ФІЗІКА

УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев

О ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ДИРАКОВСКИХ ПОЛЕЙ (Ч.1)

Исследована внутренняя симметрия 8-компонентного дираковского поля в матричном подходе. Установлено, что классическая формулировка теории обладает внутренней симметрией SO(3,2). На квантовом уровне остается симметрия SO(3) (SU(2)), обычно сопоставляемая такому полю.

Введение

В работе [1] на примере уравнения Дирака был предложен новый подход к исследованию внутренней симметрии релятивистских волновых уравнений (РВУ) с дираковской алгеброй матриц.

В настоящей работе мы применим данный подход для установления полной группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки 8-компонентного дираковского на классическом и квантовом уровнях.

Напомним, что под преобразованиями Q внутренней симметрии лагранжевой формулировки РВУ первого порядка, записанного в матричной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \qquad (1)$$

(Ψ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные матрицы, m – массовый параметр), понимаются преобразования

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu), \qquad (2)$$

удовлетворяющие требованиям:

матрица Q коммутирует со всеми матрицами Γ_μ, то есть

$$[Q, \Gamma_\mu] = 0; \qquad (3)$$

для матрицы Q выполняется условие

$$Q^+ \eta Q = \eta, \qquad (4)$$

где η – матрица билинейной лоренц-инвариантной формы $\Psi^+ \eta \Psi$, знак «+» означает эрмитовское сопряжение. Для бесконечно малых однопараметрических преобразований

$$Q = I + \omega J \qquad (5)$$

(ω – параметр, J – генератор) условие (4) принимает вид:

$$(\omega J)^+ \eta = -\eta \omega J. \qquad (6)$$

Вещественная форма дираковского поля

Итак, возьмем систему из двух уравнений Дирака

$$\begin{cases} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \\ (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

где ψ_1, ψ_2 – биспиноры первого ранга, γ_μ – матрицы 4x4, имеющие вид:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & \end{pmatrix}, \ \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Рассмотрим теорию, базирующуюся на лагранжиане

$$L = L_1 + L_2, \tag{9}$$

что соответствует выбору

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_4 \tag{10}$$

матрицы билинейной формы.

Для решения поставленной задачи предварительно преобразуем систему (7). Возьмем от (7) комплексное сопряжение и, учитывая, что $\gamma_1^* = -\gamma_1$, $\gamma_2^* = \gamma_2$, $\gamma_3^* = -\gamma_3$, $\gamma_4^* = \gamma_4$, $\partial_i^* = \partial_i$, $\partial_4^* = -\partial_4$, получим уравнения:

$$\begin{cases} (-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 + m)\psi_1^* = 0, \\ (-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 + m)\psi_2^* = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Объединяя (11) с исходными уравнениями (7), приходим к системе из четырех (шестнадцати) уравнений, которая может быть записана в стандартной матричной форме (1). Матрицы Γ_μ 16x16 и матрица η в базисе

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) \text{ – столбец} \tag{12}$$

для такой системы будут иметь вид:

$$\Gamma_1 = \gamma_4 \otimes \gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = \gamma_4 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = \gamma_4 \otimes \gamma_4, \tag{13}$$

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4. \tag{14}$$

Складывая и вычитая затем соответствующие уравнения (7) и (11) и вводя функции

$$\psi_1^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_1^*),\ \psi_2^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_2^*),\ \psi_1^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_1^*),\ \psi_2^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_2^*), \tag{15}$$

получим эквивалентную исходной 16-компонентную систему уравнений, которая также может быть записана в форме (1). При этом, если расположить вещественные (ψ_1^r, ψ_2^r) и чисто мнимые (ψ_1^i, ψ_2^i) компоненты волновой функции, например, в последовательности

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) \text{ – столбец,} \tag{16}$$

матрицы Γ_μ трансформируются к виду:

$$\Gamma_1 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = -\gamma_5 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = -\gamma_5 \otimes \gamma_4, \tag{17}$$

где $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Для матрицы же η сохраняется выражение (14).

Нетрудно убедиться, что при выборе (15) полевых функций в системе (1), (16), (17) последняя становится вещественной. Будем называть ее вещественной формой исходной системы (7), или 16-компонентным вещественным дираковским полем. Отметим, что аналогичным образом можно записать любое РВУ первого порядка с дираковской алгеброй матриц Γ_μ, в том числе и обычное уравнение Дирака [1]. Преимущество данной записи заключается в том, что она позволяет обнаружить симметрию, которая остается скрытой при использовании стандартной комплексной формы РВУ.

Внутренняя симметрия. Классический случай

При установлении группы внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме, необходимо учесть следующее. Волновая функция (16) содержит 8 вещественных и 8 мнимых компонент. Это соотношение должно (по определению) сохраняться при преобразованиях (2). Следовательно, к условиям (3), (6) в данном случае добавляется еще одно: преобразование Q должно оставлять вещественные (мнимые) компоненты волновой функции Ψ вещественными (мнимыми) в том смысле, что если Ψ_A – вещественная (мнимая) функция, то и $\Psi'_A = Q_{AB}\Psi_A$ – также вещественная (мнимая).

Применение условий, накладываемых на матрицу Q, удобнее всего проводить в так называемом фермионном базисе [2], в котором диракоподобные матрицы Γ_μ (17) принимают вид:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu. \tag{18}$$

Переход из базиса (16), (17) в фермионный базис осуществляется посредством унитарного преобразования:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \\ A^{-1} = A^+ &= \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, что группа внутренней симметрии 16-компонентного вещественного дираковского поля может быть параметризована с помощью генераторов, которые содержатся в наборе

$$\Gamma'_\mu,\ \Gamma'_5,\ \Gamma'_\mu\Gamma'_5,\ \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu), \tag{20}$$

описывающем внутреннюю SU(4)-симметрию 16-компонентного комплексного поля Дирака [3]. Здесь Γ'_μ – квадратные матрицы размерности 16x16, удовлетворяющие, как и Γ_μ (18), алгебре матриц Дирака, взаимно коммутирующие с Γ_μ и имеющие в фермионном базисе вид

$$\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4. \tag{21}$$

Для того чтобы выделить в (20) генераторы, определяющие группу внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме (1), (16), (17), поступим следующим образом. С помощью преобразования A^{-1} (19) переведем генераторы (20) в базис (16), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. Получим:

$$\begin{aligned} &J^1 = \Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ J^2 = \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ &J^3 = \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ J^4 = \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ &J^5 = \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4,\ J^6 = \Gamma'_1\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2, \\ &J^7 = \Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_2 \otimes \gamma_2,\ J^8 = \Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_2, \\ &J^9 = \Gamma'_4\Gamma'_5 = i\gamma_4 \otimes \gamma_2,\ J^{10} = \Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = \gamma_2\gamma_3 \otimes I_4, \\ &J^{11} = \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = \gamma_3\gamma_1 \otimes I_4,\ J^{12} = \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = \gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \\ &J^{13} = \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = \gamma_1\gamma_4 \otimes I_4,\ J^{14} = \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = \gamma_2\gamma_4 \otimes I_4, \\ &J^{15} = \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_4 \otimes I_4. \end{aligned} \tag{22}$$

Затем, используя определение (2), выражения (5), (22) для однопараметрических преобразований и условие, сформулированное в начале данного пункта, устанавливаем, какие из параметров ω в (5) являются вещественными, а какие – мнимыми. И наконец, проверяем, для каких однопараметрических преобразований выполняется условие (6), и таким образом находим группу внутренней симметрии лагранжиана рассматриваемого дираковского поля с одновременной ее явной параметризацией.

Проверка показывает, что условию (6) удовлетворяют следующие 10 генераторов:

$$\Gamma'_1,\ \Gamma'_3,\ \Gamma'_4,\ \Gamma'_5,\ \Gamma'_1\Gamma'_5,\ \Gamma'_3\Gamma'_5,\ \Gamma'_4\Gamma'_5,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]},\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]},\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \tag{23}$$

которым соответствуют 6 вещественных $(\omega_1,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_{[31]},\ \omega_{[14]},\ \omega_{[34]})$ и 4 мнимых

$(\omega_5,\ \omega_{15},\ \omega_{35},\ \omega_{45})$ параметра. Для установления структуры группы, задаваемой генераторами (23) и соответветствующими параметрами, выберем все параметры вещественными. При этом придем к генераторам

$$\Gamma'_1,\ \Gamma'_3,\ \Gamma'_4,\ i\,\Gamma'_5,\ i\,\Gamma'_1\,\Gamma'_5,\ i\,\Gamma'_3\,\Gamma'_5,\ i\,\Gamma'_4\,\Gamma'_5,\ \Gamma'_{[3}\,\Gamma'_{1]},\ \Gamma'_{[1}\,\Gamma'_{4]},\ \Gamma'_{[3}\,\Gamma'_{4]}. \qquad (24)$$

Здесь 6 генераторов $(\Gamma'_1,\ \Gamma'_3,\ \Gamma'_4,\ i\Gamma'_1\Gamma'_5,\ i\Gamma'_3\Gamma'_5,\ i\Gamma'_4\Gamma'_5)$ являются эрмитовскими и 4 $(i\Gamma'_5,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]},\ i\Gamma'_{[1}\Gamma'_{5]},\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]})$ – антиэрмитовскими.

Таким образом, получаем группу внутренней симметрии, изоморфную группе $SO(3,2)$. Обнаруженое в данном подходе расширение симметрии по сравнению с ожидаемой группой $SU(2)$ (или $SO(3)$ в присоединенном представлении) в рамках релятивистской квантовой механики соответствует перемешиванию состояний с противоположными значениями энергии, в том числе и для решений из двух различных уравнений Дирака. Группа $SO(3)$, ответственная за перемешивание однотипных по знаку энергии и проекции спина состояний из различных уравнений, содержится в $SO(3,2)$ в качестве подгруппы и задается генераторами

$$\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]},\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]},\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}. \qquad (25)$$

Внутренняя симметрия. Квантовый случай

Для того чтобы выяснить, сохраняется ли установленная выше $SO(3,2)$ - симметрия системы (7) на квантовом уровне, необходимо проверить инвариантность перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения относительно соответствующих однопараметрических преобразований. С этой целью удобно перевести генераторы (24) из базиса (16), в котором они имеют вид (22), в базис

$$\Psi = (\psi_1,\psi_2,\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2) \ \text{– столбец}, \qquad (26)$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i^{+}\gamma_4 (i = 1,2)$. В результате получим выражения:

$$\begin{aligned}
&\Gamma'_1 = -i\gamma_1\gamma_4\otimes\gamma_2\gamma_4,\ \ \Gamma'_3 = -i\gamma_3\otimes\gamma_2\gamma_4,\\
&\Gamma'_4 = -i\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_4,\ \ i\Gamma'_5 = -i\gamma_4\otimes I_4,\\
&i\Gamma'_1\,\Gamma'_5 = -\gamma_1\gamma_4\otimes\gamma_2\gamma_4,\ i\Gamma'_3\,\Gamma'_5 = -\gamma_3\gamma_4\otimes\gamma_2\gamma_4,\\
&i\Gamma'_4\,\Gamma'_5 = -i\gamma_3\otimes\gamma_2\gamma_4,\ \ \Gamma'_{[3}\,\Gamma'_{1]} = -\gamma_1\gamma_3\otimes I_4,\\
&\Gamma'_{[1}\,\Gamma'_{4]} = \gamma_1\gamma_5\otimes I_4,\ \ \Gamma'_{[3}\,\Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_5\otimes I_4.
\end{aligned} \qquad (27)$$

Затем разложим ψ_i и $\bar{\psi}_i$ по «чистым» состояниям, представляющим решения уравнений (7) с положительными и отрицательными частотами и проекциями спина $s = 1/2, -1/2$:

$$\begin{aligned}
\psi_i &= \sum_s a_{is}\psi_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}^{+}\psi_{is}^{(-)},\\
\bar{\psi}_i &= \sum_s a_{is}^{+}\bar{\psi}_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}\bar{\psi}_{is}^{(-)}.
\end{aligned} \qquad (28)$$

При квантовании коэффициенты разложения a_{is}^{+}, b_{is}^{+}, a_{is}, b_{is} принимают смысл операторов рождения и уничтожения, для которых постулируются антикоммутационные соотношения

$$\{a_{is}, a_{i's'}^{+}\} = \{b_{is}, b_{i's'}^{+}\} = \delta_{ii'}\delta_{ss'} \qquad (29)$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности соотношений (29) относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (27), надо установить соответствующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базисе, определяемом выражениями (8), (26), (27), операторы знака энергии $\hat{\Gamma}_4$, проекции спина $\hat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\hat{\Pi} = I_2 \otimes (\hat{\sigma}_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1), \tag{30}$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1), \tag{31}$$

$$\hat{\Pi} = diag(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1). \tag{32}$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (30) – (32), и проводя над ним (столбцом) преобразования (5), где в качестве J берутся по очереди генераторы (27), устанавливаем искомые трансформационные свойства этих операторов.

В результате для однопараметрического преобразования, задаваемого, например, генератором Γ_1', получим:

$$\begin{aligned} &a'_{1s} = a_{1s} + \omega b_{2s},\ a'_{2s} = a_{2s} + \omega b_{1s}, \\ &(a^+_{1s})' = a^+_{1s} + \omega b^+_{2s},\ (a^+_{2s})' = a^+_{2s} + \omega b^+_{1s}, \\ &b'_{1s} = b_{1s} - \omega a_{2s},\ b'_{2s} = b_{2s} - \omega a_{1s}, \\ &(b^+_{1s})' = b^+_{1s} - \omega a^+_{2s},\ (b^+_{2s})' = b^+_{2s} - \omega a^+_{1s}. \end{aligned} \tag{33}$$

Используя формулы (33), вычислим антикоммутант $\{a'_{1,1/2},(b^+_{2,1/2})'\}$:

$$\{a'_{1,1/2},(b^+_{2,1/2})'\} = \{a_{1,1/2},b^+_{2,1/2}\} + \omega\{a_{1,1/2},a^+_{1,1/2}\} + \omega\{b_{2,1/2},b^+_{2,1/2}\} = \{a_{1,1/2},b^+_{2,1/2}\} + 2\omega \neq \{a_{1,1/2},b^+_{2,1/2}\}.$$

Таким образом, данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования (29), не инвариантны относительно однопараметрических преобразований с генератором Γ_1'.

В случае генератора $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}$ имеем:

$$\begin{aligned} &a'_{1s} = a_{1s} + \omega a_{2s},\ a'_{2s} = a_{2s} - \omega a_{1s}, \\ &(a^+_{1s})' = a^+_{1s} + \omega a^+_{2s},\ (a^+_{2s})' = a^+_{2s} - \omega a^+_{1s}, \\ &b'_{1s} = b_{1s} + \omega b_{2s},\ b'_{2s} = b_{2s} - \omega b_{1s}, \\ &(b^+_{1s})' = b^+_{1s} + \omega b^+_{2s},\ (b^+_{2s})' = b^+_{2s} - \omega b^+_{1s}. \end{aligned} \tag{34}$$

Прямая проверка показывает, что относительно преобразований (34) антикоммутационные соотношения (29) инвариантны.

Расчеты, проведенные для всех остальных однопараметрических преобразований (5) с генераторами (27), показывают, что инвариантность условий квантования (29) имеет место еще для двух генераторов: $\Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}$, $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$. Совместно с генератором $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}$ они образуют совпадающий с (24) набор генераторов, который ассоциируется с группой инвариантности $SU(2)$ ($SO(3,2)$) классического 8-компонентного дираковского поля в обычном подходе.

Предельный переход к уравнению Дирака

Предлагаемый в настоящей работе подход распространяется на дираковские поля произвольной $4n$- размерности, в том числе и на одно уравнение Дирака. Правильные результаты для уравнения Дирака можно получить из вышеприведенных выражений путем вычеркивания во всех матрицах и генераторах строк и столбцов, соответствующих волновой функции ψ_2. Так, из 10 генераторов (24) группы $SO(3,2)$ внутренней симметрии системы (7) остаются только три генератора:

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \; J^2 = i\begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}, \; J^3 = i\begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (35)$$

получающиеся путем указанного предельного перехода из генераторов Γ'_3, $i\Gamma'_5$, $i\Gamma'_3\Gamma'_5$. Поскольку генераторы J^1 и J^3 являются эрмитовскими, а генератор J^2 – антиэрмитовский, с учетом вещественности всех параметров приходим к выводу: лагранжева формулировка свободного классического уравнения Дирака обладает группой внутренней симметрии $SO(2,1)$. С физической точки зрения этот факт объясняется тем, что в отсутствие электромагнитного взаимодействия состояния частицы и античастицы являются неразличимыми.

Квантовая формулировка теории Дирака базируется на антикоммутационных соотношениях

$$\{a_s, a^+_{s'}\} = \{b_s, b^+_{s'}\} = \delta_{ss'}. \qquad (36)$$

В базисе

$$\Psi = (\psi, \overline{\psi}) \;\text{– столбец} \qquad (37)$$

операторы полного набора имеют следующий вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,-1,-1,1,1), \qquad (38)$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} diag(1,-1,1,-1,-1,1,-1,1). \qquad (39)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в порядке, соответствующем выражениям (38), (39), и рассматривая, например, однопараметрическое преобразование с генератором J^3, получим следующий закон преобразования этих операторов:

$$\begin{aligned} &a'_{1/2} = a_{1/2} + \omega b_{1/2}, \;\; a'_{-1/2} = a_{-1/2} - \omega b_{-1/2}, \\ &(a^+_{1/2})' = a^+_{1/2} + \omega b^+_{1/2}, \;\; (a^+_{-1/2})' = a^+_{-1/2} - \omega b^+_{-1/2}, \\ &b'_{1/2} = b_{1/2} + \omega a_{1/2}, \;\; b'_{-1/2} = b_{-1/2} - \omega a_{-1/2}, \\ &(b^+_{1/2})' = b^+_{1/2} + \omega a^+_{1/2}, \;\; (b^+_{-1/2})' = b^+_{-1/2} - \omega a^+_{-1/2}. \end{aligned} \qquad (40)$$

Теперь, используя (40), вычислим антикоммутант $\{a'_{1/2}, (b^+_{1/2})'\}$: $\{a'_{1/2}, (b^+_{1/2})'\} =$ $= \{a_{1/2}, b^+_{1/2}\} + \omega\{a_{1/2}, a^+_{1/2}\} + \omega\{b_{1/2}, b^+_{1/2}\} = \{a_{1/2}, b^+_{1/2}\} + 2\omega \neq \{a_{1/2}, b^+_{1/2}\}$. Этот результат означает, что данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования уравнения Дирака, не инвариантны относительно преобразования, задаваемого генератором J^3. Аналогичный вывод получается и для генератора J^2. Генератор J^1 соответствует обычному фазовому преобразованию. Следовательно, квантовая формулировка теории Дирака обладает симметрией только относительно фазовых преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БрГУ. – 2009. – № 2. – С. 46–51.

2. Стражев, В.И. Уравнение Дирака-Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко // Минск: изд-во БГУ. – 2007. – 196 с.

3. В.А. Плетюхов, В.И. Стражев / Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – №2. – С. 3–7.

P.P. Andrusevich, V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev. **On Internal Symmetry of Dirac Fields**

The internal symmetry of the 8-component real Dirac field in matrix approach has been investigated. The classical formulation of the theory has the internal symmetry group SO(3,2). The quantum formulation has the internal symmetry group SO(3).