATIVE TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND-ODER ELLIPTIC SYSTEMS ON THE PLANE

A.I. Basik[1], E.V. Gricuk[1], T.V. Kapaitsava[2]

[1]*Brest State A.S. Pushkin University*
[2]*Brest State Technical University*

Аннотация. Рассматривается множество $\mathfrak{M}(2;2;2)$ эллиптических систем двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем. Задача типа наклонной производной для системы из $\mathfrak{M}(2;2;2)$ в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ состоит в отыскании решения по заданным граничным значениям производных по некасательным к $\partial\Omega$ направлениям l_1 и l_2. Известно, что множество $\mathfrak{M}(2;2;2)$ имеет три компоненты гомотопической связности. Известно также, что если система из $\mathfrak{M}(2;2;2)$ является системой ортогонального типа и l_1, l_2 – векторные поля, неколлинеарные в каждой точке границы, то задача типа наклонной производной является нетеровой в классической постановке (независимо от гомотопического класса системы). В настоящей статье для каждой компоненты $\mathfrak{M}(2;2;2)$ приводится представитель, обладающий следующими свойствами: каждая компонента произвольного дважды непрерывно дифференцируемого решения является бигармонической функцией и краевая задача типа наклонной производной для этого представителя не является регуляризуемой. Следовательно, регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим классом системы.

Ключевые слова: *эллиптическая система*, *регуляризуемая краевая задача*, *условие Лопатинского*, *гомотопическая классификация*.

Для цитирования: *Басик*, *А.И.* К вопросу регуляризуемости краевой задачи типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка на плоскости / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.В. Копайцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67. – EDN: GFUZYC

Abstract. The set $\mathfrak{M}(2;2;2)$ of elliptic systems of two second-order partial differential equations on the plane with positive characteristic determinant is considered. An oblique derivative type boundary value problem for a system from $\mathfrak{M}(2;2;2)$ in a bounded domain Ω with a smooth boundary $\partial\Omega$ is to find a solution for given boundary values of the derivatives along the directions l_1 and l_2 nontangential to $\partial\Omega$. It is known that the set $\mathfrak{M}(2;2;2)$ has three homotopy connected components. It is also known that if a system from $\mathfrak{M}(2;2;2)$ is a system of orthogonal type and l_1, l_2 are vector fields that are noncollinear at each point of the boundary, then the oblique derivative boundary value problem is Fredholm in its classical formulation (regardless of the homotopy class of the system). In this paper, for each component of $\mathfrak{M}(2;2;2)$, a representative is given that has the following properties: each component of an arbitrary twice continuously differentiable solution is a biharmonic function, and an oblique derivative type boundary value problem for this representative is not regularizable. Consequently, the regularizability of a problem of oblique derivative type boundary value problem for the elliptic systems under consideration is not related to the homotopy class of the system.

Keywords: *elliptic system*, *regularizable boundary value problem*, *Lopatinski condition*, *homotopic classification*.

For citation: *Basik A.I.* On the question of regularizability of the oblique derivative type boundary value problem for second-oder elliptic systems on the plane / A.I. Basik, E.V. Gricuk, T.V. Kapaitsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67 (in Russian). – EDN: GFUZYC

Введение

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим множество равномерно эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка в области Ω

$$\sum_{j,k=1}^{2} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} A_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0(x)u = 0, \quad (0.1)$$

здесь $A_{jk}(x)$, $A_j(x)$ и $A_0(x)$ – заданные в Ω достаточно гладкие квадратные вещественные матрицы-функции второго порядка, $u:\Omega\to\mathbb{R}^2$ – искомая вектор-функция.

Б.В. Боярский установил [1], что множество эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем имеет три компоненты гомотопической связности. Системы первой компоненты гомотопны паре уравнений Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \Delta u_2 = 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

Системы второй компоненты гомотопны системе А.В. Бицадзе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases} \quad (0.3)$$

третьей компоненты – сопряженной системе А.В. Бицадзе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ -2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0. \end{cases} \quad (0.4)$$

Задача отыскания решения

$$u(x_1,x_2) = (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2))^T \in C^{2,\alpha}(\Omega)\cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

системы (0.1), удовлетворяющего на границе области Ω краевым условиям

$$p_k\langle l_1;\mathrm{grad}u_1\rangle + q_k\langle l_2;\mathrm{grad}u_2\rangle = f_k,\ k=1,2, \quad (0.5)$$

называется задачей типа наклонной производной; где $p_k, q_k, f_k : \partial\Omega\to\mathbb{R}$ – заданные функции класса $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$; l_1, l_2 – заданные некасательные к $\partial\Omega$ векторные поля; $\langle\cdot;\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение на плоскости; $C^{n,\alpha}(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка *n* включительно, частные производные порядка *n* которых непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha\in(0;1]$ в этой области; $C^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка *n* включительно, все частные производные которых до порядка *n* включительно допускают непрерывное продолжение на замыкание области и продолжения всех производных непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha\in(0;1]$ в $\overline{\Omega}$.

Для произвольной эллиптической системы (0.1) краевая задача типа наклонной производной, вообще говоря, не является нетеровой. Например, в случае $l_1 = l_2$ задача не будет нетеровой [2] для системы (0.3).

В работе [3, с. 74] доказывается, что если (0.1) является системой ортогонального типа и векторы l_1 и l_2 не коллинеарны в каждой точке границы $\partial\Omega$, то задача (0.1), (0.5) при $p_1 = q_2 = 1$ и $p_2 = q_1 = 0$, является нетеровой не зависимо от того, какой компоненте гомотопической связности принадлежит система (0.1).

В настоящей статье для каждой компоненты гомотопической связности множества эллиптических систем вида (0.1) приводится представитель, для которого задача типа наклонной производной не является нетеровой. Тем самым мы показываем, что регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим типом системы.

Отметим здесь, что проблема гомотопической классификации впервые была сформулирована И.М. Гельфандом в 1960 г. и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [4]. Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, по ней имеются лишь отдельные результаты. Например, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], кососимметрических эллиптических систем в $\mathbb{R}^3$ [6] и эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ [7]. Также известны классы систем, для которых любые граничные условия не могут образовывать регуляризуемую краевую задачу [8], [9].

1 Примеры систем и некоторые их свойства

Рассмотрим матричные дифференциальные операторы второго порядка на плоскости

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \quad (1.1)$$

$$= \begin{pmatrix} 4\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ -3\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 3\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \quad (1.2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

$$C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)= \tag{1.3}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

***Теорема* 1.1.** *Каждая из систем*

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$$

является эллиптической. Система $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$ *гомотопна паре уравнений Лапласа* (0.2), *система* $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$ *гомотопна системе А.В. Бицадзе* (0.3), *а система* $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$ *гомотопна сопряженной системе А.В. Бицадзе* (0.4).

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\det A(\xi)=\det B(\xi)=\det C(\xi)=\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2>0$$

при всех $\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, что и доказывает эллиптичность каждой из рассматриваемых систем.

В работе [1] по коэффициентам системы (0.1) строится специальный квадратный трехчлен $p(\lambda)$, по расположению корней которого на комплексной плоскости можно определить принадлежность системы (0.1) той или иной компоненте гомотопической связности. Так, для системы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ этот трехчлен имеет вид

$$p_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda\frac{6+15i}{29}+\frac{14+6i}{29}$$

и его корни $\lambda_1=i,\lambda_2=\frac{6-14i}{29}$ имеют мнимые части разных знаков, следовательно [1], система

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

гомотопна паре уравнений Лапласа (0.2).

Для системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ этот трехчлен имеет вид

$$p_B(\lambda)=\lambda^2-2i\lambda-1,$$

корни которого $\lambda_1=\lambda_2=i$ имеют положительные мнимые части, и, следовательно [1], система

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

гомотопна системе А.В. Бицадзе (0.3).

Для системы $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ этот трехчлен имеет вид

$$p_C(\lambda)=\lambda^2+2i\lambda-1,$$

корни которого $\lambda_1=\lambda_2=-i$ имеют отрицательные мнимые части, следовательно [1], система гомотопна системе, сопряженной системе А.В. Бицадзе (0.4). □

В подтверждение доказательству теоремы 1.1, проведем гомотопию системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ в явном виде. Для этого рассмотрим семейство систем, характеристические матрицы которых имеют вид $\left(t\in[0;1]\right)$

$$B_t(\xi)=\left(\begin{array}{c|c} \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2+ \\ +(1-t)\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) & \xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 \\ \hline -\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+\xi_2^2 & \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2- \\ & -(1-t)\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) \end{array}\right). \tag{1.4}$$

Так как

$$\det B_t(\xi)=\left(\xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2-$$
$$-(1-t)^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2+\left(\xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2\geq$$
$$\geq\left(\xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2-\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2+$$
$$+\left(\xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2=\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2,$$

то при каждом $t\in[0;1]$ система с характеристической матрицей (1.4) является эллиптической и $B_0=B(\xi)$, а

$$B_1(\xi)=\begin{pmatrix} \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 & \xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 \\ -\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+\xi_2^2 & \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Далее, гомотопия

$$B_{1t}(\xi)=\left(\sqrt{2}\right)^{1-t}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi(1-t)}{4} & \sin\frac{\pi(1-t)}{4} \\ -\sin\frac{\pi(1-t)}{4} & \cos\frac{\pi(1-t)}{4} \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \xi_1^2-\xi_2^2 & -2\xi_1\xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2-\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

приводит матрицу (1.5) $\left(B_{10}(\xi)=B_1(\xi)\right)$ к характеристической матрице системы (0.3).

***Теорема* 1.2.** *Каждая компонента произвольного решения любой из систем*

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

в области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ *является бигармонической функцией в* Ω.

Доказательство. Так как рассматриваемые системы являются эллиптическими, то каждая компонента $u_k\,(k=1,2)$ произвольного решения u любой из них является бесконечно дифференцируемой в области Ω функцией [10, с. 141]. Тогда из равенств

$$\begin{pmatrix}\Delta^2 u_1\\ \Delta^2 u_2\end{pmatrix} = \tilde{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\Delta^2 u_1\\ \Delta^2 u_2\end{pmatrix} = \tilde{B}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\Delta^2 u_1\\ \Delta^2 u_2\end{pmatrix} = \tilde{C}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

следует требуемое. Здесь

$$\tilde{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ 3\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 3\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 4\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \\ = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \\ = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix}.$$

2 Задача типа наклонной производной для рассматриваемых систем

В этом разделе считаем, если не оговорено противное, что граничные условия (0.5) имеют вид

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial l}\right|_{\partial\Omega} = f_1, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = f_2, \qquad (2.1)$$

где ν – единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$; l – единичное поле на $\partial\Omega$, составляющее с нормалью ν ориентированный угол 45° в каждой точке $\partial\Omega$; $f_1, f_2 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции.

***Теорема* 2.1.** *Для каждой из систем*

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \quad B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \quad C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

задача с граничными условиями (2.1) *не является нетеровой.*

Доказательство. Достаточно показать невыполненность условия Я.Б. Лопатинского, обеспечивающего нетеровость краевой задачи, как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [11]. Это условие известно как условие регуляризуемости краевой задачи и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора. Для задачи (0.1), (0.5) условие регуляризуемости состоит в том, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом векторе τ, касательном к $\partial\Omega$ в точке y, ранг матрицы Я.Б. Лопатинского

$$L(y,\tau) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Xi(y, \lambda\nu+\tau)\Theta^{-1}(y,\lambda\nu+\tau)\left(E, \lambda E\right)d\lambda, \qquad (2.2)$$

является максимальным. Здесь Θ – характеристическая матрица системы (0.1); Ξ – символ старшей части граничного оператора (0.5); E – единичная матрица размера 2×2; ν – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y; Γ – простой замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий находящиеся там λ-корни уравнения

$$\det\Theta(\lambda\nu+\tau) = 0. \qquad (2.3)$$

Так как

$$\det A(\lambda\nu+\tau) = \det B(\lambda\nu+\tau) = \\ = \det C(\lambda\nu+\tau) = \left(\lambda^2+1\right)^2,$$

то уравнение (2.3) для каждой из рассматриваемых систем имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ кратности 2. Пусть простой замкнутый контур Γ охватывает точку $\lambda_1 = i$ и лежит в полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda > 0$. В точке $\tilde{y} \in \partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль ν параллельна оси Ox_2 (т. е. $\nu = (0;1)$) и на векторе $\tau = (1;0)$ матрица Лопатинского (2.2) задачи с граничными условиями (2.1) для системы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$, имеет вид

$$L_A(\tilde{y},\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\left(\lambda^2+1\right)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\times \\ \times\begin{pmatrix}\lambda^2-\lambda+1 & 1\\ 2\lambda^2-3\lambda+3 & \lambda^2+\lambda+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}d\lambda,$$

для системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$:

$$L_B(\tilde{y},\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\left(\lambda^2+1\right)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\times \\ \times\begin{pmatrix}-2\lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda-1\\ -\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}d\lambda,$$

и для системы $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$:

$$L_C(\tilde{y},\tau) == \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\left(\lambda^2+1\right)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\times \\ \times\begin{pmatrix}-2\lambda^2+2\lambda & -\lambda^2-2\lambda+1\\ \lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}d\lambda,$$

где $\gamma = \frac{\langle l; \tau \rangle}{\langle l; \nu \rangle} = 1.$ Применив основную теорему о вычетах, получим, что

$$L_A(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-i & -i & 3i & -i \\ 4+3i & 2-i & -6+3i & 2-i \end{pmatrix},$$

$$L_B(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1-i & -4i & 3+i \\ -1+i & -i & -2-2i & 2-i \end{pmatrix},$$

$$L_C(\tilde{y}, \tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1+i & -4i & -3-i \\ 1-i & -i & 2+2i & 2-i \end{pmatrix},$$

Нетрудно видеть, что все миноры второго порядка матриц $L_A(\tilde{y}, \tau)$, $L_B(\tilde{y}, \tau)$ и $L_C(\tilde{y}, \tau)$ равны нулю. Таким образом, в точке $\tilde{y} \in \partial\Omega$ нарушается условие Лопатинского и, следовательно, задача типа наклонной производной (с граничными условиями (2.1)) для каждой из рассматриваемых систем не является регуляризуемой. □

Заключение

Таким образом, в каждой компоненте гомотопической связности множества эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем найдется система, обладающая следующими свойствами:

– все дважды непрерывно дифференцируемые решения этой системы являются бигармоническими вектор-функциями;

– краевая задача типа наклонной производной для этой системы в произвольной ограниченной области с гладкой границей на плоскости не является регуляризуемой.

Последнее означает, что оператор, отвечающий рассматриваемой задаче, не является нетеровским в определенных банаховых пространствах [11], т. е. имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боярский*, *Б.В.* О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости / Б.В. Боярский // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, № 9. – P. 565–570.

2. *Жадан*, *М.И.* Задача типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка / М.И. Жадан, А.Т. Усс // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. XXVII, № 6. – С. 489–491.

3. *Жадан*, *М.И.* Гомотопическая классификация и регуляризуемость некоторых классов эллиптических систем и краевых задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.И. Жадан; Институт математики АН БССР. – Минск, 1983. – 111 с.

4. *Гельфанд*, *И.М.* Об эллиптических уравнениях / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

5. *Усс*, *А.Т.* Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

6. *Басик*, *А.И.* Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук // Збірник статей. Математика. Інформаційні технології. Освіта. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

7. *Басик*, *А.И.* Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – DOI: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16

8. *Басик*, *А.И.* О краевых задачах для систем Янушаускаса / А.И. Басик, А.Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26–28.

9. *Басик*, А.И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, А.Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

10. *Хермандер*, *Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – Москва: Мир, 1965. – 379 с.

11. *Агранович*, *М.С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

Поступила в редакцию 13.05.2022.

Информация об авторах

Басик Александр Иванович – к.ф.-м.н., доцент
Грицук Евгений Васильевич – к.ф.-м.н., доцент
Копайцева Татьяна Владимировна – магистр ф.-м.н.

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal “Problems of Physics, Mathematics and Technics” the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author’s commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).