УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 4

Числовые и функциональные ряды

*Электронное учебное пособие
для студентов физических специальностей
учреждений высшего образования*

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по физическим специальностям

2022

Кафедра
МАДУП

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

Авторы:

кандидат физико-математических наук, доцент **С.А. Марзан**
кандидат физико-математических наук, доцент **А.Н. Сендер**
кандидат физико-математических наук, доцент **Н.Н. Сендер**

Рецензенты:

кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»,
доктор физико-математических наук, профессор
И.П. Мартынов

профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор
В.Г. Кротов

Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2022. – Ч. 4: Числовые и функциональные ряды. – 251 с.

Учебное пособие содержит курс лекций и практических занятий, вопросы и тестовые задания для самоконтроля, а также задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальных работ по разделу «Числовые и функциональные ряды».

Предназначено студентам физических специальностей учреждений высшего образования.

Знакомство с ЭУП

Электронное учебное пособие (далее – ЭУП) содержит курс лекций и практических занятий, задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальной работы, а также интерактивные тестовые задания для самоконтроля по разделу «Числовые и функциональные ряды» дисциплины «Математический анализ».

ЭУП не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы с пособием необходим компьютер, планшет или смартфон с любой операционной системой, на котором установлена программа для чтения документов формата pdf, например, Adobe Acrobat Reader. Для работы с тестовыми заданиями требуется подключение к сети интернет. Тесты, включенные в ЭУП, предназначены исключительно для самоконтроля студентов.

После запуска ЭУП в правой части экрана читатели увидят навигационную панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

– кнопка «На весь экран» позволяет «развернуть» ЭУП на весь экран монитора;

– кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУП;

– кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУП;

– кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУП, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

– кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУП.

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУП, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУП можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУП. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУП.

Весь текст ЭУП снабжен необходимыми гиперссылками, позволяющими реализовать интуитивно понятную навигацию с возможностью быстрого поиска требуемой информации.

СОДЕРЖАНИЕ

Кафедра
МАДУП

На весь экран
Начало
Содержание
Назад

Приложение
Закрыть

Предисловие

Электронное учебное пособие (далее – ЭУП) является четвертой частью следующей серии учебно-методических комплексов для студентов специальностей 1–31 04 08 «Компьютерная физика», 1–02 05 02 «Физика и информатика» по учебной дисциплине «Математический анализ»:

1. Математический анализ. Часть 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

2. Математический анализ. Часть 2. Интегральное исчисление функций одной переменной.

3. Математический анализ. Часть 3. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.

4. Математический анализ. Часть 4. Числовые и функциональные ряды.

ЭУП разработано в соответствии с ОСВО 1–31 04 08–2013 специальности «Компьютерная физика» и ОСВО 1–02 05 02–2013 «Физика и информатика».

ЭУП обеспечивает достижение основной дидактической цели – самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной и учебной информации количество часов, предусмотренных учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко.

При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, ЭУП содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы с наиболее способными студентами.

Тесты, включенные в ЭУП, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. В ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить, приобрести навыки решения задач и основное внимание следует уделить построению математических рассуждений и приобретению навыка решения задач.

ЭУП содержит обширный материал для контрольных и индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Числовые и функциональные ряды».

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	Понятие числового ряда, его частичной суммы, суммы. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Ряды, составленные из слагаемых геометрической прогрессии. Остаток ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Арифметические операции над сходящимися рядами. Критерий Коши сходимости ряда.	2	2
2	Знакопостоянные ряды. Критерий сходимости положительных рядов. Теоремы сравнения положительных рядов.	2	2
3	Признаки Даламбера. Признаки Коши.	2	1
4	Частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности. Обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов. Интегральный признак Коши – Маклорена.	2	1
5	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Абеля – Дирихле.	2	2
6	Функциональные последовательности и ряды, их сходимость. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов. Мажорантный признак Вейерштрасса. Признак Абеля – Дирихле.	2	2
7	Свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда. Непрерывности суммы функционального ряда и предельной функции функциональной последовательности. Почленное интегрирование функциональных рядов и функциональных последовательностей. Почленное дифференцирование функциональных рядов и функциональных последовательностей.	2	2
8	Понятие степенного ряда. Теорема Коши – Адамара. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора.	2	2
9	Разложение функций в степенные ряды. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = e^x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$.	2	2
10	Приложения степенных рядов.		4

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 1
Понятие числового ряда и его сходимости

1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы, суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Рассмотрим последовательность действительных чисел (a_k). Составим (формально) бесконечную сумму вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{1.1}$$

Запись (символ) (1.1) называется **числовым рядом**. Числа $a_1, a_2, \ldots$ называются **слагаемыми** или **членами** ряда; a_k называют **общим членом** или **общим слагамым** ряда.

Сумма n первых слагаемых ряда называется **n-й частичной суммой ряда** и обозначается

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. *Ряд* (1.1) *называется* ***сходящимся****, если сходится последовательность его частичных сумм, т.е. если сущесвует* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$.

В этом случае S называется **суммой ряда**.

Если же предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (1.1) называют **расходящимся**.

В качестве первого примера числового ряда рассмотрим ряд с постоянными слагаемыми $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a$ $(a \in \mathbb{R})$, который, очевидно, сходится тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Второй важный пример – так называемый **геометрический ряд**, составленый из членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k, \quad a \neq 0. \tag{1.3}$$

При $q = 1$ получаем ряд, рассмотренный в предыдущем примере. Если же $q \neq 1$, то справедливо равенство

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Тогда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Если же $q = -1$, то ряд имеет вид $a - a + a - a + \ldots$, а последовательность частичных сумм (S_n) предела не имеет.

Вывод: Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ сходится при $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$. Если же $|q| \geqslant 1$, то этот ряд расходится, если $a \neq 0$.

Пример 1.1. Найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \ldots .$$

◀Видно, что ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = -\frac{1}{3}$. Так как $|q| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится. По формуле (1.4) находим сумму ряда

$$S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}. \blacktriangleright$$

Пример 1.2. Найти n-ю частичную сумму S_n и сумму S ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots.$$

◀Общее слагаемое ряда $a_k=\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$. Тогда n-я частичная сумма ряда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\,(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$$

А сумма ряда $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$.▶

1.2 Критерий Коши сходимости ряда

Сходимость числового ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм. В разделе «Введение в математический анализ» рассматривался критерий Коши сходимости последовательности, из которого следует, что последовательность (S_n) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ $n>n_\varepsilon$ и всех $p\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. Отсюда получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.1 (критерий Коши сходимости числового ряда). *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ $n>n_\varepsilon$ и всех $p\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon. \tag{1.5}$$

1.3 Остаток ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд

Определение 1.2. *Числовой ряд* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *называется n-м* ***остатком*** *ряда* (1.1).

Теорема 1.2. *Ряд и любой его остаток одновременно сходятся или расходятся.*

◀Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и его остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$.

Введем обозначения: $S_l = \sum\limits_{k=1}^{l} a_k$ и $S'_{l-n} = \sum\limits_{k=1}^{l-n} a_{n+k} = S'_m$ $(m = l - n)$. Очевидно, что $S'_m = S_l - S_n$.

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, т.е. существует $\lim\limits_{l\to\infty} S_l = S$. Если $l \to \infty$, то и $l - n \to \infty$, т.е. $m \to \infty$. Если же $m \to \infty$, то и $l \to \infty$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{l\to\infty} S_l - \lim_{l\to\infty} S_n = (S - S_n) \in \mathbb{R},$$

т.е. ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ сходится. Аналогично доказывается, что из сходимости остатка следует сходимость ряда. Одновременная расходимость ряда и его остатка теперь очевидна.▶

Следствие 1.1. *Отбрасывание (добавление) конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость.*

Следствие 1.2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

$$◀ \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0. ▶$$

Теорема 1.3 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

◀Из сходимости ряда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Но $a_n = S_n - S_{n-1}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0. \blacktriangleright$$

Следствие 1.3. *Если для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, *то ряд расходится.*

◀Предположим, что ряд сходится. Тогда (теорема 1.3) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Получили противоречие.▶

Замечание 1.1. Далее при оформлении решения для прерывания математических вычислений, преобразований будем использовать запись «$= [\ldots] =$», указывая в квадратных скобках логические пояснения, формулы или свойства, используемые для дальнейших вычислений или преобразований, ссылки на отдельные теоремы, свойства и т.п.

Пример 1.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n+2}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{n\to\infty} (n+1)\mathrm{arctg}\frac{1}{n+2} = (\infty\cdot 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{arctg}\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\mathrm{arctg}\frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n+2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \neq 0.$$

Ряд расходится.▶

Замечание 1.2. Покажем, что теорема, обратная теореме 1.3, в общем случае не является верной, т.е. из того, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, не обязательно следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Рассмотрим так называемый **гармонический ряд**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \tag{1.6}$$

Поясним, откуда происходит название этого ряда. Положительное число $c > 0$ называется **средним гармоническим чисел** $a > 0$, $b > 0$, если $\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$; каждый член ряда (1.6) есть среднее гармоническое предыдущего и последующего членов этого ряда, например:

$$c = \frac{1}{2},\ a = 1,\ b = \frac{1}{3};\quad \frac{1}{c} = 2,\quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2} = (1+3) \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Очевидно, что для гармонического ряда $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Покажем, что при этом гармонический ряд расходится.

$$◀\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k};\quad S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Допустим, что гармонический ряд сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) \geqslant \frac{1}{2};\quad S - S \geqslant \frac{1}{2},\quad 0 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Получили противоречие.▶

1.4 Арифметические операции над сходящимися рядами

Теорема 1.4. *Линейная комбинация сходящихся рядов сходится к соответствующей линейной комбинации их сумм.*

◀Доказательство проводится по определению сходимости числового ряда.▶

Следствие 1.4. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится и* C *– любое действительное число, не равное нулю, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Ca_k$ *– расходится.*

Следствие 1.5. а) *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *– расходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *расходится.*

б) *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходятся, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *может сходиться, а может и расходиться.*

Пример 1.4. Ряды $(1 - 2 + 3 - 4 + \ldots)$ и $(-1 + 2 - 3 + 4 - \ldots)$ расходятся, но ряд, полученный путем сложения этих рядов, сходится (все члены ряда равны 0), а ряд, полученный путем вычитания этих рядов $(2 - 4 + 6 - 8 + \ldots)$, расходится.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение числового ряда, его частичной суммы, суммы ряда.
2. Дайте определение остатка ряда.
3. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда.
4. Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда.
5. Дайте определение гармонического ряда.
6. Используя критерий Коши сходимости числового ряда докажите, что гармонический ряд расходится.
7. Сформулируйте следствие из необходимого признака сходимости ряда.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Числовой ряд и его сумма. Необходимое условие сходимости ряда

Задание 1. Написать одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые 4 члена:

$$\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{18}+\frac{11}{54}+\ldots.$$

◀Рассмотрим сначала последовательность числителей $2,\ 5,\ 8,\ 11\ldots$. Мы видим, что они образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 2, а разность равна 3. Поэтому в качестве общего выражения для числителя можно взять выражение общего члена арифметической прогрессии $2+3(n-1)=3n-1$. Знаменатели $2,\ 6,\ 18,\ 54\ldots$ образуют геометрическую прогрессию с первым членом 2 и знаменателем 3. Поэтому в качестве их общего выражения можно взять $2\cdot 3^{n-1}$. Тогда общий член ряда примет вид:

$$a_n=\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}}.\ ▶$$

Замечание 1.3. По нескольким первым членам ряда нельзя однозначно восстановить формулу общего члена. Например, для ряда

$$\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{18}+\frac{11}{54}+\ldots$$

можно положить и

$$a_n=\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}},$$

и

$$a_n=\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}+(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}.$$

Поэтому в нижеследующих задачах мы будем «угадывать» лишь одну из возможных формул, соответствующую данным членам ряда, стараясь выбрать наиболее простую.

Задание 2. Написать одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые 4 члена:

$$\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14} + \ldots .$$

◀У этого ряда знаки членов чередуются, и потому каждый его член содержит множитель $(-1)^{n-1}$. Числители являются произведениями членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 2. Знаменатели – произведениями членов арифметической прогрессии с первым членом 2 и разностью 3. Применяя формулу общего члена арифметической прогрессии, получим:

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot [1+2(n-1)]}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot [2+3(n-1)]} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}.$$ ▶

Задание 3. Найти общий член последовательности частичных сумм ряда

$$\frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots .$$

Пользуясь определением суммы ряда, показать, что этот ряд сходится, и найти его сумму S. Вычислить R_{10}.

◀**Первый способ.** Составим последовательность частичных сумм ряда:

$$S_1 = \frac{4}{1\cdot 3} = \frac{4}{3},$$

$$S_2 = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} = \frac{8}{5},$$

$$S_3 = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} = \frac{12}{7}.$$

Первые частичные суммы представляют собой дроби, числители которых равны учетверенному индексу (номеру) частичной суммы, а знаменатели – удвоенному индексу, сложенному с единицей. Поэтому можем предположить, что

$$S_n = \frac{4n}{2n+1}.$$

Методом математической индукции легко доказать, что эта формула верна для всех $n \in \mathbb{N}$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$S = \lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2.$$

Следовательно, сумма данного ряда существует и равна 2, т.е. ряд сходится.

Теперь находим

$$R_n = S - S_n = 2 - \frac{4n}{2n+1} = \frac{2}{2n+1},$$

$$R_{10} = \frac{2}{2\cdot 10+1} = \frac{2}{21}.$$

Следовательно, если бы мы в качестве приближенного значения суммы ряда взяли сумму его первых десяти членов, то имели бы погрешность, равную $\frac{2}{21}$.

Второй способ. Представим общий член ряда в виде суммы двух дробей, т.е. разложим дробь на простейшие, пользуясь методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}.$$

Представляя теперь каждый член данного ряда в виде суммы двух слагаемых, мы получим следующее выражение для n-й частичной суммы:

$$S_n = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \ldots - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} = 2 - \frac{2}{2n+1}.$$

Все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожились.
Теперь легко находим сумму заданного ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{2n+1}\right) = 2,\ R_n = \frac{2}{2n+1},\ R_{10} = \frac{2}{21}. \blacktriangleright$$

Замечание 1.4. При вычислении конечных сумм часто оказывается полезным следующее утверждение: если существуют такие функции $f, F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, что

$$f(n) = F(n+1) - F(n),$$

то

$$f(1) + \ldots + f(n) = F(n+1) - F(1).$$

Задание 4. Найти выражение для конечной суммы $S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.
◀Запишем следующие равенства:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \tag{1.7}$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1, \tag{1.8}$$

$$(n+1) - n = 1. \tag{1.9}$$

Умножим равенство (1.7) на A, равенство (1.8) на B, равенство (1.9) на C и сложим:

$$\left[A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1)\right] - \left[An^3 + Bn^2 + Cn\right] = 3An^2 + (3A+2B)\,n + (A+B+C)\,.$$

Подберем коэффициенты A, B, C так, чтобы правая часть равнялась n^2.

$$3An^2 + (3A+2B)\,n + (A+B+C) = n^2. \tag{1.10}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковой степени в левой и правой частях (1.10), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ 3A + 2B = 0, \\ A + B + C = 0. \end{cases}$$

Из нее находим $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$. Значит,

$$n^2 = F(n+1) - F(n),$$

где

$$F(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}.$$

Но тогда

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = F(n+1) - F(1) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}. \blacktriangleright$$

Задание 5. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{7} + \frac{4}{11} + \ldots + \frac{n}{3n-2} + \ldots.$$

◀Находим предел общего члена a_n ряда при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Так как в данном случае a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, то заданный ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости и, следовательно, расходится.▶

Задание 6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

$$◀ \ln \frac{k^3-1}{k^3+1} = (\ln (k-1) - \ln (k+1)) + \left(\ln \left(k^2+k+1\right) - \ln \left(k^2-k+1\right)\right).$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k^3-1}{k^3+1} = \ln 1 - \ln 3 + \ln 2 - \ln n - \ln (n+1) + \ln \left(n^2+n+1\right) = \ln \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} - \ln \frac{3}{2}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{n^2+n+-1}{n(n+1)} - \ln \frac{3}{2}\right) = -\ln \frac{3}{2}. ▶$$

Задание 7. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$.

$$◀ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+4}{k(k+1)(k+4)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{k(k+4)} - \frac{1}{(k+1)(k+4)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} -$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right).$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{31}{18}. ▶$$

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

Задание 8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2}$.

$$◀ \operatorname{arctg} \frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg} \frac{k-1}{k} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2},$$

$$-\frac{\pi}{4} < -\operatorname{arctg} \frac{k-1}{k} \leqslant 0, \quad 0 < \operatorname{arctg} \frac{k}{k+1} < \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} \frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg} \frac{k-1}{k} < \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} < 0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} < \frac{\pi}{4}.$$

На интервале $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ имеется одно значение угла с данным значением тангенса.

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg} \frac{k-1}{k}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{k}{k+1}\right) - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{k-1}{k}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{k}{k+1}\right) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{k-1}{k}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k}{k+1} \frac{k-1}{k}} = \frac{\frac{k^2-k^2+1}{k(k+1)}}{\frac{k+1+k-1}{k+1}} = \frac{k+1}{k(k+1)2k} = \frac{1}{2k^2}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{arctg} \frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg} \frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{1}\right) + \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. ▶$$

Задание 9. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

◀Используем преобразование Абеля: для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n,$$

где

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} b_i, \;\; a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(k^2 - (k+1)^2\right) \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} + n^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^i}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + n^2 \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= -2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = n^2 - \frac{n^2}{2^n} =$$

$$= -2 \frac{1 + (n-1)}{2} (n-1) + \sum_{k=1}^{n-2} (k - (k+1)) \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}} + (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{i-1}} - (n-1) + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + n^2 - \frac{n^2}{2^n} =$$

$$= -(n-1) - (n-1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + (n-1) \frac{1\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - (n-1) + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + n^2 - \frac{n^2}{2^n} =$$

$$= 2n - 2(n-2) \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n-1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n} = 4 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n}.$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = 6. \;\blacktriangleright$$

Задание 10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^k}\cdot\cos\frac{3}{2^k}$.

$$◀\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^k}\cdot\cos\frac{3}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2^{k-2}}+\sin\frac{-1}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 2-\sin\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\sin 2.\ ▶$$

Задание 11. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$.

◀Проверим необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}-1\right)n^3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n^3}{3n^3+4}} = e^{-2}\neq 0.$$

Ряд расходится.▶

Задание 12. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$.

◀Проверим необходимое условие сходимости. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln(n+1)\right)^{\frac{1}{n}} = (\infty^0) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n+1)\cdot(n+1)}}{1}} = e^0 = 1,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}} = 1\neq 0$, и ряд расходится.▶

Задание 13. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

◀Проверим необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n n^{\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \left(\frac{\infty^0}{1^\infty}\right) = \frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}}} = \frac{e^0}{e^0} = 1 \neq 0.$$

Ряд расходится.▶

Задание 14. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2}$.

◀Проверим необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin\frac{1}{n^2+2}}{\frac{n+3}{n^3+1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\arcsin\frac{1}{n^2+2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+2}}{\frac{n+3}{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{(n^2+2)(n+3)} = 1 \neq 0.$$

Ряд расходится.▶

Задание 15. Пользуясь критерием Коши, исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\alpha}{2^k}$.

◀Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k\alpha}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k\alpha|}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^{n+p}}\right)}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{n+p}}\right) < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon},\ n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Таким образом, ряд сходится, так как

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}\ \ \forall n, p \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k\alpha}{2^k}\right| < \varepsilon. ▶$$

Задание 16. Пользуясь критерием Коши, исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}$.

◀Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon},\ n_0 = \max\left\{1; \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$ Ряд сходится. ▶

Задание 17. Пользуясь критерием Коши, исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

◀Возьмем любое $n_0 \in \mathbb{N}$, а в качестве $n = p = n_0 + 1$. Оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+p+1) - \ln(n+1) =$$

$$= \ln(n_0+1+n_0+1+1) - \ln(n_0+1+1) = \ln\frac{2n_0+3}{n_0+2} = \ln\left(2 - \frac{1}{n_0+2}\right) \geqslant \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) = \ln\frac{5}{3}.$$

Получили

$$\exists\varepsilon \in \left(0, \ln\frac{5}{3}\right]\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \exists n = n_0 + 1 > n_0\ \ \exists p = n_0 + 1 \in \mathbb{N}\ \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right| \geqslant \varepsilon \in \left(0, \ln\frac{5}{3}\right].$$

Ряд расходится.▶

Задание 18. Пользуясь критерием Коши, исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+4}$.

◀Для любого $n_0 \in \mathbb{N}$, $n = p = n_0 + 1$ оценим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k+1}{k^2+4} \right| > \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k+1}{(k+1)^2} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p+2} =$$

$$= \frac{1}{n_0+3} + \frac{1}{n_0+4} + \ldots + \frac{1}{n_0+1+n_0+1+1} =$$

$$= \frac{1}{n_0+3} + \frac{1}{n_0+4} + \ldots + \frac{1}{2n_0+3} > \frac{n_0+1}{2n_0+3} > \frac{n_0+1}{3n_0+3} = \frac{1}{3}.$$

$$\exists \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n = n_0 + 1 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad p = n_0 + 1 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k+1}{k^2+4} \right| > \varepsilon.$$

Ряд расходится.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Записать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

1.1 $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots;$

1.2 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots;$

1.3 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{42}+\ldots;$

1.4 $1-\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\ldots;$

1.5 $2+\frac{2^2}{1\cdot2}+\frac{2^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots;$

1.6 $1+\frac{2\cdot4}{1\cdot3}+\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots.$

2. Записать 5 первых членов ряда по известной формуле для общего члена:

2.1 $a_n=\frac{3n+2}{n^2+4};$

2.2 $a_n=\frac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}};$

2.3 $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2+4};$

2.4 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, & n=2k-1,\\ \frac{1}{n^2}, & n=2k.\end{cases}$

3. Записать a_3, a_{10}, a_{15}, a_{16}, если

$$a_n=\begin{cases}(5-n)^2, & 1\leqslant n\leqslant 4,\\ \frac{1}{(n-4)^2}, & 5\leqslant n\leqslant 15,\\ \frac{n-15}{n^2-8n}, & n\geqslant 16.\end{cases}$$

4. Пусть $a_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$. Записать a_{n+1}, a_{2n}, a_{3n-1}, a_{n^2}.

5. Пусть $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$. Записать a_{n+2}, a_{n+m}, a_{nm}, a_{n^2}. Найти $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

6. Пусть $a_n=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$. Вычислить $(a_n)^2$, $(a_n)^3+1$, $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$.

7. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

7.1 $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$;

7.2 $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$;

7.3 $1^3+5^3+9^3+\ldots+(4n-3)^3$;

7.4 $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(n-k+1)$;

7.5 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\,(n-k+1)^2$;

7.6 $1^3-2^3+3^3-\ldots+(-1)^{n-1}\,n^3$;

7.7 $1^4-2^4+3^4-\ldots+(-1)^{n-1}\,n^4$;

7.8 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

7.9 $\frac{1}{c(c+1)(c+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)(c+3)}+\ldots+\frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$.

8. Вычислить сумму:

8.1 $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;

8.2 $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\frac{k^3-1}{k^3+1}$. *Указание.* Принять во внимание тождество

$$(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1;$$

8.3 $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$.

9. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\cos\frac{x}{2^k}=\ln\sin x-n\ln 2-\ln\sin\frac{x}{2^n}$.

10. Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$.

11. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg}\frac{c}{a+n-1}-\operatorname{arctg}\frac{c}{a+n}=\operatorname{arctg}\frac{c}{c^2+(a+n)(a+n-1)}.$$

12. Найти конечные суммы

12.1 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$;

12.2 $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$. *Указание.* Воспользоваться результатом задания 11, подобрав в нем значения a и c.

13. Исходя из равенства

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)=\frac{1-x^{2^n}}{1-x} \tag{1.11}$$

определить сумму

$$\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}.$$

Указание. Прологарифмировать и продифференцировать равенство (1.11).

14. Получить выражения для S_n, S, R_n:

14.1 $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$;

14.2 $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$;

14.3 $\frac{2}{1^2\cdot 3^2}+\frac{3}{2^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}+\ldots$;

14.4 $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$;

14.5 $\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{3}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\frac{2}{n(n+3)(n+6)}+\ldots$;

14.6 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\ldots$;

14.7 $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots$;

14.8 $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}+\ldots$.

15. С помощью следствия 1.3 установить, какие из указанных ниже рядов заведомо расходятся:

15.1 $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots;$

15.2 $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\ldots+\sqrt[n]{0,001}+\ldots;$

15.3 $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n+1}{2n+2}+\ldots;$

15.4 $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}+\ldots;$

15.5 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots;$

15.6 $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots;$

15.7 $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\frac{3}{3001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots;$

15.8 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\cos n^2;$

15.9 $1-1-1+1+1+1-1-1-1-1+\ldots;$

15.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1};$

15.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^9\sin\frac{1}{n^9+n+1};$

15.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{2n^2+3}\right)^{n^9};$

15.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^9}}{e^n};$

15.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};$

15.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0,3}};$

15.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}};$

15.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\ln n!-2\ln(2!,3!\ldots n!)}{n^2+n};$

15.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin an,\ a\neq xm,\ m\in Z.$

16. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=S.$

17. Доказать, что если $S_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{S_1 S_2 \ldots S_n} = S$.

18. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

19. Пусть b_n, $n = 1, 2, \ldots$ и ряд $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ расходится. Доказать, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = S,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} = S.$$

20. Вычислить пределы:

20.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\ldots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}$;

20.2 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\ldots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right]$.

21. Используя критерий Коши, исследовать на сходимость ряды:

21.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$;

21.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} \left(e^{\frac{1}{n^\alpha+1}} - 1\right)$;

21.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1}$;

21.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$;

21.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+a^n}$;

21.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}$;

21.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^{10}}{3^n+n^2}$;

21.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n-5^n}$;

21.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

ЛЕКЦИЯ 2

Знакопостоянные ряды. Теоремы сравнения положительных рядов

2.1 Критерий сходимости положительных рядов

На этой лекции будем рассматривать ряды, все члены которых неотрицательны. Такие ряды называют **положительными**.

Отметим также, что ряды, все члены которых неположительны, называются **отрицательными**. Вопрос об исследовании сходимости отрицательных рядов сводится к вопросу об исследовании положительных рядов. В самом деле, согласно теореме 1.4 ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-a_k)$ одновременно сходятся или расходятся.

Теорема 2.1 (критерий сходимости положительных рядов). *Положительный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность* (S_n) *его частичных сумм ограничена сверху.*

◀**Необходимость.** Если ряд сходится, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. А тогда последовательность (S_n) будет ограниченной (любая сходящаяся последовательность ограничена), а значит, ограниченной сверху.

Достаточность. Последовательность (S_n) ограничена сверху. Кроме того, последовательность (S_n) неубывающая, так как $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$ $(a_{n+1} \geqslant 0)$. Тогда по теореме о пределе монотонной последовательности существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = S \in \mathbb{R},$$

т.е. ряд сходится.▶

2.2 Теоремы сравнения положительных рядов

Теорема 2.2 (признак сравнения в форме неравенств). *Если для положительных рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{2.2}$$

существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $C \in \mathbb{R}_+$, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$,

$$a_k \leqslant C b_k, \tag{2.3}$$

тогда:

1) *из сходимости ряда* (2.2) *следует сходимость ряда* (2.1)*;*

2) *из расходимости ряда* (2.1) *следует расходимость ряда* (2.2)*.*

◀Пусть ряд (2.2) сходится. Так как отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (1.1), то будем считать, что неравенство (2.3) выполняется для любого $k \in \mathbb{N}$ (те члены рядов (2.1) и (2.2), для которых это неравенство не выполняется, можно отбросить). Кроме того, так как ряд (2.2) сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена сверху (теорема 2.1), т.е. существует $C_1 = const > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$S_n^{(b)} \leqslant C_1. \tag{2.4}$$

Суммируем неравенства (2.3) от $k = 1$ до $k = n$ и учитываем неравенство (2.4):

$$S_n^{(a)} \leqslant C S_n^{(b)} \leqslant C C_1 = D. \tag{2.5}$$

Получили, что последовательность частичных сумм ряда (2.1) ограничена сверху, а тогда ряд (2.1) сходится (теорема 2.1).

Пусть теперь ряд (2.1) расходится. Но если ряд (2.2) сходится, то по доказанному выше и ряд (2.1) должен сходиться, но он расходится. Получаем противоречие. Отсюда следует, что ряд (2.2) расходится.▶

Пример 2.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{k^k} + \ldots. \tag{2.6}$$

◀Очевидно, что для $k > 2$ будет $\frac{1}{k^k} \leqslant \frac{1}{2^k}$. Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ сходится как геометрический ряд 1.3. Тогда по теореме 2.2 ряд (2.6) сходится.▶

Пример 2.2. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}. \tag{2.7}$$

$$◀\ a_k = \frac{k}{k^2+1} \geqslant \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}.$$

Тогда $\frac{1}{k} \leqslant 2 \cdot \frac{k}{k^2+1}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (гармонический) – расходится. Поэтому и ряд (2.7) расходится.▶

Пример 2.3. Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

◀ $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$ при $k > 1$, но ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ – сходится (это показывается точно так же, как и в примере 2.2). Тогда, с учетом теоремы 2.2 получим, что и исследуемый ряд сходится.▶

Теорема 2.3 (признак сравнения в предельной форме). *Если для рядов (2.1) и (2.2), где всех $k \in \mathbb{N}$ $b_k > 0$, существует* $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = l > 0$, *то ряды (2.1) и (2.2) одновременно сходятся или расходятся.*

При $l = 0$ из сходимости ряда (2.2) следует сходимость и ряда (2.1), а из расходимости ряда (2.1) следует и расходимость ряда (2.2).

◀Пусть $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = l > 0:$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \left(\varepsilon = \frac{l}{2}\right) \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad k > k_0,$$

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - l\right| < \frac{l}{2}. \tag{2.8}$$

Неравенство (2.8) равносильно неравенствам

$$-\frac{l}{2} < \frac{a_k}{b_k} - l < \frac{l}{2}; \quad \frac{l}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3l}{2}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим, например, случай, когда ряд (2.2) расходится. Тогда из неравенства (2.9) следует

$$b_k < \frac{2}{l} a_k. \tag{2.10}$$

Имеем неравенство типа (2.3), где a_k и b_k меняются ролями и $C = \frac{2}{l} = const > 0$.

На основании теоремы 2.2 ряд (2.1) также будет расходиться. Аналогично, варьируя неравенствами из (2.9) и учитывая теорему 2.2, можно доказать и другие случаи из этого пункта.

Пусть $l = 0$, т.е. $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0:$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k > k_0,$$

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Из двойного неравенства (2.11) получим:

$$a_k < \varepsilon \cdot b_k. \tag{2.12}$$

Неравенство (2.12) – это неравенство типа (2.3), где $C = \varepsilon$. А тогда на основании теоремы 2.2 и следуют требуемые заключения.►

Замечание 2.1. Если $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = +\infty$, то из сходимости ряда (2.1) следует сходимость и ряда (2.2), а из расходимости ряда (2.2) следует расходимость ряда (2.1).

Если $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = +\infty$, то $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{b_k}{a_k} = 0$, и мы приходим к рассмотренному выше случаю, но с учетом того, что a_k и b_k меняются ролями, получаем справедливость заключения.

Пример 2.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{k}\right)$.

$$◄\ 1 - \cos\frac{\pi}{k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2k^2}.$$

Сравним наш ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1 - \cos\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\pi^2}{2k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{\pi^2}{2} = l > 0.$$

Согласно теоремы 2.3 заключаем, что исследуемый ряд сходится.►

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте критерий сходимости положительных рядов.
2. Сформулируйте признак сравнения сходимости положительных рядов в форме неравенств.
3. Используя теорему 2.2 и пример 2.3, докажите сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+5}$.
4. Используя теорему 2.2, докажите расходимость ряда $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k-2}$.
5. Используя теорему 2.2, докажите сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k+k}$.
6. Сформулируйте признак сравнения сходимости положительных рядов в предельной форме.
7. Используя теорему 2.3, докажите расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3}$.
8. Используя теорему 2.3 и пример 2.3, докажите сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+3k+1}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Теоремы сравнения сходимости положительных рядов

Задание 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots.$$

◀Сравнивая данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots, \tag{2.13}$$

видим, что при всех значениях $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ (докажите справедливость этого неравенства самостоятельно).

А так как ряд (2.10) отличается от гармонического ряда лишь на одно слагаемое 1 и потому расходится, то и заданный ряд также расходится.▶

Задание 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

◀Сравним члены заданного ряда с членами сходящегося ряда

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

(см. задание 3 практического занятия 1). Имеем:

$$\frac{1}{n(n+1)}<\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, то и данный ряд сходится, поскольку его члены меньше соответствующих членов сходящегося ряда.►

Задание 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2^2}{5^2\sqrt{3}} + \frac{3^3}{7^3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} + \ldots .$$

◄Оценим общий член заданного ряда.

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n} = \left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^n < \frac{1}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, члены заданного ряда меньше членов сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, представляющего собой сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$; следовательно, данный ряд сходится.►

Задание 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1}\right). \tag{2.14}$$

◄Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. Для нахождения ряда, с которым будем сравнивать наш ряд, найдем для общего члена ряда эквивалентный ему член при $n \to \infty$.

$$-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} 1-\cos\frac{2\pi}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\pi^2}{(n+1)^2}.$$

Очевидно, что ряд (2.14) надо сравнивать с рядом

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{2.15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2\pi^2}{(n+1)^2}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\pi^2}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=2\pi^2>0.$$

По теореме сравнения ряды (2.14) и (2.15) одновременно сходятся или расходятся. Но ряд (2.15) – сходится, поэтому и ряд (2.14) – сходится.▶

Задание 5. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{\frac{1}{n+1}}+3^{-\frac{1}{n+1}}-2\right). \qquad (2.16)$$

◀Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. Используем для сравнения сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n+1}}+3^{-\frac{1}{n+1}}-2}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-\frac{1}{n+1}}\left(3^{\frac{2}{n+1}}+1-2\cdot 3^{\frac{1}{n+1}}\right)}{\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-\frac{1}{n+1}}\left(3^{\frac{1}{n+1}}-1\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}3^{-\frac{1}{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3^{\frac{1}{n+1}}-1\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\left[\left(3^{\frac{1}{n+1}}-1\right)^2\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{(n+1)^2}\ln^2 3\right]=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\ln^2 3}{\frac{1}{n^2}}=\ln^2 3>0.$$

Ряд (2.16) сходится.▶

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^2-1}\sin\frac{\pi}{n+2}. \tag{2.17}$$

◀Для исследования сходимости ряда (2.17) воспользуемся теоремой сравнения в непредельной форме (теорема 2.3) и известным неравенством $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Оценим снизу общий член ряда (2.17). Если $\frac{1}{2}n^2 > 1$, $n^2 > 2$, $n > \sqrt{2}$, то есть $n = 2, 3, \ldots$, то

$$\sqrt[4]{n^2-1}\sin\frac{\pi}{n+2} > \sqrt[4]{n^2-\frac{n^2}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n+2} > \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3n} = \frac{\sqrt[4]{8}}{3}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha \leqslant 1$ расходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ расходится. По указанной теореме сравнения и ряд (2.17) расходится.▶

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2-2k+4}{2^k}. \tag{2.18}$$

◀Представим общий член ряда $a_k = \frac{3k^2-2k+4}{2^k}$ следующим образом:

$$a_k = \frac{3k^2-2k+4}{2^{\frac{1}{2}k}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{2}k}}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{3x^2-2x+4}{2^{\frac{1}{2}x}},\ \ x \in [1, +\infty).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+4}{2^{\frac{x}{2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-2}{2^{\frac{x}{2}}\ln 2\cdot\frac{1}{2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^{\frac{x}{2}}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2}=0.$$

Тогда существует такое $\Delta>0$, что на интервале $(\Delta,+\infty)$ (окрестность точки $x=+\infty$) функция f будет ограниченной:

$$\exists C_1>0\ \ \forall x\in(\Delta,+\infty)\ \ |f(x)|=f(x)\leqslant C_1.$$

Если $\Delta<1$, то функция будет ограниченной на луче $[1,+\infty)$. Пусть $\Delta>1$.

На отрезке $[1,\Delta]$ функция f непрерывна, а поэтому ограничена (первая теорема Вейерштрасса):

$$\exists C_2>0\ \ \forall x\in[1,\Delta]\ \ |f(x)|=f(x)\leqslant C_2.$$

Выбираем $C=\max\{C_1,C_2\}$. Тогда

$$\exists C>0\ \ \forall x\in(1,+\infty)\ \ f(x)\leqslant C$$

(это будет и при $\Delta=1$).

Для общего члена ряда (2.19) получим оценку:

$$a_k\leqslant C2^{-\frac{k}{2}}. \tag{2.20}$$

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}. \tag{2.21}$$

Ряд (2.21) составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{2}}\in(0,1)$, а значит, ряд сходится. По признаку сравнения (учесть неравенство (2.20)) наш ряд (2.18) также будет сходиться.▶

Замечание 2.2. Обобщая решение предыдущего примера, то есть, повторяя его, мы приходим к следующему заключению. Ряды вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(k)}{a^k}$, где $a > 1$ и $P_n(k)$ – многочлен n-й степени, для любого $n \in \mathbb{N}$, натурального аргумента k, сходятся.

Задание 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

◀Воспользуемся основным логарифмическим тождеством $a^{\log_a b} = b$:

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{\left(e^{\ln \ln n}\right)^{\ln n}} = \frac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}}.$$

Очевидно, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n > n_0$ будет $\ln \ln n > 2$. Тогда $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому и наш ряд сходится (признак сравнения в форме неравентств).▶

Задание 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}} \ln n$.

◀Сравним ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n \ln n}{e^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \ln n}{e^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 \ln n + n^3 \frac{1}{n}}{e^{\sqrt{n}} \frac{1}{2\sqrt{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{(3 \ln n + 1)\, n^{\frac{5}{2}}}{e^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^{\frac{5}{2}}}{n} + (3 \ln n + 1)\, \frac{5}{2} n^{\frac{3}{2}}}{e^{\sqrt{n}} \frac{1}{2\sqrt{n}}} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3 + \frac{5}{2}(3 \ln n + 1)\right) n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{11}{2} + \frac{15}{2} \ln n\right) n^2}{e^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \ldots = 0.$$

Из признака сходимости в предельной форме следует сходимость нашего ряда.▶

Задание 10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right). \tag{2.22}$$

◀Проверим выполнение необходимого условия сходимости ряда:

$$◀\ \lim_{n\to\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)=\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{2n+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2n+1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\right.$$

$$\left.=\left[\ln\frac{2n+1}{2n-1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2n+1}{2n-1}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2n-1}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=1\right]=1-1=0.$$

Необходимое условие сходимости ряда выполняется.

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha>0$. Используем признак сравнения в предельной форме.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1}{\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2(2n-1)-2(2n+1)}{(2n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{-\alpha-1}{n^{\alpha+2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{4}{4n^2-1}+\frac{1}{n^2}}{\frac{-\alpha-1}{n^{\alpha+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2(4n^2-1)}}{\frac{-\alpha-1}{n^{\alpha+2}}}=[\alpha=2]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{3\left(n^2\left(4n^2-1\right)\right)}=\frac{1}{12}\in(0,\infty).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, ряд (2.22) также сходится.▶

Задание 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (2.23)$$

◀Используем признак сравнения в предельной форме. Учтивая, что

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{\to} 1,$$

имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^\alpha\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\left(n^\alpha\sqrt{n+1}\right)^{-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0,5\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 2\right) - 1}{\left(n^\alpha\sqrt{n+1}\right)^{-1}} = 0,5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2}{\left(n^\alpha\sqrt{n+1}\right)^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left[e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right] = 0,5 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^\alpha\sqrt{n+1}}} = \left[\alpha = \frac{3}{2}\right] = 0,5 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{n+1}}} = 0,5 > 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, следовательно, ряд (2.23) также сходится.▶

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА

Кафедра МАДУП

Задания для самостоятельного решения

1. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью теорем сравнения:

1.1 $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots;$

1.2 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots;$

1.3 $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$

1.4 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots;$

1.5 $\sin^2\alpha+\frac{\sin^2 2\alpha}{8}+\frac{\sin^2 3\alpha}{27}+\ldots+\frac{\sin^2 n\alpha}{n^3}+\ldots;$

1.6 $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}+\ldots;$

1.7 $\frac{5}{2}+\frac{25}{12}+\frac{125}{56}+\ldots+\frac{5^n}{2^n(2^n-1)}+\ldots;$

1.8 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots;$

1.9 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{4n-2}+\ldots;$

1.10 $\ln 2+\frac{\ln 3}{\sqrt[4]{2^5}}+\frac{\ln 4}{\sqrt[4]{3^5}}+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}+\ldots;$

1.11 $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{17}}+\sqrt{\frac{3}{82}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}+\ldots;$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)2^n};$

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}};$

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}};$

1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{an^2+bn^3+2n+1};$

1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n},\ a>0;$

1.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+bn)^s},\ (a>0,\ b\geqslant 0,\ s>0);$

1.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5\sqrt{n}}$;

1.19 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

1.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$;

1.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^3}{n^4+1}$;

1.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$;

1.23 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$;

1.24 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

1.25 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$;

1.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)^{\alpha} \ln \frac{3n+1}{3n-1}$;

1.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{\sqrt[3]{6n^7+3n^3+1}}$;

1.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$;

1.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} \left(e^{\frac{1}{n^{\alpha}+1}} - 1\right)$.

2. Определить, сколько членов ряда нужно взять, чтобы получить значение суммы ряда с точностью до 0,0001:

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$;

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$;

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!!}$;

2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!}$;

2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}$.

ЛЕКЦИЯ 3
Признаки Даламбера и Коши

3.1 Признаки Даламбера

Рассмотрим признаки сходимости положительных рядов, основанные на их сравнении с рядами, составленными из членов геометрических прогрессий.

Теорема 3.1 (признак Даламбера в форме неравенств). *Если для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ *существует* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и существует* $q \in (0,1)$, *что для любого* $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, *будет выполняться неравенство*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1, \tag{3.1}$$

то ряд будет сходиться. Если же для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, *будет выполняться неравенство*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1, \tag{3.2}$$

то указанный ряд будет расходиться.

◀Так как отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, то будем считать, что неравенство (3.1) выполняется для любого $k \in \mathbb{N}$ (так же, как и неравенство (3.2)).

Тогда получим: $\frac{a_k}{a_{k-1}} \leqslant q < 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, или

$$a_2 \leqslant qa_1;\ \ a_3 \leqslant a_2 q \leqslant a_1 q^2; \ldots; a_k \leqslant a_1 q^{k-1}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ сходится, так как этот ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. А тогда по признаку сравнения в форме неравенств ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если же выполняется неравенство (3.2), то для любого $k \in \mathbb{N}$ получим:

$$a_{k+1} \geqslant a_k \geqslant a_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant a_1,$$

т.е.

$$a_k \geqslant a_1 > 0. \tag{3.3}$$

В неравенстве (3.3) переходим к пределу при $k \to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty} a_k \geqslant \lim_{k\to+\infty} a_1 = a_1 > 0. \tag{3.4}$$

Следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости ряда.▶

Теорема 3.2 (признак Даламбера в предельной форме). *Если для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = p,$$

то при $p < 1$ *ряд сходится; при* $p > 1$ *– расходится.*

◀Пусть $p < 1$. Тогда существует $q \in \mathbb{R}_+$, что $p < q < 1$ (свойство непрерывности множества действительных чисел). А тогда

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k > k_0\ \ \frac{a_{k+1}}{a_k} < q < 1. \tag{3.5}$$

Значит, выполняются условия теоремы 3.1, поэтому ряд будет сходиться.

Если $p > 1$, то

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k > k_0,\ \ \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1. \tag{3.6}$$

Тогда искомый ряд (см. теорему 3.1) будет расходиться.▶

Замечание 3.1. Если $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=+\infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ расходится.

Если $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=+\infty$, то для любого $E>0$ (возьмем $E>1$) существует $k_0\in\mathbb{N}$, что для любого $k\in\mathbb{N}$ $k>k_0$ $\frac{a_{k+1}}{a_k}>E>1$ и по теореме 3.1 ряд расходится.

Замечание 3.2. Если для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ $(a_k>0)$ $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$, то ряд может сходиться, а может расходиться (признак Даламбера ответа не дает).

Рассмотрим два ряда (наряду с индексом k можно использовать и индекс n, причем их использование равнозначно):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}. \tag{3.8}$$

Ряд (3.7) – сходится. Для ряда (3.7)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$

Ряд (3.8) – расходится. Для ряда (3.8)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Пример 3.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$.

$$◀\ a_n=\frac{(2n+1)!}{(3n+4)\,3^n};\quad a_{n+1}=\frac{(2\,(n+1)+1)!}{(3\,(n+1)+4)\,3^{n+1}}.$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+3)!\,(3n+4)\,3^n}{(3n+7)\,3^{n+1}\,(2n+1)!}=\frac{(2n+2)\,(2n+3)\,(3n+4)}{(3n+7)\cdot 3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\,(2n+3)\,(3n+4)}{(3n+7)\cdot 3}=+\infty.$$

Ряд расходится.▶

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$.

◀Символ $(2n+1)!!$ означает произведение всех нечетных чисел, начиная от 1 и заканчивая $(2n+1)$. У нас

$$a_n=\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)};\quad a_{n+1}=\frac{(2n+3)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)\,(3n+4)}.$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+3}{3n+4}<\frac{2n+0,5n}{3n}<\frac{2,5n}{3n}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}<1,$$

если $0,5n\geqslant 3$, $n\geqslant 6$. Ряд сходится.▶

3.2 Признаки Коши

Теорема 3.3 (признак Коши в форме неравенств). *Если для положительного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует* $n_0 \in \mathbb{N}$ *и существует* $q \in (0,1)$, *что для любого* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, *будет выполняться неравенство:*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1, \tag{3.9}$$

то ряд сходится, если же для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, *будет выполняться неравенство*

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1, \tag{3.10}$$

то ряд расходится.

◀Так как отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, то будем считать, что неравенство (3.9) выполняется для всех натуральных $n \in \mathbb{N}$. Возводим левую и правую части неравенства $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ в n-ю степень, получим:

$$a_n \leqslant q^n. \tag{3.11}$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Значит, по признаку сравнения в форме неравенств ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Пусть выполняется неравенство (3.10). Тогда, возводя правую и левую части этого неравенства в n-ю степень, получим неравенство

$$a_n \geqslant 1. \tag{3.12}$$

Из неравенства (3.12) видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть искомый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.▶

Теорема 3.4 (признак Коши в предельной форме). *Если для положительного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = p, \tag{3.13}$$

то при $p < 1$ *– ряд сходится, при* $p > 1$ *– расходится.*

◀Если $p < 1$, то по свойству непрерывности мнжества действительных чисел существует $q \in \mathbb{R}_+$, что $p < q < 1$. А тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1. \tag{3.14}$$

Отсюда следует (теорема 3.3), что искомый ряд сходится.

При $p > 1$ также существует $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$,

$$\sqrt[n]{a_n} > 1. \tag{3.15}$$

Из теоремы 3.3 следует, что искомый ряд расходится.▶

Замечание 3.3. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$:

$$\forall E > 0 \ \ (E > 1) \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ n > n_0 \ \ \ \sqrt[n]{a_n} > E > 1,$$

т.е. и в этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание 3.4. Если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться, т.е. признак Коши ответа не дает (для доказательства работают те же примеры, что и в замечании 3.2).

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

◀Воспользуемся признаком Коши в предельной форме (теорема 3.3).

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Ряд сходится.▶

Замечание 3.5. Есть положительные ряды, при исследовании которых на сходимость признак Даламбера не применим, а с помощью признака Коши этот ряд исследуется на сходимость. Говорят, что признак Коши «сильнее» признака Даламбера.

Пример 3.4. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}. \tag{3.16}$$

$$◀ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(-1)^n + 3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится. Но

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^{n+1}+3}{2^{n+2}}}{\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 3}{2\left((-1)^n + 3\right)} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = 2k, \ k \in \mathbb{N}, \\ 1, & n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

т.е. указанного предела не существует.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите признак Даламбера сходимости положительных рядов в форме неравенств.

2. Сформулируйте и докажите признак Даламбера сходимости положительных рядов в предельной форме.

3. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов, для которых признак Даламбера в предельной форме не дает ответа на вопрос о сходимости.

4. Сформулируйте и докажите признак Коши сходимости положительных рядов в форме неравенств.

5. Сформулируйте и докажите признак Коши сходимости положительных рядов в предельной форме.

6. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов, для которых признак Коши в предельной форме не дает ответа на вопрос о сходимости.

ЛЕКЦИЯ 4
Обобщенный признак Коши. Интегральный признак сходимости

4.1 Частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 4.1. *Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется **частичным пределом** последовательности (a_n), если существует (a_{n_k}) – подпоследовательность последовательности (a_n), такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = \alpha$.*

Для ограниченной последовательности существуют наибольший и наименьший частичные пределы.

Определение 4.2. ***Нижним** (**верхним**) **пределом** ограниченной снизу (ограниченной сверху) последовательности называется наименьший (наибольший) из частичных пределов этой последовательности.*

Нижний (верхний) предел последовательности (a_n) обозначается следующим образом:

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \quad \left(\varlimsup_{n\to+\infty} a_n\right).$$

Если последовательность не ограничена снизу (не ограничена сверху), то нижний (верхний) предел этой последовательности будем считать равным $-\infty$ $(+\infty)$, так как в этом случае существует подпоследовательность a_{n_k}, для которой (например, в случае неограниченности сверху) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

Замечание 4.1. Действительное число α будет нижним (верхним) пределом ограниченной снизу (сверху) последовательности (a_n), если:

1) существует (a_{n_k}) – подпоследовательность последовательности (a_n), что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, будет выполняться неравенство $a_n > \alpha - \varepsilon$ $(a_n < \alpha + \varepsilon)$.

Пример 4.1. Для последовательности

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k-2, \ k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k-1, \ k \in \mathbb{N}, \\ 3, & n = 3k, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

указать множество A частичных пределов, а также нижний и верхний пределы.

$$\blacktriangleleft\ A = \{1, 2, 3\}\,, \ \varliminf_{n\to+\infty} a_n = 1, \ \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 3.\ \blacktriangleright$$

Пример 4.2. Найти верхний и нижний пределы последовательности

$$a_n = n \sin\frac{\pi\, n}{2}. \tag{4.1}$$

◀Верхним пределом данной последовательности будет предел подпоследовательности, для которой $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$, т.е. эта подпоследовательность будет иметь вид

$$a_{n_k} = (4k-3)\sin\frac{\pi}{2}\,(4k-3)$$

(числа $1, 5, 9, 13, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию с общим членом $a_k = 1 + (k-1)\cdot 4 = 4k-3$).

Тогда

$$\varlimsup_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi n}{2} = \lim_{k\to+\infty}(4k-3)\sin\frac{\pi}{2}\,(4k-3) = \lim_{k\to+\infty}(4k-3) = +\infty.$$

Аналогично

$$\varliminf_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi n}{2} = \lim_{l\to+\infty}(4l-1)\sin\frac{\pi}{2}\,(4l-1) = \lim_{l\to+\infty}(1-4l) = -\infty.\ \blacktriangleright$$

Справедлива следующая теорема-критерий.

Теорема 4.1. *Ограниченная последовательность сходится тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы совпадают.*

Замечание 4.2. Можно показать, что для верхнего предела последовательности будет справедливо равенство:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \lambda a_n = \lambda \varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \ \lambda > 0. \tag{4.2}$$

4.2 Обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов

Теорема 4.2. *Если для положительного ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *будет* $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *то при* $q < 1$ *ряд сходится, при* $q > 1$ *ряд расходится, а при* $q = 1$ *ряд может сходиться, а может и расходиться.*

◀Пусть $q < 1$. Возмем число $p \in (q, 1)$. Тогда (по определению верхнего предела последовательности) для любого $\varepsilon > 0$, в частности $\varepsilon = p - q$, существует $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, будет $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = p$, что равносильно неравенству $a_n < p^n$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^n$ – сходится (ряд состоит из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $p \in (0, 1)$), поэтому будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (теорема 2.2).

Если $q > 1$, то существует подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n) такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = q$. Возьмем $1 < p < q$. Тогда (теорема о сохранении функцией знака предела) существует $k_0 \in \mathbb{N}$ (существует $n_{k_0} \in \mathbb{N}$), для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$ $(n_k > n_{k_0})$, будет $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > p > 1$, что равносильно неравенству

$$a_{n_k} > p^{n_k}. \tag{4.3}$$

Из неравенства (4.3) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть ряд расходится.▶

Пример 4.3. Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^n+2)n^n}{(n+1)^n}\right)^n. \tag{4.4}$$

◀Находим

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{((-1)^n+2)\,n^n}{(n+1)^n}\right)^n}=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n+2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Ряд (4.4) расходится.▶

4.3 Интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов

Пусть $m\in\mathbb{N}$, функция $f:[m,+\infty)\to\mathbb{R}$ принимает на луче $[m,+\infty)$ неотрицательные значения и не возрастает.

Теорема 4.3 (интегральный признак Коши – Маклорена). *Несобственный интеграл*

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx \tag{4.5}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k). \tag{4.6}$$

◀Рассмотрим отрезок $[m,n]$, $m<n$. Разбиваем этот отрезок на $(n-m)$ частичных отрезков точками m, $m+1$, $m+2$,…,k,$k+1$, …,$n-1$,n, где $k=\overline{m,n-1}$.

На отрезке $[k, k+1]$ функция f не возрастает, поэтому она интегрируема на этом отрезке, и будут справедливы неравенства:

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k),$$

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k). \tag{4.7}$$

Суммируем неравенства (4.7) по k от m до $n-1$, получим:

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=m}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \tag{4.8}$$

$$\left(\sum_{k=m}^{n-1} f(k+1) = [l = k+1] = \sum_{l=m+1}^{n} f(l) = [l = k] = \sum_{k=m+1}^{n} f(k)\right).$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = S_n - f(m),$$

где S_n – n-я частичная сумма ряда (4.6);

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = S_{n-1},$$

где S_{n-1} –$(n-1)$-я сумма ряда (4.6) при $m = 1$.

Тогда неравенство (4.8) примет вид:

$$S_n - f(m) \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant S_{n-1}. \tag{4.9}$$

Последовательность $a_n = \int\limits_m^n f(x)\,dx$ не убывающая, т.к. $a_{n+1} - a_n = \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant 0$.

Значит, для сходимости этой последовательности необходима и достаточна ее ограниченность. Для сходимости ряда (4.6) необходима и достаточна ограниченность последовательности (S_n) (теорема 2.1).

Из неравенств (4.9) следует, что последовательность (S_n) ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность (a_n), т.е. тогда и только тогда, когда последовательность (a_n) сходится.►

Замечание 4.3. Рассмотрим так называемый **обобщенный гармонический ряд**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \tag{4.10}$$

где α – любое действительное число.

Известно из теории несобственных интегралов, что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \tag{4.11}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Тогда (теорема 4.3) ряд (4.10) также сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 4.4. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+4}{\sqrt{7k^8 - 3k}}. \tag{4.12}$$

◄Оценим сверху общий член ряда (4.12).

$$\frac{3k+4}{\sqrt{7k^8 - 3k}} \leqslant \frac{3k+4k}{\sqrt{7k^8 - 3k^8}} = \frac{7k}{2k^4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{k^3}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3 > 1$, тогда будет сходиться и ряд (4.12).▶

Замечание 4.4. Можно показать, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k} \tag{4.13}$$

сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. Для этого достаточно исследовать на сходимость соответствующий несобственный интеграл

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x}. \tag{4.14}$$

Пример 4.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln(n+1)}. \tag{4.15}$$

◀Оценим снизу общий член ряда

$$\frac{1}{(n-2)\ln(n+1)} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \tag{4.16}$$

Ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = [k = n+1] = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

расходится согласно замечанию 4.13, а поэтому ряд (4.15) расходится.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение частичного предела последовательности.
2. Дайте определение верхнего и нижнего предела последовательности.
3. Сформулируйте обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов.
4. Сформулируйте интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов.
5. Дайте определение обобщенного гармонического ряда и докажите его расходимость.

Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши – Маклорена

Задание 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$$

с помощью признака Коши.

$$◀ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln (n+1)} = 0 < 1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сходится.▶

Задание 2. Установить с помощью признака Даламбера, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4!!} + \frac{5}{6!!} + \ldots + \frac{2n-1}{(2n)!!} + \ldots .$$

$$◀ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n+1}{(2n+2)!!} : \frac{2n-1}{(2n)!!} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!\,(2n+1)}{(2n+2)!!\,(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(2n+2)\,(2n-1)} = 0 < 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

то ряд сходится.▶

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Задание 3. С помощью признака Даламбера установить, сходится или расходится ряд

$$3+\frac{3^2 2!}{2^2}+\frac{3^3 3!}{3^3}+\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots .$$

$$◀ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\,(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то ряд расходится.▶

Задание 4. С помощью интегрального признака исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\ln^3 2}+\frac{1}{3\ln^3 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}+\ldots .$$

◀Функция $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$, $x\in[1,+\infty)$, положительна, непрерывна и монотонно убывает, поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно воспользоваться интегральным признаком.

$$\int_1^\infty\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}=\int_1^\infty\frac{d\left(\ln(x+1)\right)}{\ln^3(x+1)}=-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\ln^2(x+1)}\Big|_1^N=$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\ln^2(N+1)}-\frac{1}{2\ln^2 2}\right]=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Соответствующий несобственный интеграл сходится, значит, данный ряд также сходится.▶

Для оценки остатка ряда с положительными членами удобно пользоваться интегральным признаком сходимости. Если этот признак применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, то имеет место оценка

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx < R_n < \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Задание 5. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0.$$

◀Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ с общим членом $a_n = \frac{100^n}{n!}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0,$$

то по признаку Даламбера этот ряд сходится. Следовательно, его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0. \blacktriangleright$$

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^3+1}{n^3}. \tag{4.17}$$

◀Для решения задачи используем интегральный признак сходимости числовых рядов. Условия этого признака выполняются:

$$f(x) = x \ln \frac{x^3+1}{x^3} > 0, \quad \forall x \in [1, +\infty);$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x^3+1}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^3+1}{x^3}}{x^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\ln\frac{x^3+1}{x^3} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{x^{-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0,$$

то есть функция f убывает на луче $[1,+\infty)$.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} x\ln\frac{x^3+1}{x^3}dx. \tag{4.18}$$

Для исследования сходимости применим теорему сравнения для несобственных интегралов.

$$I = \int\limits_1^{+\infty} x\ln\frac{x^3+1}{x^3}dx = \int\limits_1^{\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int\limits_1^{\infty}\frac{x^3}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{x^3}dx < \ln 3\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx.$$

Так как интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ сходится, то и интеграл (4.18) сходится, поэтому сходится и ряд (4.17).▶

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right). \tag{4.19}$$

◀Воспользуемся интегральным признаком сходимости рядов. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} x\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)dx. \tag{4.20}$$

Проверим выполнимость условий интегрального признака.

$$f(x) = x \operatorname{tg} \frac{1}{x} - 1, \quad x \in [1, +\infty).$$

Докажем, что функция f – убывающая и принимает неотрицательные значения на $[1, +\infty)$.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x} + x \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \operatorname{tg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cos^2 \frac{1}{x}} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\cos \frac{1}{x}} - \frac{1}{x \cos^2 \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cos \frac{1}{x}} \right), \quad \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} > 0$$

для любых $x \in [1, +\infty)$.

Докажем, что

$$\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cos \frac{1}{x}} < 0. \tag{4.21}$$

Неравенство (4.21) равносильно неравенству (умножим (4.21) на $2 \cos \frac{1}{x} > 0$)

$$\sin \frac{2}{x} - \frac{2}{x} < 0. \tag{4.22}$$

Неравенство (4.22) справедливо на $[1, +\infty)$, поэтому $f'(x) < 0$, то есть функция f убывает на $[1, +\infty)$. Кроме того,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x \operatorname{tg} \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 0 = \inf_{x \in [1, +\infty]} f(x).$$

А тогда $f(x) \geqslant 0$ для любых $x \in [1, +\infty)$. Условия интегрального признака выполняются. Дальше докажем сходимость несобственного интеграла (4.20). Используем так называемый **метод выделения**

главной части. Справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$$\operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right), \ t \to 0. \tag{4.23}$$

У нас

$$x\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \to \infty. \tag{4.24}$$

Из (4.24) следует, что интеграл (4.20) сходится, поэтому сходится и ряд (4.19).►

Задание 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \sqrt[5]{\frac{2n-1}{2n+1}}\right). \tag{4.25}$$

◄Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty}\left(1 - \sqrt[5]{\frac{2x-1}{2x+1}}\right)dx. \tag{4.26}$$

Функция

$$f\left(x\right) = 1 - \sqrt[5]{\frac{2x-1}{2x+1}}$$

принимаем на луче $[1, +\infty)$ неотрицательные значения.

$$f'\left(x\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2\left(2x+1\right) - 2\left(2x-1\right)}{\left(2x+1\right)^2} = -\frac{1}{5}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{4}{\left(2x+1\right)^2} < 0.$$

Функция f удовлетворяет всем условиям интегрального признака сходимости рядов.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл (4.26). Применим метод выделения главной части.

$$A = \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-\frac{1}{5}}. \qquad (4.27)$$

Воспользуемся формулой (формула Тейлора с остатком в форме Пеано):

$$(1+t)^{\alpha} = 1+\alpha t + o\left(t\right),\ t\to 0. \qquad (4.28)$$

Тогда

$$A = \left(1-\frac{1}{10x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1-\frac{1}{10x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1-\frac{2}{10x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad f\left(x\right) = \frac{1}{5x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to+\infty. \qquad (4.29)$$

Из (4.29) следует, что несобственный интеграл (4.26) расходится, так как расходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$.
Значит, ряд (4.25) расходится.►

Задание 9. С помощью признаков Даламбера, Коши и интегрального признака Коши – Маклорена исследовать на сходимость ряды:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}.$$

◄Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{6}} < 1.$$

Ряд сходится.►

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

◀Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \left[\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln^2 n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln n \frac{1}{n}}{1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\frac{1}{n}}{1}} = 1\right] = 0 < 1.$$

Ряд сходится.▶

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}.$$

◀Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится.▶

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2,6n^n)^n}{(n+1)^{n^2}} \cos\frac{1}{n!}.$$

◀Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2,6n^n)^n}{(n+1)^{n^2}} \cos\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2,6n^n}{(n+1)^n} \left(\cos\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 2,6 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{n!}}{n}} = \frac{2,6}{e} < 1.$$

Ряд сходится.▶

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

$$\blacktriangleleft\ \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}<\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n2n.$$

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n2n. \tag{4.30}$$

Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n}\sqrt[n]{2n}=\frac{2}{3}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 2n}{n}}=\frac{2}{3}<1.$$

Признак сравнения: ряд (4.30) сходится, следовательно, наш ряд тоже сходится.▶

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot6\cdot\ldots\cdot3n}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}.$$

$$\blacktriangleleft\ a_{n+1}=\frac{1\cdot3\cdot6\cdot\ldots\cdot3n\,(3n+3)}{(n+1)!\,(n+2)}\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}}{(n+2)\arcsin\frac{1}{2^n}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Ряд расходится.▶

$$7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,(2^n+3^n)}.$$

◀Признак Даламбера:

$$a_n=\frac{n^n}{n!\,(2^n+3^n)},$$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,(2^{n+1}+3^{n+1})}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}\,n!\,(2^n+3^n)}{(n+1)!\,(2^{n+1}+3^{n+1})\,n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}=\frac{e}{3}<1.$$

Ряд сходится.▶

$$8)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

◀Признак Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^n\,(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(2\,(n+1)^2+n+2\right)^{\frac{n+1+1}{2}}\;n^{n-1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n-1}{n}}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n^2+5n+4)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{2n^2+5n+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-4n-3)(n+1)}{(2n^2+5n+4)2}}=e^{-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Ряд сходится.►

$$9)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(2n)}.$$

◄Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 2n}.$$

По интегральному признаку Коши – Маклорена

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\,(\ln 2x)^2}=\int\limits_1^{\infty}(\ln 2x)^{-2}d\,(\ln 2x)=\left.\frac{(\ln 2x)^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^{\infty}=-\left.\frac{1}{\ln 2x}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 2n}$ сходится. Но

$$\frac{1}{(n+1)\ln^2(2n)}<\frac{1}{n\ln^2(2n)},$$

а тогда по признаку сравнения и наш ряд сходится.►

Задания для самостоятельного решения

1. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Коши:

1.1 $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots;$

1.2 $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots;$

1.3 $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots;$

1.4 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$ *Указание.* $\sqrt{2}==2\cos\frac{\pi}{4};$

1.5 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}+\ldots;$

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\left|\sqrt{5}+(-1)^n\right|^n}{4^n};$

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n+n};$

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{(-2)n-n};$

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2-4^n};$

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)};$

1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5+(-1)^n)^n}{n^2 7^n};$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^2+1};$

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}.$

2. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Даламбера:

2.1 $2+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}+\ldots;$

2.2 $1+\frac{1\cdot4}{3!!}+\frac{1\cdot4\cdot7}{5!!}+\ldots+\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{(2n-1)!!}+\ldots;$

2.3 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots;$

2.4 $2+1+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2^n}{n^2}+\ldots;$

2.5 $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots;$

2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$;

2.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$;

2.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$;

2.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot7\cdot13\ldots\cdot(3n+4)}{3\cdot7\cdot11\ldots(4n+3)}$;

2.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{n2^{n+1}}$;

2.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot6\cdot\ldots(3n)}{(n+1)!}\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}$;

2.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k+1)}{(2n)^n}$;

2.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sin\frac{x}{2^n}}{n!}$;

2.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!2^n}$.

3. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью интегрального признака Коши – Маклорена:

3.1 $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$;

3.2 $\frac{1}{2\ln 2\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\ln\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}+\ldots$;

3.3 $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}+\ldots$;

3.4 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$;

3.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

3.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

3.7 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}$.

ЛЕКЦИЯ 5
Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Абеля – Дирихле. Знакочередующиеся ряды

5.1 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{5.1}$$

Определение 5.1. *Ряд (5.1) называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда, то есть если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

◀Для доказательства воспользуемся критерием Коши о сходимости рядов: для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $k, p \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{k_0+p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{k_0+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Значит, ряд (5.1) сходится.▶

Замечание 5.1. Обратная теорема в общем случае неверна.

Определение 5.2. *Ряд* (5.1) *называется* ***условно сходящимся****, если он сходится, а ряд* (5.2) *– расходится.*

Пример 5.1. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}. \tag{5.3}$$

◀Составим ряд из модулей членов ряда (5.3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}. \tag{5.4}$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2k+3)!}}{\frac{1}{(2k+1)!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} = 0 < 1.$$

Ряд (5.4) – сходится, поэтому ряд (5.3) сходится абсолютно.▶

5.2 Признак Абеля – Дирихле

Для исследования сходимости рядов с членами произвольного знака важное значение имеет признак Абеля – Дирихле.

Теорема 5.2 (признак Абеля – Дирихле). *Если у ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{5.5}$$

последовательность частичных сумм ограничена, а последовательность (b_k) – невозрастающая и сходящаяся к нулю, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{5.6}$$

сходится.

◀Для доказательства теоремы в силу критерия Коши (теорема 1.1) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ и любого $p \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon$.

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. По условию существует такое число $M > 0$, что $|S_n| \leqslant M$ для любых $n \in \mathbb{N}$.

Так как последовательность (b_k) невозрастающая и сходящаяся к нулю, то для любого положительного $\frac{\varepsilon}{2M}$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ $0 \leqslant b_n < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Для оценки сверху $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right|$ воспользуемся тождеством Абеля [1, с. 76]:

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_{n+p} b_{n+p} - S_{n-1} b_n.$$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |S_k|(b_k - b_{k+1}) + |S_{n+p}|b_{n+p} + |S_{n-1}|b_n \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\sum_{k=n}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1}) + b_{n+p}\right) + Mb_n = 2Mb_n < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \blacktriangleright$$

Пример 5.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}. \tag{5.7}$$

◀Составим ряд из модулей членов ряда (5.7)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin k|}{k}. \tag{5.8}$$

Справедливо неравенство

$$\frac{|\sin k|}{k} \geqslant \frac{\sin^2 k}{k} = \frac{1-\cos 2k}{2k}. \tag{5.9}$$

Ряд с общим членом $a_k = \frac{1}{2k}$ расходится. Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k}{2k} \tag{5.10}$$

сходится.

Воспользуемся признаком Абеля – Дирихле (теорема 5.2). Последовательность $\left(\frac{1}{2k}\right)$ убывающая, а поэтому невозрастающая. Покажем, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos 2k$ ограничена.

$$S_n = \frac{2\sin 2(\cos 2 + \cos 4 + \cos 6}{2\sin 2} + \ldots + \frac{\cos(2n-4) + \cos(2n-2) + \cos 2n)}{2\sin 2} =$$
$$= \frac{\sin 4 + \sin 6 - \sin 2 + \sin 8 - \sin 4 + \sin 10 - \sin 6}{2\sin 2} + \ldots +$$
$$+ \frac{\sin(2n-2) - \sin(2n-6) + \sin 2n - \sin(2n-4) + \sin(2n+2) - \sin(2n-2)}{2\sin 2} = \frac{-\sin 2 + \sin 2n + \sin(2n+2)}{2\sin 2}.$$

Тогда $|S_n| < \frac{3}{2\sin 2}$.

Условия признака Абеля – Дирихле выполняются, то есть ряд с общим членом $\frac{\cos 2k}{2k}$ сходится. Из неравенства (5.9) следует неравенство

$$\frac{1}{2k} \leqslant \frac{\cos 2k}{2k} + \frac{|\sin k|}{k}.$$

Если предположить, что ряд (5.8) сходится, то из теоремы о почленном сложении сходящихся рядов и теоремы сравнения, ряд с общим членом $\left(\frac{1}{2k}\right)$ – сходится, но он расходится. Получили противоречие. Значит, ряд (5.8) расходится.

Далее доказывается сходимость ряда (5.7) (с использованием признака Абеля – Дирихле аналогично, как и при доказательстве сходимости ряда (5.8)). Причем для доказательства ограниченности последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$ можно воспользоваться равенством

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)},$$

которое легко доказывается методом математической индукции.

Ряд (5.8) сходится условно.▶

5.3 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение 5.3. *Ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k, \quad a_k > 0. \tag{5.11}$$

называется ***знакочередующимся****.*

Теорема 5.3 (признак Лейбница). *Если члены ряда (5.11) по абсолютной величине образуют невозрастающую, сходящуюся к нулю последовательность, то ряд (5.11) сходится и n-й остаток ряда имеет знак своего первого члена, а модуль n-го остатка ряда не превосходит модуля первого члена остатка.*

◀Сходимость ряда (5.11) следует из признака Абеля – Дирихле.

Докажем остальные заключения теоремы. Пусть S_n – частичная сумма ряда (5.11), S – сумма ряда (5.11).

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

где разности во всех скобках неотрицательны, так как последовательность (a_k) невозрастающая. Тогда $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leqslant S_{2n-1}$, а $S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geqslant S_{2n-2}$, т.е. последовательность (S_{2n-1}) невозрастающая, а последовательность S_{2n} неубывающая, и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$ в силу сходимости ряда (5.11), поэтому справедливо неравенство

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}.$$

Тогда для остатков ряда (5.11) получим оценки

$$0 > R_{2n-1} = S - S_{2n-1} \geqslant S_{2n} - S_{2n-1} = (-1)^{2n-1}a_{2n} = -a_{2n},$$

т.е. знак остатка R_{2n-1} совпадает со знаком первого члена остатка $(-1)^{2n-1}\, a_{2n} = -a_{2n}$. А тогда из оценки $0 \geqslant R_{2n-1} \geqslant (-1)^{2n-1}\, a_{2n}$ получим:

$$|R_{2n-1}| \leqslant \left|(-1)^{2n-1}\, a_{2n}\right|.$$

Аналогично

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}.$$

Тогда

$$0 < R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1-1} a_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

Значит, знак остатка R_{2n} совпадает со знаком первого члена остатка, а

$$|R_{2n}| = R_{2n} \leqslant (-1)^{2n+1-1} a_{2n+1} = a_{2n+1} = \left|(-1)^{2n+1-1} a_{2n+1}\right|. \blacktriangleright$$

Замечание 5.2. При доказательстве теоремы учтено то, что все разности $a_{k+1} - a_k$ не могут быть равны нулю (не равных нулю разностей бесконечно много). В противном случае не выполнялось бы условие $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, так как начиная с некоторого номера последовательность (a_k) стала бы последовательностью-константой с положительными членами. По этой причине у нас и получены неравенства: $R_{2n-1} < 0$; $R_{2n} > 0$.

Определение 5.4. *Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 5.3, называется* ***рядом Лейбница***.

Пример 5.3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \tag{5.12}$$

◀Ряд (5.12) есть ряд Лейбница:
1) (5.12) знакочередующийся ряд;
2) $\left(\frac{1}{k}\right)$ – убывающая, а значит, невозрастающая последовательность;

3) $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$, то есть он сходится.

Но ряд, составленный из модулей ряда (5.12), есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ – гармонический ряд, он расходится. Значит, ряд (5.12) сходится условно.►

Пример 5.4. Найти сумму ряда (5.3) с точностью до 10^{-3}.

◄Ряд (5.3) есть ряд Лейбница. Его общий член

$$a_k=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}. \tag{5.13}$$

Если $k=2$, то $u_2=-\frac{1}{5!}=-\frac{1}{120}$; $|u_2|=\frac{1}{120}>10^{-3}$.
Если $k=3$, то $u_3=\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}=0,000198\ldots$; $|u_3|=\frac{1}{5040}<10^{-3}$.
Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\approx\frac{1}{6}-\frac{1}{120}=\frac{19}{120}\approx 0,15833\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\approx 0,158$$

с точностью до 10^{-3}, причем с недостатком, так как $R_2>0$ $(u_3>0)$.►

5.4 О свойствах ассоциативности и коммутативности для рядов

Важнейшими свойствами суммы конечного числа действительных слагаемых являются свойства ассоциативности и коммутативности. Естественно, возникает вопрос, останутся ли эти свойства справедливыми для суммы сходящегося ряда? Ответ на этот вопрос содержится в следующих теоремах.

Теорема 5.4. *Если в сходящемся ряде произвольным образом расставить скобки (с конечным числом слагаемых внутри каждой скобки), то получим сходящийся ряд с той же суммой, что и у исходного ряда.*

◄Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{5.14}$$

и

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1})}_{u_1} + \ldots + \underbrace{(a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k})}_{a_k} + \ldots + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{5.15}$$

Если S_k есть k-я частичная сумма ряда (5.15), то S_{n_k} есть n_k-я частичная сумма ряда (5.14), причем $n_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть ряд (5.14) – сходится (при $k \to \infty$ $n_k \to \infty$). Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{n_k\to\infty} S_{n_k} = S$.►

Замечание 5.3. Обратная теорема в общем случае не верна. Например: ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

расходится, но ряд

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

сходится. Но если ряд (5.15) расходится, то и (5.14) – расходится (доказательство проводится методом от противного).

Следующая теорема показывает, что условно сходящийся ряд не обладает свойством коммутативности.

Теорема 5.5 (теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). *Если ряд (5.1) сходится условно, то для любого $L \in \overline{\mathbb{R}}$ можно так переставить члены этого ряда, что преобразованный ряд будет иметь своей суммой L.*

В то же время свойство коммутативности справедливо для абсолютно сходящегося ряда.

Теорема 5.6 (теорема Коши). *Если числовой ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из исходного ряда посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.*

Доказательства теорем 5.5 и 5.6 можно найти в [2, с. 449–452].

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение знакочередующегося ряда.
2. Сформулируйте и докажите признак Лейбница.
3. Дайте определение ряда Лейбница.
4. Дайте определение абсолютно и условно сходящихся рядов.
5. Сформулируйте признак Абеля – Дирихле.
6. Сформулируйте свойство ассоциативности для числового ряда.
7. Сформулируйте теорему Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Признаки Лейбница и Абеля – Дирихле

Задание 1. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\ldots.$$

◄Члены заданного знакочередующегося ряда по абсолютной величине убывают и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Следовательно, по признаку Лейбница данный ряд сходится. Выясним теперь, как сходится данный ряд: абсолютно или условно. Для этого исследуем на сходимость соответствующий ему знакоположительный ряд:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots. \qquad (5.16)$$

Ряд (5.16) получается из гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

в результате умножения всех его членов на $\frac{1}{2}$. Так как гармонический ряд расходится, то и ряд (5.16) также расходится.

Таким образом, данный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно.►

Задание 2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\,n}{6n-5}+\ldots.$$

◀Покажем, что члены этого ряда по абсолютной величине монотонно убывают. В самом деле, неравенство

$$\frac{n}{6n-5}>\frac{n+1}{6\,(n+1)-5}$$

при $n \geqslant 1$ эквивалентно неравенству $6n^2+n>6n^2+n-5$, которое выполняется при всех значениях $n \geqslant 1$. Однако

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5}=\frac{1}{6}\neq 0.$$

Следовательно, данный ряд расходится по следствию из необходимого признака.▶

Задание 3. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\frac{64}{16}+\ldots+(-1)^{n+1}\,\frac{n^3}{2^n}+\ldots.$$

◀Исследуем, сходится ли заданный ряд абсолютно, т.е. исследуем на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\frac{27}{8}+\ldots+\frac{n^3}{2^n}+\ldots. \qquad (5.17)$$

По признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\,2^n}{2^{n+1}n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд (5.17) сходится. Отсюда вытекает, что данный ряд также сходится, и притом абсолютно.▶

Задание 4. Сколько нужно взять членов ряда

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots, \tag{5.18}$$

чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

◀Ряд (5.18) знакочередующийся и члены его монотонно убывают по абсолютной величине (ряд Лейбница). Поэтому его остаток по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого отброшенного члена, т.е.

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

В нашем задании

$$R_n < \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Для вычисления суммы ряда (5.18) с точностью до $0,01$ надо потребовать, чтобы

$$|R_n| < 0,01, \quad \text{или} \quad \frac{1}{(n+1)^2} < 0,01.$$

Из последнего неравенства получаем, что при $n > 10$ остаток ряда будет меньше $0,01$. Значит, чтобы вычислить сумму ряда с точностью до $0,01$, нужно взять 10 членов ряда.

Для вычисления суммы ряда (5.18) с точностью до $0,001$ необходимо взять 31 член ряда. Мы видим, что ряды Лейбница удобнее для вычислений, чем знакоположительные ряды. Чтобы найти сумму ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

с точностью до $0,001$, придется взять 1001 член ряда, а чтобы найти с той же точностью сумму ряда (5.18), достаточно взять 31 член ряда.▶

Задание 5. Зная, что сумма ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots \tag{5.19}$$

равна $\ln 2$, найти сумму ряда

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots, \tag{5.20}$$

полученного из данного в результате перестановки членов.

◀Сумма первых $3m$ членов ряда (5.20) равна

$$S_{3m}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right).$$

Выражение в скобках является $2m$-й частной суммой ряда (5.19). Таким образом,

$$S_{3m}=\frac{1}{2}H_{2m},$$

где H_n – n-я частичная сумма ряда (5.19). Переходя к пределу при $m\to\infty$, получаем $S=\frac{1}{2}\ln 2$.

Рассмотренное задание показывает, что при перестановке членов условно сходящегося ряда его сумма может измениться.▶

Задание 6. Показать, что ряд

$$2+\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{10}{9}-\frac{26}{27}\right)+\ldots+\left(\frac{n^2+1}{n^2}-\frac{n^3-1}{n^3}\right)+\ldots \tag{5.21}$$

сходятся, а ряд

$$2+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\frac{10}{9}-\frac{26}{27}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^2}-\frac{n^3-1}{n^3}+\ldots, \tag{5.22}$$

полученный из ряда (5.21) опусканием скобок, расходится.

◀Общий член заданного ряда имеет вид:

$$a_n=\frac{n^2+1}{n^2}-\frac{n^3-1}{n^3}=\frac{n+1}{n^3}.$$

Так как при любом $n>1$:

$$\frac{n+1}{n^3}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3},$$

а ряд с общим членом $\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha>1$ сходится, то и заданный ряд сходится. В то же время общий член ряда (5.22) не стремится к нулю при $n\to\infty$, а потому ряд (5.22) расходится.▶

Задание 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n+1)!}. \tag{5.23}$$

При сходимости ряда найти его сумму с точностью до 10^{-3} как с недостатком, так и с избытком.

◀Составим ряд из модулей членов нашего ряда (5.23)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)!}. \tag{5.24}$$

Для исследования на сходимость ряда (5.24) воспользуемся признаком Даламбера.

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)!},\ a_{n+1} = \frac{1}{(3n+4)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+1)!}{(3n+4)!} = \frac{(3n+1)!}{(3n+1)!(3n+2)(3n+3)(3n+4)} = \frac{1}{(3n+2)\,(3n+5)\,(3n+4)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1.$$

Ряд (5.24) сходится, поэтому ряд (5.23) сходится абсолютно. А абсолютно сходящийся ряд сходится. Ряд (5.23) является рядом Лейбница, так как он знакочередующийся и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)!} = 0,$$

а последовательность $a_n = \frac{1}{(3n+1)!}$ убывающая. Тогда модуль остатка ряда (5.23) не превосходит модуля первого члена остатка.

У нас:

$$a_1 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0,04166\ldots;\, a_2 = -\frac{1}{7!} = -0,0001984\ldots.$$

Очевидно, что первым членом остатка надо взять a_2. Тогда приближенная сумма ряда с избытком будет $0,042$ с точностью до 10^{-3}, а с недостатком – $0,041$.▶

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Задание 8. Исследовать на обсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right), \ \alpha > 0. \tag{5.25}$$

$$◀ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right] = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} = 1,$$

то есть

$$\ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{5.26}$$

Сходимость ряда, составленного из модулей членов ряда (5.25), равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{5.27}$$

При $\alpha > 1$ ряд (5.27) сходится абсолютно, а при $0 < \alpha \leqslant 1$ – расходится, то есть и ряд (5.25) при $\alpha > 1$, сходится абсолютно, а при $0 < \alpha \leqslant 1$ не является абсолютно сходящимся. При $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд (5.25) есть ряд Лейбница (показать), то есть он сходится условно.▶

Задание 9. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n - \sin n}. \tag{5.28}$$

◀Вначале воспользуемся признаком Абеля – Дирихле (теорема 5.2) сходимости рядов.

В нашем случае положим $b_n = \sin 2n$ и $a_n = \frac{1}{n-\sin n}$. Проверим для ряда (5.28) справедливость условий признака Абеля – Дирихле.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\right| = \left|\frac{2\sin 2\,(\sin 2 + \sin 4 + \sin 6 + \ldots + \sin(2n-4) + \sin(2n-2) + \sin 2n)}{2\sin 2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1 - \cos 4 + \cos 2 - \cos 6 + \cos 4 - \cos 8 + \ldots}{2\sin 2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(2n-6) - \cos(2n-2) + \cos(2n-4) - \cos 2n + \cos(2n-2) - \cos(2n+2)}{2\sin 2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1 + \cos 2 - \cos 2n - \cos(2n+2)}{2\sin 2}\right| \leqslant \frac{2}{\sin 2}.$$

Ограниченность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin 2k$ доказана. Исследуем на монотонность последовательность $a_n = (n - \sin n)^{-1}$. Вначале рассмотрим соответствующую функцию $y = \frac{1}{x - \sin x}$.

$$y' = \frac{-1 + \cos x}{(x - \sin x)^2} \leqslant 0$$

для любых допустимых x.

Функция невозрастающая на луче $[1,+\infty)$, а поэтому последовательность (a_n) будет невозрастающей для любого $n \in \mathbb{N}$. Также $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-\sin n} = 0$. Все условия признака Абеля – Дирихле выполняются, значит, ряд (5.28) – сходится.

Исследуем ряд (5.28) на абсолютную сходимость.

Составим ряд из модулей ряда (5.28).

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2n|}{n - \sin n}. \tag{5.29}$$

Имеем оценку снизу:

$$|A| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2n}{n - \sin n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,(n - \sin n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2\,(n - \sin n)}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n-\sin n)}$ расходится, так как $\frac{1}{n-\sin n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2(n-\sin n)}$ сходится (по признаку Абеля – Дирихле). Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n-\sin n}$ – расходится, поэтому расходится и ряд (5.29) (теорема сравнения). Ряд (5.28) сходится условно.►

Задания для самостоятельного решения

1. Выяснить, какие из данных знакочередующихся рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

1.1 $3-\frac{4}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n}+\ldots;$

1.2 $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots;$

1.3 $-1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\ldots;$

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)};$

1.5 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n};$

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)!!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)};$

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)};$

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n};$

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}{n};$

1.10 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}};$

1.11 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n};$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1,1)^n;$

1.13 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots;$

1.14 $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\ldots;$

1.15 $1-1+1+1-1-1+1+1+1-1-1-1+\ldots.$

2. Убедится в том, что признак Лейбница неприменим к данным знакочередующимся рядам. Выяснить, какие из них расходятся, какие сходятся условно, какие абсолютно:

2.1 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}+1} - \frac{1}{\sqrt{k}-1} + \ldots;$

2.2 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{3^{2k-1}} + \ldots;$

2.3 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{3^k} + \ldots;$

2.4 $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} + \ldots.$

3. При каких значениях α сходятся следующие ряды:

3.1 $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7} - \ldots;$

3.2 $1 + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots.$

4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия:

а) общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; число слагаемых a_i, входящих в член A_n, ограничено.

5. Показать, что заданные ряды сходятся. Исследовать сходимость рядов, получаемых из данных, если опустить скобки:

5.1 $1 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{8}{9}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{n^2-1}{n^2}\right) + \ldots;$

5.2 $\left(1 - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k)^2}\right] + \ldots;$

5.3 $\sqrt{2} + (3 - \sqrt{7}) + (\sqrt{28} - \sqrt{26}) + \ldots + \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right) + \ldots.$

Кафедра МАДУП

6. Зная, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ равна $\frac{\pi^2}{12}$, найти суммы рядов:

6.1 $1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} - \ldots;$

6.2 $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$, полученных из данного в результате перестановки его членов.

7. Дан условно сходящийся ряд. Изменится ли сумма ряда, если первые 1000 членов его переставить, а порядок следования остальных членов оставить без изменения?

8. Составить почленную разность расходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ и исследовать ее сходимость.

9. Сходится ли ряд, образованный почленным вычитанием ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

10. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ суммой его первых n членов. Оценить точность такого приближения при $n = 10$.

11. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ суммой его первых n членов. В частности, оценить точность такого приближения при $n = 1000$.

12. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(4n+1)\cdot 5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

13. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

14. Найти суммы рядов:

14.1 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots;$

14.2 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots;$

14.3 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5}+\ldots$, получаемых из ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots$ перестановкой членов.

15. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

15.1 $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots;$

15.2 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots;$

15.3 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots;$

15.4 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots;$

15.5 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots;$

15.6 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{7}+\ldots;$

15.7 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots;$

15.8 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots;$

15.9 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\ldots.$

16. Применяя признаки Лейбница, показать, что ряды сходятся условно:

16.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-4n+1}};$

16.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^9}{\sqrt{n^{20}+4n^3+1}};$

16.3 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^{25}n}{n};$

16.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}};$

16.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{3,1}}{2\sqrt{n}+n};$

16.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+20}.$

17. Исследовать сходимость (абсолютную и условную) рядов:

17.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$;

17.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

17.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2(n+1)}{2^n+3^n}$;

17.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin\frac{1}{n}$;

17.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

17.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

17.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$;

17.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

17.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{5^{\frac{n}{2}} - n^2}$;

17.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+\sin^2 n}$;

17.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$;

17.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

17.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.

18. Применяя признак Абеля – Дирихле, показать, что данные ряды сходятся условно.

18.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n+2}$;

18.2 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$;

18.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)}$;

18.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

18.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$;

18.6 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{(n+2)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^2-n+1}$.

19. Ответьте на вопросы итогового теста по разделу «Числовые ряды».

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

ЛЕКЦИЯ 6
Функциональные последовательности и ряды

6.1 Функциональные последовательности и ряды, их сходимость

Определение 6.1. *Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ по определенному закону (правилу) ставится в соответствие некоторая функция $f_n : X_n \to \mathbb{R}$ $(X_n \subset \mathbb{R})$, тогда это соответствие называется* ***функциональной последовательностью*** $(f_n(x))$ *с областью определения* $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Другими словами, функциональная последовательность – это множество занумерованных функций:

$$f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n, \dots .$$

Функции f_n $(n = \overline{1, \infty})$ называются **членами функциональной последовательности**.

Пусть задана последовательность функций $(f_n(x))$ с областью определения X. Тогда при каждом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $(f_n(x))$ может оказаться как сходящейся, так и расходящейся в зависимости от точки x.

Множество точек $x \in X$, для которых последовательность $(f_n(x))$ сходится, называется **областью сходимости** последовательности функций $(f_n(x))$.

Пример 6.1. Найти область определения и область сходимости функциональной последовательности с общим членом $f_n(x) = x^n$.

◀Все члены функциональной последовательности определены на числовой прямой, то есть область определения функциональной последовательности есть $\mathbb{R}$ $(X = \mathbb{R})$.

Очевидно, что для любого $x = x_0 \in (-1, 1)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_0^n = 0$; при $x_0 = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$. Но при $x > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$, а при $x < -1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = \infty$, если же $x = -1$, то не существует $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$.

Вывод: Функциональная последовательность сходится для любого $x \in (-1, 1]$, то есть полуинтервал $(-1, 1]$ есть область сходимости функциональной последовательности; область определения функциональной последовательности есть $\mathbb{R}$ $(X = \mathbb{R})$ ►.

Если $D \subset \mathbb{R}$ – область сходимости функциональной последовательности $(f_n(x))$, то множество всех пределов соответствующих числовых последовательностей есть множество значений некоторой функции $f : D \to \mathbb{R}$. Функция f называется **предельной функцией** функциональной последовательности $(f_n(x))$. В примере 6.1 предельной функцией функциональной последовательности (x^n) будет

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Другими словами, предельная функция f функциональной последовательности $(f_n(x))$ есть предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{6.1}$$

который по Коши определяется следующим образом:

$$\forall x \in D \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Дальше дадим понятие функционального ряда, его области определения и области сходимости.

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$ определена функциональная последовательность $(u_k(x))$. Тогда запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots \tag{6.2}$$

называется **функциональным рядом** с областью определения X.

Члены функциональной последовательности в этом случае называются **членами** или **слагаемыми** функционального ряда.

Возьмем любое $x = x_0 \in X$, тогда получим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(x_0\right), \tag{6.3}$$

который может сходиться, а может расходиться. Множество всех точек x из области определения ряда (6.2), для которых соответствующие числовые ряды сходятся, называется **областью сходимости** функционального ряда (6.2).

Замечание 6.1. Также как и для числовых рядов, для функциональных рядов вводится понятие n-й частичной суммы ряда

$$S_n\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k\left(x\right). \tag{6.4}$$

Сходимость функционального ряда – это и есть сходимость последовательности соответствующих частичных сумм $\left(S_n\left(x\right)\right)$, то есть функциональной последовательности.

По этой причине изучение функциональных рядов равносильно изучению функциональных последовательностей. Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(x\right) = S\left(x\right) \tag{6.5}$$

называется **суммой ряда** (6.2) (область определения функции S совпадает с областью сходимости соответствующего ряда).

По Коши (6.5) означает:

$$\forall x \in D \;\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\;\; \left|S\left(x\right) - S_n\left(x\right)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\left(x\right)\right| = \left|R_n\left(x\right)\right| < \varepsilon,$$

$R_n\left(x\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k\left(x\right)$ – n-й остаток ряда (6.2).

Замечание 6.2. Введенное нами понятие сходимости функциональной последовательности (функционального ряда) на некотором множестве называется поточечной сходимостью функциональной последовательности (функционального ряда).

Например, для исследования функциональных рядов на поточечную сходимость можно использовать аналоги признаков Даламбера и Коши на абсолютную и условную сходимость таких рядов. Если для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{6.6}$$

с областью определения $X \subset \mathbb{R}$ для фиксированных $x \in X$ существует

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \varphi(x), \tag{6.7}$$

то на множестве точек $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|\varphi(x)| < 1$, ряд будет сходиться, причем абсолютно (будет сходиться ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$). Если же $|\varphi(x)| > 1$, то на множестве точек, удовлетворяющих этому неравенству, ряд расходится. Если же $|\varphi(x)| = 1$, то на множестве точек, удовлетворяющих указанному уравнению, ряд может сходиться, а может и расходиться, причем сходимость может быть как абсолютной, так и условной. Для исследования сходимости в последнем случае находим корни уравнения $|\varphi(x)| = 1$ и поочередно подставляем их в (6.2). Получаем соответственно числовые ряды, которые исследуем на сходимость (расходимость) указанными раннее (для числовых рядов) методами.

Также можно использовать аналог признака Коши (заключения аналогичны указанным выше):

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k(x)|} = |\varphi(x)|. \tag{6.8}$$

Пример 6.2. Исследовать на сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k}^{\infty} \operatorname{ctg}^k(2x). \tag{6.9}$$

◀Для фиксированных $x \in \left(\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$ находим

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\operatorname{ctg}^k(2x)\right|} = |\operatorname{ctg}2x| = |\varphi(x)|\,.$$

Решаем неравенство $|\operatorname{ctg}2x| < 1$.

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < 2x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}.$$

В интервалах $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, ряд (6.9) сходится, причем абсолютно, а в интервалах $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$ $(|\varphi(x)| > 1)$ – расходится. Если $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ или $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(|\varphi(x)| = 1)$, то получим соответственно числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg}^k \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} 1, \; \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg}^k \frac{3\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\,,$$

которые расходятся, так как пределы их общих членов при $k \to \infty$ не равны нулю.▶

6.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Основной вопрос, который будет нас интересовать в дальнейшем, – это в какой мере свойства элементов функциональной последовательности (членов функционального ряда) такие, как непрерывность, интегрируемость и т.д., будут «наследоваться» ее пределом (суммой ряда). Уже простые примеры показывают, что предел последовательности непрерывных функций может оказаться разрывной функцией и т.п. Так, в примере 6.1 все члены функциональной последовательности $f_n(x) = x^n$ непрерывны на промежутке $(-1, 1]$, а предельная функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1)\,, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ терпит разрыв в точке $x = 1$.

Дальше мы изучим новое понятие, которое играет важную роль в рассматриваемом вопросе.

Определение 6.2. *Функциональная последовательность* $(f_n(x))$ *называется* ***равномерно сходящейся*** *на множестве* $E \subset \mathbb{R}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in E \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

где $f : E \to \mathbb{R}$ – *предельная функция функциональной последовательности.*

Обозначение равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x).$$

Если сформулировать определение 6.2 для функциональной последовательности $(S_n(x))$ частичных сумм функциоанльного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, получим определение его равномерной сходимости.

Определение 6.3. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *называется* ***равномерно сходящимся*** *на множестве* $E \subset \mathbb{R}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in E \;\; \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначение равномерной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x).$$

Теорема 6.1 (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности). *Функциональная последовательность* $(f_n(x))$ *будет равномерно сходиться на* $E \subset \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

◀Пусть функциональная последовательность равномерно сходится на E:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in E \;\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последнего неравенства видно, что число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ будет верхней границей для множества модулей $|f_n(x) - f(x)|$ при $n > n_0$. Но тогда

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in E \;\; \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Легко доказывается и достаточное условие (доказать самостоятельно).▶

Теорема 6.2 (критерий равномерной сходимости функционального ряда). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *будет равномерно сходиться на* $E \subset \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |S(x) - S_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |R_n(x)| = 0.$$

Пример 6.3. Доказать, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+x} \tag{6.10}$$

равномерно сходится на $E = [0, +\infty)$.

◀Ряд является рядом Лейбница для любого $x \in E$. Тогда

$$0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1+x} \right| = \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{6.11}$$

Из неравенства (6.11) видно, что $\frac{1}{n+1}$ есть верхняя граница для множества $\{|R_n(x)|\}$. Но тогда и

$$0 \leqslant \sup_{x \in \mathrm{E}} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{6.12}$$

Дальше воспользуемся теоремой о трех функциях: $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, а тогда и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in E} |R_n(x)| = 0,$$

т.е. ряд (6.10) равномерно сходится на E.▶

6.3 Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов

Теорема 6.3 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей). *Функциональная последовательность $(f_n(x))$ сходится равномерно на множестве $E \subset \mathbb{R}$ к предельной функции $f : E \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, p \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \quad \forall x \in E \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

◀**Необходимость.** Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда будем иметь:

а) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0' \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0'$, и для любого $x \in E$ будет справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0'' \in \mathbb{N}$, что для любых $n, p \in \mathbb{N}$, $n > n_0''$, для любого $x \in E$ будет выполняться неравенство $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Выбираем в качестве $n_0 = \max\{n_0';\ n_0''\}$. Тогда для любого $n > n_0$ и для любого $x \in E$ будут выполняться неравенства

$$\begin{cases} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

С учетом последней системы неравенств проведем оценку сверху:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f_n(x) - f(x) + f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, p \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \quad \forall x \in E \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n, p \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ \forall x \in E$$

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.13}$$

Тогда для любого $x \in E$ (x фиксируем) получим числовую последовательность, которая при наших условиях является фундаментальной (последовательностью Коши), а значит, эта последовательность сходится (критерий Коши для числовой последовательности). Значит, имеем поточечную сходимость функциональной последовательности $(f_n(x))$ к предельной функции f: для любого $x \in E$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Перейдя к пределу, в (6.13) получим:

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ (n+p)\to+\infty}} \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| = \left|\lim_{\substack{p\to+\infty \\ (n+p)\to+\infty}} f_{n+p}(x) - \lim_{p\to+\infty} f_n(x)\right| = \left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, и для любого $x \in E$, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ \forall x \in E\ \ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Теорема 6.4 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов). *Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \ \forall n, p \in \mathbb{N}\ n \geqslant n_0 \forall x \in E\ \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

6.4 Признаки Вейерштрасса и Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 6.5 (мажорантный признак Вейерштрасса). *Если для функционального ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{6.14}$$

существует такой положительный сходящийся числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{6.15}$$

и существуют $c > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, и для любого $x \in E$ будет выполняться неравенство

$$|u_k(x)| \leqslant c \cdot a_k, \tag{6.16}$$

то ряд (6.14) сходится равномерно и абсолютно на E.

◄Так как числовой положительный ряд (6.15) сходится, то по необходимому условию критерия Коши о сходимости числовых рядов

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geqslant n_0 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \frac{\varepsilon}{c}$$

(причем берем $n_0 \geqslant k_0$). Но тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant c \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon. \tag{6.17}$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ \ \forall n, p \in \mathbb{N} \ \ n \geqslant n_0 \ \ \forall x \in E \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon,$$

то есть ряд (6.14) сходится на E равномерно и абсолютно (достаточное условие критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда).▶

Пример 6.4. Исследовать на равномерную сходимость на $E = (-\infty, +\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}. \tag{6.18}$$

◀Очевидно, что для любых $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} = 0$, т.е. предельная функция $f(x) = 0$.
Найдем $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^5x^2}; \quad f_n'(x) = \frac{n(1 + n^5x^2) - nx \cdot n^5 2x}{(1 + n^5x^2)^2} = \frac{n - n^6x^2}{(1 + n^5x^2)^2};$$

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n - n^6x^2 = 0; \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{n^2\sqrt{n}}.$$

$$f_n\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n^2\sqrt{n}}}{1 + n^5\frac{1}{n^5}} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \quad \left|f_n\left(-\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + n^5x^2} = 0.$$

Тогда $|f_n(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится. По признаку Вейерштрасса ряд (6.18) сходится равномерно и абсолютно на $E = \mathbb{R}$.▶

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
115
Приложение
Закрыть

Теорема 6.6 (признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* $E \subset \mathbb{R}$, *если выполняются условия:*

1. *Последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно ограничена на множестве* E :

$$\exists M > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \quad \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant M < \infty.$$

2. *Последовательность* $(a_n(x))$ *монотонна для любого* $x \in E$ *(при любом фиксированном* $x \in E$*) и равномерно стремится к нулю при* $n \to \infty$.

Пример 6.5. Исследовать на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}}. \tag{6.19}$$

◀Пусть $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ и $b_n(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx$. Тогда для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx$

$$S_n(x) = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x + \ldots +$$

$$+\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{5}{2}\right)x + \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x +$$

$$+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = -\sin\frac{x}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Видно, что $|S_n(x)| \leqslant 2$ для любых $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $(S_n(x))$ равномерно ограничена на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательность $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$. Обозначим $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}$.

$$\varphi'(t) = \frac{-\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}}}{t^2+x^2} < 0 \text{ при } t \geqslant 1.$$

Значит, φ – убывающая функция при $t \geqslant 1$, т.е. последовательность $(a_n(x))$ – убывающая (монотонная) для любого $x \in \mathbb{R}$ (при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$). Кроме того,

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leqslant \frac{1}{n}; \quad \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} = 0$, то есть последовательность $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ равномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}$.

По признаку Абеля – Дирихле ряд (6.19) сходится равномерно на $\mathbb{R}$.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие функциональной последовательности, ее области определения и области сходимости.
2. Дайте понятие функционального ряда, его области определения и области сходимости.
3. Дайте понятие поточечной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
4. Дайте определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
5. Сформулируйте критерий равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
6. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов.
7. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса.
8. Сформулируйте признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Область сходимости функциональной последовательности и ряда. Равномерная сходимость

Задание 1. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n+\ldots. \qquad (6.20)$$

◀По признаку Даламбера ряд (6.20) будет абсолютно сходится при тех значениях x, для которых будет выполняться неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$.

В нашем случае для любых фиксированных $x\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n+1}}{\frac{1}{2n-1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n}}=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

Неравенство $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ выполняется при $x>0$. При $x<0$ $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$, а потому по признаку Даламбера ряд расходится. Осталось исследовать ряд при $x=0$. При $x=0$ получим ряд

$$-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n-1}+\ldots, \qquad (6.21)$$

который сходится по признаку Лейбница. Так как ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$ расходится, то ряд (6.21) сходится лишь условно.

Итак, областью сходимости ряда (6.20) является полуось $0\leqslant x<\infty$, причем на открытой полуоси $0<x<\infty$ он сходится абсолютно.▶

Задание 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}. \tag{6.22}$$

◀Применим для исследования абсолютной сходимости ряда (6.22) признак Даламбера.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}}{\frac{x^n}{1+x^{2n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right|.$$

Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right| = |x| < 1,$$

а потому ряд абсолютно сходится.

Если $|x| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}} + 1} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1,$$

и ряд снова абсолютно сходится. При $x = -1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$ и расходится, так как его общий член не стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности, а при $x = 1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ и сходится как геометрический. Поэтому область сходимости ряда есть множество $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.▶

Задание 3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2}. \tag{6.23}$$

◀Воспользуемся «эталонным» рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который сходится, если $\alpha > 1$, и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Общий член ряда (6.23) $n^{-\ln x^2} = \frac{1}{n^{\ln x^2}}$, поэтому ряд (6.23) будет сходиться, причем абсолютно, если

$$\ln x^2 > 1 \Leftrightarrow \ln x^2 > \ln e \Leftrightarrow x^2 > e \Leftrightarrow |x| > \sqrt{e}.$$

Область сходимости ряда (6.23), причем абсолютной, есть множество $(-\infty, -\sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, +\infty)$.▶

Задание 4. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n\,(n+1)}. \tag{6.24}$$

◀Применим для исследования абсолютной сходимости ряда признак Коши.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n\,|\sin x|^n}{n\,(n+1)}} = 2\,|\sin x| < 1 \Leftrightarrow |\sin x| < \frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

при таких значениях x ряд (6.24) будет сходиться абсолютно.

Исследуем сходимость на концах полученных интервалов, т.е. для тех x, при которых $2|\sin x| = 1$. Если $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin x = \frac{1}{2}$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, который сходится по признаку сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Если $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin x = -\frac{1}{2}$. Имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, который также сходится абсолютно. Область сходимости ряда (6.24) определяется неравенствами $|x - \pi n| \leqslant \frac{\pi}{6}$, причем ряд сходится абсолютно.▶

Задание 5. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1 - x^n)(1 - x^{n+1})}. \tag{6.25}$$

◀Вначале находим область определения ряда (6.25). Это будет множество $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Пусть

$$u_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(1 - x^n)(1 - x^{n+1})}.$$

Для фиксированных $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ исследуем предел

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n (1 - x^n)(1 - x^{n+1})}{x^{n-1} (1 - x^{n+1})(1 - x^{n+2})} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x (1 - x^n)}{1 - x^{n+2}} \right|.$$

Пусть $|x| < 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |x|.$$

Значит, при $|x| < 1$ ряд (6.25) сходится абсолютно.

Пусть $|x| > 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} \left(\frac{1}{x^n} - 1\right)}{x^{n+2} \left(\frac{1}{x^{n+2}} - 1\right)} \right| = \frac{1}{|x|}.$$

Так как $|x| > 1$, то $\frac{1}{|x|} < 1$. Значит, при $|x| > 1$ ряд также сходится абсолютно.

Таким бразом, $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ – область сходимости ряда, причем абсолютной.▶

Задание 6. Исследовать равномерную сходимость функциональной последовательности

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}. \tag{6.26}$$

◀Найдем поточечный предел последовательности (6.26):

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0. \tag{6.27}$$

Значит, предельная функция функциональной последовательности имеет вид $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Исследуем (6.26) на равномерную сходимость, используя критерий равномерной сходимости функциональной последовательности.

Для нахождения $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ найдем критические точки функции $y = \frac{x}{1+nx^2}$:

$$y' = \frac{1+nx^2 - x\cdot 2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2};\ y' = 0,\ 1-nx^2 = 0,\ x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Элементы функциональной последовательности – нечетные функции. Достаточно найти

$$\sup_{x\geqslant 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geqslant 0} \frac{x}{1+nx^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Аналогично и для $x < 0$.

Функциональная последовательность $(f_n(x))$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$.▶

Задание 7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{n + \operatorname{arcctg} nx}{3nx} \tag{6.28}$$

на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

◀Вначале покажем, что последовательность (6.28) сходится на каждом из множеств E_1 и E_2, и найдем ее предельную функцию.

$$\forall x \in E_1 \cup E_2 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n + \operatorname{arcctg} nx}{3nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3nx} \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}\right) = \frac{1}{3x} = f(x).$$

Дальше докажем, что на множестве E_1 сходимость функциональной последовательности (6.28) будет неравномерной. Воспользуемся следующим отрицанием определения равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \exists x \in E_1 \quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем любое $n_0 \in \mathbb{N}$. В качестве n возьмем $n = n_0 + 1$, а $x = \frac{1}{n_0+1}$. Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n_0 + 1 + \operatorname{arcctg} \frac{n_0+1}{n_0+1}}{3(n_0+1) \cdot \frac{1}{n_0+1}} - \frac{n_0+1}{3} \right| = \left| \frac{\operatorname{arcctg} 1}{3} \right| = \frac{\pi}{12}.$$

В качестве ε можно взять любое действительное число из полуинтервала $\left(0, \frac{\pi}{12}\right]$. В этом случае отрицание определения равномерной сходимости будет выполняться.

Таким образом, на множестве $E_1 = (0, 1)$ функциональная последовательность (6.28) сходится неравномерно.

Покажем, что на множестве $E_2 = (1, +\infty)$ сходимость функциональной последовательности будет равномерной. Воспользуемся следующим определением: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \forall x \in E_2 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в определении n_0 оценим сверху $|f_n(x) - f(x)|$:

$$\left|\frac{n + \operatorname{arcctg} nx}{3nx} - \frac{1}{3x}\right| = \frac{1}{3x}\left|\frac{n + \operatorname{arcctg} nx - n}{n}\right| = \frac{|\operatorname{arcctg} nx|}{3xn} < \frac{\frac{\pi}{2}}{3 \cdot 1 \cdot n} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{n}. \tag{6.29}$$

В правой части (6.29) потребуем, чтобы $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда $n > \frac{\pi}{6\varepsilon}$. Пусть $n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{\pi}{6\varepsilon}\right]\right\}$. При таком выборе n_0 будет выполняться определение равномерной сходимости функциональной последовательности (6.28) на множестве $E_2 = (1, +\infty)$ к предельной функции $f(x) = \frac{1}{3x}$.▶

Задание 8. Доказать, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{8n+1} + x} \tag{6.30}$$

равномерно сходится на луче $[-2, +\infty)$.

◀Воспользуемся критерием равномерной сходимости функциональных рядов.

Вначале покажем, что ряд (6.30) есть ряд Лейбница. Он знакочередующийся. При любых фиксированных $x \in [-2, +\infty]$ последовательность

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{8n+1} + x} \tag{6.31}$$

убывающая, так как

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{8n+1} + x} > \frac{1}{\sqrt{8n+9} + x} = u_{n+1}(x).$$

Кроме того,

$$\forall x \in [-2, +\infty) \quad \lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{8n+1} + x} = 0.$$

Дальше воспользуемся тем, что модуль n-го остатка ряда Лейбница не превосходит модуля первого члена этого остатка.

Для любых $x \in [-2, +\infty)$

$$0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{8n+9}+x} \right| = \frac{1}{\sqrt{8n+9}+x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{8n+9}-2}.$$

Выражение $\frac{1}{\sqrt{8n+9}-2}$ есть верхняя граница $|R_n(x)|$, а тогда

$$0 \leqslant \sup_{x\in[-2,+\infty]} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{8n+9}-2}.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{8n+9}-2} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-2,+\infty]} |R_n(x)| = 0,$$

то есть ряд (6.30) сходится равномерно на луче $[-2, +\infty)$. ►

Задание 9. Доказать что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \tag{6.32}$$

сходится равномерно на любом отрезке числовой прямой, но не сходится абсолютно ни при одном значении $x \in \mathbb{R}$.

◄Возьмем любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. При любом $x \in [a, b]$ ряд (6.32) будет рядом Лейбница (показать), поэтому он сходится на $E = [a, b]$.

Проведем следующие оценки

$$\forall x \in [a,b] \quad 0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant \frac{x^2+n+1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{(\max\{|a|,\ |b|\})^2+n+1}{(n+1)^2};$$

$$0 \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |R_n(x)| \leqslant \frac{(\max\{|a|,|b|\})^2+n+1}{(n+1)^2} = \alpha_n.$$

Теперь воспользуемся теоремой о трех функциях:

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Поэтому и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |R_n(x)| = 0.$$

Значит, ряд (6.32) равномерно сходится на любом отрезке $[a,b]$ числовой прямой. С другой стороны, для любого $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка снизу

$$\frac{x^2+n}{n^2} \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}. \tag{6.33}$$

Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому по теореме сравнения с учетом оценки (6.33) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2}$$

также расходится при любых $x \in \mathbb{R}$.▶

Задание 10. Доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{3^k\sqrt{1+kx^2}} \tag{6.34}$$

на отрезке $[0,2]$, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

◀Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в теореме натурального числа n_0 оценим сверху $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|$. Исследуем на наибольшее значение функцию

$$\varphi_k(x) = \frac{x}{3^k\sqrt{1+kx^2}}$$

на отрезке $[0,2]$.

$$\varphi_k'(x) = \frac{1}{3^k}\cdot\frac{\sqrt{1+kx^2} - x\frac{kx}{\sqrt{1+kx^2}}}{1+kx^2} = \frac{1}{3^k\left(1+kx^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

для любых $x \in [0,2]$, то есть φ_k возрастает на отрезке $[0,2]$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{2}{3^k\sqrt{1+4k}} < 2\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{3^k} = 2\cdot\frac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1-\frac{1}{3^p}\right)}{1-\frac{1}{3}} < 3\cdot\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$, тогда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве искомого $n_0 \in \mathbb{N}$ возьмем $n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$.▶

Задание 11. Доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}\sin kx-\sqrt{k}\sin(k+1)x}{\sqrt{k^2+k}} \tag{6.35}$$

на $\mathbb{R}$, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

◀Тождественно преобразуем функциональный ряд (6.35):

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}-\frac{\sin(k+1)x}{\sqrt{k+1}}\right). \tag{6.36}$$

Зададимся любым $\varepsilon>0$. Оценим сверху модуль

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}\left(\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}-\frac{\sin(k+1)x}{\sqrt{k+1}}\right)\right|=\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}-\frac{\sin(n+1+p)x}{\sqrt{n+1+p}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}}+\frac{|\sin(n+1+p)|}{\sqrt{n+1+p}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon\Leftrightarrow\sqrt{n}>\frac{2}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{4}{\varepsilon^2}.$$

В качестве $n_0\in\mathbb{N}$ возьмем $n_0=\max\left\{1,\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]\right\}$. ▶

Задание 12. Показать, что на луче $0 \leqslant x < \infty$ функциональный ряд

$$\frac{1}{3\sqrt{1+x}} + \frac{1}{9\sqrt{1+3x}} + \ldots + \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n-1)\,x}} + \ldots$$

равномерно сходится. Начиная с какого номера n остаток ряда $R_n\,(x)$ (независимо от значения x) удовлетворяет неравенству $|R_n\,(x)| < 0,01$?

◀Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Так как при $x \geqslant 0$

$$\sqrt{1+(2n-1)\,x} > 1,$$

то члены данного ряда в заданном интервале не больше соответствующих членов ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots, \tag{6.37}$$

представляющего собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{3}$ и, следовательно, сходящегося. Поэтому данный ряд сходится равномерно.

Для оценки остатка $R_n\,(x)$ функционального ряда подсчитаем остаток числового ряда (6.37). Имеем:

$$R_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} + \ldots = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

Остаток $R_n\,(x)$ данного функционального ряда будет не больше остатка числового ряда (6.37), поэтому

$$R_n\,(x) \leqslant \frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

Найдем теперь, при каком значении n будет выполняться неравенство $R_n\,(x) < 0,01$. Для этого решаем неравенство $\frac{1}{2\cdot 3^n} < 0,01 \Leftrightarrow 3^n > 50$. Откуда $n \geqslant 4$.▶

Задание 13. Доказать, что ряд

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots \tag{6.38}$$

равномерно сходится на всей числовой оси.

◀Воспользуемся признаком Вейерштрасса.

Так как $|\sin nx| \leqslant 1$, то для всех x выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Значит, сходящийся числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

является мажорантой ряда (6.38), а потому ряд (6.38) равномерно сходится на всей числовой оси.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Определить область сходимости и область абсолютной сходимости данных функциональных рядов:

1.1 $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots;$

1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x};$

1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x};$

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n;$

1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n};$

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n;$

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n;$

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}};$

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2n-1})};$

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)};$

1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\ldots(x+n)};$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2};$

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n};$

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+x};$

1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n\sin x}};$

1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln x)^n};$

1.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\sin^n x}{n(n+2)};$

1.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos^n x}{n^4};$

1.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(x+1)^n};$

1.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2+n+1};$

1.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3};$

1.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$;

1.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x-3)^n}$;

1.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{|x|}}{2^{n \sin x}}$;

1.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;

1.26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+2^n}$;

1.27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$;

1.28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{x^2+n^2}$;

1.29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^4+n}$;

1.30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2+1}$;

1.31 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos^2 x}$;

1.32 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.

2. Найти сумму ряда:

2.1 $\frac{3}{1+3x} + \frac{5}{(1+3x)(1+5x)} + \frac{7}{(1+3x)(1+5x)(1+7x)} + \ldots,\ x>0;$

2.2 $\frac{2}{1+2x} + \frac{3}{(1+2x)(1+3x)} + \frac{4}{(1+2x)(1+3x)(1+4x)} + \ldots,\ x>0;$

2.3 $\frac{1^2}{x^2+2^2} + \frac{(2!)^2}{(x^2+2^2)(x^2+3^2)} + \frac{(3!)^2}{(x^2+2^2)(x^2+3^2)(x^2+4^2)} + \ldots,\ x>0.$

3. Исследовать равномерную сходимость ряда на множестве E:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n^2x^2}},\ E=(-\infty,+\infty);$

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n},\ E=(-2,+\infty);$

3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n},\ E=\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right];$

3.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n}+(n+1)x}},\ E=[0,+\infty);$

3.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$, $E = [0, +\infty)$;

3.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+(nx)^3}$, $E = [0, 1]$;

3.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-xn}$, $E = [0, +\infty)$;

3.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^x}{n!}$, $E = [-1, 1]$;

3.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+nx+x^2}$, $E = (0, 10)$;

3.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n+1)x}}$, $E = (0, +\infty)$;

3.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^x(n+2)}{n!}$, $E = (0, +\infty)$.

4. Доказать, что последовательность функций $u_n(x) = xe^{-nx}$ равномерно сходится к нулю на луче $[0, +\infty)$.

5. При каких значениях α последовательность функций $u_n(x) = n^\alpha xe^{-nx}$ равномерно сходится к нулю на луче $[0, +\infty]$?

6. Показать, что последовательности сходятся на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, но не равномерно:

6.1 $u_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$;

6.2 $u_n(x) = \sin^n x$;

6.3 $u_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}$;

6.4 $u_n(x) = [f(x)]^n$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

6.5 $u_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, где $f(x)$ имеет тот же смысл, что и выше.

7. Определить при $0 < x \leqslant 1$ сумму и остаток функционального ряда

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^{n-1} + \ldots$$

и показать, что он сходится равномерно на отрезке $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. При каком значении n остаток данного ряда удовлетворяет неравенству $|R_n(x)| < 0,01$ независимо от значения x на этом отрезке?

8. Показать, что функциональный ряд

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \ldots + \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)} + \ldots$$

равномерно сходится к функции $\frac{1}{2(x+1)}$ для всех $x \geqslant 0$. При каком значении n остаток ряда удовлетворяет неравенству $|R_n(x)| < 0,01$ для любого $x \geqslant 0$.

9. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$$

равномерно сходится на луче $[0,+\infty)$. Сколько членов ряда нужно взять, чтобы его остаток на всем луче $[0,+\infty)$ не превосходил $0,01$?

10. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$$

абсолютно сходится при $x \neq 0$, но не является равномерно сходящимся на полуоси $0 < x < +\infty$.

11. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$$

равномерно сходится на всей числовой прямой, а ряд из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

всюду сходится, но неравномерно.

12. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

12.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leqslant x < \infty$;

12.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

12.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n - x^{-n}\right)$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$;

12.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < \infty$;

12.5 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots$ на отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b$.

ЛЕКЦИЯ 7
Свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда

7.1 Непрерывность предельной функции функциональной последовательности и суммы функционального ряда

Теорема 7.1 (о перестановке пределов). *Пусть функциональная последовательность $(f_n(x))$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $(f_n(x))$ сходится равномерно к функции f в некоторой проколотой окрестности точки a,

2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$.

Тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, т.е.

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

◀Из критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \overset{o}{U}_a \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $x \to a$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N} \quad |b_n - b_m| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда из критерия Коши для числовых последовательностей следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Выберем теперь n таким образом, чтобы $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in \overset{o}{U}_a$, и при таком n выберем проколотую окрестность $\overset{o}{V}_a$ точки a так, чтобы $|f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in \overset{o}{V}_a$.

В итоге получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overset{o}{V}_a \ \ \forall x \in \overset{o}{V}_a \quad |f(x) - b| < \varepsilon. \ ▶$$

Теорема 7.2. *Если функциональная последовательность $(f_n(x))$ сходится равномерно к функци f в некоторой окрестности точки a, и все функции f_n непрерывны в точке a, то и функция f непрерывна в точке a.*

◀Доказательство теоремы следует из теоремы 7.1.▶

Следствие 7.1. *Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$ и для любых $n \in \mathbb{N}$ функции f_n непрерывны на E, то и функция f непрерывна на E.*

Следствие 7.2. *Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ и и для любых $n \in \mathbb{N}$ функции U_n непрерывны на E, то и функция S непрерывна на E.*

7.2 Почленное интегрирование функциональных последовательностей и функциональных рядов

Теорема 7.3. *Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$ и для любых $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C([a,b])$, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

◀Из непрерывности членов функциональной последовательности и ее равномерной сходимости на $[a,b]$ следует, что $f \in C([a,b])$ (следствие 7.1). А тогда существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Из равномерной сходимости функциональной последовательности на $[a,b]$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

А тогда для любого $x \in [a,b]$

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in [a,b] \quad \left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Пример 7.1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx,$$

где $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.
Выяснить причины нарушения заключения теоремы 7.3.

$\blacktriangleleft$ $f_n(0) = 0$. Если $x \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} = 0.$
Тогда

$$\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 0dx = 0.$$

С другой стороны:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1 e^{-nx^2}d\left(-nx^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-nx^2}\Big|_0^1=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-n}-1\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n\left(x\right)dx\neq\int\limits_0^1\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)dx. \qquad (7.1)$$

Дальше покажем, что $(f_n(x))$ не сходится равномерно к $f(x)=0$ на отрезке $[0,1]$. Применим для этого критерий равномерной сходимости функциональной последовательности. Для любого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ исследуем функцию f_n на наибольшее значение на отрезке $[0,1]$.

$$f_n'\left(x\right)=\left(nxe^{-nx^2}\right)_x'=ne^{-nx^2}-nxe^{-nx^2}\cdot 2nx=ne^{-nx^2}\left(1-2nx^2\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Тогда

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\frac{n}{\sqrt{2n}}\cdot e^{-0{,}5}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\neq 0,$$

и функиональная последовательность $(f_n(x))$ не сходится равномерно на $E=[0,1]$, то есть условие теоремы 7.3 нарушается. В этом и состоит причина полученного неравенства (7.1).▶

Теорема 7.4. *Если $u_k \in C([a,b])$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, то справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_k(x)\,dx.$$

По следствию 7.2 функция S в теореме 7.4 непрерывна и потому интегрируема на $[a,b]$.

Пример 7.2. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

◀Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Применим признак Вейерштрасса:

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\right| = \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к некоторой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Члены этого ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, но тогда (следствие 7.2) и функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, а поэтому и на отрезке $[0, 2\pi]$. По теореме 7.4

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \pi,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

то есть, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ▶

Брэсцкі дзяржаўны універсітэт імя А.С. Пушкіна

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

7.3 Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и функциональных рядов

Теорема 7.5. *Пусть для последовательности* $(f_n(x))$ *выполняются следующие условия:*
1) *для любых* $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n \in C^1([a,b])$,
2) $(f'_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$,
3) $(f_n(x_0))$ *сходится для некоторого* $x_0 \in [a,b]$.

Тогда последовательность $(f_n(x))$ *сходится равномерно на* $[a,b]$ *к дифференцируемой функции* f *и* $f'(x) = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$.

◄Из условия 1 теоремы и следствия 7.2 получаем, что $\varphi \in C([a,b])$. Из условий 2 и 3 теоремы и соответствующих необходимых условий критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n, p \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \forall x \in [a,b] \ \begin{cases} \left| f'_{n+p}(x) - f'_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \\ \left| f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

На отрезке $[x, x_0]$ выполняются условия теоремы Лагранжа для функции $\mu(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x)$, поэтому существует $\xi \in (x, x_0)$, что для любого $x \in [a,b]$ будет $\mu(x) - \mu(x_0) = \mu'(\xi)(x - x_0)$. Тогда

$$|\mu(x)| = |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |\mu(x) - \mu(x_0) + \mu(x_0)| \leqslant |\mu(x_0)| + |\mu(x) - \mu(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

то есть

$$(f_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x).$$

По теореме 7.3:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} \left(\lim_{n\to\infty} f'_n(z)\right) dz = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} f_n(z)\Big|_{x_0}^{x} = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = f(x) - f(x_0),$$

то есть

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(z)\, dz,$$

где $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(z)\, dz$ – интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Тогда $f'(x) = \varphi(x)$.▶

Теорема 7.6. *Если члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \sigma(x)$, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к дифференцируемой функции S и $S'(x) = \sigma(x)$.*

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте условия непрерывности предельной функции функциональной последовательности.
2. Сформулируйте условия непрерывности суммы функционального ряда.
3. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.
4. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
5. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности.
6. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда

Задание 1. Найти область определения функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{7.2}$$

и исследовать ее на непрерывность.

◄Найдем область сходимости функционального ряда (7.2) с помощью признака Коши.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right) = x^2.$$

Ряд (7.2) сходится, если $x^2 < 1$, и расходится, если $x^2 > 1$. Иными словами, ряд сходится на промежутке $(-1, 1)$. В точках $x = \pm 1$ он расходится, поскольку при $x = \pm 1$ общий член ряда равен $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ (не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

Исследуем теперь функцию f на непрерывность. Для этого докажем, что ряд (7.2) равномерно сходится на любом отрезке $[-a, a]$, где $0 < a < 1$. Выберем число b, лежащее между a и 1, $0 < a < b < 1$. Найдется такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ будет $a + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant b$. Но тогда при $n \geqslant n_0$ и $|x| \leqslant a$ выполняется неравенство

$$\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(|x| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leqslant \left(a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant b^{2n}.$$

Это неравенство показывает, что сходящийся числовой ряд $b^2 + b^4 + \ldots + b^{2n} + \ldots$ (геометрическая прогрессия со знаменателем $b^2 < 1$) является мажорантой для ряда (7.2) на отрезке $[-a, a]$, а потому ряд (7.2) равномерно сходится на этом отрезке. Следовательно, функция f непрерывна на отрезке $[-a, a]$. В силу произвольности a, $0 \leqslant a < 1$, функция f непрерывна на всем промежутке $(-1, 1)$.►

Задание 2. Найти область определения функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx} \tag{7.3}$$

и исследовать ее на непрерывность.

◀Если $x < 0$, то предел общего члена ряда (7.3) $\lim\limits_{n\to\infty} xe^{-nx} = -\infty \neq 0$, если $x = 0$, то $f(x) = 0$. Пусть $x > 0$, тогда

$$f(x) = x\left(\frac{1}{e^x} + \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{e^x}\right)^3 + \ldots\right) = x \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{x}{e^x - 1},$$

но

$$\lim_{x\to+0} \frac{x}{e^x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[e^x - 1 \underset{x\to+0}{\sim} x\right] = \lim_{x\to+0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} ,$$

точка $x = 0$ – точка устранимого разрыва функции f.▶

Задание 3. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \tag{7.4}$$

непрерывна при $x > 0$ и вычислить интеграл

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\, dx.$$

◀Возьмем любое $x_0 \in (0, +\infty)$. Пусть $0 < a < x_0 < b$. Члены ряда (7.4) непрерывны на отрезке $[a, b]$. Докажем, что ряд (7.4) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Справедлива оценка:

$$\forall x \in [a, b] \quad |u_n(x)| = \frac{n}{e^{nx}} \leqslant \frac{n}{e^{an}}.$$

Покажем, используя признак Коши в предельной форме (теорема 3.3), что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{an}}$ сходится.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^{an}}} = e^{-a} \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{-a} \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{-a} e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{-a} < 1.$$

Таким образом, функциональный ряд (7.4) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, а это значит, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, в том числе и в точке $x = x_0$. Так как $x = x_0$ любая точка открытого луча $(0, +\infty)$, то функция f непрерывна на этом луче.

У нас выполняются все условия теоремы об интегрировании функциональных рядов для ряда (7.4) на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Найдем $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\, dx$.

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} e^{-nx} dx =$$

$$= -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) = -\left(\frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{3}{4}. \text{▶}$$

Задание 4. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)' \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

◀Для доказательства равномерной сходимости последовательности $(f_n(x))$ на $\mathbb{R}$ воспользуемся критерием равномерной сходимости функциональной последовательности. Вначале найдем предельную функцию последовательности $(f_n(x))$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \left(x^3 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = x^3 = f(x).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то есть функциональная последовательность $(f_n(x))$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Дальше находим

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = (x^3)' = 3x^2.$$

С другой стороны,

$$f_n'(x) = 3x^2 + \frac{1}{n} \cos n \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot n = 3x^2 + \cos n \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

но $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(3x^2 + \cos n \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ не существует.▶

Задание 5. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2 + x^2} \tag{7.5}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx. \tag{7.6}$$

◀Члены ряда (7.5) $u_n(x) = \frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на числовой прямой. Кроме того, ряд (7.5) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ в силу признака Вейерштрасса (для любых $x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2} < \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится). То есть сумма ряда (7.5) есть непрерывная функция на $\mathbb{R}$.

Дальше вычислим несобственный интеграл (7.6), используя теорему о почленном интегрировании функциональных рядов (выполнение условий покажите самостоятельно).

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{n^2(n+1)^2 + x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx}{n^2(n+1)^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{dx}{n^2(n+1)^2 + x^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \operatorname{arctg} \frac{x}{n(n+1)}\Bigg|_0^A = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\operatorname{arctg} \frac{A}{n(n+1)} - 0\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 6. Определить область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}} \tag{7.7}$$

и доказать существование производной суммы ряда на области его сходимости.

◀Члены ряда определены на $\mathbb{R}$. Исследуем абсолютную сходимость ряда (7.7) с помощью признака Даламбера:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)(x+1)}\left(1+2^{nx}\right)}{2^{n(x+1)}\left(1+2^{(n+1)x}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{x+1}\left(1+2^{nx}\right)}{1+2^{(n+1)x}}.$$

Возможные следующие случаи.

а) Если $x>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{x+1}2^{nx}\left(1+\frac{1}{2^{nx}}\right)}{2^{(n+1)x}\left(1+\frac{1}{2^{(n+1)x}}\right)} = 2 > 1$, и ряд (7.7) расходится.

б) Если $x=0$, то $u_n(0) = 2^n$ не стремится к 0 при $n\to\infty$ и ряд (7.7) расходится.

в) Если $x<0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{x+1}(1+2^{nx})}{1+2^{(n+1)x}} = 2^{x+1}$, и ряд (7.7) сходится, причем абсолютно, если

$$2^{x+1} < 1 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 2^0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Если же $2^{x+1} = 1$, т.е. $x=-1$, то имеем расходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^{-n}}$ (предел общего члена ряда не равен нулю).

Таким образом, область сходимости функционального ряда (7.7) есть открытый луч $(-\infty,-1)$.

Дальше докажем, пользуясь теоремой о дифференцировании функциональных рядов, что существует производная суммы ряда (7.7) на $(-\infty,-1)$.

Берем любую точку $x\in(-\infty,-1)$. Пусть отрезок $[a,b]\subset(-\infty,-1)$ и $x\in[a,b]$. Докажем, что ряд, составленный из производных членов ряда (7.7) сходится равномерно на $[a,b]$.

$$\left(\frac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}}\right)' = \frac{2^{n(x+1)}\cdot n\cdot\ln 2\cdot(1+2^{nx}) - 2^{nx}\cdot n\cdot \ln 2\cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^2} = \frac{n\cdot\ln 2\cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^2} = y(x).$$

Имеем функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \ln 2 \cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^2}. \tag{7.8}$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (7.8) воспользуемся признаком Вейерштрасса. Для оценки сверху общего члена ряда (7.8) докажем, что функция y возрастает на $[a, b]$:

$$y'(x) = \frac{n^2 \ln^2 2 \cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^3} (1 - 2^{nx}) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \subset (-\infty, -1)\,.$$

Таким образом,

$$\forall x \in [a, b] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \ln 2 \cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^2} \leqslant \frac{n \ln 2 \cdot 2^{n(b+1)}}{(1+2^{nb})^2}.$$

Докажем, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \ln 2 \cdot 2^{n(b+1)}}{(1+2^{nb})^2}. \tag{7.9}$$

сходится. Справедлива оценка

$$\frac{n \ln 2 \cdot 2^{n(b+1)}}{(1+2^{nb})^2} < n \cdot 2^{n(b+1)}.$$

У нас $b < -1$, $b + 1 < 0$. Пусть $\alpha = -(b + 1)$, $\alpha > 0$. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n\alpha}}. \tag{7.10}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{\frac{n\alpha}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\alpha}{2}} = 0,$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть

то найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, будет справедливо неравенство

$$\frac{n}{2^{n\alpha}} = \frac{n}{2^{\frac{n\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}}} < C \cdot \frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}}}, \quad C > 0.$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}}}$$

сходится, используя интегральный признак сходимости (возможность его применения докажите самостоятельно). Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} 2^{\frac{-\alpha x}{2}} dx = \lim_{B\to+\infty} \int_0^B 2^{-\frac{\alpha x}{2}} dx = -\frac{2}{\alpha \ln 2} \lim_{B\to+\infty} 2^{-\frac{\alpha x}{2}} \Big|_0^B = -\frac{2}{\alpha \ln 2} \lim_{B\to+\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{\alpha B}{2}}} - 1 \right) = \frac{2}{\alpha \ln 2}$$

сходится. Тогда согласно признаку сравнения в форме неравенств сходятся и числовые ряды (7.10) и (7.9). Выполняются все условия признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, то есть функциональный ряд (7.8) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. В этом случае выполняются все условия теоремы о дифференцировании функциональных рядов на $[a, b]$, то есть существует производная суммы ряда (7.7) на $[a, b]$, поэтому и для любой точки $x \in (-\infty, -1)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n(x+1)}}{1 + 2^{nx}} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n(x+1)}}{1 + 2^{nx}} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \ln 2 \cdot 2^{n(x+1)}}{(1 + 2^{nx})^2}. \blacktriangleright$$

Задание 7. Проверить, выполняются ли условия теоремы об интегрировании функциональных последовательностей (если нет, то справедливо ли заключение этой теоремы) для функциональной последовательности

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, \quad x \in [0,1]. \tag{7.11}$$

◀Вначале находим предельную функцию для последовательности (7.11):

$$\forall x \in [0,1] \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Дальше найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^4} = y, \; y' = \frac{n(1+n^2x^4) - nx\cdot 4x^3n^2}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n(1-3n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2},$$

$$y' = 0, \; 1 - 3n^2x^4 = 0, \; x = \frac{1}{\sqrt[4]{3n^2}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3n^2}}}{1+n^2\cdot\frac{1}{3n^2}} = +\infty.$$

Значит, функциональная последовательность (7.11) сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$. Дальше выясним, справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}dx.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(nx^2)}{1+(nx^2)^2} = \begin{bmatrix} t = nx^2, \\ t_{\text{н}} = 0, \\ t_{\text{в}} = n \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_0^n \frac{dt}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^n = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Заключение теоремы также неверно $\left(\frac{\pi}{4} \neq 0\right)$.►

Задание 8. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(nx^n - (n-1)x^{n-1}\right)(1-x) \qquad (7.12)$$

сходится неравномерно на отрезке $[0, 1]$, но справедливо равенство

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(nx^n - (n-1)x^{n-1}\right)(1-x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(nx^n - (n-1)x^{n-1}\right)(1-x)dx. \qquad (7.13)$$

◄Вначале найдем сумму ряда (7.12).

$$S_n(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{n}(kx^k - (k-1)x^{k-1}) = (1-x)(x + 2x^2 - x + 3x^3 - 2x^2 + 4x^4 - 3x^3 + \ldots +$$

$$+(n-1)x^{n-1} - (n-2)x^{n-2} + nx^n - (n-1)x^{n-1} = (1-x)nx^n \xrightarrow[n\to\infty]{[0,1]} 0 = S(x).$$

Воспользуемся критерием равномерной сходимости функциональности рядов.

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = (x-1)nx^n, \ |R_n(x)| = (1-x)nx^n = y,$$

$$y' = -nx^n + (1-x)n^2x^{n-1} = n(-x + (1-x)n)x^{n-1},$$

$$y' = 0,\ -x + (1-x)n = 0,\ n = x(1+n),\ x = \frac{n}{n+1},$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},\quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Значит, ряд (7.12) сходится неравномерно на отрезке $[0, 1]$. Дальше проверим справедливость равенства (7.13). Сумма ряда $S(x) = 0$, поэтому слева в равенстве (7.13) будет $\int\limits_0^1 0\cdot dx = 0$. Рассмотрим ряд в правой части равенства (7.13):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(nx^n - (n-1)x^{n-1}\right)(1-x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(nx^n - (n-1)x^{n-1} - nx^{n+1} + (n-1)x^n\right) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+2} + \frac{n-1}{n+1}\right).$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}\right) - \left(\frac{k}{k+2} - \frac{k-1}{k+1}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{2}{(k+2)(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - 2\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n+1} - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то есть правая часть в (7.13) также равна нулю.▶

Задание 9. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

◀Возьмем любое $p \in \mathbb{N}$ и любую точку $x \in (0, +\infty)$. Рассмотрим отрезок $[a, b]$, такой, что $x \in [a, b]$. Обозначим $y = e^{-n^2x}$. Тогда $y^{(p)} = (-1)^p n^{2p} e^{-n^2x}$. Докажем, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^p n^{2p} e^{-n^2x} \tag{7.14}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Общий член ряда (7.14) представим в виде

$$(-1)^p n^{2p} e^{-n^2x} = (-1)^p \cdot \frac{n^{2p}}{e^{\frac{n^2x}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{n^2x}}.$$

Для любых фиксированных $x \in [a, b]$ находим, используя правило Лопиталя p-раз,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2p}}{e^{\frac{n^2x}{2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2pn^{2p-1}}{\frac{x}{2} \cdot 2ne^{\frac{n^2x}{2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \ldots = 0.$$

Тогда существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, и для любых $x \in [a, b]$ будет справедливо неравенство

$$\left|(-1)^p n^{2p} e^{-n^2x}\right| < C \cdot \frac{1}{e^{\frac{n^2x}{2}}} \leqslant C \cdot \frac{1}{e^{\frac{n^2a}{2}}} \leqslant C \cdot \frac{1}{e^{\frac{na}{2}}}, \ C > 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{na}{2}}}$ сходится по интегральному признаку (докажите самостоятельно).

По признаку Вейерштрасса ряд (7.14) будет сходиться равномерно на $[a, b]$, также будет сходиться равномерно на $[a, b]$ и ряд, соответствующий $(p-1)$ производной функции f (согласно теореме 7.6 нам достаточно его сходимости).

Нами доказано, что на отрезке $[a, b]$ (а значит, и в любой точке $x \in [a, b]$) существует производная любого порядка $p \in \mathbb{N}$ функции f. Но x – любая точка промежутка $(0, +\infty)$, поэтому функция f бесконечно дифференцируема на $(0, +\infty)$.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найти область определения для каждой из представленных ниже функций и исследовать их на непрерывность:

1.1 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$; 1.2 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

2. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$$

равномерно сходится на отрезке $[0,1]$ и допускает на этом отрезке дифференцирование любого порядка.

3. Показать, что ряд

$$x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$$

равномерно сходится на отрезке $-q \leqslant x \leqslant q$, где q – любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

4. Исходя из равенства

$$1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + \ldots = \frac{1}{1-x^3} \quad (|x| < 1),$$

найти сумму ряда $3x^2 + 6x^5 + \ldots + 3nx^{3n-1} + \ldots$.

5. Показать, что ряд $x^2 + x^6 + \ldots + x^{6n-2} + \ldots$ равномерно сходится на отрезке $-q \leqslant x \leqslant q$, где q – любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots.$$

6. Исходя из формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1),$$

найти сумму ряда:

6.1 $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)\, x^n + \ldots;$

6.2 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots + (n+1)\,(n+2)\, x^n + \ldots.$

7. Доказать равенство:

$$x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots = \frac{1}{2}\mathrm{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

8. Исходя из равенства

$$(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x},$$

определить сумму

$$S_n = \frac{x}{1+x} + \frac{2x^3}{1x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}.$$

Затем найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}.$$

9. Исходя из равенства

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

определить сумму

$$S_n=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{x}{2^n},$$

затем найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2n}\ \text{и}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n\cos\frac{x}{2^n}}\right)^2.$$

ЛЕКЦИЯ 8
Степенные ряды. Теорема Коши – Адамара

8.1 Понятие степенного ряда. Теорема Коши – Адамара. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда

Определение 8.1. ***Степенным рядом*** *называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \tag{8.1}$$

где x_0 *– фиксированное действительное число.*

a_k $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ *называют* ***коэффициентами*** *степенного ряда.*

Замечание 8.1. Частным случаем степенного ряда (8.1) при $x_0 = 0$ является ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{8.2}$$

Теорема 8.1 (Коши – Адамара). *Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$, $R \in [0, +\infty]$, *то:*

1. *При* $R = +\infty$ *ряд* (8.1) *абсолютно сходится на всей действительной оси* $\mathbb{R}$.

2. *При* $0 < R < +\infty$ *ряд* (8.1) *абсолютно сходится на интервале* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *и расходится вне этого интервала.*

3. *При* $R = 0$ *ряд сходится только в одной точке* $x = x_0$ (мы считаем здесь $\frac{1}{0} = \infty$ и $\frac{1}{\infty} = 0$).

◀Очевидно, что при $x = x_0$ ряд (8.1) всегда сходится, так как все члены ряда при $k \neq 0$ обращаются в нуль (сумма ряда равна a_0).

Пусть $x \neq x_0$. При $R = +\infty$ получим:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} |x-x_0| \sqrt[k]{|a_k|} = |x-x_0| \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 < 1$$

для любого $x \neq x_0$ (множитель $|x-x_0| > 0$ вынесен за знак верхнего предела на основании замечания 4.2). Тогда (с учетом теоремы 4.2 и сходимости ряда при $x = x_0$) следует, что ряд абсолютно сходится на $\mathbb{R}$.

Если $x \neq x_0$ и $0 < R < +\infty$, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = |x-x_0| \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = |x-x_0| \cdot \frac{1}{R}.$$

На основании той же теоремы 4.2 (обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов) заключаем, что ряд абсолютно сходится для любых $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-x_0| < R, \tag{8.3}$$

и расходится для любых $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0| > R$. ►

Замечание 8.2. При формулировке теоремы Коши – Адамара 8.1 можно положить

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} \text{ или } R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \tag{8.4}$$

и при доказательстве теоремы использовать признак Коши (теорема 3.4) или признак Даламбера (теорема 3.2) соответственно.

Замечание 8.3. Число R из формулировки теоремы 8.1 называется **радиусом сходимости**, а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ – **интервалом сходимости** степенного ряда. В концевых точках $x_0 \pm R$ интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

8.2 Алгоритм исследования степенных рядов на сходимость

1. Используя одну из формул (8.4) находим радиус сходимости степенного ряда.
2. Записываем интервал сходимости степенного ряда $(x_0 - R, x_0 + R)$.
3. Исследуем ряд на сходимость при $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$, после чего указываем область сходимости степенного ряда.

Пример 8.1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (x+1)^n. \tag{8.5}$$

◀Находим радиус сходимости ряда (8.5): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{4^n}} = \frac{1}{4}$. Интервал сходимости:

$$|x+1| < \frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{4} < x+1 < \frac{1}{4}; \quad \left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right).$$

Исследуем на сходимость ряд (8.5) в точках: $x = -\frac{5}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$.

Если $x = -\frac{5}{4}$, имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n. \tag{8.6}$$

Ряд (8.6) расходится ($\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует).

При $x = -\frac{3}{4}$, имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Таким образом, область схожимости ряда есть интервал $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.▶

8.3 Свойства степенных рядов

Теорема 8.2 (о равномерной сходимости). *Степенной ряд (8.1) с радиусом сходимости* $R > 0$ *для любого* $r \in (0, R)$ *сходится равномерно на отрезке* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

◀Пусть $r_1 = \frac{r+R}{2} < R$, тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r_1^k$ сходится и $|a_k| r_1^k \leqslant M$ для некоторого $M > 0$ и всех $k \in N$. Отсюда при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$

$$|a_k(x - x_0)^k| \leqslant |a_k| r^k = |a_k| r_1^k \left(\frac{r}{r_1}\right)^k \leqslant M \left(\frac{2r}{R + r}\right)^k$$

и по признаку Вейерштрасса (теорема 6.5) ряд (8.1) сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. ▶

Следствие 8.1 (о непрерывности суммы). *Сумма степенного ряда непрерывна в интервале сходимости этого степенного ряда.*

◀Возьмем любую точку $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Существует $r \in (0, R)$ такое, что $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. На отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$ степенной ряд сходится равномерно, члены ряда непрерывны на этом отрезке, а поэтому и сумма ряда непрерывна на $[x_0 - r, x_0 + r]$, а значит, и в точке x, поэтому и во всех точках интервала $(-R, R)$.▶

Для исследования непрерывности суммы степенного ряда на конце интервала сходимости полезной является следующая теорема.

Теорема 8.3 (теорема Абеля). *Если степенной ряд (8.1) сходится при* $x = t$, *то его сумма непрерывна на отрезке* $[x_0, t]$.

Из теоремы 8.2 и теоремы о почленном интегрировании функционального ряда (теорема 7.4) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 8.4. *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку из интервала сходимости.*

Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = S(x) \tag{8.7}$$

для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, где R – радиус сходимости ряда (8.7).

Теорема 8.5 (о дифференцировании степенных рядов). *Для всех x из интервала сходимосоти степенного ряда (8.7) существует*

$$S'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k(x-x_0)^{k-1}, \tag{8.8}$$

и радиус сходимости ряда (8.8) есть также R.

◀Вначале докажем, что радиус сходимости ряда (8.8) есть R, то есть, если $R' > 0$ – радиус сходимости ряда (8.8), то $R' = R$.

$$R' = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k-1]{k|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k-1]{k} \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = R.$$

Покажем, что дифференцирование ряда (8.1) по формуле (8.8) законно. На любом $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$ ряды (8.1) и (8.8) сходятся равномерно и члены их непрерывны. Тогда из теоремы 7.6 следует справедливость заключения теоремы.▶

Следствие 8.2. *Радиус степенного ряда не меняется при его почленном дифференцировании, а его сумма имеет производные любого порядка, которые вычисляются по формулам*

$$S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\dots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}, \tag{8.9}$$

в частности, коэффициенты ряда (8.7) записываются в виде

$$a_k = \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{8.10}$$

◀При доказательстве используем теорему 8.2 и метод математической индукции.▶

Следствие 8.3. *Если функция $f:(x_0-R, x_0+R) \to \mathbb{R}$ $(R>0)$ разложена в степенной ряд в интервале (x_0-R, x_0+R), то это разложение единственное.*

◀Коэффициенты степенного ряда однозначно определяются формулой типа (8.10).▶

8.4 Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

Пусть $f:(x_0-R, x_0+R) \to \mathbb{R}$, $R>0$.

Определение 8.2. *Степенной ряд (8.1), сходящийся в интервале (x_0-R, x_0+R), коэффициенты которого находятся по формуле $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, называется **рядом Тейлора** функции f.*

*Степенной ряд (8.2), сходящийся в интервале $(-R, R)$, коэффициенты которого находятся по формуле $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, называется **рядом Маклорена или Тейлора – Маклорена** функции f.*

Следствие 8.4. *Степенной ряд своей суммы в интервале сходимости есть ряд Тейлора этой суммы в указанном интервале.*

◀Справедливость заключения данного предложения следует из определения 8.2 и следствия 8.2.▶

Замечание 8.4. Бесконечная дифференцируемость функции в интервале сходимости является необходимым условием разложимости функции в степенной ряд, но в общем случае не является достаточным. Покажем это.

Пример 8.2. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, а ее степенной ряд сходится, но не к функции f.

◀Бесконечная дифференцируемость функции в точках не равных нулю очевидна. Покажем, что f бесконечно дифференцируема и в точке $x = 0$. Воспользуемся определением производной функции в точке

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-1}{(\Delta x)^2}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{-2}{(\Delta x)^3}} = 0.$$

При $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)' = e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}; \; f''(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)^2 + e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \frac{-6}{x^4} = e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)$$

и т.д. Пусть $\frac{1}{x} = t$; при $x \to 0$ будет $t \to \infty$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right) = e^{-t^2} P_k(t)$, где $P_k(t)$ – многочлен степени $k > n$ переменной t.

Используя правило Лопиталя, можно показать, что

$$\lim_{t \to \infty} \left(e^{-t^2} P_k(t)\right) = 0. \tag{8.11}$$

При нахождении $f^{(n)}(0)$ меняются ролями x и Δx, а степень многочлена $P_k(t)$ увеличивается на единицу, но аналог предела (8.11) (при замене t на $\frac{1}{x}$ и увеличении k на единицу) все равно будет равным нулю. Покажем это на примере $f''(0)$.

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0+\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{2}{(\Delta x)^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(\Delta x)^4}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\frac{-8}{(\Delta x)^5}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{-2}{(\Delta x)^3}} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\frac{4}{(\Delta x)^2}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-8}{(\Delta x)^3}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{-2}{(\Delta x)^3}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = 0.$$

Таким образом, функция f бесконечно дифференцируема и в точке $x = 0$, причем производные любого порядка в точке $x = 0$ будут равны нулю, а поэтому степенной ряд функции f (по степеням x) сходится на $\mathbb{R}$, и его сумма $S = 0 \neq f$. ▶

Пусть $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$, $R > 0$.

Теорема 8.6 (достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора). *Если функция f бесконечно дифференцируема в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ и*

$$\exists M > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M < \infty, \tag{8.12}$$

то функция f разложима в указанном интервале в ряд Тейлора.

◀В формуле Тейлора для функции f выберем остаточный член в форме Лагранжа.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{8.13}$$

где $x < \xi < x_0$ или $x_0 < \xi < x$.

Для остатка (8.13) будет справедлива оценка

$$0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.14}$$

Но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{8.15}$$

сходится на интервале (x_0-R, x_0+R). Докажем это.

$$u_n(x)=\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!};\; u_{n+1}(x)=\frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+2}\,(n+1)!}{|x-x_0|^{n+1}\,(n+2)!}=|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1$$

для любого $x\in(x_0-R, x_0+R)$. Сходимость ряда на (x_0-R, x_0+R) доказана. Но тогда (необходимое условие сходимости ряда)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0. \tag{8.16}$$

Из (8.16) и (8.14) следует (теорема о пределе промежуточной функции), что $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0.$▶

Замечание 8.5. При выполнении условий (8.12) говорят, что все производные функции f **равномерно ограничены** на интервале (x_0-R, x_0+R).

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение степенного ряда.
2. Сформулируйте и докажите теорему Коши – Адамара.
3. Сформулируйте алгоритм исследования степенных рядов на сходимость.
4. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы степенного ряда.
5. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости степенного ряда на любом отрезке из интервала сходимости.
6. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании степенных рядов.
7. Сформулируйте теорему о об интегрировании степенных рядов.
8. Сформулируйте необходимое условие разложимости функции в степенной ряд.
9. Дайте определение ряда Тейлора.
10. Сформулируйте достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов

Задание 1. Найти область сходимости ряда $\frac{x}{10} + \frac{x^2}{200} + \frac{x^3}{3000} + \ldots + \frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \ldots$.

◀Радиус сходимости ряда находим по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

В нашей задаче $a_n = \frac{1}{n \cdot 10^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 10^{n+1}}$.
Поэтому

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^n} = 10 \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 10.$$

Значит, ряд сходится при значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < 10$ или $-10 < x < 10$.

Исследуем теперь сходимость ряда на концах интервала. Подставляя в данный ряд вместо x число 10, получим гармонический расходящийся ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Следовательно, при $x = 10$ данный степенной ряд расходится. При $x = -10$ получим числовой знакопеременный ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots,$$

который условно сходится.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $-10 \leqslant x < 10$, и его область сходимости представляет собой промежуток $[-10, 10)$.▶

Задание 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{x^4}{2^2} + \ldots + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2(n-1)}}{2^{n-1}} + \ldots \tag{8.17}$$

◀Здесь мы не вправе применить формулу (8.4) для нахождения радиуса сходимости ряда (8.17), так как он не содержит нечетных степеней x. Для нахождения промежутка сходимости положительного ряда (8.17) применим непосредственно предельный признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 x^{2n}}{(n+2)^2 2^n}}{\frac{n^2 x^{2(n-1)}}{(n+1)^2 2^{n-1}}} = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^2 (n+2)^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, ряд сходится, если $x^2 < 2$, и расходится, если $x^2 > 2$. Радиус сходимости ряда (8.17) равен $R_1 = \sqrt{2}$. Выясним, сходится ли он при $x = \pm\sqrt{2}$.

При $x = \pm\sqrt{2}$, получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

который расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Итак, область сходимости ряда (8.17) определяется неравенством $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.▶

Задание 3. Найти область сходимости ряда

$$(x-1)+\frac{2!\,(x-1)^2}{2^2}+\ldots+\frac{n!\,(x-1)^n}{n^n}+\ldots.$$

◀Находим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n\,(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Следовательно, данный ряд сходится при всех значениях, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<e$ или неравенствам $-e<x-1<e$. Прибавляя ко всем частям неравенств по 1, получим: $1-e<x<1+e$.

Исследуем теперь поведение ряда на концах интервала. При $x=1+e$ получим числовой ряд:

$$e+\frac{2!e^2}{2^2}+\ldots+\frac{n!e^n}{n^n}+\ldots.$$

Чтобы выяснить поведение этого ряда, воспользуемся признаком Даламбера в непредельной форме:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!e^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!e^n}=\frac{(n+1)\,e\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{e\cdot n^n}{(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,$$

так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ при любых конечных значениях n. Следовательно, ряд расходится.

Этот пример показывает, что в ряде случаев выгоднее воспользоваться признаком Даламбера в непредельной форме, чем в предельной. В самом деле, попытка воспользоваться здесь предельной формой признака Даламбера не дала бы никаких результатов, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

При $x=1-e$ получим такой же, только знакопеременный ряд, и так как его члены не убывают по модулю, то он расходится. Итак, область сходимости данного степенного ряда есть интервал $(2-e,2+e)$.▶

Задание 4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}(x+2)^n. \tag{8.18}$$

◀Находим радиус и интервал сходимости степенного ряда (8.18).

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)!!(n+1)!}{n!\,(2n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \quad ((2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\,(2n+1))\,.$$

$$|x+2| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x+2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}.$$

Исследуем сходимость ряда (8.18) на концах интервала сходимости $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.
Пусть $x = -\frac{3}{2}$. Имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}. \tag{8.19}$$

Применим для исследования сходимости ряда признак Даламбера в форме неравенств (теорема 3.1):

$$\frac{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}}{\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}} = \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n\cdot n!}{(n+1)!2^{n+1}(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2(n+1)} < 1.$$

Таким образом, ряд (8.19) сходится. Аналогично, при $x = -\frac{5}{2}$ ряд (8.18) также сходится, причем абсолютно.

В итоге, отрезок $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ есть область сходимости ряда (8.18).▶

Задание 5. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{8^n\,(2n+1)}. \tag{8.20}$$

◄Будем использовать аналог признака Даламбера.

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n} = \frac{(x-1)^{3n+3}\cdot 8^n\,(2n+1)}{(x-1)^{3n}\cdot 8^{n+1}\,(2n+3)} = (x-1)^3\,\frac{2n+1}{8\,(2n+3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(x-1)^3\,\frac{2n+1}{8\,(2n+3)}\right| = \frac{|x-1|^3}{8} = |\varphi\,(x)|\,.$$

Если $|\varphi\,(x)| < 1$, то есть

$$\frac{|x-1|^3}{8} < 1 \Leftrightarrow |x-1|^3 < 8 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3,$$

то ряд (8.20) сходится абсолютно.

Исследуем ряд (8.20) на сходимость на концах интервала $(-1,3)$. При $x=-1$ имеем сходящийся числовой ряд Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-1)^{3n}}{8^n(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{3n}\frac{2^{3n}}{8^n\,(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{3n}\,\frac{1}{2n+1}. \tag{8.21}$$

Ряд, составленный из модулей членов ряда (8.20) расходится по признаку сравнения с гармоническим рядом. Значит, ряд (8.21) сходится условно.

При $x=3$ имеем также расходящийся ряд.

Ряд (8.20) сходится абсолютно в интервале $(-1,3)$ и условно в точке $x=-1$; промежуток $[-1,3)$ есть область сходимости ряда (8.20).►

Задание 6. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n. \tag{8.22}$$

◄Находим радиус сходимости ряда (8.22): $R = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$. Исследуем ряд (8.22) на сходимость на концах интервала сходимости $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. При $x = \frac{1}{e}$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}. \tag{8.23}$$

Найдем предел общего члена этого ряда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} n\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \right.$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\cdot\frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\left. = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)n^3}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3\cdot\frac{1}{2}}{n\,(n+1)^2} = -\frac{1}{2}\right] = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Значит, ряд (8.23) расходится. При $x = -\frac{1}{e}$, проводя аналогичные рассуждения, получим, что предел общего члена ряда не существует, а значит, ряд расходится.

На $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ сходимость абсолютная.►

Задание 7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}. \tag{8.24}$$

◀У нас $u_n(x) = \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$ и $u_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{3n+1}}{2^{3n+3}(n+2)\ln(n+2)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{3n+1}\cdot 2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}{|x+1|^{3n-2}\cdot 2^{3n+3}(n+2)\ln(n+2)} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1\right] = \frac{|x+1|^3}{2^3}.$$

Решаем неравенство

$$\frac{|x+1|^3}{2^3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

$(-3,1)$ – интервал сходимости ряда (8.24).
При $x=-3$ имеем сходящийся числовой ряд Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{3n-2}\frac{1}{4(n+1)\ln(n+1)}.$$

При $x=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)\ln(n+1)}$ расходится согласно интегральному призанку Коши – Маклорена (теорема 4.3).

$[-3,1)$ – область сходимости (8.24), причем в точке $x=-3$ сходимость условная, в остальных точках абсолютная.▶

Задание 8. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n}(x-1)^n. \tag{8.25}$$

◀Находим радиус и интервал сходимости ряда:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2^{\ln^2 n}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{\ln^2 n}{n}}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n \cdot \frac{1}{n}}{1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0\right] = \frac{1}{2^0} = 1,$$

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Итак, $(0,2)$ – интервал сходимости степенного ряда (8.25). Исследуем степенной ряд (8.25) на концах интервала сходимости. При $x=0$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{\ln^2 2n},$$

который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n 2^{\ln^2 2n} \neq 0$. При $x=2$ имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n}$, расходящийся по той же причине.

Интервал $(0,2)$ есть область сходимости ряда (8.25).▶

Задание 9. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) x^n, \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_n. \tag{8.26}$$

◀Находим радиус сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)} = 1.$$

$(-1, 1)$ – интервал сходимости ряда (8.26). При $x = 1$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \tag{8.27}$$

Преобразуем общий член ряда (8.27):

$$\frac{1}{n} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3\cdot 5}{4^2} \ldots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n^2}.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2}$ расходится по признаку сравнения с гармоническим рядом. При $x = -1$ имеем сходящийся условно ряд Лейбница $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n^2}$.

Область сходимости ряда (8.26) есть полуинтервал $[-1, 1)$, причем сходимость в точке $x = -1$ условная, а в точках интервала $(-1, 1)$ – абсолютная.▶

Задание 10. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n}(x+1)^n, \tag{8.28}$$

исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость на концах интервала сходимости.

◀Вычисляем радиус сходимости ряда по формуле $R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, где $a_n = \frac{(2+(-1)^n)^n}{n}$.

Тогда

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}\right|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{3},$$

так как

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1.$$

Находим интервал сходимости: $|x+1| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$, $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$.

$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ – интервал сходимости степенного ряда (8.28). Исследуем ряд (8.28) на сходимость на концах интервала. При $x = -\frac{4}{3}$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n}\left(-\frac{4}{3}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{6} - \ldots = \left(-\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}\right). \tag{8.29}$$

Оценим снизу общий член ряда (8.29).

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}\geqslant\frac{1}{2k}-\frac{1}{k3^k}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^k}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^k}\right)$ сравним с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ по предельному признаку сравнения:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^k}\right)}{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2},$$

а значит, он расходится, а тогда (теорема 2.2) ряд (8.29) также расходится, то есть при $x=-\frac{4}{3}$ степенной ряд (8.28) расходится.

При $x=-\frac{2}{3}$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{(2k-1)\,3^{2k-1}}\right). \tag{8.30}$$

Так как $\frac{1}{2k}+\frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}>\frac{1}{2k}$, а гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится, поэтому (теорема 2.2) расходится и ряд (8.30).

Таким образом, $R=\frac{1}{3}$ – радиус сходимости степенного ряда (8.28), $\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ – интервал сходимости степенного ряда (8.28), $\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ – область абсолютной сходимости степенного ряда (8.28).▶

Задания для самостоятельного решения

Найдите область сходимости каждого из степенных рядов:

1. $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^2}{2\cdot4}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+2)}+\ldots;$
2. $\frac{\ln 2}{1}x^2+\frac{\ln 3}{2}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n}x^{n+1}+\ldots;$
3. $x-\frac{x^3}{3\cdot2\sqrt{2}}+\frac{x^5}{3^2\cdot3\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}+\ldots;$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n+1};$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\cdot(x-5)^{n+1}}{(n+1)!};$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot4^n};$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)};$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n;$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c^{\sqrt{n}}x^n,\ c>0;$
11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n;$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c^{\ln n}x^n,\ c>0;$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}};$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+c^n},\ c\geqslant0;$
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n};$
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2};$
17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}};$
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n;$
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};$
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n!}x^n;$
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n};$
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\ln n};$
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{a^{n^2}},\ a>1.$

ЛЕКЦИЯ 9
Разложение функций в ряд Тейлора – Маклорена

9.1 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена показательной функции

Функция $f(x) = e^x$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = e^x$, а $f^{(n)}(0) = 1$. Тогда ряд Тейлора – Маклорена для показательной функции

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{9.1}$$

Находим радиус сходимости ряда (9.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Ряд (9.1) сходится на всей числовой прямой, причем абсолютно.

Дальше применим достаточный признак разложимости функции в степенной ряд. Возьмем любой интервал $(-R, R) \subset \mathbb{R}$, $R > 0$. Видно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in (-R, R)$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| = e^x < e^R,$$

а поэтому (теорема 8.6) функция $f(x) = e^x$ разложима в ряд (9.1) на любом $(-R, R) \subset \mathbb{R}$ $(R > 0)$, а значит, и на всей числовой прямой, то есть для любого $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{9.2}$$

9.2 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена тригонометрических функций

Функция $f(x) = \cos x$ бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой причем, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ 1, & n = 4k, \\ -1, & n = 4k+2, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Кроме того, $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \leqslant 1$, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \tag{9.3}$$

Найдем область сходимости степенного ряда (9.3).

Пусть $x \neq 0$ (ряд при $x = 0$ сходится).

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(x^2 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right) = 0 < 1.$$

Значит, ряд сходится на всей числовой прямой, причем абсолютно.

Таким образом, для любых $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{9.4}$$

Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что функция $f(x) = \sin x$ разложима на всей числовой прямой в ряд Тейлора – Маклорена:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{9.5}$$

9.3 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена логарифмической функции

Разложим в ряд Тейлора – Маклорена функцию $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$. Для разложения функции в степенной ряд воспользуемся теоремой 8.5 об интегрировании степенных рядов.

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Известно, что $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, если $|x| < 1$, тогда $f'(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, если $x \in (-1, 1)$.

Последний ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, x] \subset (-1, 1)$, причем радиус сходимости степенного ряда не меняется.

Тогда

$$\int\limits_0^x f'(x)\, dx = \int\limits_0^x df(x) = f(x)\Big|_0^x = f(x) - f(0) = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Получим разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора – Маклорена в интервале $(-1, 1)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{9.6}$$

Очевидно, что ряд (9.6) сходится на $(-1,1)$, причем условно при $x=1$ как ряд Лейбница. По теореме Абеля (теорема 8.3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n}=\ln 2$.

Таким образом, функция $f(x)=\ln(1+x)$ разложима в полуинтервале $(-1,1]$ в ряд Тейлора – Маклорена

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{9.7}$$

причем сходимость ряда (9.7) в интервале $(-1,1)$ будет абсолютной, а при $x=1$ – условной.

9.4 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена степенной функции

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора – Маклорена функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\neq 0$. Видно, что для любого $n\in\mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))\,(1+x)^{\alpha-n}, \tag{9.8}$$

а

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))\,(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}. \tag{9.9}$$

Тогда из (9.8)

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))\,, \tag{9.10}$$

а из (9.9)

$$f^{(n+1)}(\theta x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}, \tag{9.11}$$

где $0<\theta<1$.

Имеем ряд Тейлора – Маклорена для нашей функции:

$$(1+x)^{\alpha}\sim 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha\,(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\dots. \tag{9.12}$$

Найдем радиус сходимости степенного ряда (9.12).

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1.$$

Значит, интервал сходимости ряда (9.12) есть $(-1,1)$.

Дальше докажем, что ряд (9.12) сходится в интервале $(-1,1)$ к порождающей его функции, то есть к $f(x)=(1+x)^\alpha$. Возьмем остаточный член в формуле Тейлора в форме Коши и преобразуем его.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}\,(1-\theta)^n\,x^{n+1} =$$

$$= \alpha\cdot x\cdot\frac{(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots((\alpha-1)-(n-1))\,x^n}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}\,. \qquad (9.13)$$

$u_n(x)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots((\alpha-1)-(n-1))}{n!}x^n$ есть n-й член ряда Тейлора – Маклорена функции $g(x)=(1+x)^{\alpha-1}$. Ряд Тейлора для этой функции так же, как и для функции $f(x)=(1+x)^\alpha$, сходится в интервале $(-1,1)$. А тогда $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=0$, то есть $u_n(x)$ – бесконечно малая при $n\to\infty$.

В правой части равенства (9.13) имеем произведение этой бесконечно малой на ограниченные величины или константы в интервале $(-1,1)$. Для $|x|<1$:

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leqslant \left|\frac{1-\theta}{1-\theta}\right|^n = 1;\ \ 0<1-|x|<1+\theta x<1+|x|<2,$$

то есть величина $(1+\theta x)^{\alpha-1}$ при фиксированных x и α заключена между $(1-|x|)^{\alpha-1}$ и $(1+|x|)^{\alpha-1}$. А тогда $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ для любого $x\in(-1,1)$.

Таким образом, в интервале $(-1,1)$ функция $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(\alpha\neq 0)$, разложима в ряд Тейлора – Маклорена (**биноминальный ряд**)

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n. \tag{9.14}$$

Замечание 9.1. Можно показать, что:
1) при $\alpha>0$ ряд (9.14) абсолютно и равномерно сходится к функции $(1+x)^\alpha$ на отрезке $[-1,1]$;
2) при $-1<\alpha<0$ ряд (9.14) сходится к функции $(1+x)^\alpha$ на полуинтервале $(-1,1]$;
3) при $\alpha\leqslant -1$ ряд (9.14) сходится, причем абсолютно, к функции $(1+x)^\alpha$ только на интервале $(-1,1)$.

Замечание 9.2. Приведем примеры рядов Тейлора – Маклорена для некоторых других функций.

1) $\operatorname{arctg} x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|\leqslant 1$;

2) $\arcsin x = x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$;

3) $\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|\leqslant 1$;

4) $\operatorname{ch} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in\mathbb{R}$;

5) $\operatorname{sh} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$.

Вопросы и задания для самоконтроля

Запишите формулы разложения в ряд Тейлора – Маклорена
– показательной функции $f\,(x) = e^x$;
– тригонометрических функций $f\,(x) = \cos x$ и $f\,(x) = \sin x$;
– логарифмической функции $f\,(x) = \ln\,(1 + x)$;
– степенной функции $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

Разложение функций в степенные ряды

Рассмотрим основные методы разложения функций в степенные ряды.

1. Непосредственное разложение функций в ряд Тейлора

Задание 1. Разложить в ряд Тейлора с центром в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ функцию $y = \operatorname{tg} x$, найдя четыре первых, отличных от нуля, члена разложения.

$$◀\; f(x) = \operatorname{tg} x,\; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2;$$

$$f''(x) = \frac{-2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x};\; f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3} = 4;$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos^4 x - 2\sin x\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x};$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 16.$$

$$\operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots .\; ▶$$

Задание 2. С помощью формулы Тейлора разложить многочлен

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

по степеням двучлена $x+1$. Найти с точностью до $0,001$ $P(-1,002)$ и $P(-0,997)$.

◀Воспользуемся формулой Тейлора для многочлена при $x_0 = -1$. Вычислим значения функции и ее производных в этой точке:

$$P'(x) = 3x^2 + 6x - 2, \quad P(-1) = 8,$$
$$P''(x) = 6x + 6, \quad P'(-1) = -5,$$
$$P'''(x) = 6, \quad P''(-1) = 0,$$
$$P'''(-1) = 6.$$

Подставляя полученные значения в формулу Тейлора для многочлена, найдем:

$$P(x) = 8 - 5(x+1) + (x+1)^3.$$

Имеем:

$$P(-1,002) = 8 - 5(-1,002 + 1) + (-1,002 + 1)^3 \approx 8 + 5 \cdot 0,002 = 8,010$$

и

$$P(-0,997) = 8 - 5(-0,997 + 1) + (-0,997 + 1)^3 \approx 8 - 5 \cdot 0,003 = 7,985. \blacktriangleright$$

2. Разложение функций в ряды Тейлора с использованием формулы суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Используем формулу для суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q, где $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{9.15}$$

Задание 3. Функцию $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $x-2$, указать радиус и интервал сходимости ряда.

◀«Особыми» точками функции будут нули знаменателя $x=1$, $x=3$. Расстояние от центра разложения $x_0=2$ до ближайшей особой точки равно $1=R$ – это и будет радиус сходимости степенного ряда. Тогда $(1,3)$ – интервал сходимости искомого степенного ряда. Представим функцию в виде суммы простейших дробей.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Тогда (по формуле (9.15))

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-2-1} = -\frac{1}{1-(x-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n,$$

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x-2+1} = -\frac{1}{1-(-1)(x-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n\right) = \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)(x-2)^n\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} n=2k,\ 1+(-1)^n=2 \\ n=2k-1,\ 1+(-1)^n=0 \end{array}\right] = -\sum_{k=0}^{\infty}(x-2)^{2k}.$$

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^{2k},$$

$R=1$ – радиус сходимости ряда, $(1,3)$ – интервал сходимости.▶

Задание 4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-2}.$$

◄Используем при решении нашей задачи формулу суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии справа налево. Вначале представим дробь $\frac{2x+1}{x^2-x-2}$ в виде суммы простейших дробей. «Особые» точки (нули знаменателя указанной дроби) будут $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

$$\frac{2x+1}{x^2-x-2} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)},$$

$$2x+1 = A(x+1)+B(x-2), \text{ при } x=-1, \quad -1=-3B, \quad B=\frac{1}{3}, \text{ при } x=2, \quad 5=3A, \quad A=\frac{5}{3},$$

$$f(x) = \frac{\frac{5}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} = \frac{\frac{5}{3}}{(x-1)-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)+2} = \frac{-\frac{5}{3}}{1-(x-1)} + \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{-(x-1)}{2}}.$$

В качестве радиуса сходимости (максимального) искомого ряда Тейлора будет $R=1$ (расстояние от середины интервала сходимости ряда до ближайшей особой точки, то есть от $x=1$ до $x=2$).

$$f(x) = -\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(x-1)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3\cdot 2^{k+1}}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{3}+\frac{(-1)^k}{3\cdot 2^{k+1}}\right)(x-1)^k.$$

Теперь найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{5}{3}+\frac{(-1)^{k+1}}{3\cdot 2^{k+1}}}} = 1.$$

.

Интервал сходимости ряда: $(0,2)$. ►

3. Использование основных табличных разложений

Задание 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

◀Воспользуемся формулой (9.14):

$$f(x) = (1 + (-x))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right)}{n!}(-x)^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n, \quad |x| < 1. ▶$$

Задание 6. Разложить в ряд Тейлора по степеням $x - 1$ функцию $f(x) = e^x$.

$$◀\ e^x = e^{x-1+1} = e^{x-1}e = \left[t = x - 1,\ e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right] = e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. ▶$$

Задание 7. Разложить функцию $y = \sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

◀Произведем над заданной функцией тождественные преобразования такие, чтобы под знаком функции получить выражение $(x-2)$:

$$\sin\frac{\pi}{4}x = \sin\frac{\pi}{4}(x - 2 + 2) = \sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{4}(x-2).$$

Теперь воспользуемся разложением (9.4), в котором вместо x поставим $\frac{\pi}{4}(x-2)$, получим:

$$\cos\frac{\pi}{4}(x-2) = 1 - \frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2\cdot 2!} + \frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4\cdot 4!} - \ldots + (-1)^k\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!} + \ldots.$$

Полученный ряд сходится к заданной функции при $-\infty < \frac{\pi}{4}(x-2) < \infty$, т.е. при $-\infty < x < \infty$.

$$\sin\frac{\pi x}{4} = 1 - \frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2\cdot 2!} + \frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4\cdot 4!} - \ldots + (-1)^k\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty ▶.$$

Задание 8. Функцию $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-2x}}$ разложить в ряд Тейлора – Маклорена (по степеням x). Найти радиус сходимости полученного ряда.

◀Воспользуемся формулой (9.14):

$$(1+t)^\alpha = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}t^k,$$

причем радиус сходимости ряда есть $R=1$ и $(-1,1)$ – его интервал сходимости.

Вначале разложим в ряд функцию $\varphi(x)=(1+(-2x))^{-\frac{1}{2}}$. Это функция вида $y=(1+t)^\alpha$, где $t=-2x$ и $\alpha=-\frac{1}{2}$. Найдем вначале радиус и интервал сходимости искомого ряда функции φ, а значит, и f. Из оценки $|-2x|<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{2}$ получаем, что $R=\frac{1}{2}$ и интервал сходимости $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Тогда

$$\varphi(x)=(1+(-2x))^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3+\ldots+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}x^k+\ldots=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k2^k\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}x^k=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot 2^k\frac{(-1)^k\,1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2k-1)}{2^k\cdot k!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}x^k.$$

Тогда

$$f(x)=x^3+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}x^{k+3}$$

есть искомое разложение с радиусом сходимости $R=\frac{1}{2}$ и $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ – интервалом сходимости.▶

4. Использование сложения, вычитания и умножения абсолютно сходящихся рядов

Указанный прием был нами применен в задании 3. При решении указанного задания можно было использовать умножение рядов, а именно:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x-3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \cdot \left(-\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \right) =$$

$$= (1 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + (x-2)^4 - \ldots)(-1 - (x-2) - (x-2)^2 - (x-2)^3 - (x-2)^4 - \ldots) =$$

$$= -1 - (x-2)^2 - (x-2)^4 - \ldots = -\sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^{2k}.$$

Задание 9. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

◀ $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Пользуясь формулой (9.6), можем записать:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots.$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \right).$$

Раскрывая скобки, переставляя члены ряда и делая приведение подобных членов, получим:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \ldots + \frac{2x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots.$$

Очевидно, что полученный ряд сходится при $-1 < x < 1$.▶

Задание 10. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$ функцию $f(x) = \sin x$. Найти радиус сходимости полученного при разложении ряда.

◀Будем использовать разложения (9.4) и (9.5).

$$f(x) = \sin x = \sin(x+2-2) = \sin(x+2)\cdot\cos 2 - \sin 2\cdot\cos(x+2) = [t = x+2] =$$

$$= \cos 2\cdot\sin t - \sin 2\cdot\cos t = \left(\left(\cos 2\cdot(x+2) - \cos 2\cdot\frac{(x+2)^5}{3!} + \cos 2\cdot\frac{(x+2)^5}{5!} - \ldots\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sin 2 - \sin 2\cdot\frac{(x+2)^2}{2!} + \sin 2\cdot\frac{(x+2)^4}{4!} - \ldots\right)\right) =$$

$$= -\sin 2 + \cos 2\cdot(x+2) + \sin 2\cdot\frac{(x+2)^2}{2!} - \cos 2\cdot\frac{(x+2)^3}{3!} - \sin 2\cdot\frac{(x+2)^4}{4!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin\left(2 + k\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x+2)^k}{k!}.$$

Найдем радиус сходимости полученного ряда:

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\sin\left(2+\frac{k\pi}{2}\right)(k+1)!}{k!\,(-1)^{k+2}\sin\left(2+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)}\right| = \lim_{k\to\infty}(k+1)\left[\operatorname{tg}\left(2+\frac{k\pi}{2}\right)\right] = +\infty,$$

так как $\left|\operatorname{tg}\left(2+\frac{k\pi}{2}\right)\right| > 0.$ ▶

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin\left(2+k\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x+2)^k}{k!},\quad R = +\infty.$$ ▶

Задание 11. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию

$$f(x) = \ln^2(1-x).$$

Найти радиус сходимости полученного ряда.

◀Функция $y = \ln(1+x)$ представима рядом

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k},$$

радиус сходимости которого $R = 1$ и интервал сходимости $(-1, 1)$, в котором ряд сходится абсолютно. Известно, что если ряды сходятся абсолютно, то их можно перемножить произвольно (как многочлены). Тогда:

$$f(x) = \ln(1+(-x))\ln(1+(-x)) = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\right) = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + \frac{137}{180}x^6 + \ldots.$$

Найдем общий член полученного ряда. Из произведения

$$\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)$$

находим

$$u_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n} + \frac{x^{n+1}}{2(n-1)} + \frac{x^{n+1}}{3(n-2)} + \frac{x^{n+1}}{4(n-4)} + \ldots +$$

$$+\frac{x^{n+1}}{4(n-3)} + \frac{x^{n+1}}{3(n-2)} + \frac{x^{n+1}}{2(n-1)} + \frac{x^{n+1}}{n} = a_n x^{n+1},$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(n-(k-1))} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{2\,(n-1)} + \frac{n+1}{3\,(n-2)} + \frac{n+1}{4\,(n-3)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{n+1}{(n-3)\,4} + \frac{n+1}{(n-2)\,3} + \frac{n+1}{(n-1)2} + \frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \left[\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n};\quad \frac{n+1}{2\,(n-1)} = \frac{n-1+2}{2\,(n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1};\ \frac{n+1}{3\,(n-2)} = \frac{n-2+3}{3\,(n-2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n-2}\ldots\right] =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}.$$

$$\ln^2(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Радиус сходимости полученного ряда $R = 1$ (равен радиусу сходимости рядов-множителей). В подтверждение этого найдем радиус ряда непосредственно. Коэффициент ряда $a_n = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n+1}$. Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(n+2)}{2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\right) = 1+0 = 1,$$

так как $S_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ – частичная сумма гармонического ряда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = +\infty$.▶

5. Использование почленного дифференцирования и интегрирования

Задание 12. Доказать, что

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad 0 < |x| < 1. \tag{9.16}$$

◀Известно, что

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad 0 < |x| < 1. \tag{9.17}$$

Степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости. Дифференцируем левую и правую части равенства (9.17):

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left[\begin{array}{c} k = n-1 \\ n = k+1 \end{array}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = [n = k] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n. \blacktriangleright$$

Задание 13. Разложить в степенной ряд функцию $y = \operatorname{arctg} x$.

◀Так как

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \ldots, \; |x| < 1,$$

а степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку из интервала сходимости, то при $|x| < 1$ имеем:

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^x dx - \int\limits_0^x x^2 dx - \ldots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots . \blacktriangleright$$

Задание 14. Разложить функцию

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

в ряд Маклорена.

◀Как известно, этот интеграл нельзя выразить через элементарные функции. Для отыскания разложения данного интеграла в ряд Маклорена разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем почленно проинтегрируем.

Раскладываем подынтегральную функцию в степенной ряд. Воспользовавшись разложением (9.5), получим:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots,$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-2}}{(2k-1)!} + \ldots,$$

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!\,(2k-1)} + \ldots.$$

Интервал сходимости полученного ряда будет таким же, что и интервал сходимости ряда для подынтегральной функции. Поэтому

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}, \quad x \in \mathbb{R} \;▶$$

Задание 15. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию

$$f\left(x\right)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Найти радиус сходимости полученного ряда.

◀Вначале найдем производную функции f и разложим найденную функцию-производную в ряд Тейлора – Маклорена.

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k x^{2k}.$$

Радиус сходимости полученного ряда $R=1$.

Интегрируем последнее равенство в интервале сходимости указанного ряда. Получим:

$$\int_0^x f'\left(t\right)dt=f\left(t\right)\Big|_0^x=f\left(x\right)-f\left(0\right)=f\left(x\right),$$

с одной стороны; с другой стороны

$$\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k t^{2k}\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\left(-1\right)^k t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

При дифференцировании и интегрировании степенных рядов их радиусы сходимости не изменяются.

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad R=1.$$ ▶

6. Метод неопределенных коэффициентов

Для применения метода неопределенных коэффициентов функция f представляется в виде степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ с неизвестными коэффициентами a_k, причем степенной ряд для четной функции имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$, а для нечетной функции – $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1}$.

Далее составляется равенство, в которое входит функция f или f', а также другие (известные) функции. Представляя функции указанного равенства рядами и учитывая единственность разложения в степенной ряд, получим систему уравнений для определения n-первых коэффициентов степенного ряда функции f.

Задание 16. Используя метод неопределенных коэффициентов, записать три первых ненулевых члена разложения функции $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

◀Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$. Из условия следует, что $f(x)\cos x = 1$. Тогда

$$\left(a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \equiv 1,$$

следовательно, $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{5}{24}$.

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \ldots \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Разложить функцию $f(x) = x^3 - 2x + 1$ по степеням двучлена $x - 1$.
2. Разложить функцию $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$.
3. Разложить функцию $f(x) = x^6$ по степеням двучлена $x + 2$.
4. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \ln(1 + 2x)$, заданную на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
5. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням двучлена $x - 4$. Ограничиться четырьмя членами.
6. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ по степеням x. Оценить $R_{10}(x)$ на $[0, 1]$.
7. С помощью формулы Тейлора написать разложение функции $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt{1 - 3x + x^2}$ по степеням x до члена с x^3 включительно.
8. Разложить функцию $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ по степеням двучлена $x - 2$.
9. Разложить функцию $y = 2^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$.
10. Пользуясь формулами разложений (9.2), (9.4), (9.5) и (9.6), разложить заданные функции в ряд по степеням x:

10.1 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

10.2 $y = \cos^2 x$;

10.3 $y = \cos^3(x + \alpha)$;

10.4 $y = \sin^3 x$;

10.5 $y = \sin^6 x$;

10.6 $y = \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$;

10.7 $y = \frac{x}{1+x-2x^2}$;

10.8 $y = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$;

10.9 $y = \frac{1+x}{(1-x^2)^2}$.

11. Применяя дифференцирование, разложить заданные функции в ряд по степеням x.

11.1 $y = (1+x)\ln(1+x)$;

11.2 $y = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

11.3 $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

11.4 $y = \arcsin x$;

11.5 $y = \arcsin x^3$;

11.6 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

11.7 $y = \arcsin^2 x$.

12. Применяя различные методы, найти разложение в ряд по степеням x следующих функций:

12.1 $y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1-x^2}$;

12.2 $y = \arccos(1-2x^2)$;

12.3 $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

13. Разложить $\frac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд по степеням $(x+2)$.

14. Разложить e^x в ряд по степеням $(x+2)$.

15. Разложить $\sqrt{x}$ в ряд по степеням $(x-4)$.

16. Функцию $y = \ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по степеням $(x+1)$.

17. Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложение в ряды по степеням x следующих функций:

17.1 $y = e^x\cos x$;

17.2 $y = e^x\sin x$.

18. Определить промежуток сходимости разложения в степенной ряд функции $y = \frac{x}{x^2-5x+6}$

а) по степеням x; б) по степеням $(x-5)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

Приложения степенных рядов для приближенных вычислений

Задание 1. Вычислить $\cos 5^0$ с точностью до 10^{-5}.

◀Воспользуемся равенством (9.4). Тогда

$$\cos 5^0 = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^4}{4!} - \ldots. \tag{9.18}$$

Ряд (9.18) есть ряд Лейбница. Воспользуемся тем, что модуль остатка ряда Лейбница не превосходит модуля первого члена остатка.

Оценим сверху

$$\left|\frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^4}{4!}\right| = \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^4}{4!} < \frac{1}{9^4\cdot 24} = \frac{1}{157464} = 0,00000635\ldots < 10^{-5}.$$

Тогда $\cos 5^0 \approx 1 - \frac{\pi^2}{36^2\cdot 2} = 1 - 0,0038077\ldots \approx 0,99619$ с точностью до 10^{-5}.▶

Задание 2. Вычислить с точностью до 10^{-2} значение $\sqrt[4]{18}$.

◀ $\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{16+2} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}}$. Тогда, используя ряд (9.14), получим:

$$\sqrt[4]{18} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{8^2}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{8^3}+\ldots\right) = 2+\frac{1}{16}-\frac{3}{16\cdot 64}+\ldots.$$

Видно, что наш ряд (начиная со второго члена) есть ряд Лейбница, причем

$$\left|-\frac{3}{16\cdot 64}\right| < 0,002929\ldots < 10^{-2}, \quad \sqrt[4]{18} \approx 2+\frac{1}{16} = 2,0625 \approx 2,06.$$

Округление результата взято с недостатком, а частичная сумма $S_2 = 2+\frac{1}{16}$ есть приближение ряда с избытком $\left(R_2\left(\frac{1}{8}\right) < 0\right)$.▶

Задание 3. Используя разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора – Маклорена, вычислить с точность до 10^{-3} интеграл

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx. \tag{9.19}$$

$$◀ \int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx = \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}x^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{24}x^{\frac{13}{3}}-\frac{1}{720}x^{\frac{19}{3}}+\ldots\right)dx = \left.\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{\frac{10}{3}}}{2\cdot\frac{10}{3}}\right|_0^1 + \left.\frac{x^{\frac{16}{3}}}{\frac{16}{3}\cdot 24}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{\frac{22}{3}}}{\frac{22}{3}\cdot 720}\right|_0^1 + \ldots =$$

$$= \frac{3}{4}-\frac{3}{20}+\frac{1}{8\cdot 16}-\frac{1}{22\cdot 240}+\ldots. \tag{9.20}$$

Ряд (9.20) – ряд Лейбница. Видно, что

$$\left|-\frac{1}{22\cdot 240}\right| = \frac{1}{5280} = 0,000189\ldots < 10^{-3}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx = \frac{3}{4}-\frac{3}{20}+\frac{1}{8\cdot 16} = \frac{3}{5}+\frac{1}{128} = \frac{389}{640} = 0,60781\ldots \approx 0,608. ▶$$

Задание 4. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $0,0001$.
◀Воспользуемся биномиальным рядом (9.14):

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

который, как известно, сходится при $-1 < x < 1$.

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{5}{125}} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для функции $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ получим следующее разложение:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots = 1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4+\ldots.$$

Имеем знакочередующийся ряд Лейбница. Так как мы должны вычислить значение корня с точностью до $0,0001$, то для подсчета нужно взять первые три члена ряда. В самом деле, уже четвертый член, умноженный на пять, будет

$$\frac{5\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!5^6} = \frac{2}{27\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5^4} = \frac{1}{81\cdot 625} < 0,0001.$$

Производим вычисление (умножаем каждый член ряда на 5):

$$5,00000 + 0,06667 - 0,00089 = 5,06578.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{130} \approx 5,0658$ (с точностью до $0,0001$).▶

Задание 5. Вычислить приближенно значение интеграла

$$\int\limits_0^{\frac14} e^{-x^2}\,dx,$$

взяв три члена разложения в ряд подынтегральной функции; указать допущенную при этом погрешность.

◀Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд, получим:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots,$$

значит,

$$\int\limits_0^{\frac14} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac14} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right]_0^{\frac14} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{4^5\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{4^7\cdot 3!7} + \ldots.$$

Так как полученный ряд знакопеременный, то для приближенного значения интеграла, взяв первые три члена ряда, мы будем иметь абсолютную погрешность меньшую, чем первый отброшенный член, т. е. меньше, чем $\frac{1}{4^7\cdot 3!\cdot 7} < 0,0001$. Поэтому, производя вычисления с точностью до $0,00001$, будем иметь:

$$0,250000 - 0,005208 + 0,000098 = 0,244890.$$

Таким образом, $\int\limits_0^{\frac14} e^{-x^2}\,dx \approx 0,24489$ (с точностью до $0,00001$).▶

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

Задание 6. Вычислить

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x dx$$

с точностью до $0,001$.

◀Умножив все члены ряда (9.2) на $\sqrt{x}$, получим функциональный ряд:

$$\sqrt{x}e^x = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots.$$

Члены полученного функционального ряда при $0 \leqslant x \leqslant a$ не больше членов числового ряда

$$\sqrt{a} + a\sqrt{a} + \frac{a^2\sqrt{a}}{2!} + \ldots + \frac{a^n\sqrt{a}}{n!} + \ldots, \quad a > 0,$$

который сходится по признаку Даламбера. Следовательно, по признаку Вейерштрасса полученный функциональный ряд сходится равномерно на любом отрезке $[0, a]$.

Из равномерной сходимости функционального ряда вытекает, что его можно почленно интегрировать. Поэтому

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x dx = \int\limits_0^{\frac{1}{9}} \left(\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{2!7} + \ldots + \frac{2x^{n-1}\sqrt{x}}{n!\,(2n+3)} + \ldots\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{2!\cdot 7\cdot 3^7} + \ldots + \frac{2}{n!\,(2n+3)\,3^{2n+3}} + \ldots$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Выясним, сколько членов числового ряда необходимо взять для вычисления интеграла с точностью до $0,001$. Для этого сначала оценим остаток:

$$R_n = \frac{2}{n!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+3}} + \frac{2}{(n+1)!\,(2n+5)\cdot 3^{2n+5}} + \ldots < \frac{2}{n!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\left[1 + \frac{1}{n\cdot 3^2} + \frac{1}{n^2\cdot 3^4} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{n!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n\cdot 3^2}} = \frac{2}{(n-1)!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+1}\cdot(3^2 n - 1)}.$$

В квадратных скобках мы уменьшили знаменатели слагаемых, заменяя $(n+k)!$ на $n!\cdot n^k$, а $2n+3+2k$ на $2n+3$, от этого величина в квадратных скобках только увеличилась.

Очевидно, что для вычисления интеграла с точностью до $0,001$ достаточно взять два члена полученного числового ряда. В самом деле,

$$R_2 < \frac{2}{7\cdot 3^5\cdot 17} < 6\cdot 10^{-5}.$$

Производя вычисления с точностью до $0,0001$, получим:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x dx \approx 0,0242 + 0,0016 = 0,0258.$$

Тогда с точностью до $0,001$:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx \approx 0,026. \blacktriangleright$$

Задание 7. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{0,5} x^2 \cos\sqrt[3]{x}dx$ с точностью до 10^{-3}.

◀Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора – Маклорена и применим теорему об интегрировании степенных рядов. Радиус сходимости указанного степенного ряда $R = +\infty$.

$$I = \int\limits_0^{0.5} x^2 \cos\sqrt[3]{x} 2x = \int\limits_0^{0,5} x^2 \left(1 - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2!} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4!} - \frac{x^2}{6!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,5} \left(x^2 - \frac{x^{\frac{8}{3}}}{2!} + \frac{x^{\frac{10}{3}}}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{0,5} - \frac{x^{\frac{11}{3}}}{2\cdot\frac{11}{3}}\bigg|_0^{0,5} + \frac{x^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}\cdot 4!}\bigg|_0^{0,5} - \frac{x^5}{5\cdot 6!}\bigg|_0^{0,5} + \ldots = \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{3\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{11\cdot 2^5} + \frac{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{13\cdot 2^5\cdot 4!} - \frac{1}{5\cdot 6!\cdot 2^5} + \ldots .$$

Правая часть последнего равенства есть ряд Лейбница (показать). Находим член ряда, модуль которого меньше 10^{-3}. Проведем следующую оценку сверху $\left(2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} < 1,6\right)$:

$$\left|\frac{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{13\cdot 2^5\cdot 4!}\right| = \frac{\sqrt[3]{4}}{13\cdot 32\cdot 8} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3328} < \frac{1.6}{3328} = 0,000480 < 10^{-3}.$$

Тогда искомое приближенное значение интеграла

$$I = \frac{1}{24} - \frac{3\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{352} = 0,041666\ldots - 0,010737\ldots \approx 0,031. \blacktriangleright$$

Задание 8. Вычислить пределы, используя разложения функций в ряд Тейлора – Маклорена:

◀ 1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+o\left(x^2\right)-1-\frac{1}{2}2x-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(2x\right)^2+o\left(x^2\right)}{x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-x}=\frac{\frac{1}{8}\cdot 4}{-\frac{1}{2}}=-1.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln\left(1-x^2\right)}{x\cos x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^3}{1!}2+o\left(x^3\right)-x^2+o\left(x^3\right)}{x-\frac{x^3}{2!}+o\left(x^4\right)-x+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)}=\frac{2}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=-6.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}\sin x-(1+0,5x)\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)\right)-x-\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^5\right)-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^3-x-\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{3}x^3}=\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}{-\frac{1}{3}}=\frac{7}{8}.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{0{,}75\left(x-x^2\right)}-\sqrt[4]{1+3x}}{1-\cos 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{3}{4}\left(x-x^2\right)+\frac{9}{16}\frac{\left(x-x^2\right)^2}{2!}+o\left(x^2\right)-1-\frac{3}{4}x-\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(3x\right)^2+o\left(x^2\right)}{1-1+\frac{(3x)^2}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{32}x^2+\frac{27}{32}x^2}{\frac{9}{2}x^2}=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{32}+\frac{27}{32}}{\frac{9}{2}}=\frac{\frac{-24+36}{32}}{\frac{9}{2}}=\frac{1}{12}.$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cos x)+x\ln\left(1+\frac{2}{3}x^2\right)-x}{\sqrt{1+x^5}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\frac{x^3\cos^3 x}{3!}+\frac{x^5\cos^5 x}{5!}+o\left(x^5\right)+x\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2}{2}o\left(x^5\right)\right)-x}{1+\frac{1}{2}x^5+o\left(x^5\right)-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)-\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1+o\left(x\right)\right)^5+\frac{2}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{4}+\frac{x^5}{120}+\frac{2x^3}{3}-\frac{2x^5}{9}-x}{\frac{1}{2}x^5}=\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{120}-\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{45}.$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\sqrt{1+x}+x}{2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-x^2+o\left(x^2\right)-2-x-2\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+0\left(x^2\right)+x}{2(1+o(x))x^2}}=e^{\frac{-1+\frac{1}{4}}{2}}=e^{-\frac{3}{8}}.$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x-\ln\left(1+x\right)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x-\ln\left(1+x\right)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-e^x+\ln(+x)}{(e^x-\ln(1-x))x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\cos x-1)+o\left(x^2\right)-1-x-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)+x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{5}{4}}.\ \blacktriangleright$$

Задание 9. Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)} x^{2n-3}. \tag{9.21}$$

◀Ряд (9.21) – это ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, у которого коэффициенты членов ряда с четными показателями равны нулю. Исследуем ряд (9.21) на сходимость. Пусть

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)} x^{2n-3}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{(2n-1)!\,(2n+1)} x^{2n-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n-1}(2n-3)!\,(2n-1)}{(2n-1)!\,(2n+1)\,|x|^{2n-3}} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)} = 0.$$

Значит, ряд (9.21) сходится на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Проинтегрируем ряд (9.21).

$$A(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)} t^{2n-3} \right) dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)} \int_0^x t^{2n-3} dt =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)} \cdot \left. \frac{t^{2n-2}}{2n-2} \right|_0^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-2}. \tag{9.22}$$

Если $x \neq 0$, то

$$A(x) = -1 + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = -1 + \frac{\sin x}{x}.$$

Если $x=0$, то, очевидно, что сумма ряда (9.21) равна нулю. Находим сумму ряда (9.21) при $x\neq 0$.

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)}x^{2n-3}=A'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=0.$$

$$S(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}\ \blacktriangleright$$

Задание 10. Пользуясь разложением функции $f(x)=(x-2)^2\ln(3x+2)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$, найти производную $f^{(7)}(2)$.

$$\blacktriangleleft\ f(x)=(x-2)^2\ln(3(x-2)+8)=(x-2)^2\ln\left(8\left(\frac{3}{8}(x-2)+1\right)\right)=$$

$$=(x-2)^2\left(\ln 8+\ln\left(1+\frac{3}{8}(x-2)\right)\right)=(x-2)^2\ln 8+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{3}{8}\right)^k}{k}(x-2)^{k+2}. \tag{9.23}$$

Очевидно, что производная седьмого порядка первого слагаемого правой части (9.23) равна нулю. Во втором слагаемом указанной правой части (9.23) считаем

$$a_k=\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{3}{8}\right)^k}{k}. \tag{9.24}$$

Тогда $7=k+2$, где $k=5$. По формуле для коэффициентов ряда Тейлора имеем:

$$\frac{f^{(7)}(2)}{7!}=a_5,\quad f^{(7)}(2)=7!\frac{(-1)^{5-1}\left(\frac{3}{8}\right)^5}{5}=\frac{7!}{5}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^5.\ \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до $0,001$.

2. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до $0,001$.

3. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью до $0,0001$.

4. Вычислить $\ln 3$ с точностью до $0,0001$.

5. Доказать, что:
$$\ln 2 = 7a + 5b + 3c,\ \ \ln 3 = 11a + 8b + 5c,\ \ \ln 5 = 16a + 12b + 7c,$$
где $a = \ln \frac{16}{15}$, $b = \ln \frac{25}{24}$, $c = \ln \frac{81}{80}$.
С помощью этих равенств вычислить $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 10$ с точностью до $0,0001$.

6. Доказать, что
$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}.$$
С помощью этого тождества вычислить π с точностью до $0,00001$.

7. Выяснить происхождение приближенной формулы
$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}\ (a > 0)\,,$$
вычислить с ее помощью $\sqrt{23}$, положив $a = 5$, и оценить допущенную при этом ошибку.

8. При каких значениях x приближенная формула $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ дает ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$, $0,0001$?

9. При каких значениях x приближенная формула $\sin x \approx x$ дает ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$?

10. Сколько нужно взять членов ряда $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, чтобы найти число e с точностью до $0,0001$?

11. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx$ с точностью до $0,001$.

12. Вычислить $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ с точностью до $0,001$.

13. Определить значения x, для которых приближенное равенство $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ выполняется с точностью до $0,0001$.

14. Вычислить значение $\operatorname{tg} 46^\circ$, взяв три первых члена разложения функции $\operatorname{tg} x$ по формуле Тейлора.

15. Вычислить значение $\cos 32^\circ$ с точностью до $0,0001$, пользуясь разложением функции $f(x) = \cos x$ по формуле Тейлора.

16. Ответьте на вопросы итогового теста по разделу «Функциональные ряды».

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 1
Вариант 2
Вариант 3
Вариант 4
Вариант 5
Вариант 6
Вариант 7
Вариант 8
Вариант 9
Вариант 10
Вариант 11
Вариант 12

Задания для подготовки к экзамену и (или) зачету

1. Найти общий член последовательности частичных сумм ряда

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)\,(2n+1)}\ldots.$$

Пользуясь определением суммы ряда, показать, что этот ряд сходится, и найти его сумму.

2. Найти выражение для конечной суммы $S_n = 1+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\ln\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

4. Исследовать ряд на сходимость, используя следствие из необходимого признака сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2}.$$

5. Пользуясь критерием Коши, исследовать ряды на сходимость и расходимость:

5.1 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\alpha}{2^k}$;

5.2 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

6. Установить сходимость и расходимость рядов с помощью теорем сравнения:

6.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

6.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}}$;

6.3 $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1}\right)$;

6.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n^2-1}\sin\frac{\pi}{n+2}$;

6.5 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}}\ln n$.

7. Сколько членов ряда
$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$
нужно взять, чтобы получить значение суммы с точностью до $0,0001$?

8. Исследовать ряды на сходимость:

8.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$;

8.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

8.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot6\cdot\ldots\cdot3n}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}$;

8.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(2^n+3^n)}$;

8.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(2n)}$;

8.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)$;

8.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$;

8.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.

9. Сколько нужно взять членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n+1)!}$. В случае сходимости ряда найти его сумму с точностью до 10^{-3} как с недостатком, так и с избытком.

11. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

12. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{n + \operatorname{arcctg} nx}{3nx}$$

на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

13. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n \ln^2 n}$ на множестве $A = [-c, c]$ $(c > 0)$.

14. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin x \cdot \cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$, используя признак Абеля – Дирихле о равномерной сходимости функциональных рядов.

15. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ равномерно сходится на полуоси $0 \leqslant x < \infty$.

16. Доказать равномерную сходимость на отрезке $[0, 2]$ функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{3^k \sqrt{1+kx^2}}$, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

17. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится на всей числовой оси, используя мажорантный признак Вейерштрасса.

18. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$.

19. Найти область сходимости степенного ряда $\frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$.

20. С помощью формулы Тейлора разложить многочлен $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$. Найти с точностью до $0,001$ $p(-1,002)$ и $p(-0,997)$.

21. Указать промежуток значений x, на котором приближенная формула

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

имеет место с точностью до $0,00005$.

22. Разложить функцию $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

23. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \operatorname{arctg} x$.

24. Разложить функцию $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ в ряд Маклорена.

25. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $0,0001$.

26. Вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$, взяв 3 члена разложения в ряд подынтегральной функции; указать допущенную при этом погрешность.

27. Вычислить пределы, используя разложения функций в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^{2x} + \ln(1-x^2)}{x\cos x - \sin x}.$$

28. Вычислить с точностью до 10^{-4} $\cos 27^\circ$.

29. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{0,5} x^2 \cos \sqrt[3]{x} dx$ с точностью до 10^{-3}.

30. Представить в виде ряда интеграл $\int\limits_0^{x} t^2 e^{-t^2} dt$, где $x > 0$.

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету

1. Понятие числового ряда, его частичной суммы, суммы. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Ряды, составленные из слагаемых геометрической прогрессии. Остаток ряда.
2. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд.
3. Арифметические операции над сходящимися рядами.
4. Критерий Коши сходимости ряда.
5. Знакопостоянные ряды. Критерий сходимости положительных рядов. Теоремы сравнения положительных рядов.
6. Признаки Даламбера сходимости числовых рядов.
7. Признаки Коши сходимости числовых рядов.
8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности. Обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов.
9. Интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов.
10. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Абеля – Дирихле сходимости числовых рядов с членами произвольных знаков.
11. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
12. Функциональные последовательности и ряды, их сходимость. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов.
13. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов.
14. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.
15. Признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.
16. Почленный переход к пределу. Непрерывности суммы функционального ряда и предельной функции функциональной последовательности.
17. Почленное интегрирование функциональных рядов и функциональных последовательностей.

18. Почленное дифференцирование функциональных рядов и функциональных последовательностей.
19. Понятие степенного ряда. Теорема Коши – Адамара. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.
20. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Понятие аналитической функции.
21. Разложение в ряд Тейлора – Маклорена функций

$$f(x) = e^x,\ f(x) = \cos x,\ f(x) = \sin x,\ f(x) = \ln(1+x),\ f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \neq 0.$$

Литература

1. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2020. – Ч. 1: Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 475 с.
2. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2021. – Ч. 2: Интегральное исчисление функций одной переменной. – 401 с.
3. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2021. – Ч. 3: Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. – 590 с.
4. Кротов, В. Г. Лекции по математическому анализу: учеб. пособие / В. Г. Кротов — Минск: БГУ, 2016. — 372 с.
5. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 2 : Основы математического анализа. – 463 с.
6. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – Т. 2 : Курс математического анализа. – 584 с.
7. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 616 с.
8. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 528 с.

Приложение

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 1

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots .$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi n}{n^{2}\sqrt{n}+n+1}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{2}}{3^{n^{2}}}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{n}}{n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^{2}(n+1)}{2^{n}+3^{n}}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{x}}.$$

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{x}{n}$$

на множестве $E = (-\infty, +\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд на указанном множестве, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos nx}{n^2 x^2 + n}, \quad E = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t^{17}}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать его радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln n}$.

9. Разложить функцию $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$.

10. Вычислить с точностью до $0,001$ $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 2

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$2+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^9}}{e^n}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}}\left(e^{\frac{1}{n^{\alpha}+1}}-1\right)$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{5^{\frac{n}{2}}-n^2}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\cos^2 x}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin nx}{2^n}$$

на множестве $E=(-\infty,+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд на указанном множестве, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos nx}{n^2 x^2 + n}, \; E = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

9. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \ln(1 + 2x)$, заданную на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Оценить погрешность, получаемую при отбрасывании дополнительного члена в формуле Тейлора после пяти первых членов.

10. Вычислить с точностью до $0,001$ $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 3

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1 - \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}\cdots.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+1}{2n^2+3}\right)^{n^9}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdot\ldots(3n)}{(n+1)!}\, arctg\frac{1}{2^n}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{1}{n^2+\sin^2 n}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^4+n}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n+1)x}}$$

на множестве $E = (0, +\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд на указанном множестве, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n+n^2x^2}, \ E = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

9. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням двучлена $x-4$. Ограничиться четырьмя членами.

10. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx$ с точностью до $0,001$.

Вариант 4

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} \ldots .$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^9 \sin \frac{1}{n^9+n+1}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sin \frac{x}{2^n}}{n!}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{x^2+n^2}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4+1}$$

на множестве $E = (-\infty, +\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{\sqrt[4]{n^4+x^4}}, \quad E=\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x)\int\limits_0^x \frac{\sin t^2}{t}dt$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.
8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.
9. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ по степеням x. Оценить $R_{10}(x)$ на $[0,1]$.
10. Вычислить приближенное значение определенного интеграла, взяв два члена разложения в ряд подынтегральной функции. Указать допущенные при этом погрешности $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 5

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\ldots .$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)2^n}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^2+1}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^{\frac{2}{3}}}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+(nx)^3}$$

на множестве $E=[0,1]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx} \cos nx, \; E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}$.

9. Выяснить происхождение приближенного равенства $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оценить погрешность для

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

10. Вычислить приближенное значение определенного интеграла, взяв два члена разложения в ряд подынтегральной функции. Указать допущенные при этом погрешности $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 6

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+2}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^{10}}{3^n+n^2}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$$

на множестве $E=[0,+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - \ln(n+x)}, \ E = (0,1].$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.
8. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.
9. Определить значения x, для которых приближенное равенство $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ выполняется с точностью до $0,0001$.
10. Сколько нужно взять членов ряда $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, чтобы найти число e с точностью до $0,0001$?

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 7

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n-5^n}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n+2}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x-3)^n}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}$$

на множестве $E = [-3, 0]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \sin \frac{\pi}{1+n^5 x^3},\ E=(-\infty,+\infty)\,.$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arccos x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.
8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.
9. Вычислить значение $\operatorname{tg} 46^\circ$, взяв три первых члена разложения функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, по формуле Тейлора. Результат сравнить с табличным.
10. При каких значениях x приближенная формула $\sin x \approx x$ дает ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$?

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 8

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 .$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \cos n^2$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5\sqrt{n}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^9}{\sqrt{n^{20}+4n^3+1}}$;

3.2 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln \ln n}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n} + (n+1)x}}$$

на множестве $E = [0, +\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \cos nx, \ E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arcsin x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.
8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.
9. Вычислить значение $\cos 32^\circ$ с точностью до $0,0001$. Результат сравнить с табличным.
10. При каких значениях x приближенная формула $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ дает ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$, $0,0001$?

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 9

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3+5^3+9^3+\ldots+(4n-3)^3 .$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin an, a\neq xm, m\in Z;$

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}};$

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{5^n n};$

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{25} n}{n};$

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)}.$

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^3}.$

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi-x)\cos^2 nx}{\sqrt[5]{n^7+1}}$$

на множестве $E=[0,\pi]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx} \cos nx}{n}, \; E = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.
8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$.
9. Оценить абсолютную погрешность на промежутке $[0, 1]$ приближенной формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.
10. Вычислить $\ln 3$ с точностью до $0,0001$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 10

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^3.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^9 \sin \frac{1}{n^9+n+1}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\sqrt{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}}$;

3.2 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2+n+1}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

на множестве $E = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}\cos nx,\ E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.
8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$.
9. Разложить функцию $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ по степеням двучлена $x - 2$. Вычислить приближенное значение $f(2,1)$, взяв первые три члена разложения. Вычислить точное значение $f(2,1)$. Найти абсолютную и относительную погрешности, допущенные при приближенном вычислении $f(2,1)$.
10. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью до $0,0001$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 11

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - \ldots + (-1)^{n-1}\, n^4.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3,1}}{2\sqrt{n}+n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n^4}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$$

на множестве $E = (-2, +\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\sin nx}{n\ln^{\alpha} n}\right), \ \alpha>0, \ E=(-\infty,+\infty)\,.$$

7. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\cdot(x-5)^{n+1}}{(n+1)!}$.

9. Указать промежуток значений x, при которых приближенная формула

$$\sin^2 x \approx \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3\cdot x^4}{4!}$$

имеет место с точностью до $0{,}01$.

10. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до $0{,}001$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 12

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0{,}3}}$;

2.2 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+1}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+20}$;

3.2 $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(n+2)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^2-n+1}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\sin^n x}{n(n+2)}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2e^{n^2x^2}}$$

на множестве $E=(-\infty,+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}, \ E = (-\infty, +\infty) .$$

7. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.
8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$.
9. Сколько нужно взять членов в формуле Тейлора для функции $f(x) = \cos x$, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию с точностью до $0,0001$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?
10. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до $0,001$.

Предметный указатель