УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Исследование операций

Электронный учебно-методический комплекс для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2022

Авторы:

кандидат физико-математических наук, доцент **С.А. Марзан**

кандидат физико-математических наук, доцент **А.Н. Сендер**

кандидат физико-математических наук, доцент **Н.Н. Сендер**

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина,
кандидат физико-математических наук, доцент
Грицук Д.В.

кафедра информатики и прикладной математики
Брестского государственного технического университета,
кандидат технических наук, доцент
Парфомук С.И.

Исследование операций: электронный учебно-методический комплекс / С.А. Марзан, А.Н. Сендер, Н.Н. Сендер; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2022. – 430 страниц.

Учебное пособие содержит курс лекций и лабораторных занятий, тестовые задания для самоконтроля, а также задания для подготовки к экзамену, варианты заданий для индивидуальных работ по дисциплине "Исследование операций".

Предназначено для студентов специальностей "Экономическая кибернетика" и "Прикладная математика".

Знакомство с ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) содержит курс лекций и лабораторных занятий, задания для подготовки к экзамену, варианты заданий для индивидуальной работы, а также интерактивные тестовые задания для самоконтроля по "Исследованию операций". ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы с пособием необходим компьютер, планшет или смартфон с любой операционной системой, на котором установлена программа для чтения документов формата pdf, например, Adobe Acrobat Reader. Для работы с тестовыми заданиями требуется подключение к сети интернет. Тесты, включенные в ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов. После запуска ЭУМК в правой части экрана читатели увидят навигационную панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

— кнопка «На весь экран» позволяет «развернуть» ЭУМК на весь экран монитора;

— кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУМК;

— кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУМК;

— кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУМК, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

— кнопка «Вперед» предназначена для возврата на ту страницу ЭУМК, с которой был совершен переход при нажатии кнопки "Назад".

— кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУМК.

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУМК, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУМК можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУМК. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУМК. Весь текст ЭУМК снабжен необходимыми гиперссылками, позволяющими реализовать интуитивно понятную навигацию с возможностью быстрого поиска требуемой информации.

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

СОДЕРЖАНИЕ

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Предисловие

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине "Исследование операций" (далее – ЭУМК) является учебно-методическим комплексом для студентов специальностей 1-31 03 06-01 "Экономическая кибернетика" и 1-31 03 03 "Прикладная математика". Исследование операций – прикладная математическая дисциплина, которая занимается вопросами количественного обоснования решений по управлению целенаправленными процессами (операциями) в сложных системах.

ЭУМК разработано в соответствии с ОСВО 1-31 03 06-01 специальностей "Экономическая кибернетика" и ОСВО 1-31 03 03 "Прикладная математика". ЭУМК обеспечивает достижение основной дидактической цели — самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной и учебной информации количество часов, предусмотренных учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко.

Изложение материала в учебно-методическом комплексе приводится в наиболее оптимальной последовательности. При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач, с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. Учебно-методический комплекс содержит достаточно обширный материал для индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену по дисциплине "Исследование операций".

Тесты, включенные в ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. В ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться:

– строить математические модели, представлять их возможности и ограничения;

— использовать формальные методы при решении задач исследования операций;

— решать практические задачи принятия решений с использование методов исследования операций.

ЭУМК содержит обширный материал для индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену по данной дисциплине.

Учебная программа рассчитана на 176 учебных часа, в том числе 86 аудиторных часов, примерное распределение которых по видам занятий включает: лекции — 68 часов, лабораторные занятия — 18 часов. Формой текущей аттестации по дисциплине является экзамен.

Примерный тематический план по дисциплине “Исследование операций”

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ЛБ
I	**Введение**	**6**	
1	Предмет, история и перспективы развития исследования операций. Основные этапы и принципы операционного исследования.	2	
2	Идентификация моделей операций. Экспертный метод.	2	
3	Критерии эффективности.	2	
II	**Принятие решений и элементы теории игр**	**12**	**4**
1	Принятие решений и неопределенность. Типы неопределенности. Многокритериальные задачи. Принятие решений в условиях неопределенности природы и в конфликтных ситуациях. Критерии рационального поведения.	2	
2	Смешанные стратегии, седловые точки. Основные понятия антагонистических игр. Матричные игры и методы их решений. Понятие о коалиционных и позиционных играх.	6	2
3	Игры с природой.	4	2
III	**Линейные модели**	**10**	**4**
1	Общая характеристика линейных моделей. Примеры моделей планирования производства и макроэкономики. Экономическая интерпретация двойственных оценок. Устойчивость оптимального плана.	2	2
2	Иерархические системы и методы декомпозиции.	2	
3	Целочисленные линейные модели.	6	2
IV	**Сетевые модели**	**20**	**6**
1	Экстремальные задачи на графах.	2	
2	Задача о минимальных покрывающих деревьях.	2	

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ЛБ
3	Задача о кратчайших цепях.	2	
4	Задача о максимальном потоке в сетях и ее обобщения.	2	2
5	Максимальные паросочетания. Варианты задачи о назначении: классическая, о максимальной занятости, на узкие места.	2	
6	Элементы сетевого и календарного планирования.	2	
7	Сетевые графики и их параметры. Задачи распределения ресурсов на сетях.	4	2
8	Задача коммивояжера и ее приложения.	4	2
V	**Задача оптимального управления**	**6**	
1	Задачи теории расписаний, их классификация.	2	
2	Задача для одной машины. Общая задача Джонсона. Свойства оптимальных решений.	2	
3	Задача Джонсона для двух и трех машин.	2	
VI	**Вероятностные модели**	**14**	**4**
1	Общая характеристика задач массового обслуживания. Характеристики входного потока и длительности обслуживания.	2	
2	Процессы гибели и размножения.	2	
3	Системы массового обслуживания с потерями и с ожиданием. Замкнутые системы массового обслуживания.	2	2
4	Управление запасами. Задачи определения оптимальных размеров заказываемой партии.	4	2
5	Задача замены оборудования.	4	
	Итого	**68**	**18**

ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия исследования операций (ИСО). Классификация задач

Исследование операций – это комплексная *математическая* дисциплина, занимающаяся построением, анализом и применением *математических моделей* принятия *оптимальных решений* при проведении *операций*.

Операция – система *управляемых* действий, объединенная единым замыслом и направленная на достижение определенной цели.

Примеры операций.

Пример 1.1. Предприятие выпускает несколько видов изделий, при изготовлении которых используются ограниченные ресурсы различного типа. Требуется составить план выпуска изделий на месяц, т.е. указать количество выпускаемых изделий каждого вида, так, чтобы максимизировать прибыль при выполнении ограничений на потребляемые ресурсы.

Пример 1.2. Требуется создать сеть временных торговых точек так, чтобы обеспечить максимальную эффективность продаж. Для этого требуется определить

– число точек,

– их размещение,

– количество персонала и их зарплату,

– цены на товары.

Пример 1.3. Требуется организовать строительство железнодорожного вокзала. При этом необходимо указать порядок выполнения работ во времени и распределить требуемые ресурсы между работами так, чтобы завершить строительство во время и минимизировать его стоимость.

Набор **управляющих** параметров (переменных) при проведении операции называется *решением*. Решение называется *допустимым*, если оно удовлетворяет набору определенных условий. Решение называется *оптимальным*, если оно допустимо и, по определенным признакам, предпочтительнее других, или, по крайней мере, не хуже.

Признаки предпочтения называется *критерием оптимальности*. Критерий оптимальности включает в себя **целевую функцию** и **направление оптимизации** или **набор** целевых функций и соответствующих направлений оптимизации.

Целевая функция – это количественный показатель предпочтительности или эффективности решений. *Направление оптимизации* – это **максимум(минимум)**, если наиболее предпочтительным является наибольшее (наименьшее) значение целевой функции. Например, критерием может быть максимизация прибыли либо минимизация расходов. *Математическая модель* задачи ИСО включает в себя:

1. описание переменных, которые необходимо найти,

2. описание критериев оптимальности,

3. описание множества допустимых решений (ограничений, накладываемых на переменные).

Цель ИСО – количественно и качественно **обосновать** принимаемое решение. Окончательное решение принимает ответственное лицо (либо группа лич), называемое *лицо, принимающее решение (ЛПР)*.

Математическая модель задачи ИСО составляется в соответствии с представлениями ЛПР об этой задаче, т.е. в соответствии с его **информационными состоянием**. При этом вважно, чтобы математическая модель задачи была наиболее **адекватной**, т.е. наиболее правильно отражала информационное состояние ЛПР. Для этого разработчик математической модели должен работать в тесном контакте с ЛПР.

Основной принцип разработчика: **"Разрабатывай не то, что заказчик просит, а то, что ему нужно."** (М. Гэри и Д. Джонсон "Вычислительные машины и труднорешаемые задачи").

Проверка адекватности представлений ЛПР о задаче не является предметом ИСО. Изменение информационного состояния ЛПР может привести к изменению математической модели задачи.

1.1 Класификация задач ИСО

Классификация в зависимости от достоверности информации о задачею.

1. Статическая задача. Принятие решения происходит при условии, что все параметры задачи заранее известны и не изменяются во времени. Процедура принятия решения осуществляется один раз.

2. Динамическая задача. В процессе принятия решения параметры задачи изменяется во времени. Процедура принятия решения осуществляется поэтапно и может быть представлена в виде процесса, зависящего от времени, в том числе непрерывно. Пример – навигационная задача.

Классификация в зависимости от достоверности информации о задаче.

1. Детерминированная задача. Все параметры задачи заранее известны. Для решения детерминированных задач в основном применяется методы *математического программирования.*

2. Недетерминированная задача. Не все параметры задачи заранее известны. Например, необходимо принять решение об управлении устройством, некоторые узлы которого могут непредсказуемо выходить из строя. Оптимальное решение недетерминированной задачи ИСО отыскать практически невозможно. Однако некоторое "разумное" решение отыскать можно. *"Исследование, операций представляет со-*

бой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими методами". (Т.Л. Саати)

2,а). Стохастическая задача. Не все параметры задачи заранее известны, но имеются статистические данные о неизвестных параметрах (вероятности, функции распределения, математические ожидания и т.д.).

Для отыскания оптимального решения стохастической задачи применяется один из следующих приемов:

– искусственое сведение к детерминированной задаче (неизвестные параметры заменяются их средними значениями),

– "оптимизация в среднем" (вводится и оптимизируются некоторый статистический критерий).

2,б). Задача в условиях (полной) неопределенности. Статистические данные о неизвестных параметрах отсутствуют. Задачи ИСО в условиях неопределенности в основном изучаются в рамках *теории игр.*

Классификация по виду критерия оптимальности.

Критерий оптимальности может иметь любой вид, в том числе *неформализуемые* ("Хочу, чтобы все было хорошо"). Наиболее распространенные *формализуемые* критерии оптимальности заключаются в оптимизации (минимизации либо максимизации) одной либо нескольких *скалярных* целевых функций.

Функция называется скалярной, если ее значение является некоторое число. Задача оптимизации скалярной функции на заданном множестве допустимых числовых решений называется *задачей математического программирования.* Наиболее изученными представителями однокритериальных задач математического программирования, т.е. задач с одной целевой функцией, является следкющие задачи.

Задачи линейного программирования. Целевая функция – линейная, множество допустимых решений – выпуклый многогранник.

Задачи квадратичного программирования. Целевая функция – квадратичная $(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j)$, а множество допустимых решений – выпуклый многогранник.

Задачи стохастического программирования. Это задачи линейного программирования с неизвестными числовыми параметрами, о которых иммеются статистические данные.

Задачи дискретного программирования. Множество допустимых решений – дискретное множество.

Задачи целочисленного программирования. Множество допустимых решений – точки целочисленной решетки.

Задачи булева программирования. Множество допустимых решений – 0-1 матрицы.

1.2 Многокритериальные задачи

В задачах ИСО, как правило, присутствует не один, а несколько признаков предпочтения (критериев). Такие задачи называются многокритериальными.

Критерии могут оказаться противоречивыми, т.е. решение, лучшее по определенному признаку, может оказаться худшим по другому признаку. Например, минимизация стоимости и максимизация качества товара почти всегда противоречивы. В этом случае задача отыскания решения, предпочтительного по всем признакам, будет *некорректной*, т.е. не будет иметь ни одного решения.

В случае противоречивых критериев, ИСО предлагает следующие подходы к отысканию подходящего решения.

1) Замена некоторых критериев ограничениями вида $\leq$ или $\geq$. Например, минимизация стоимости $f(x) \to \min$, может быть заменена ограничением вида $f(x) \leq A$, где A - некоторая верхняя оценка стоимости, т.е. максимально допустимая стоимость.

2) Свертка критериев. Создается один глобальный скалярный критерий, целевая функция которая является некоторой функцией от исходных целевых функций. Наиболее употребимыми являются линейные свертки вида $\alpha f(x) + \beta g(x)$ (в случае двух критериев). Нетривиальной является задача отыскания адекватных знаний коэффициентов α и β, отражающих относительную важностьцелевых функций $f(x)$ и $g(x)$.

3) Ранжирование критериев. Критерии ранжируются по степени важности.

4) Отыскание решений, лучших хотя бы по одному критерию.

Подходы 1) и 2) приводят к однокритериальной задаче. Подход 3) приводит к *задаче с упорядоченными критериями*. В задаче с упорядоченными критериями упорядочиваются по важности и требуется найти оптимальное решение для наименее важного критерия на множестве решений, оптимальных для более важного критерия (см. рисунок 10.1).

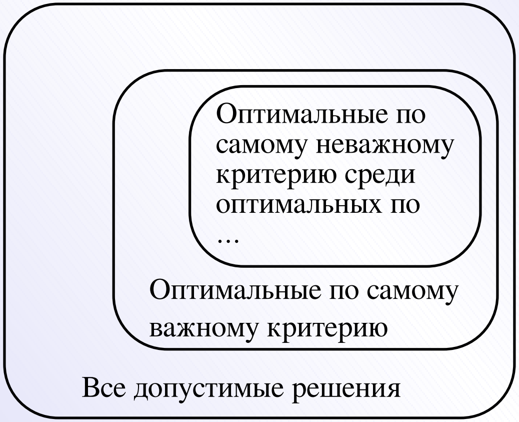


Рисунок 1.1 – Решение задачи с упорядоченными критериями

Самое большое – множество всех допустимых решений, в него вложенно множество решений, оптимальных по самому важному критерию, далее вложено множество оптимальных по второму по важности критерию среди оптимальных по первому критерию, и т.д.

Подход 4) приводит к *задаче с независимыми критериями.* В этой задаче требуется найти множество *недоминируемых (эффективных) решений.* Недоминируемое решение лучше любого другого допустимого решения хотя бы по одному критерию либо не хуже по всем критериям. Множество недоминируемых решений также называется *множеством Парето.*

Пример многокритериальной задачи с независимыми критериями. Фирма по разработке программного обеспечения должна выполнить проекты 1 и 2 в последовательности $(1, 2)$. Для выполнения каждого проекта можно привлечь от одного до трех исполнителей. Пусть x_1 и x_2 – число исполнителей, привлеченных для выполнения проектов 1 и 2 соответственно. Время выполнения проектв i $t_i(x_i)$ месяцев, а соответствующая стоимость – $c_i(x_i)$ млн. рублей. Требуется минимизировать общее время выполнения проектов при минимальной стоимости.

Значение функций заданы следующим образом:

x	1	2	3
$t_1(x)$	2	1	1
$t_2(x)$	3	1	1
$c_1(x)$	1	2	3
$c_2(x)$	4	4	5

Общее время выполнения проектов равно

$$T(x_1, x_2) = t_1(x_1) + t_2(x_2),$$

а стоимость их выполенния равна

$$C(x_1, x_2) = c_1(x_1) + c_2(x_2).$$

Определим все возможные значения пар

$$(T, C) = (T(x_1, x_2), C(x_1, x_2)) \in$$

$$\in \{(2,6), (2,7), (2,8), (3,5), (3,6), (4,6), (4,7), (5,5)\}.$$

Соответствующие значения аргументов

$$(x_1, x_2) \in \{(2,2), \{(2,3), (3,2)\}, (3,3), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (1,1)\},$$

см. рисунок 1.2.

Задача отыскания множества Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \to \min$ и $F_2(x) \to \min$ может быть решена графически следующим образом. Находим все точки с наименьшим значением $F_1(x)$. Если их несколько, выбираем из них точку с наименьшим значением $F_2(x)$. Включаем ее во множество Парето. Отсекаем точки с большими либо равными значениями $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (северо-восточный угол с вершиной в выбранной точке). Повторяем процедуру для оставшейся части допустимой области.

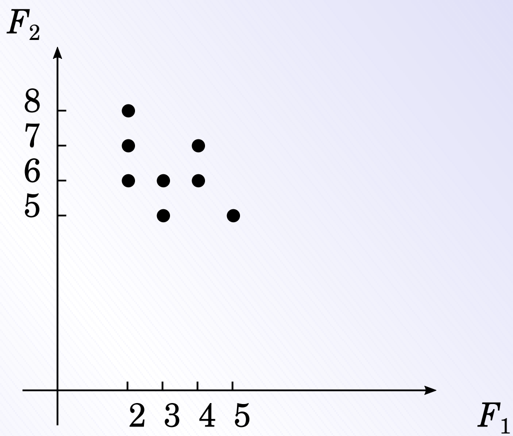


Рисунок 1.2 – Отыскание множества Парето

Из рисунка видно, что для нас представляют интерес пары $(F_1, F_2) \in \{(2,6),(3,5)\}$ и соответствующие решения $(x_1, x_2) \in \{(2,2),(1,2)\}$, которые являются недоминируемыми и образуют множество Парето рассматриваемой задачи.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ЛЕКЦИЯ 2

Матричные игры с нулевой суммой

Теория игр занимается разработкой различного рода рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации. Формализуя конфликтные ситуации математически, их можно представить как игру двух, трех или более игроков, каждый из которых преследует цель максимизации своего выигрыша за счет другого игрока. Иногда теорию игр определяют как раздел математки, занимающийся выработкой оптимальных правил поведения для каждой стороны, участвующей в конфликтной ситуации. Совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий стороны в конкретной конфликтной ситуации, есть *стратегия.*

Под термином *"игра"* понимается совокупность предварительно оговоренных правил и условий, а термин *"партия"* связан с частичной возможной реализацией этих правил. Если n партнеров (игроков) $P_1, P_2, \ldots,$ P_n участвуют в данной игре, то основное содержание теории игр состоит в изучении следующей проблемы: как должен вести партию j-й партнер $(j = \overline{1,n})$ для достижения наиболее благоприятного для себя исхода?

В дальнейшем предполагается, что в конце партии каждый игрок P_j получает сумму v_j, называемую *выигрышем.* При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется лишь данной целью максимизации общей суммы выигрыша. Числа v_j $(j = \overline{1,n})$ могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Если $v_j > 0$, то это соответствует выигрышу j-го игрока, если $v_j < 0$, – проигрышу, при $v_j = 0$ – ничейный исход.

В большинстве случаев имеем игры с нулевой суммой, т.е.

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0.$$

В этих играх сумма выигрыша переходит от одного партнера к другому, не поступая из внешних источников. Игра с нулевой суммой предусматривает, что сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Примерами игры с нулевой суммой служат многие экономические задачи. В них общая сумма выигрыша перераспределяется между игроками, но не меняется. В противном случае имеем игру с ненулевой суммой.

Игры, в которых участвуют два игрока, называются *парными*, а игры с большим числом участников – *множественными*. Принятие игроком того или иного решения в процессе игры и его реализация называется *ходом*. Ходы могут быть *личные* и *случайные*. Если ход выбирается сознательно, – это личный ход, а если с помощью механизмов случайного выбора, – случайный ход.

Шахматы являются игрой двух партнеров с конечным числом личных ходов. В дальнейшем мы будем рассматривать игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Такие игры математически глубоко проработаны и вызывают наибольший интерес, поскольку чаще используются в практических приложениях.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на *конечные* и *бесконечные*. Так, в конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то игра называется бесконечной.

В зависимости от взаимоотношений игроков игры делятся на *копервтивные*, *коалиционные* и *бескоалиционные*. Если игроки не имеют права вступать в соглашения, то такая игра относится к бескоалиционным, если же игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции, – к коалиционным. Кооперативная игра – это такая игра, в которой заранее определены коалиции.

В зависимости от вида функции выигрышей игры подразделяются на *матричные*, *биматричные*, *непрерывные*, *выпуклые*, *сепарабельные* и т.д. Мы будем рассматривать матричные игры. Обратимся к примерам простейших матричных игр.

Пример 2.1. Первый игрок P_1 выбирает одну из двух сторон монеты. Второй игрок P_2, не зная выбора первого, также выбирает одну из сторон. После того как оба игрока произвели свой выбор и монета брошена, игрок P_2 платит 1 игроку P_1, если выбранные стороны монеты совпали, и -1 в противном случае. Здесь 1 соответствует выигрышу игроком P_1 одной единицы, а -1 соответствует проигрышу им одной единицы. В этом предположении мы говорим, что P_1 играет на максимум, а P_2 – на минимум.

Постановку задачи можно записать так:

Стратегии игроков		P_2	
		Орел	Решка
P_1	Орел	1	–1
	Решка	–1	1

Таким образом, условия игры определяются матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

строки которой соответствуют возможным стратегиям для P_1, а столбцы – возможным стратегиям для P_2. Как только P_1 выбирает строку и P_2 – столбец, партия заканчивается и выигрыш игрока P_1 равен числу, стоящему на пересечении выбранных строки и столбца.

Пример 2.2. ("игра в три пальца"). Игроки P_1 и P_2 одновременно и независимо друг от друга показывают 1, 2 или 3 пальца. Размер выигрыша определяется общим количеством показанных пальцев. При этом, если число пальцев четное, выигрывает игрок P_1, нечетное, – игрок P_2.

Такую игру двух игроков можно представить в виде матрицы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix},$$

где индекс i элементов a_{ij} $(i = j = 1, 2, 3)$ означает количество пальцев игрока P_1, а индекс j – количество пальцев игрока P_2. Например, a_{13} означает, что одновременно и независимо друг от друга игрок P_1 показал 1 палец, а игрок P_2 – 3 пальца. Количество пальцев для элемента a_{13} – 4 указывает на выигрыш 4 единиц игроком P_1. Элемент $a_{32} = -5$ указывает на проигрыш 5 единиц игроком P_1 или выигрыш 5 единиц игроком P_2.

Мы рассмотрели примеры матричных игр 2-го и 3-го порядков. В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размером $m \times n$. Номер i-й строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i, применяемой игроком P_1. Номер j-го столбца соответствует стратегии B_j, применяемой игроком P_2. Описанная игра однозначно определяется матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы является действительным числом и представляет собой сумму выигрыша, уплачиваемую игроком P_2 игроку P_1, если P_1 выбирает стратегию, соответствующую i-й строке, а P_2 выбирает стратегию, соответствующую j-му столбцу.

Матричную игру часто записывают в развернутой форме в виде таблицы 2.1, называемой *платежной матрицей*.

Таблица 2.1

	B_1	$\ldots$	B_j	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_i	a_{i1}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mj}	$\ldots$	a_{mn}

Каждый игрок выбирает для себя наиболее выгодную стратегию. При этом первый игрок стремится выбрать такую стратегию, приводящую выигрыш, тогда второй игрок выбирает стратегию, приводящую его к минимальному проигрышу. В этой связи вводят понятия нижней и верхней чистой цены игры.

Нижней чистой ценой игры (*максимином*) называется число α, определяемое по формуле

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (2.1)$$

Верхней чистой ценой игры (*минимаксом*) называется число β, определенное по формуле

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{2.2}$$

Стратегии игроков, соответствующие максимину (минимаксу), называются *максиминными* (*минимаксными*).

Пример 2.3. Найти максиминную и минимаксную стратегии игроков в матричной игре

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решение. Данную игру представим в виде платежной матрицы (таблица 2.2).

В соответствии с формулой (2.1) по каждой строке определяем наименьшее число, которое записывается в столбец α_i. Это означает, что, какой бы выбор по столбцам ни сделал игрок B, выигрыш игрока A, который свои стратегии выбирает по строкам, в худшем случае составит соответственно: -3, 3, 1, 2. Однако игроку A целесообразно выбрать такую стратегию (строку), для которой достигается максимальный выигрыш независимо от того, какой столбец выбрал игрок B, т.е.

Таблица 2.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	–3	4	5	–3
A_2	3	7	8	4	3
A_3	5	1	3	7	1
A_4	4	6	2	9	2
β_j	5	7	8	9	

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i = \max(-3, 3, 1, 2) = 3.$$

Из платежной матрицы видно, что минимаксной стратегией игрока B является B_1.

ЛЕКЦИЯ 3

Чистые и смешанные стратегии и их свойства

Различают стратегии *чистые* и *смешанные*. Чистая стратегия A_i ($i = \overline{1, m}$) первого игрока (чистая стратегия B_j ($j = \overline{1, n}$) второго игрока) – это возможный ход первого (второго) игрока, выбранный им с вероятностью, равной 1.

Если первый игрок имеет m стратегий, а второй – n стратегий, то для любой пары стратегий первого и второго игроков чистые стратегии можно представить в виде единичных векторов. Например, для пары стратегий A_1, B_2 чистые стратегии первого и второго игроков запишутся в виде: $p_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $q_2 = (0; 1; 0; \ldots; 0)$. Для пары стратегий A_i, B_j чистые стратегии можно записать в виде:

$$p_i = (0; \ldots; 0; \underbrace{1;}_{i\text{–е место}} 0; \ldots; 0),$$

$$q_j = (0; \ldots; 0; \underbrace{1;}_{j\text{–е место}} 0; \ldots; 0).$$

Теорема 3.1. *В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т.е. $\alpha \le \beta$.*

Доказательство. По определению $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij} \le a_{ij}$. Аналогично $\beta_j = \max\limits_i a_{ij} \ge a_{ij}$. Объединив эти соотношения, получим

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$$\alpha_i = \min_i a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij} = \beta_j.$$

Отсюда $\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j$ или $\alpha_i \le \beta_j$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$. Это неравенство справедливо для любых i и j, следовательно, $\alpha \le \beta$. $\triangle$

Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков A и B соответственно имеет место равенство $\alpha = \beta$, пару чистых стратегий (A_i, B_j) называют *седловой точкой матричной игры*, элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, – *седловым элементом платежной матрицы*, а число $v = \alpha = \beta$ – *чистой ценой игры.*

Пример 3.1. Найти нижнюю и верхнюю чистые цены, установить наличие седловых точек матричной игры

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Определим нижние и верхние чистые цены игры (таблица 3.1):

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(5, 1, -4) = 5,$$

$$\beta = \min \beta_j = \min(9, 5, 6, 8) = 5,$$

$$v = \alpha = \beta = 5.$$

Таблица 3.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	9	$\boxed{5}$	6	7	5
A_2	1	4	3	8	1
A_3	6	3	2	-4	-4
β_j	9	5	6	8	

В данном случае имеем одну седловую точку $(A_1;\ B_2)$, а седловой элемент равен 5. Этот элемент является наименьшим в 1-й строке и наибольшим во 2-м столбце. Отклонение игрока A от максиминной стратегии A_1 ведет к уменьшению его выигрыша, а отклонение игрока B от минимаксной стратегии B_2 едет к увелечению его проигрыша. Иными словами, если в матричной игре имеется седловой элемент, то наилучшими для игроков являются их минимаксные стратегии. И эти чистые стратегии, образующие седловую точку и выделяющие в матрице игры седловой элемент $a_{12} = 5$, есть оптимальные чистые стратегии A_1^* и B_2^* соответственно игроков A и B.

Если же матричная игра не имеет седловой точки, то решение игры затрудняется. В этих играх $\alpha \leq \beta$. Применение минимаксных стратегий в таких играх приводит к тому, что для каждого из игроков выигрыш не превышает α, а прогрыш – не меньше β. Для каждого игрока возни-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

кает вопрос увеличения выигрыша (уменьшения проигрыша). Решение находят, применяя смешанные стратегии.

Смешанной стратегией первого (второго) игрока называется вектор $p = (p_1; \ldots; p_m)$, где $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ ($q = (q_1; \ldots; q_n)$, где $q_j \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$).

Вектор p (q) означает вероятность применения i-й чистой стратегии первым игроком (j-й чистой стратегии вторым игроком).

Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, игра имеет случайный характер и случайной становится величина выигрыша (проигрыша). В таком случае средняя величина выигрыша (проигрыша) – математическое ожидание – является функцией смешанных стратегий p, q:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j.$$

Функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ называется *платежной функцией* игры с матрицей $[a_{ij}]_{m \times n}$.

Стратегии $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \ldots; p_m^*)$ и $\mathbf{q}^* = (q_1^*; \ldots; q_n^*)$ называются *оптимальными*, если для произвольных стратегий $\mathbf{p} = (p_1; \ldots; p_m)$ и $\mathbf{q} = (q_1; \ldots; q_n)$ выполняется условие

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq f(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq f(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}). \qquad (3.1)$$

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии p, второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии q.

Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет *решение игры.*

Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену v, т.е. $f(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = v$.

Теорема 3.2. *В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра имеет седловую точку.*

Пусть имеем матричную игру $[a_{ij}]_{m\times n}$ и некоторые смешанные оптимальные стратегии $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ игроков A и B, обеспечивающие сумму выигрыша v. Вопрос поставим так: как проверить, что набор $(\mathbf{p}^*,\ \mathbf{q}^*,\ v)$ является решением игры? Для этого нужно проверить справедливость неравенства (3.1) для любых смешанных стратегий, среди которых и будут стратегии $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$. Однако различных смешанных стратегий, среди которых и оптимальные, имеем бесчисленное множество. И в таком случае проверить справедливость неравенства (3.1) невозможно. Поэтому рассмотрим следующую теорему, которая позволит ответить на поставленный выше вопрос.

Теорема 3.3. *Для того чтобы смешанные стратегии* $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \ldots; p_m^*)$ *и* $\mathbf{q}^* = (q_1^*; \ldots; q_n^*)$ *были оптимальны для игроков A и B в игре с*

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
Закрыть

матрицей $[a_{ij}]_{m\times n}$ *и выигрышем* v*, необходимо и достаточно выполнения неравенств:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq v(j = \overline{1,n}), \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* \leq v(i = \overline{1,m}). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ – оптимальные смешанные стратегии. Докажем, что для них выполняются соотношения (3.2) и (3.3). Воспользуемся определением оптимальных смешанных стратегий, для которых выполняется соотношение (3.1). Неравенство (3.2) получается из соотношения (3.1), если записать его в развернутой форме, а именно:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j^* \leq v \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i^*q_j. \tag{3.4}$$

В правую часть соотношения (3.4) подставим вектор $\mathbf{q}_j = (q_1;\ \ldots;\ q_{j-1};\ q_j;\ q_{j+1};\ \ldots;q_n) = (0;\ \ldots;\ 0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^*q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq v,$$

т.е. оптимальная стратегия $\mathbf{p}^*$ удовлетворяет неравенству (3.2).

Если вместо произвольного вектора $\mathbf{p}$ в левую часть соотношения (3.4) подставить вектор $\mathbf{p}_i = (p_1;\ \ldots;\ p_{i-1};\ p_i;\ q_{p+1};\ \ldots;\ p_m) = (0;\ \ldots;\ 0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, то можно показать, что и оптимальная стратегия $\mathbf{q}^*$ удовлетворяет соотношению (3.3).

Итак, доказано условие необходимости, а именно: если стратегия $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ оптимальные, то они должны удовлетворять соотношениям (3.2) и (3.3).

Теперь докажем достаточность этого условия. Пусть выполняется неравенство (3.2), (3.3). Покажем, что $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ – оптимальные стратегии. Для этого нужно показать выполнимость соотношения (3.4). С учетом соотношения (3.2) преобразуем правую часть, а с учетом соотношения (3.3) – левую часть соотношения (3.4).

Пусть $\mathbf{q}_j = (q_1;\ \ldots;\ q_n)$ – произвольный вектор, тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq \sum_{j=1}^{n} q_j v = v\sum_{j=1}^{n} q_j = v\cdot 1 = v,$$

т.е. $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* q_j \geq v$. Преобразуя левую часть соотношения (3.4) для произвольного вектора $\mathbf{p}_i = (p_1;\ \ldots;p_m)$ получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i q_j^* = \sum_{j=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{m} a_{ij}q_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} p_i v = 1\cdot v = v,$$

т.е. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i q_j^* \le v$.

Итак, доказано, что выполняются соотношения (3.2), (3.3), то выполняется и соотношение (3.4), т.е. смешанные стратегии $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ – оптимальные.

Таким образом, для проверки того, что набор $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, v)$ является решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ неравенствам (3.2) и (3.3) и уравнениям

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \triangle$$

На основании теоремы 3.3 можно сделать вывод: *если игрок A применяет оптимальную смешанную стратегию $\mathbf{p}^*$, а игрок B – любую чистую стратегию B_j, то выигрыш игрока A будет не меньше цены игры v*. Аналогично: *если игрок B использовать оптимальную смешанную стратегию $\mathbf{q}^*$, а игрок A – любую чистую стратегию A_i, то проигрыш игрока B не превысит цену игры v.*

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями игрока*. Рассмотрим теорему об активных стратегиях.

Теорема 3.4. *Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию при-*

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Закрыть

меняет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Доказательство. Пусть в матричной игре $[a_{ij}]_{m\times n}$ имеем оптимальные стратегии игроков A и B соответственно $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$. Цена игры равна v. При этом игрок A имеет r активных стратегий, а игрок B — k активных стратегий. Расположив активные стратегии для игроков первыми, будем иметь:

$\mathbf{p}^* = (p_1^*; \ldots; p_r^*; 0; \ldots; 0)$, $\mathbf{q}^* = (q_1^*; \ldots; q_k^*; 0; \ldots; 0)$, для которых

$$\sum_{i=1}^{r} p_i^* = 1, \sum_{j=1}^{k} q_j^* = 1.$$

Пусть игрок A придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{p}^*$, а игрок B — чистой стратегии, тогда, согласно теореме 3.3,

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq v \ (j = \overline{1,k}). \tag{3.5}$$

Если игроки A и B используют свои оптимальные стратегии, то выигрыш игрока A равен цене игры v, т. е.

$$v = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} p_i^* q_j^*.$$

Учитывая соотношение (3.5), получаем

$$v = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r} a_{ij}p_i^* q_j^* = \sum_{j=1}^{k} q_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij}p_i^* \geq \sum_{j=1}^{k} q_j^* v = v. \tag{3.6}$$

Соотношение (3.6) выполнимо лишь в случае, когда неравенства (3.5) превращаются в равенства. Отсюда можно сделать вывод, что для любой смешанной стратегии $\mathbf{q} = (q_1; \ldots; q_k; 0; \ldots; 0)$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}p_i^* q_j^* = v,$$

что доказывает теорему. $\triangle$

На основании данной теоремы решение матричной игры можно упростить, выявив при этом доминирование одних стратегий над другими. Так, рассматривая стратегии игрока A, сравниваем элементы строк s и t, а именно: a_{sj} с элементами a_{tj} для $j = \overline{1, n}$. Если $a_{sj} \geq a_{tj}$ $(j = \overline{1, n})$, то выигрыш игрока A при стратегии A_s будет больше, чем при стратегии A_t. В этом случае стратегия A_s доминирует над стратегией A_t. Стратегию A_s называют *доминирующей*, а стратегию A_t — *доминируемой*.

Поскольку игрок B заинтересован в минимизации проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами. Например, сравниваем элементы r-го и l-го столбцов. Если все элементы $a_{ir} \geq a_{il}$ $(i = \overline{1, m})$, то игроку B свой выбор выгодно сделать по l-му столбцу. В этом случае стратегия B_l игрока B доминирует над стратегией B_r. Стратегия B_l называется *доминирующей*, а стратегия B_r — *доминируемой*.

Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же элементами, то строки (столбцы), а соответственно и стратегии игроков A и B называются *дублирующими*.

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно опускать, что не влияет на решение игры.

Теорема 3.5. *Оптимальные смешанные стратегии* $\boldsymbol{p}^*$ *и* $\boldsymbol{q}^*$ *соответственно игроков* A *и* B *в матричной игре* $[a_{ij}]_{m\times n}$ *с ценой* v *будут оптимальными и в матричной игре* $[ba_{ij}+c]_{m\times n}$ *с ценой* $v' = bv + c$, *где* $b \geq 0$.

Доказательство. На основании теоремы 3.3 для оптимальной смешанной стратегии $\mathbf{p}^*$ игрока A и для любой чистой стратегии B_j игрока B имеем

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq v \ (j = \overline{1,n}). \tag{3.7}$$

Умножим обе части неравенства (3.7) на некоторое положительное число $b \geq 0$ и к обеим частям полученного неравенства прибавим произведение $c \sum\limits_{i=1}^{m} p_i^*$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} ba_{ij}p_i^* + c\sum_{i=1}^{m} p_i^* \geq bv + c\sum_{i=1}^{m} p_i^* \ (j = \overline{1,n}). \tag{3.8}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^* = 1$, соотношение (3.8) примет вид

$$\sum_{i=1}^{m}(ba_{ij}+c)p_i^* \geq bv + c,$$

или

$$\sum_{i=1}^{m}(ba_{ij}+c)p_i^* \geq v' \ (j=\overline{1,n}),$$

где $v' = bv + c$. Теорема доказана для оптимальной смешанной стратегии $\mathbf{p}^*$ игрока A. $\triangle$

Аналогично доказывается теорема и для оптимальной смешанной стратегии игрока B.

На основании теоремы 3.5 платежную матрицу, имеющую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами.

Пример 3.2. Выполнить всевозможные упрощения матричной игры

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк матрицы игры равны, т. е. имеем две дублирующие строки, опустим, например, четвертую строку:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сравним соответствующие элементы столбцов. Элементы первого столбца доминируют над элементами третьего и шестого столбцов, а элементы второго столбца доминируют над соответствующими элементами четвертого столбца. Игроку B невыгодно применять стратегии B_3, B_4 и B_6. Опускаем третий, четвертый и шестой столбцы и получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Элементы второй строки меньше соответствующих элементов третьей строки. Следовательно, игроку A невыгодна стратегия A_2. Опуская вторую строку, получаем упрощенную матрицу

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Если требуется получить матрицу с положительными элементами, то достаточно прибавить к ее элементам, например, число 2.

ЛЕКЦИЯ 4

Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть имеем игру размерности $m \times n$ с матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{p}^* = (p_1; \dots; p_m)$, $\mathbf{q}^* = (q_1; \dots; q_n)$ оптимальные смешанные стратегии игроков A и B. Стратегия $\mathbf{p}^*$ игрока A гарантирует ему выигрыш не меньше v, независимо от выбора стратегии B_j, игроком B. Это можно записать так:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}p_1 & + & a_{21}p_2 & + & \dots & + & a_{m1}p_m & \geq & v, \\ a_{12}p_1 & + & a_{22}p_2 & + & \dots & + & a_{m2}p_m & \geq & v, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}p_1 & + & a_{2n}p_2 & + & \dots & + & a_{mn}p_m & \geq & v, \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

где $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$; $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Аналогично стратегия $\mathbf{q}^*$ игрока B гарантирует ему проигрыш не больше v, независимо от выбора стратегии A_i игроком A, т. е.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}q_1 & + & a_{12}q_2 & + & \dots & + & a_{1n}q_n & \leq & v, \\ a_{21}q_1 & + & a_{22}q_2 & + & \dots & + & a_{2n}q_n & \leq & v, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}q_1 & + & a_{m2}q_2 & + & \dots & + & a_{mn}q_n & \leq & v, \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

где $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$; $q_j \geq 0$ $(i = \overline{1,n})$.

Поскольку элементы платежной матрицы на основании теоремы 3.5 всегда можно сделать положительными, то и цена игры $v > 0$.

Преобразуем системы (4.1) и (4.2), разделив обе части каждого неравенства на положительное число v, и введем новые обозначения: $p_i/v = x_i$, $q_j/v = y_j$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Получим:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{21}x_2 & + & \dots & + & a_{m1}x_m & \geq & 1, \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{m2}x_m & \geq & 1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}x_1 & + & a_{2n}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_m & \geq & 1, \end{array}\right\} \qquad (4.3)$$

где

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/v,\ \ x_i \geq 0\ (i = \overline{1,m}). \qquad (4.4)$$

и

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \ldots & + & a_{1n}y_n & \le & 1, \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \ldots & + & a_{2n}y_n & \le & 1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}y_1 & + & a_{m2}y_2 & + & \ldots & + & a_{mn}y_n & \le & 1, \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

где

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/v, \ \ y_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{4.6}$$

Так как игрок A стремится максимизировать цену игры v, то обратная величина $1/v$ будет минимизироваться, поэтому оптимальная стратегия игрока A определится из задачи линейного программирования следующего вида: найти минимальное значение функции

$$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

при ограничениях (4.3), (4.4).

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определится решением задачи следующего вида: найти максимальное значение функции

$$\tilde{f}(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

при ограничениях (4.5), (4.6).

Решив пару двойственных задач графическим (для случая двух переменных) или симплексным методом, далее определим:

$$v = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^*}, \quad p_i = \frac{x_i^*}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^*}, \quad q_i = \frac{y_j^*}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^*} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Проиллюстрируем решение матричной игры сведением ее к ЗЛП.

Пример 4.1. Два сельскохозяйственных предприятия A и B выделяют денежные средства на строительство трех объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль предприятия в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы

$$\begin{bmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{bmatrix}$$

Будем предполагать, что убыток предприятия B при этом равен прибыли предприятия A. Требуется найти оптимальные стратегии предприятий A и B.

Решение. Обозначим чистые стратегии предприятий A и B через A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно. Предположим, что предприятие A располагает общей суммой a тыс.ден.ед., отпускаемой на строительство трех объектов. Аналогично и предприятие B имеет сумму в B тыс.ден.ед., отпускаемую на строительство тех же трех объектов. Тогда чистая стратегия A_1 — это выделение a_1 тыс.ден.ед. предприятием A на строительство первого объекта; A_2 — чистая стратегия предприятия A, которое выделяет сумму a_2 тыс. ден. ед. на строительство второго объекта; A_3 — чистая стратегия предприятия A, которое выделяет сумму a_3 тыс. ден. ед. на строительство третьего объекта. Общая сумма средств, выделяемых на строительство трех объектов, $a = a_1 + a_2 + a_3$. Аналогично определяются чистые стратегии и для предприятия B.

Проверим игру на наличие седловой точки:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 25, \ \beta = \max_j \min_i a_{ij} = 40, \ \alpha \neq \beta,$$

поэтому решение игры определяем в смешанных стратегиях. Цена игры v заключена между нижней α и верхней β ценами, т.е. $25 \leq v \leq 40$. Составим ЗЛП для каждого игрока.

Для игрока A: найти минимальное значение функции

$$f = x_1 + x_2 + x_3$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 50x_1 & + & 25x_2 & + & 10x_3 & \geq & 1, \\ 15x_1 & + & 40x_2 & + & 30x_3 & \geq & 1, \\ 20x_1 & + & 30x_2 & + & 60x_3 & \geq & 1, \end{array}\right\}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3).$$

Для игрока B: найти максимальное значение функции

$$\widetilde{f} = y_1 + y_2 + y_3.$$

при ограничениях

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

Закрыть

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 50y_1 & + & 15y_2 & + & 20y_3 & \geq & 1, \\ 25y_1 & + & 40y_2 & + & 30y_3 & \geq & 1, \\ 10y_1 & + & 30y_2 & + & 60y_3 & \geq & 1, \end{array}\right\}$$

$$y_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3).$$

Вводя вспомогательные переменные $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ для исходной задачи и $y_4 \geq 0$, $y_5 \geq 0$, $y_6 \geq 0$ для двойственной задачи, модели задач преобразуем к канонической форме. При этом вспомогательные переменные примем за базисные. Соответствие между переменными пары взаимно двойственных задач будет следующее:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 \end{array}}^{\text{Свободные}}}_{\text{Базисные}} \qquad \underbrace{\overbrace{\begin{array}{ccc} x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}}^{\text{Базисные}}}_{\text{Свободные}}$$

Решим, например, двойственную ЗЛП, построенную для определения выигрыша предприятия B. Каноническая форма задачи имеет вид:

$$\max f = y_1 + y_2 + y_3;$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 50y_1 & + & 15y_2 & + & 20y_3 & + & y_4 & & & & & = & 1, \\ 25y_1 & + & 40y_2 & + & 30y_3 & & & + & y_5 & & & = & 1, \\ 10y_1 & + & 30y_2 & + & 60y_3 & & & & & + & y_6 & = & 1. \end{array}\right\}$$

Решая ее симплекс-методом, приходим к таблице 4.1, в которой содержится оптимальный план

$$\mathbf{y}^* = (y_1^*; y_2^*; y_3^*; y_4^*; y_5^*; y_6^*) = (0,0133; 0,0094; 0,0098; 0; 0; 0).$$

При этом $\widetilde{f}(\mathbf{y}^*) = 0{,}0325$.

Таблица 4.1

БП	$c_в$	A_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_1	1	0,0133	1	0	0	0,0234	-0,0047	-0,0055
y_2	1	0,0094	0	1	0	-0,0188	0,0438	-0,0156
y_3	1	0,0098	1	0	1	0,0056	-0,0211	0,0254
$f_j - c_j$		0,0325	0	0	0	0,0102	0,0180	0,0043

С учетом основной теоремы двойственности и соответствия между переменными оптимальный план исходной задачи запишется в виде $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*; x_5^*; x_6^*) = (0,0102; 0,0180; 0,0043; 0; 0; 0)$ $f(\mathbf{x}^*) = = 0,0325$.

По формулам

$$v = \frac{1}{f\max}, \ \frac{p_i}{v} = x_i, \ \frac{q_j}{v} = y_j \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$$

получим цену игры $v = \frac{1}{0{,}0325} \approx 30,77$ и вероятности p_i^* и q_j^* для оптимальных смешанных стратегий соответственно предприятий A и B:

$$
\begin{aligned}
p_1^* &= 0,0102 \cdot 30,77 = 0,314, & q_1^* &= 0,0133 \cdot 30,77 = 0,409,\\
p_2^* &= 0,0180 \cdot 30,77 = 0,554, & q_2^* &= 0,0094 \cdot 30,77 = 0,289,\\
p_3^* &= 0,0043 \cdot 30,77 = 0,132, & q_3^* &= 0,0098 \cdot 30,77 = 0,302.
\end{aligned}
$$

Таким образом, оптимальными смешанными стратегиями сельскохозяйственных предприятий A и B являются стратегии

$$\mathbf{p}^* = (0,314; 0,554; 0,132) \text{ и } \mathbf{q}^* = (0,409; 0,289; 0,302)$$

соответственно при гарантированном получении предприятием A независимо от стратегий предприятия B прибыли не менее $30,77$ тыс. ден. ед. Убыток предприятия B при этом составит не более $30,77$ тыс. ден. ед.

Итак, из общей суммы средств а тыс. ден. ед., выделяемых предприятием A на строительство трех объектов, на долю первого объекта должно выделяться $31,4\%$, второго — $55,4$ и третьего — $13,2\%$ этой суммы. Аналогично распределяются средства b тыс. ден. ед. предприятием B. Так, на долю первого объекта приходится $40,9\%$, второго — $28,9$ и третьего — $30,2\%$ общей суммы. Такое распределение денежных средств предприятиями A и B по трем строящимся объектам позволит им получить максимальную прибыль $30,77$ тыс. ден. ед.

ЛЕКЦИЯ 5

Игры с природой. Критерии для принятия решений

Управление производственными процессами осуществляется путем реализации последовательности принимаемых решений. Для этого необходима информация о состоянии объекта управления в условиях его работы. В случае отсутствия достаточно полной информации возникает неопределенность в принятии решения. Причины этого могут быть различными: невозможность получения информации к моменту принятия решения; слишком высокие затраты на получение информации; невозможность устранения неопределенности по причинам объективного характера и т.д.

Естественно, по мере совершенствования средств сбора информации, передачи и обработки ее неопределенность ситуации в момент принятия управленческих решений будет уменьшаться. Существование неустранимой неопределенности связано со случайным характером многих явлений. Например, случайный характер спроса на продукцию делает невозможным точное прогнозирование объема ее выпуска. Принятие решения в этом случае связано с риском. Или, например, прием партии товара для контроля на соответствие стандарту также связан с риском. Правда, неопределенность при контроле может быть устранена в случае контроля всего товара, выпускаемого для реализации. Однако это может оказаться слишком дорогостоящим мероприятием.

С целью уменьшения неблагоприятных последствий в каждом конкретном случае следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. И здесь *лицо, принимающее решение* (ЛПР), вступает в игровые отношения с некоторым абстрактным лицом, которое условно можно назвать "*природой*". Иными словами, ЛПР должно уметь находить управленческое решение, когда природа не выбирает сознательно свои оптимальные стратегии. Вместе с тем мы иногда располагаем некоторыми вероятностными характеристиками состояния природы. Такого рода ситуации принято называть *играми с природой*.

Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. В широком смысле под "природой" будем понимать совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений.

Задачей экономиста или ЛПР является принятие наилучшего управленческого решения в каждой конкретной ситуации. Качество принимаемого решения зависит от информированности ЛПР о ситуации, в которой принимается решение. В случае неопределенности неквалифицированный экономист отказывается принимать решение или принимает его без достаточного обоснования. Хороший экономист руководствуется правилом: "информация — это деньги". Умение использовать даже неполную информацию для обоснования принимаемых решений — это задача экономиста.

Безразличие природы к результату игры (выигрышу) и возможность получения экономистом (статистиком) или ЛПР дополнительной информации о ее состоянии отличают игру с природой от обычной матричной игры, в которой принимают участие два сознательных игрока.

Игры с природой представляют собой основную модель теории принятия решений в условиях частичной неопределенности.

Множество состояний природы обозначим через Π, отдельное состояние — Π_j, $\Pi_j \in \Pi$ $(j = \overline{1, n})$. Множество решений (стратегий) статистика обозначим через A, отдельное решение — A_i, $A_i \in A$ $(i = \overline{1, m})$.

Если на множествах состояний природы Π и решений статистика A потребуется определить распределение вероятностей, то необходимо производить эксперимент, целью которого будет нахождение распределения некоторой случайной переменной, зависящей от состояния природы.

Для i-го решения A_i статистика A и j-го состояния природы Π_j имеем некоторое число, обозначающее функцию потерь $L(A_i, \Pi_j)$, которая, как правило, является случайной переменной.

Во взаимоотношениях с природой статистик может использовать любые из стратегий $A_1, \ldots, A_m$ в зависимости от состояний Π_j природы. Имея ряд стратегий $A_1, \ldots, A_m$, статистик должен руководствоваться некоторым правилом поведения, с помощью которого он определяет, какую стратегию $A_i \in A$ ему выбрать. Иными словами, статистик отыскивает оптимальное поведение, которое и будет его оптимальной стратегией. При этом он может пользоваться как чистыми, так и смешанными стратегиями.

Чтобы выразить в количественной форме упомянутое выше некоторое правило поведения статистика, которым он должен руководствоваться, предположим, что есть возможность численно оценить величиной a_{ij} эффективность каждой комбинации $(A_i, П_j)$, иначе говоря, качество решения A_i. Тем самым будет определена так называемая платежная матрица игры с природой

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

на основе которой в дальнейшем и будут сформулированы "правила поведения" — критерии выбора оптимальной стратегии статистика.

Элемент a_{ij} назовем выигрышем статистика, если он использует стратегию A_i при состоянии природы $П_j$.

Решение игры с природой несколько отличается от решения обычной матричной игры, где оба игрока ведут игру сознательно. Отличие состоит прежде всего в упрощении игры. Выявление дублирующих и доминируемых стратегий производится только для стратегий статистика. Стратегии природы нельзя опускать, поскольку она не имеет "умысла"навредить статистику, более того, она может реализовать состоянии, заведомо выгодные статистику. Иногда при решении игры с природой используется *матрица рисков*. Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который статистик получит в тех же условиях $П_j$, применяя стратегию A_i, т. е. $r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij}$, где $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$.

Оптимальную стратегию статистика можно определить, используя ряд критериев. Так, при известном распределении вероятностей различных состояний $П_j$ природы пользуются *критерием Байеса*. Показателем в этом критерии служит либо величина среднего выигрыша, либо величина среднего риска.

Платежную матрицу $[a_{ij}]_{m\times n}$ представим в виде таблицы 5.1

Таблица 5.1

Стратегия статистика A_i	Состояния природы $П_j$				Средний выигрыш $\bar{a}_i$
	$П_1$	$П_2$	$\dots$	$П_n$	
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	$\bar{a}_1$
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	$\bar{a}_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	$\bar{a}_m$
q_j	q_1	q_2	$\dots$	q_n	

По критерию Байеса за оптимальную принимается та чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{a}_i$ статистика, т. е. обеспечивается $\overline{a} = \max\limits_i \overline{a}_i$, где $\overline{a}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ $(i = \overline{1,m})$.

Матрицу рисков представим в виде таблицы 5.2.

За оптимальную стратегию статистика принимается чистая стратегия A_i, при которой минимизируется средний риск, т.е. обеспечивается $\overline{r} = \min\limits_i \overline{r}_i$, где $\overline{r}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$ $(i = \overline{1,m})$.

В случае, когда вероятности состояний природы правдоподобны, для их оценки используют *принцип недостаточного основания Лапласа*, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 1/n$. Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша.

Таблица 5.2

Стратегия статистика A_i	Состояния природы Π_j				Средний выигрыш $\overline{r}_i$
	Π_1	Π_2	$\ldots$	Π_n	
A_1	r_{11}	r_{12}	$\ldots$	r_{1n}	$\overline{r}_1$
A_2	r_{21}	r_{22}	$\ldots$	r_{2n}	$\overline{r}_2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	r_{m1}	r_{m2}	$\ldots$	r_{mn}	$\overline{r}_m$
q_j	q_1	q_2	$\ldots$	q_n	

Если вероятности состояний природы неизвестны, то для решения игр с природой — выбора оптимальной стратегии статистика — можно использовать несколько критериев.

Максиминный критерий Вальда совпадает с критерием выбора максиминной стратегии, позволяющей получать нижнюю чистую цену a в парной игре с нулевой суммой. По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Критерий минимального риска Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$.

Критерии Вальда и Сэвиджа ориентируют статистика на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. эти критерии выражают пессимистическую оценку ситуации.

Критерий Гурвица является критерием пессимизма-оптимизма. За оптимальную принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение

$$\max_i \left(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right),$$

где $0 \le \lambda \le 1$. При $\lambda = 0$ имеем критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 1$ — критерий пессимизма Вальда. Если $0 \le \lambda \le 1$, то имеем нечто среднее. При желании подстраховаться в данной ситуации λ принимают близким к единице. В общем случае число λ выбирают исходя из опыта или субъективных соображений.

Решение игры с природой по рассмотренным критериям позволяет более обоснованно принимать ту стратегию, которая гарантирует статистику больший выигрыш по сравнению с выигрышем, принимаемым статистиком интуитивно или исходя из опыта.

Пример 5.1. В соответствии со спросом на продукцию q-й номенклатуры в городе планируется построить предприятие по производству этой продукции. Неопределенность спроса в период t приводит к тому, что необходимо рассчитать объем выпускаемой продукции V_q, который должен быть не меньше уровня спроса S_q, чтобы не потерять потенциально возможный доход от реализации продукции, а также не должен превышать уровень спроса, так как предприятие будет нести убытки, связанные в основном с уценкой. Предположим, что в течение года (по кварталам) спрос на продукцию q-й номенклатуры выражается величинами 10, 20, 30, 40 тыс. шт. В таком случае и планирующий орган предприятия может принять одно из следующих решений: построить предприятие, которое могло бы удовлетворить спрос потребителей в 10, 20, 30, 40 тыс. шт. q-й продукции. Работа подобных предприятий показывает, что предприятие терпит издержки от нереализованной единицы q-й продукции 5 ден. ед., а доход от реализации единицы продукции составляет 15 ден. ед. Функцию платежей можно записать в виде кусочно-линейной функции потерь:

$$L(S_q, V_q) = \begin{cases} K_q'(V_q - S_q), & V_q \geq S_q, \\ K_q''(S_q - V_q), & V_q \leq S_q. \end{cases}$$

Требуется: 1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников; 2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее; 3) дать обоснованные рекомендации планирующему органу на строительство предприятия, которое могло бы обеспечить спрос потребителей на q-ю продукцию.

При изучении работы аналогичных предприятий планирующий орган располагает некоторой дополнительной информацией, снижающей неопределенность ситуации: известны вероятности спроса на данную продукцию по кварталам года: 0,3; 0,2; 0,4; 0,1; спрос на продукцию в каждом квартале равновероятен; о вероятностях спроса на указанную продукцию по кварталам ничего определенного сказать нельзя.

Решение. В качестве статистика выступает планирующий орган, который может принять одно из следующих решений: построить предприятие, способное удовлетворить спрос потребителей в 10 тыс. ед. продукции (стратегия A_1); построить предприятие мощностью в 20 тыс.ед. продукции (стратегия A_2); построить предприятие мощностью в 30 тыс.ед.

продукции (стратегия A_3); построить предприятие мощностью в 40 тыс. ед. продукции (стратегия A_4).

Второй играющей стороной — природой — будем считать совокупность объективных внешних условий, в которых формируется спрос потребителей. Спрос по кварталам года различен: в первом квартале — 10 тыс. ед. — будет означать состояние $П_1$; спрос на продукцию во втором квартале в объеме 20 тыс. ед. — состояние $П_2$; спрос на продукцию в третьем квартале в объеме 30 тыс. ед. — состояние $П_3$; спрос на продукцию в четвертом квартале в объеме 40 тыс. ед. — состояние $П_4$.

Итак, описанная ситуация представляет собой игру с природой.

Рассчитаем элементы платежной матрицы (таблица 5.3).

Таблица 5.3

Мощность предприятия, тыс. ед.	Стратегии статистика A_i	Спрос потребителей по кварталам года, тыс. ед.			
		10	20	30	40
		Состояние спроса $П_j$			
		$П_1(10)$	$П_2(20)$	$П_3(30)$	$П_4(40)$
10	A_1	150	150	150	150
20	A_2	100	300	300	300
30	A_3	50	250	450	450
40	A_4	0	200	400	600
	q_j	0,3	0,2	0,4	0,1

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Так, в ситуации $(A_1,\ \Pi_1)$ элемент a_{11} вычисляется следующим образом. Плановый орган принимает решение построить предприятие мощностью в 10 тыс. ед., что и соответствует состоянию спроса в 10 тыс. ед. Доход от производства 10 тыс. ед. продукции $a_{11} = 10{\cdot}15 = 150$ тыс. ден. ед.

Элемент a_{12} в ситуации (A_1,Π_2) рассчитываем так. Предприятие строится в расчете на выпуск 10 тыс. ед. продукции, а спрос на нее составляет 20 тыс. ед. Если бы предприятие могло обеспечить этот спрос, то доход составил бы $20 \cdot 15 = 300$ тыс. ден. ед. Однако спрос удовлетворяется лишь на 10 тыс. ед. продукции, следовательно, предприятие недополучит доход $10 \cdot 15 = 150$ тыс. ден. ед. Элемент $a_{12} = 20{\cdot}15 - 10{\cdot}15 = 150$.

Аналогично определяются и другие элементы таблица 5.3, например элемент a_{31} для ситуации (A_3,Π_1). Предприятие строится в расчете на выпуск 30 тыс. ед. продукции, а спрос на нее составляет 10 тыс. ед., тогда доход предприятия от реализации 10 тыс. ед. составит $10 \cdot 15 = 150$ тыс. ден. ед., а от нереализованной продукции (20 тыс. ед.) предприятие терпит издержки $20 \cdot 5 = 100$ тыс. ден. ед., доход предприятия в ситуации (A_3,Π_1) составит $a_{31} = 10 \cdot 15 - 20 \cdot 5 = 50$ тыс. ден. ед.

Аналогично рассчитываем и остальные элементы платежной матрицы (табл. 5.3).

Вычисляем средние выигрыши:

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

$$\overline{a}_1 = 150 \cdot 0,3 + 150 \cdot 0,2 + 150 \cdot 0,4 + 150 \cdot 0,1 = 150.$$

Аналогично $\overline{a}_2 = 240$, $\overline{a}_3 = 290$, $\overline{a}_4 = 260$.

Оптимальной стратегией по Байесу является A_3, поскольку ей соответствует максимальная средняя прибыль

$$\overline{a}_3 = \max(150, 240, 290, 260) = 290 \text{ (тыс. ден. ед.)}.$$

По критерию Лапласа, когда $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{1}{4}$, средние выигрыши равны:

$$\overline{a}_1 = \frac{1}{4}(150 + 150 + 150 + 150) = 150,\ \overline{a}_2 = 250,\ \overline{a}_3 = 300,\ \overline{a}_4 = 300.$$

Оптимальными стратегиями по Лапласу являются A_3 и A_4, так как им соответствует максимальная прибыль, равная 300 тыс. ден. ед.

По критерию Вальда оптимальной является стратегия A_1, для которой прибыль достигает наибольшей величины, равной 150 тыс. ден. ед. В самом деле,

$$\alpha = \max_i \min_j = \max(150, 100, 50, 0) = 150 \text{ (тыс. ден. ед.)}.$$

Построим матрицу рисков (таблица 5.4).

По критерию Сэвиджа оптимальными являются стратегии A_3 и A_4, для которых в наихудших условиях величина r риска принимает наименьшее значение, равное 150 тыс. ден. ед. В самом деле,

$$r = \min_i \max_j r_{ij} = \min(450, 300, 150, 150) = 150.$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Таблица 5.4

Мощность предприятия, тыс. ед.	Стратегии статистика A_i	Спрос потребителей по кварталам года, тыс. ед.				$\max\limits_j r_{ij}$
		10	20	30	40	
		Состояние спроса Π_j				
		$\Pi_1(10)$	$\Pi_2(20)$	$\Pi_3(30)$	$\Pi_4(40)$	
10	A_1	0	150	300	450	450
20	A_2	50	0	150	300	300
30	A_3	100	50	0	150	150
40	A_4	150	100	50	0	150

Таким образом, в результате решения игры с природой по различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия A_3. Следовательно, нужно строить предприятие мощностью в 30 тыс. ед. продукции. Прибыль при этом, если вероятности спроса известны, составит 290 тыс. ден. ед., при равновероятных условиях спроса — 300 тыс. ден. ед.

Лабораторное занятие 1

Решить матричные игры, заданные приведенными ниже платежными матрицами, сведя их к парам двойственных задач линейного программирования:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -6 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 5 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

и) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$;

к) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;   л) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$;

м) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;   н) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$;

о) $\begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$;   п) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1. В новом жилом массиве создается телевизионное ателье для ремонта в стационарных условиях не более 8 тыс. телевизоров в год. Для упрощения примем, что поток заявок на ремонт в условиях стационара выражается числами 2, 4, 6 и 8 тыс. в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта, телевизора, составляет 9 ден.ед., потери, вызванные отказом в ремонте из-за недостатка мощностей, оценивается в 5 ден.ед., а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок обходится в 6 ден.ед. в расчете на каждый телевизор. Придав рассматриваемой ситуации игровую схему, составить платежную матрицу. Дать рекомендации о мощности создаваемого телеателье.

2. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать картофель на трех участках: на участке А повышенной влажности, Б средней влажности, В сухом. Урожайность картофеля зависит от погодных условий, в частности от количества осадков, выпадающих в течение сезона. Если осадков выпадает меньше нормы, то средняя урожайность на участке А составляет 270 ц с 1 га; при количестве осадков, близком к норме, — 220 ц; если же осадков выпадет больше нормы, — 110 ц; на участке Б — соответственно 210, 250 и 140 ц; на участке В — 120, 260 и 280 ц. Используя игровой подход, составить платежную матрицу. Установить, на каком участке следует выращивать картофель в предстоящем году, если, по данным службы долгосрочного прогнозирования погоды, вероятность выпадения осадков меньше нормы ожидается равной $0,3$, близко к норме — $0,6$, больше нормы — $0,1$.

3. Для отопления дома в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит $7,5$ ден. ед., в мягкую зиму — $8,5$, в обычную — $9,0$, а в холодную — $9,5$. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 6 т, на обычную потребуется 7 т, а в холодную зиму расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависит от количества. запасенного им с лета угля. При анализе возможных вариантов уровня запаса, следует иметь в виду, что при необходимости недостающее количество угля можно приобрести и зимой. Кроме того, надо учесть, что продать непотребовавшийся уголь возможности не будет. Используя игровой подход, составить платежную матрицу, анализируя которую, дать рекомендации по созданию запаса угля для отопления дома, гарантирующего домовладельцу минимальные затраты.

4. Объем реализации товара T за рассматриваемый период времени колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от 4 до 7 ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара равна 2 ден.ед. Если запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на. доставку в размере 4 ден.ед. в расчете на единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка, составят 3 ден.ед. в расчете на единицу товара. Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Используя игровой подход, высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказывание и доставку товара, содержание и хранение остатка.

Указание: Решение найти в чистых стратегиях на основе критериев Байеса, ($q_1 = 0,15$, $q_2 = 0,20$, $q_3 = 0,40$, $q_4 = 0,25$), Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (параметр γ Гурвица принять равным $0,7$).

ЛЕКЦИЯ 6

Линейное программирование. Примеры экономических задач линейного программирования

Понятие линейного программирования

Линейное программирование — раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные. По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые *задачи линейного программирования* (ЗЛП). Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

Задача о наилучшем использовании ресурсов

Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объединение и т.д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов, может выпускать n различных видов продукции (товаров), известных под номерами, обозначаемыми индексом j $(j = \overline{1, n})$. Ее будем обозначать Π_j. Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т. д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют *ингредиентами* R_i. Пусть их число равно m; припишем им индекс i $(i = \overline{1, m})$. Они ограничены, и их количества равны соответственно $b_1, \ldots, b_i, \ldots,$ b_m условных единиц. Таким образом, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_m)$ – вектор ресурсов. Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т.д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации c_j $(j = \overline{1, n})$, т. е. $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n, \ldots, c_n)$ — вектор цен. Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы продукции j-го вида. Матрицу коэффициентов a_{ij} называют технологической и обозначают буквой A. Имеем $A = [a_{ij}]$. Обозначим через $\mathbf{x} =$ $= (x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_n)$ план производства, показывающий, какие виды товаров $\Pi_1, \ldots, \Pi_j, \ldots, \Pi_n$ нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах.

Так как c_j — цена реализации единицы j-й продукции, цена реализованных x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общий объем реализации

$$Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n.$$

Это выражение — целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как $a_{ij}x_j$ — расход i-го ресурса на производство x_j единиц j-й продукции, то, просуммировав расход i-го ресурса на выпуск всех n видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить b_i $(i = \overline{1, n})$ единиц:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Чтобы искомый план $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_n)$ был реален, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объемы x_j выпуска продукции:

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Таким образом, модель задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид: найти

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{6.2}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{6.3}$$

Так как переменные x_j входят в функцию $Z(x)$ и систему ограничений только в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j являются постоянными в планируемый период, то (6.1)–(6.3) — задача линейного программирования.

Задача о выборе оптимальных технологий

В задаче о наилучшем использовании ресурсов определяется оптимальный план выпуска продукции. Пусть при производстве какого-то общественно необходимого продукта используется n технологий. При этом требуется m видов ресурсов, заданных объемами b_i $(i = \overline{1, m})$. Эффективности технологий, т.е. количество конечной продукции (в ден. ед.), производимой в единицу времени по j-й $(j = \overline{1, n})$ технологии, обозначим c_j. Пусть, далее, a_{ij} — расход j-го ресурса в единицу времени по технологии. В качестве неизвестной величины x_j примем интенсивность использования j-й технологии, т.е. время, в течение которого продукция производится по j-й технологии. Пренебрегая временем переналадок, необходимым для перехода от одной технологии к другой, получаем следующую математическую модель задачи: найти план интенсивностей использования технологий $\mathbf{x} = (x_1; \ldots; x_n)$, обеспечивающий максимум выпуска продукции в стоимостном выражении:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{6.4}$$

при ограничениях на лимитированные ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{6.5}$$

и условии неотрицательности

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{6.6}$$

Задача о смесях

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т.д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигают на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

Модель задачи о наилучшем составе смеси рассмотрим на примере задачи о диете. Имеются пищевые продукты, известные под номерами $1, 2, \ldots, n$. Они содержат различные питательные вещества, обозначаемые номерами $1, 2, \ldots, m$ (углеводы, белки, жиры, витамины, микроэлементы и др.). Единица j-то продукта содержит a_{ij} единиц i-го питательного вещества. Для нормальной жизнедеятельности в заданный промежуток времени нужно потреблять не менее b_i единиц i-го питательного вещества. Обозначим через c_j стоимость единицы продукта j-го вида. Требуется выбрать рацион минимальной стоимости, содержащий необходимые количества питательных веществ. План задачи — это количества x_j продуктов каждого вида, обеспечивающие необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на исходные продукты.

Математическая модель задачи: найти

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.7}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{6.8}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{6.9}$$

Задача о раскрое материалов

Суть задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму. Рассмотрим простейшую модель раскроя по одному измерению. Более сложные постановки ведет к задачам целочисленного программирования.

Функция цели – минимум отходов, получаемых при раскрое:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{6.10}$$

при ограничениях: на число единиц исходного материала

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le N, \tag{6.11}$$

на удовлетворение ассортиментного спроса потребителей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ (i = \overline{1, m}) \tag{6.12}$$

и условии неотрицательности

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{6.13}$$

Транспортная задача

Рассмотрим простейший вариант модели транспортной задачи, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям; при этом имеется баланс между суммарным спросом потребителей и возможностями поставщиков по их удовлетворению. Причем потребителям безразлично, из каких пунктов производства будет поступать продукция, лишь бы их заявки были полностью удовлетворены. Так как от схемы прикрепления потребителей к поставщикам существенно зависит объем транспортной работы, возникает задача о наиболее рациональном прикреплении, правильном направлении перевозок грузов, при котором потребности полностью удовлетворяются, вся продукция от поставщиков вывозится, а затраты на транспортировку минимальны.

Задача формулируется так. Имеется m пунктов производства, в каждом из которых сосредоточено a_i $(i = \overline{1,m})$ единиц однородного продукта. Этот продукт нужно доставить n потребителям, где потребность составляет b_j $(j = \overline{1,n})$ единиц. Причем $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Известны величины c_{ij} — затраты на перевозку единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Обозначим через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Матрица $C = [c_{ij}]$ называется *матрицей тарифов*, $X = [x_{ij}]$ — *матрицей перевозок*. С целью удобства построения математической модели матрицы тарифов и перевозок совмещают в одну, именуемую *макетом транспортной задачи* (таблица 6.1).

Математическая модель транспортной задачи: целевая функция, описывающая транспортные затраты,

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{6.14}$$

минимизируется при ограничениях: на возможности поставщиков — весь продукт из пунктов производства должен быть вывезен:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{6.15}$$

на спрос потребителей, который должен быть удовлетворен:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{6.16}$$

при условии неотрицательности переменных, исключающем обратные перевозки:

$$x_{ij} = 0 \qquad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \tag{6.17}$$

Таблица 6.1

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_1	$\dots$	b_j	$\dots$	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1j} x_{1j}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2j} x_{2j}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\dots$	c_{ij} x_{ij}	$\dots$	c_{in} x_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mj} x_{mj}	$\dots$	c_{mn} x_{in}

Задача о размещении заказа

Речь идет о задаче распределения заказа (загрузки взаимозаменяемых групп оборудования) между предприятиями (цехами, станками, исполнителями) с различными производственными и технологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказа. Требуется составить план размещения заказа (загрузки оборудования), при котором с имеющимися производственными возможностями заказ был бы выполнен, а показатель эффективности достигал экстремального значения.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Сформулируем задачу конкретнее. Имеется m однородных групп оборудования, на котором нужно выполнить заказ на выпуск n видов продукции в объемах x_j^* $(j = \overline{1,n})$ единиц. Заказ определяется набором x_j^* $(j = \overline{1,n})$, который устанавливается решением задачи о наилучшем использовании ресурсов, изучением структуры потребления или просто "спущен сверху". Мощность оборудования каждого вида ограничена, например, фондом рабочего времени T_i $(i = \overline{1,m})$. Производительность оборудования каждого вида задана коэффициентом a_{ij}, который показывает, сколько единиц продукции j-го вида можно произвести на i-м оборудовании в единицу времени. Кроме того, известны коэффициенты c_{ij}, отражающие все затраты, вызванные изготовлением на i-м оборудовании в единицу времени продукции j-го вида. Требуется найти план $X = [x_{ij}]$ размещения заказа (загрузки оборудования), т.е. установить, сколько времени i-я группа оборудования будет занята изготовлением j-й продукции.

Целевая функция (суммарные затраты на выполнение заказа)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{6.18}$$

минимизируется при нижеследующих ограничениях. По мощности оборудования

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i \qquad (i = \overline{1,m}). \tag{6.19}$$

Если по некоторым видам продукции допускается перевыполнение плана, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \geq x_j^* \qquad (i = \overline{1, n_1}). \tag{6.20}$$

Для продукции, выпуск которой должен соответствовать плану,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} = x_j^* \qquad (j = \overline{n_1 + 1, n_2}). \tag{6.21}$$

Для продукции, заказ на которую принимается для более полной загрузки оборудования,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \leq x_j^* \qquad (j = \overline{n_2 + 1, n}). \tag{6.22}$$

Условие неотрицательности следует из практического смысла переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \tag{6.23}$$

Задачи (6.1)–(6.3), (6.4) –(6.6), (6.7)–(6.9), (6.10)–(6.13), (6.14)– (6.17), (6.18)–(6.23) относятся к ЗЛП.

ЛЕКЦИЯ 7

Формы записи задачи линейного программирования

Общей формой записи задачи линейного программирования называют задачу

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = \overline{1, m_1}), \tag{7.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = \overline{m_1 + 1, m_2}), \tag{7.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad (i = \overline{m_2 + 1, m}), \tag{7.4}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, n_1}) \tag{7.5}$$

$$x_j \ge 0 \text{– произвольные} (j = \overline{n_1 + 1, n}), \tag{7.6}$$

где c_j, a_{ij}, b_i – заданные действительные числа.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Симметричной формой записи называют задачу

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{7.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{7.8}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{7.9}$$

или задачу

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{7.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{7.11}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{7.12}$$

В экономической практике задачи (7.7)– (7.9) или (7.10)–(7.12) встречается наиболее часто.

Канонической формой записи задачи линейного программирования называют задачу

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{7.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{7.14}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}) \tag{7.15}$$

Матричной формой записи задачи линейного программирования называют задачу

$$\max(\min) Z = CX,\ AX = B,\ X \geq 0,$$

где $C = [c_1 c_2 \ldots c_n]$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Векторной формой записи задачи линейного программирования называют задачу

$$\max Z = cx,$$
$$A_1x_1 + \ldots + A_jx_j + A_nx_n = B,\ x \geq 0,$$

где $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $\ldots$, $A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$, а cx – скалярное произведение векторов.

При необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот, т.е.

$$\min f(x_1^*, \dots, x_n^*) = -\max(-f(x_1^*, \dots, x_n^*)).$$

В большинстве задач линейного программирования ограничения задаются неравенствами. Но наиболее часто используются методы решения задач линейного программирования, записанных в канонической форме. Поэтому приходится переходить от любой формы задачи линейного программирования к ее канонической форме, причем нужно быть уверенным, что эти формы эквивалентны.

Пусть исходная задача линейного программирования имеет вид

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{7.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m_1}), \tag{7.17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m}), \tag{7.18}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{7.19}$$

Преобразуем ее к канонической форме. Введем *m дополнительных (балансовых)* неотрицательных переменных

$$x_{n+i} \geq 0 \quad (j = \overline{1, m_1}). \tag{7.20}$$

Для того чтобы неравенства типа $\leq$ преобразовать в равенства, к их левым частям прибавим дополнительные переменные x_{n+i}, после чего система неравенств (7.17) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i = \overline{1, m_1}), \tag{7.21}$$

Для того чтобы неравенства типа $\geq$ преобразовать в равенства, из их левых частей вычтем дополнительные переменные x_{n+i} $(i = \overline{m_1 + 1, m})$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \qquad (i = \overline{m_1 + 1, m}), \tag{7.22}$$

Системы уравнений (7.21) и (7.22) с условием неотрицательности дополнительных переменных будут эквивалентны системам неравенств (7.17) и (7.18).

Дополнительные переменные x_{n+i} $(i = \overline{1, m})$ введем в целевую функцию с коэффициентами, равными нулю. Получим задачу:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{n+i}, \tag{7.23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1, m_1}), \tag{7.24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m}), \tag{7.25}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n+m}). \tag{7.26}$$

Задача (7.23)–(7.26) имеет каноническую форму.

Можно доказать, что каждому допустимому решению $(x_1, \dots, x_n)$ задачи (7.16)–(7.19) соответствует вполне определенное допустимое решение $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ задачи (7.23)–(7.26) и наоборот, каждому допустимому решению задачи (7.23)–(7.26) соответствует допустимое решение задачи (7.26)–(7.19).

Таблица 7.1

Ресурсы	Затраты ресурсов на реализацию, тыс.р.			Объем ресурса
	$\varPi_1$	$\varPi_2$	$\varPi_3$	
Полезная площадь, м^2	1,	2	3	450
Рабочее время, чел.-ч.	3	2	1,5	600
Прибыль, тыс.р.	50	65	70	

Пример 7.1. Магазин оптовой торговли реализует три вида продукции $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Для этого используется два ограниченных ресурса: полезная площадь помещений, составляющая 450 м^2, и рабочее время работников магазина — 600 чел.-ч. Товарооборот должен быть не меньше 240 тыс.р. Необходимо разработать план товарооборота, позволяющий получить максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлены в таблице 7.1. Составить математическую модель задачи и привести ее к каноническому виду.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3 объемы продукции (в тыс.р.), подлежащей реализации. Модель задачи примет вид

$$\max Z = 50x_1 + 65x_2 + 70x_3,$$

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 240, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3}).$$

Приведем задачу к каноническому виду. Введем дополнительные переменные x_{i+3} $(i = \overline{1,3})$, из которых две первые прибавим к левым частям двух первых неравенств, а третью вычтем из левой части третьего неравенства. В целевую функцию все дополнительные переменные введем с коэффициентами равными нулю. Получим каноническую форму задачи:

$$\max Z = 50x_1 + 65x_2 + 70x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6,$$

$$\left.\begin{aligned} 1,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + x_5 = 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 240, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,6}).$$

Иногда не на все переменные налагаются условия неотрицательности. В этом случае, даже если ограничения представлены в виде равенств, задача не будет канонической. Для представления такой задачи в каноническом виде каждую переменную x_k, на которую не наложено условие неотрицательности, заменим разностью двух неотрицательных переменных x'_k и x''_k т.е. $x_k = x'_k - x''_k$, где $x'_k \geq 0$, $x''_k \geq 0$. Переход от канонической к симметричной форме записи можно осуществить следующим способом. Пусть в общей задаче линейного программирования имеются ограничения в виде равенства $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$. Каждое такое ограничение эквивалентно системе неравенств $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$. Неравенство вида $\geq$ можно преобразовать в неравенство вида $\leq$ умножением обеих частей на -1, и наоборот.

Лабораторное занятие 2

Вариант 1

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = \frac{1}{4}x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & \geq & 5; \\ 5x_1 + x_2 & \geq & 9; \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 11; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 2; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 6; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 7; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Вариант 2

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = \frac{5}{4}x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & \geq & 4; \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 6; \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 11; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = 2x_1 - 6x_2 + x_5 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = & 20; \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 & = & 24; \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 & = & 18; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Вариант 3

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = 6x_1 - 2x_2 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \le & 1; \\ 3x_1 - x_2 & \le & 6; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 & \le & 25; \\ x_1 + 2x_+ x_3 + 5x_4 & \le & 10; \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 & \le & 26; \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

Вариант 4

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) - 4x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + 7x_2 & \leq & 21; \\ 7x_1 + 2x_2 & \leq & 49; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_4 & = & \text{-}3; \\ x_3 - 2x_4 & = & 2; \\ 3x_2 - x_4 + x_5 & \leq & 5; \\ x_2 + x_5 & \geq & \text{-}3; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 5

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 & \leq & 2; \\ 3x_1 + 4x_2 & \geq & 12; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_3 + x_4 & = & 1; \\ 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 & = & 2; \\ x_3 - x_4 & = & 1; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

Закрыть

Вариант 6

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = 2x_1 - 6x_2 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -x_1 - x_2 & \leq & \text{-2}; \\ -x_1 + x_2 & \leq & 1; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq & 7; \\ -x_1 + 3x_3 & \leq & 2; \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq & 4; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Вариант 7

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 & \geq & 1; \\ x_1 - x_2 & \leq & \text{-}1; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_5 + 2x_6 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - 3x_4 + 2x_6 & \leq & 5; \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 + x_5 & \leq & 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_5 & \geq & 3; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Вариант 8

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = \frac{1}{4}x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & \geq & 5; \\ 5x_1 + x_2 & \geq & 9; \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 11; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = 6x_1 + x_3 - 8 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x_1 + x_2 + x_3 & = & 8; \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 2; \\ x_1 + x_2 - x_4 & = & 2; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Вариант 9

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = \frac{5}{4}x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 & \geq & 4; \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 6; \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 11; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 24; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \leq & 22; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & \geq & 10; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Вариант 10

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = \frac{9}{2}x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 4x_2 & \geq & 7; \\ 4x_1 + x_2 & \geq & 8; \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 11; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - 4x_3 & \leq & 20; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & \geq & 10; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 24; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

ЛЕКЦИЯ 8

Двойственные задачи в линейном программировании. Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называается *прямой* или *исходной*. Многие задачи линейного программирования первоначально ставятся в виде исходных или двойственных задач, поэтому говорят о паре взаимно двойственных задач линейного программирования. Пара симметричных двойственных ЗЛП имеет вид

прямая задача	*двойственная задача*
$\max Z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j,$	$\min f = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i,$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = \overline{1, m}),$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ (j = \overline{1, n}),$
$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}).$	$y_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}).$

Рассмотренная пара взаимно двойственных задач может быть экономически интерпретирована, например, так.

Прямая задача: сколько и какой продукции x_j $(j = \overline{1, n})$ надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции c_j $(j = \overline{1, n})$, объемых имеющихся ресурсов b_i $(i = \overline{1,m})$ и нормах расходов a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов y_i $(i = \overline{1,m})$, чтобы при заданных b_i, c_j и a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

Для построения двойственной задачи необходимо пользоваться следующими правилами:

1) если прямая задача решается на максимум,то двойственная — на-минимум, и наоборот;

2) в задаче на максимум ограничения-неравенства имеют смысл $\leq$, а в задаче минимизации — смысл $\geq$;

3) каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, и наоборот, каждому ограничению двойственной задачи соответствует переменная прямой задачи;

4) матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием;

5) свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи, и наоборот;

6) если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, если же нет, то как ограничение-равенство;

7) если какое-либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.

Пример 8.1. На кондитерской фабрике весь ассортимент выпускаемой карамели разделен на три однородные группы, условно обозначенные K_1, K_2 и K_2. Расход основного сырья и его запас указаны в таблица 8.1. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. В качестве критерия оптимальности плана принять максимум прибыли. Требуется составить математические модели прямой и двойственной задач.

Таблица 8.1

Основное сырье	Расход сырья на 1 т			Общий запас сырья
	K_1	K_2	K_3	
I (сахарный песок)	1,5	2	3	700
II (патока)	3	2	1,5	300
III (фруктовое пбре)	0	0,2	0,3	150
Уровень прибыли	100	110	120	

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Решение. Пусть (x_1, x_2, x_3) — план выпуска карамели групп K_1, K_2 и K_3, а Z — суммарная прибыль, тогда математическая модель прямой задачи принимает следующий вид:

$$\max Z = 100x_1 + 110x_2 + 120x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 0,7x_1 + 0,7x_2 + 0,7x_3 &\le 700, \\ 0,3x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 &\le 300, \\ 0,2x_2 + 0,3x_3 &\le 150, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$\min f = 700y_1 + 300y_2 + 150y_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 0,7y_1 + 0,3y_2 \qquad\qquad &\ge 100, \\ 0,7y_1 + 0,3y_2 + 0,2y_3 &\ge 110, \\ 0,7y_2 + 0,2y_3 + 0,3y_3 &\ge 120, \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Пример 8.2. Предприятие оптовой торговли, исходя из специализации, может реализовывать четыре вида товаров: T_1, T_2, T_3 и T_4. Лимитируемые при этом ресурсы и нормы расхода на единицу реализуемых товаров представлены в таблице 8.2.

Таблица 8.2

Лимитируемые ресурсы и показатели	Товарная группа				Объем ресурса	Знак ограничения
	T_1	T_2	T_3	T_4		
Складские площади, м^2	1,8	2,6	1,6	1,0	11000	$\leq$
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1,5	1,4	0,5	0,8	9500	$\leq$
Издержки обращения, ден. ед.	17	23	28	12	12000	$\leq$
Товарные запасы, ден. ед.	3,1	4,2	3,0	2,0	18000	$\leq$
Уровень товарооборота, ден. ед.	200	150	170	50	750000	$\geq$
Минимально допустимый план товарообороты по группе	$\geq$120	=1600	=1500	$\geq$1200	—	—
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	120	50	30	100		
План x	x_1	x_2	x_3	x_4		

Построить модели прямой и двойственной задач при условии, что заказ на T_2, должен составить 1600 ед., на T_3; — 1500 ед.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 — объемы реализации соответствующей группы товаров, Z — сумма прибыли.

Математическая модель прямой задачи:

$$\max Z = 120x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 100x_4;$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrl}
1,8x_1 & + & 2,6x_2 & + & 1,6x_3 & + & 1,0x_4 \le & 11000,\\
1,5x_1 & + & 1,4x_2 & + & 0,5x_3 & + & 0,8x_4 \le & 9500,\\
17x_1 & + & 23x_2 & + & 28x_3 & + & 12x_4 \le & 120000,\\
3,1x_1 & + & 4,2x_2 & + & 3,0x_3 & + & 2,0x_4 \le & 18000,\\
200x_1 & + & 150x_2 & + & 170x_3 & + & 50x_4 \ge & 750000,
\end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 1200,\ x_2 = 1600,\ x_3 = 1500,\ x_4 \ge 1200.$$

Модель двойственной задачи:

$$\min f = 1100y_1 + 9500y_2 + 120000y_3 + 18000y_4 - \\ -750000y_5 - 1200y_6 + 1600y_7 + 1500y_8 - 1200y_9;$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}
1,8y_1 & + & 1,5y_2 & + & 17y_3 & + & 3,1y_4 & - & 200y_5 & - & y_6 \le & 120,\\
2,6y_1 & + & 1,4y_2 & + & 23y_3 & + & 4,2y_4 & - & 150y_5 & + & y_7 \ge & 50,\\
1,6y_1 & + & 0,5y_2 & + & 28y_3 & + & 3y_4 & - & 170y_5 & + & y_8 \ge & 30,\\
y_1 & + & 0,8y_2 & + & 12y_3 & + & 2y_4 & - & 50y_5 & - & y_9 \ge & 100,
\end{array}\right\}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_5 \ge 0,\ y_6 \ge 0\ y_9 \ge 0,$$
y_7, y_8 – любого знака.

ЛЕКЦИЯ 9

Теоремы двойственности и их экономическое содержание

Основное неравенство теории двойственности: для любых допустимых планов x и y пары взаимно двойственных задач справедливо неравенство $z(x) \leq f(y)$. Его экономическое содержание состоит в том, что для любого допустимого плана производства x и любого допустимого вектора оценок ресурсов y общая созданная стоимость непревосходит суммарной оценки ресурсов. *Критерий оптимальности Канторовича (достаточный признак оптимальности):* если для некоторых допустимых планов x^* и y^* пары двойственных задач выполняется равенство $z(x^*) = f(y^*)$, то x^* и y^* являются оптимальными планами соответствующих задач. Экономический смысл критерия следующий: план производства x и вектор оценок ресурсов y являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Теорема существования оптимальных планов пары двойственных задач: для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существования допустимого плана для каждой из них.

Первая теорема двойственности: если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают:

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$z(x^*) = f(y^*)$. Если одна из двойственных задач не разрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

Экономическое содержание первой теоремы двойственности состоит в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадения значений целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти решения были оптимальными. Это значит, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, т.е. равенство общей оценки продукции и ресурсов обусловливает убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставлять и балансировать затраты и результаты системы.

Связь между задачами двойственной пары глубже, чем указано в формулировке теоремы: решая симплексным методом одну из них, автоматически получаем решение другой. Для этого достаточно воспользоваться

зоваться соответствием переменных прямой и двойственной задачи оценок в последней симплексной таблице:

$$
\begin{array}{cccccc|cccccc}
x_1 & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & x_{n+i} & \ldots & x_{n+m} \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
y_{m+1} & y_{m+2} & \ldots & y_{m+j} & \ldots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \ldots & y_i & \ldots & y_m \\
\hline
\Delta_1^* & \Delta_2^* & \ldots & \Delta_j^* & \ldots & \Delta_n^* & \Delta_{n+1}^* & \Delta_{n+2}^* & \ldots & \Delta_{n+i}^* & \ldots & \Delta_{n+m}^*
\end{array}
$$

Отсюда имеем оптимальный план двойственной задачи. Если прямая задача решается на максимум, то

$$y_1^* = \Delta_{n+1}^*,\ y_2^* = \Delta_{n+2}^*,\ \ldots,\ y_i^* = \Delta_{n+i}^*,\ \ldots, y_m^* = \Delta_{n+m}^*,$$

$$y_{m+1}^* = \Delta_1^*,\ y_{m+2}^* = \Delta_2^*,\ \ldots,\ y_{m+j}^* = \Delta_j^*,\ \ldots,\ y_{m+n}^* = \Delta_n^*.$$

Если прямая задача решается на минимум, то

$$y_i^* = -\Delta_{n+i}^*\ (i = \overline{1,m}),\ y_{m+j}^* = -\Delta_j^*\ (j = \overline{1,n}).$$

Пример 9.1. Исходя из специализации, предприятие может выпускать четыре вида продукции Π_j $(j = \overline{1,4})$, используя для этого три вида сырья C_i $(i = \overline{1,3})$. Общие объемы имеющего сясырья b_i, нормы их расхода на единицу продукции и цена реализации единицы каждого вида продукции представлены в таблица 9.1.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Таблица 9.1

Виды сырья	Продукция				Объем сырья
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	5	1	3000
Цена реализации	75	30	60	120	

1. Определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий максимум реализации. Единственный ли оптимальный план имеет задача? Если нет, то записать выражение для всех оптимальных планов.

2. Составить модель двойственной задачи, используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, найти оптимальный план двойственной задачи.

Решение. 1. Пусть $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ — план выпуска. Математическая модель задачи:

$$\max Z = 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4;$$

$$
\left.
\begin{array}{rcrcrcrl}
2x_1 & + & x_2 & + & 0,5x_3 & + & 4x_4 & \le 2400, \\
x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & & \le 1200, \\
3x_1 & & & + & 5x_3 & + & x_4 & \le 3000,
\end{array}
\right\}
$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,4}).$$

В таблице 9.2 приведены две последние итерации решения задачи симплексным методом.

Таблица 9.2

Номер итерации	БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
				75	30	60	120	0	0	0
2	x_4	120	550	11/24	1/24	0	1	1/4	–1/24	0
	x_3	60	400	1/3	5/3	1	0	0	1/3	0
	x_7	0	50	13/24	241/24	0	0	1/4	47/24	1
$z_i - c_j$			90000	0	75	0	0	30	15	0
3	x_4	120	6600/13							
	x_3	60	4800/13							
	x_1	75	1200/13							
$z_i - c_j$			90000	0	75	0	0	30	15	0

Так как все оценки после второй итерации неотрицательны, то найденный опорный план оптимален:

$$\mathbf{x}_2^* = (0; 0; 400; 550|0; 0; 50),\ \mathbf{z}(\mathbf{x}_2^*) = 90000.$$

Основные переменные $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 400$, $x_4^* = 550$ показывают, что продукцию первого и второго вида выпускать нецелесообразно, продукции третьего вида следует выпускать 400 ед., четвертого — 550 ед. При этом, так как $x_5^* = x_6^* = 0$, первый и второй ресурсы используются полностью, а третьего остается 50 ед. ($x_7^* = 50$). Единствен ли полученный оптимальный план? Нет. Так как существует свободная переменная, оценка которой равна нулю ($\Delta_1 = 0$), то, введя в базис переменную x_1, после третьей итерации получим новый оптимальный план:

$$\mathbf{x}_3^* = (\tfrac{1200}{13}; 0; \tfrac{4800}{13}; \tfrac{6600}{13}|0; 0; 0),\ \mathbf{z}(\mathbf{x}_3^*) = 90000.$$

Общее оптимальное решение выразится формулой

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1\mathbf{x}_1^* + \lambda_2\mathbf{x}_2^* = (\lambda_2 \cdot \tfrac{1200}{13}; 0; \lambda_1 \cdot 400 + \lambda_2 \cdot \tfrac{4800}{13}; \lambda_1 \cdot 550 + \lambda_2 \cdot \tfrac{6600}{13}),$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; $\lambda_1 \geq 0$; $\lambda_2 \geq 0$.

2. Составим модель двойственной задачи:

$$\min f = 2400y_1 + 1200y_2 + 3000y_3;$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}
2y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \geq & 75, \\
y_1 & + & 5y_2 & & & \geq & 30, \\
0,5y_1 & + & 3y_2 & + & 6y_3 & \geq & 60, \\
4y_1 & & & + & y_3 & \geq & 120,
\end{array}\right\}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

$$y_1 \geq 0 \qquad (i = \overline{1,3}).$$

Ее решение выпишем из индексной строки симплексной таблицы, используя соответствие переменных:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3
\end{array}$$

Имеем: $\mathbf{y}^* = (30; 15; 0|0; 75; 0; 0)$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = 90000$.

Вторая теорема двойственности (о дополняющей нежесткости): для того чтобы планы $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \tag{9.1}$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0. \tag{9.2}$$

Условия (9.1), (9.2) называются *условиями дополняющей нежесткости.* Из них следует: если какое-либо неравенство системы ограничений одной из задач необращается в строгое равенство оптимальным планом этой задачи, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задачееее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство, т.е. если $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i$, то $y_i^* = 0$ $(i = \overline{1,m})$, если $y_i^* > 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i$ $(i = \overline{1,m})$. Точно так же: если $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_j^* > c_j$ $(j = \overline{1,n})$, то $x_j^* = 0$, если $x_j^* > 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_j^* = c_j$ $(j = \overline{1,n})$. Экономически это означает, что если по некоторому оптимальному плану $\mathbf{x}^*$ производства расход i-го ресурса строго меньше его запаса b_i, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i-я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Отсюда следует вывод: двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а избыточный ресурс (используемый неполностью) имеет нулевую оценку.

Пример 9.2. Продукция в цехе может производиться тремя технологическими способами T_j $(j = \overline{1,3})$. Объемы ресурсов b_i $(i = \overline{1,3})$ и их расход в единицу времени для каждой технологии, а также производительности технологий (в денежных единицах за единицу времени работы по данной технологии) представлены в таблице 9.3.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Таблица 9.3

Ресурсы	Технологический способ T_1	T_2	T_3	Объем ресурса	**y**
Рабочая сила, чел.-ч	15	20	25	1200	y_1
Сырье, т	2	3	2,5	150	y_2
Электроэнергия, кВт-ч	35	60	60	3000	y_3
Производительность технологического способа	300	250	450		
План **x**	x_1	x_2	x_3		

Требуется определить оптимальный план использования каждого технологического способа x_j $(j = \overline{1,3})$ т.е. время использования каждого способа. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости.

Решение. Запишем модели прямой и двойственной задач:

прямая задача

$$\max Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3;$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 15x_1+ & 20x_2+ & 25x_3 \le & 1200, \\ 2x_1+ & 3x_2+ & 5x_3 \le & 150, \\ 35x_1+ & 60x_2+ & 60x_3 \le & 3000, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

двойственная задача

$$\min f = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3;$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 15y_1+ & 2y_2+ & 35y_3 \ge & 300, \\ 20y_1+ & 3y_2+ & 60y_3 \ge & 250, \\ 25y_1+ & 2,5y_2+ & 60y_3 \ge & 450, \end{array}\right\}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Таблица 9.4

БП	c_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			300	250	450	0	0	0
x_3	450	12	0	–0,4	1	0,16	–1,2	0
x_1	300	60	1	2	0	–0,2	2	0
x_6	0	180	0	14	0	–2,6	2	1
$z_j - c_j$		23400	0	170	0	12	60	0

В таблице 9.4 приведен результат решения прямой задачи симплексным методом.

Оптимальный план использования технологий $\mathbf{x}^* = (60; 0; 12|0; 0; 180)$, $z(\mathbf{x}^*) = 23400$, т. е. первую технологию целесообразно применять втечение 60 ч, третью — 12 ч, вторую технологию применять нецелесообразно. При этом продукции будет выпущено на 23400 ден. ед.

Решение двойственной задачи:

$$\mathbf{y} = (12; 60; 0|0; 170; 0),\ f(\mathbf{y}^*) = 23400.$$

Так как $y_1^* = 12 > 0$, $y_2^* = 60 > 0$, то первый и второй ресурсы используются полностью. Третий ресурс избыточен: $x_6^* = 180$. Его двойственная оценка равна нулю: $y_3^* = 0$. Таким образом, если при j-м технологическом способе производства суммарная оценка ресурсов, идущих на выпуск единицы продукции, выше дохода c_j, то данный способ недолжен внедряться ($x_j^* = 0$). Если же j-й технологический способ используется в оптимальном плане, то суммарная оценка ресурсов, необходимых для производства единицы продукции, равна доходу c_j. Проверим условия о дополняющей нежесткости.

Для прямой задачи:

$$
\begin{array}{rrrcrl|l|l}
15x_1^*+ & 20x_2^*+ & 25x_3^* & = & 1200, & & x_4^* = 0, & y_1^* = 12 > 0, \\
2x_1^*+ & 3x_2^*+ & 5x_3^* & = & 150, & & x_5^* = 0, & y_2^* = 60 > 0, \\
35x_1^*+ & 60x_2^*+ & 60x_3^* & = & 2820 & < & x_6^* = 180 > 0, & y_3^* > 0. \\
 & & & < & 3000, & & &
\end{array}
$$

Для двойственной задачи:

$$
\begin{array}{rrrcrl|l|l}
15y_1^*+ & 2y_2^*+ & 35y_3^* & = & 300, & & y_4^* = 0, & x_1^* = 60 > 0, \\
20y_1^*+ & 3y_2^*+ & 60y_3^* & = & 420 & > & & \\
 & & & > & 250, & & y_5^* = 170 > 0, & x_2^* = 0, \\
25y_1^*+ & 2,5y_2^*+ & 60y_3^* & = & 450 & & y_6^* = 0, & x_3^* = 12 > 0.
\end{array}
$$

Условия (9.1), (9.2) выполняются.

Третья теорема двойственности: двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения ЗЛП, т.е.

$$\partial z(\mathbf{x})/\partial b_i = y_i^* \quad (i = \overline{1, m}). \tag{9.3}$$

Выясним экономическое содержание третьей теоремы двойственности. Для этого в выражении (9.3) дифференциалы заменим приращениями, т.е. $\partial b_i \approx \Delta b_i$, $\partial z(\mathbf{x}^*) \approx \Delta z(\mathbf{x}^*)$. Получим $\Delta z(\mathbf{x}^*) = y_i^* \Delta b_i$; при $\Delta b_i = 1$ имеем $\Delta z(\mathbf{x}^*) \approx y_i^*$. Отсюда двойственная оценка численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего ресурса на единицу. Двойственные оценки y_i часто называются *скрытыми*, *теневыми* или *маргинальными оценками ресурсов*.

Пример 9.3. В задаче о выборе оптимальных технологий (пример 9.2, таблица 9.4) выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Решение. Из таблицы 9.4 найдено решение двойственной задачи:

$$\mathbf{y}^* = (12; 60; 0|0; 170; 0), \ \ f(\mathbf{y}^*) = 23400.$$

Как следует из решения, первый и второй ресурсы потребляются полностью. Их двойственные оценки положительны. Приращение первого ограниченного ресурса на единицу ведет к увеличению целевой функции на 12, второго — на 60, третий ресурс избыточен: $x_6^* = 180$. Его двойственная оценка равна нулю: $y_3^* = 0$. Поэтому дальнейшее его увеличение не влияет на значение целевой функции. Что же показывают значения дополнительных двойственных оценок $y_4^* = 0$, $y_5^* = 170$, $y_6^* = 0$? Оптимальный план исходной задачи

$$\mathbf{x}^* = (60; 0; 12|0; 0; 180), \ \ z(\mathbf{x}^*) = 23400,$$

говорит о том, что первую технологию целесообразно использовать в течение 60 ч, третью — 12 ч. Вторая технология вообще не должна внедряться: она заведомо убыточная. Если ее все же использовать, то она в течение каждого часа работы будет снижать достигнутый уровень выпуска на $y_5^* = 170$ ден. ед. Значения $y_4^* = y_6^* = 0$ свидетельствуют о том, что первая и третья технологии являются неубыточными. В самом деле, из второго ограничения двойственной задачи следует:

$$20y_1 + 3y_2 + 60y_3 - y_5 = 250.$$

Стоимость ресурсов, используемых в единицу времени при работе по второму технологическому способу, составит $20y_1^* + 3y_2^* + 60y_3^* = 20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 420$ ден. ед.

В единицу же времени этот способ может дать продукции на 250 ден. ед. Поэтому убыток в единицу времени при работе этим способом составит $y_5^* = 420 - 250 = 170$ (ден. ед.).

Лабораторное занятие 3

Вариант 1

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования

$$f(x) = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 3; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

2. Предприятие производит продукцию двух видов: P_1 и P_2. Объем сбыта продукции P_1 составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции P_1 и P_2 используется одно и то же сырье, суточный запас которого равен кг. Расход сырья на единицу продукции P_1 равен 2 кг, а на единицу продукции P_2 – 4 кг. Цены продукции P_1 и P_2 – 25 и 30 ден. ед. соответственно. Определить оптимальное распределение сырья для изготовления продукции P_1 и P_2. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск: 90 ед. изделия I, 70 ед. изделия II и 60 ед. изделия III. Суточные ресурсы:

780 ед. производственного оборудования (станки, машины и т.п.), 850 ед. сырья (металл и т.п.) и 790 ед. электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в таблице.

Ресурсы	Расход ресурсов		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Стоимость изделия I – 7 ден. ед., изделия II – 5 ден. ед., изделия III – 6 ден. ед. Сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной? Записать решениедвойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 2

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \geq & 9; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 & \leq & 5; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

2. Процесс изготовления промышленных изделий двух видов P_1 и P_2 состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки одного изделия (в минутах) и прибыль от продажи одного изделия каждого вида указаны в таблице.

Станки	Выпускаемая продукция		Лимит времени
	P_1	P_2	
I	10	5	10
II	6	20	10
III	8	15	10
Удельная прибыль	200	300	

Найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида, максимизирующие прибыль. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют три вида корма, представленных в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг.		
	корма 1	корма 2	корма 3
белки	3	1	1
углеводы	1	2	1
протеины	1	6	4

Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 д.е., второго – 6 д.е., третьего – 5 д.е. Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость и найдите оптимальное решение. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 3

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 4; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 6; \\ 2x_1 + x_3 & = & 5; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

2. Предприятие изготавливает два вида продукции – P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в таблице.

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	P_1	P_2	
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д.е. для P_1 и 4 д.е. для P_2. Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализация продукции был максимальным? Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 120 ед., тяга – 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Организация производства характеризуется следующей таблицей:

продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доходы от единицы продукции
	площадь	труд	тяга	
Π_1	2	2	2	1
Π_2	3	1	3	4
Π_3	4	2	1	3
Π_4	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль и найдите оптимальное решение. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Вариант 4

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 7; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3; \\ 3x_2 - x_4 + x_5 & = & 8. \end{array}\right\}$$

2. Предприятие выпускает продукцию двух видов: P_1 и P_2. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице:

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Имеющийся объем ресурса
	P_1	P_2	
Оборудование	2	3	30
Сырье	2	1	18
электроэнергия	2	1	20
Прибыль на единицу продукции	30	20	

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
Закрыть

Найти оптимальный план выпуска продукции. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Изделия трех видов $(, B, C)$ вырезаются из стальных листов. Предприятие имеет 150 стальных листов. Каждый лист можно раскроить одним из трех способов. Количество изделий, получаемых из одного листа, и величины отходов для каждого способа раскроя приведены в таблице.

Количество изделий	Способы раскроя		
	I	II	III
A	4	5	2
B	1	1	4
C	2	1	1
Отходы, см	20	25	17

Предприятию необходимо раскроить листы таким образом, чтобы отходы были минимальны. При этом необходимо выпустить не менее 400 изделий A, не менее 250 изделий B и не более 300 изделий C (последнее требование связано с тем, что спрос на изделия C ограничен). Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 5

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 & \le & 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 & \le & 9; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 & \ge & 4; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

2. Для производства двух видов изделий A и B используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-часов) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	A	B	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия (руб)	14	18	

Найти план выпуска изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Из трех продуктов – I, II, III – составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества , 8 ед. – вещества и не менее 12 ед. вещества . Структура химических веществ приведена в следующей таблице:

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Продукты	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	A	B	C	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте математическую модель приготовления наиболее дешевой смеси и найдите оптимальное решение. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Вариант 6

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 & \geq & 12; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & \leq & 10; \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 & = & 7; \end{array}\right\}$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

2. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице.

Сырье	Продукция вида			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	–	2	–	10
II	–	5	3	30
III	1	1	1	8
Прибыль, ден. ед.	1	2	2	

Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли от ее реализации. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 7

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = 2,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & \le & 6; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & \ge & 9; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \ge & 11; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

2. На звероферме могут выращиваться лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки (руб.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице:

Сырье	Продукция вида			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	–	1	1	8
II	1	1	–	5
III	–	2	1	12
Прибыль, ден. ед.	1	5	2	

Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли от ее реализации. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Вариант 8

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = 6x_1 + 8x_2 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 10; \\ x_1 + x_5 & = & 5; \\ 3x_2 + 2x_3 + x_6 & = & 12; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

2. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников. Каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии – 60 изделий, второй – 75. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, второй модели – 8. Наибольший суточный запас используемых элементов равен 800 ед. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей – соответственно 3000 и 2000 ден. ед. Определить оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице.

Сырье	Продукция вида			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	2	1	–	14
II	1	1	–	8
III	–	1	1	3
Прибыль, ден. ед.	3	4	1	

Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли от ее реализации. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Вариант 9

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 4; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & \geq & 6; \\ x_1 - x_3 & \leq & 8; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Предприятие выпускает продукцию двух видов: P_1 и P_2. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице:

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Имеющийся объем ресурса
	P_1	P_2	
Оборудование	2	3	31
Сырье	1	1	12
электроэнергия	2	1	20
Прибыль на единицу продукции	40	25	

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Найти оптимальный план выпуска продукции. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице.

Сырье	Продукция вида			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	3	2	–	18
II	–	1	1	4
III	–	2	–	10
Прибыль, ден. ед.	2	5	1	

Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли от ее реализации. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Вариант 10

1. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 & \leq & 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 & \leq & 9; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 & \geq & 11; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

2. При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг.	
	корма 1	корма 2
белки	3	1
углеводы	1	2
протеины	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 д.е., второго – 6 д.е. Необходимо составить дневной рацион питательности, имеющий минимальную

стоимость. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице.

Сырье	Продукция вида			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	2	1	3	18
II	2	–	–	10
III	4	–	3	24
Прибыль, ден. ед.	6	1	9	

Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли от ее реализации. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости, а также выяснить экономический смысл двойственных переменных.

ЛЕКЦИЯ 10

Дискретное программирование. Классические задачи целочисленного программирования и краткая классификация методов их решения

Основные понятия. *Дискретное программирование* — раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные налагается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна. В экономике существует огромное количество задач с дискретной природой. Прежде всего это задачи с физической неделимостью многих факторов и объектов расчета. Например, нельзя построить 3,2 завода или поставить 1,6 автомобиля. Количество комплектов, число агрегатов, число типовых размеров предприятий, типовые мощности предприятий — все это вносит дискретность в оптимизационные расчеты. Дискретными являются задачи с логическими переменными, принимающими только два значения — нуль или единица (вариант отвергается или принимается).

Иногда дискретное программирование называется целочисленным. Этот термин некоторые математики считают неправильным, так как, строго говоря, дискретное — необязательно целочисленное. Например, ряд вместимостей (в м^3) $1,3; 1,6; 1,9; \ldots$ — дискретный, но не целочисленный. Отсюда, целочисленное программирование правильнее считать частным случаем дискретного. Обратимся к примерам.

Задача о контейнерных перевозках (задача о бомбардировщике или задача о рюкзаке). Эта задача формулируется так. Контейнер оборудован m отсеками вместимостью b_i $(i = \overline{1,m})$ для перевозки n видов продукции Π_j $(j = \overline{1,n})$. Виды продукции характеризуются свойством неделимости, т.е. их можно брать в количестве $0, 1, 2, \ldots$ единиц. Пусть, далее, a_{ij} — расход i-го отсека для перевозки единицы j-й продукции. Обозначим через c_j полезность единицы j-й продукции (это может быть цена реализации, прибыль и др.). Требуется найти план x_j (x_j — количество единиц j-й продукции, погруженной в контейнер) перевозки, при котором максимизируется общая полезность рейса. Модель задачи примет вид

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях на вместимости отсеков

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

условии неотрицательности

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

условии целочисленности

$$x_j - \text{целые} \quad (j = \overline{1,n}).$$

В частности, когда для перевозки имеется один отсек и каждый вид продукции (предмет) может быть взят или нет (т.е. $x_j \in \{0; 1\} : x_j = 1$, если предмет j-го вида берется, и $x_j = 0$ в противном случае), модель задачи принимает вид

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \tag{10.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \tag{10.2}$$

$$x_j \in \{0; 1\}. \tag{10.3}$$

Для модели (10.1)–(10.3) можно дать приближенное графическое решение задачи, которое приемлемо при условии, что a_j значительно меньше b. Для этого рассмотрим прямоугольную декартову систему координат. По оси ординат отложим значения c_j, а по оси абсцисс — a_j. Построим точки Π_j с координатами a_j, c_j. Для нахождения оптимального набора предметов Π_j будем вращать луч, начальное положение которого совпадает с осью c_j, вокруг начала координат по ходу часовой стрелки (рисунок 10.2). По мере вращения луча будем находить сумму абсцисс точек $\Pi_j(a_j; c_j)$, которые "заметает" луч. При выполнении условия

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b < \sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

вращение луча прекращается. Все предметы Π_j, которые попадают в "заметаемый" радиусом-вектором сектор до выполнения этого условия, относятся к оптимальному набору. Можно обойтись и без графического представления условий. Для этого упорядочим отношения c_j/a_j по невозрастанию. Просматриваем их слева на право, следя за суммой a_j, и включаем соответствующий предмет в контейнер, пока в нем есть место. Если очередной предмет не вмещается в контейнер, то на этом не останавливаемся, откладываем предмет в сторону и переходим к следующему отношению, пока не пересмотрим все предметы либо не заполним контейнер. Такой подход в ряде случаев дает лучший результат, чем описанный выше графический способ.

Пример 10.1. Решить задачу дискретного программирования

$$\max Z = 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5,$$

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 5x_3 \leq 23,$$

$$x_j \in \{0; 1\}.$$

Решение. На рисунке **??**, построены точки $\Pi_1(5;8)$, $\Pi_2(6;7)$, $\Pi_3(7;6)$, $\Pi_4(6;4)$, $\Pi_5(5;2)$. При изображенном на рисунке положении луча в образовавшийся сектор попали точки Π_1, Π_2, Π_3, для которых $a_1 + a_2 + a_3 = 5 + 6 + 7 = 18 < 23$. Если же продолжить вращение луча и "замести" точку Π_4, то $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 6 + 7 + 6 = 24 > 23$, т.е.

ограничение задачи нарушается. Поэтому приближенным решением задачи при графическом способе будет набор предметов Π_1, Π_2, Π_3, или аналитически $x_1 = (1; 1; 1; 0; 0)$. При этом $Z = 21$.

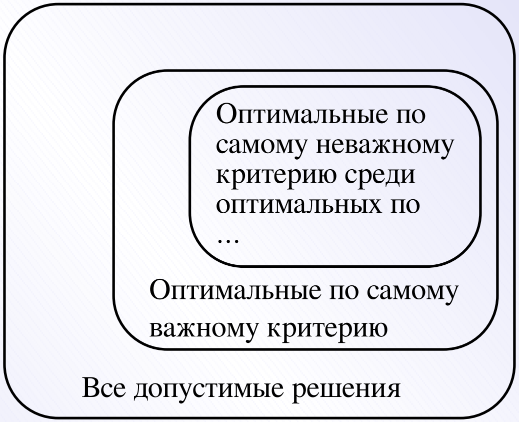


Рисунок 10.1 – Решение задачи с упорядоченными критериями

Решим задачу другим способом. Последовательность отношений c_j/a_j имеет вид $8/5$, $7/6$, $6/7$, $4/6$, $2/5$. Суммируем знаменатели a_j : $a_1 + a_2 = 5 + 6 = 11 < 23$. Следовательно, предметы Π_1 и Π_2 вмещаются в контейнер. Далее, $a_1 + a_2 + a_3 = 5 + 6 + 7 = 18 < 23$, поэтому предмет Π_3 также вмещается в контейнер. Продолжаем суммирование: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 6 + 7 + 6 = 24 > 23$. Ограничение задачи нарушается, значит, предмет Π_4 в контейнер не вмещается. Обращаемся к предмету Π_5 и проверяем сумму: $a_1 + a_2 + a_3 + a_5 = 5 + 6 + 7 + 5 = 23$.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Итак, предмет Π_5 можно поместить в контейнер. Приходим к окончательному решению: $x_2 = (1;1;1;0;1)$. При этом $Z = 23$. Понятно, что второе решение лучше.

Задача о назначении (проблема выбора, задача о женихах и невестах).

Имеется n исполнителей, которые могут выполнять n различных работ. Известна полезность c_{ij}, связанная с выполнением i-м исполнителем j-й работы $(i, j = \overline{1, n})$. Необходимо так назначить исполнителей на работы, чтобы добиться максимальной полезности при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на, одну работу и за каждой работой должен быть закреплен только один исполнитель.

Для составления математической модели задачи обозначим через x_{ij} факт назначения или неназначения i-го исполнителя на j-ю работу. Так как количество исполнителей равно количеству работ и каждый из них может быть назначен только на одну работу, то x_{ij} должны принимать только два значения: 1 или 0. Такие переменные называют *булевыми*. Итак,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й исполнитель назначается на } j\text{-ю работу;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Приходим к задаче: найти план назначения x_{ij}, который максимизирует суммарную полезность назначений:

$$\max Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при следующих ограничениях. Каждый исполнитель назначается только на однуработу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}). \tag{10.4}$$

На каждую работу назначается только один исполнитель:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}). \tag{10.5}$$

Условия неотрицательности и цпелочисленности (булевости):

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \{0; 1\}. \tag{10.6}$$

Легко видеть, что задача о назначении — частный случай транспортной задачи при $a_i = 1$, $b_j = 1$. Однако с учетом специфики задачи для ее решения разработаны специальные, более эффективные, алгоритмы.

Задача о назначении имеет самое широкое применение. Например, при закреплении машин за маршрутами, распределении инструментов для обработки различных марок стали, рабочих или бригад и т.д.

Задача коммивояжера (развозчика продукции или бродячего торговца). Коммивояжер должен посетить один, и только один, раз каждый из n городов и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути.

Пусть $C = [c_{ij}]$ — матрица расстояний между городами. Неизвестные величины:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из города } i \text{ приезжает} \\ & \text{непосредственно в город } j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Модель задачи примет следующий вид:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}; \tag{10.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (j = \overline{1, n}), \tag{10.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (i = \overline{1, n}). \tag{10.9}$$

Система ограничений (10.8) обеспечивает построение маршрута, при котором коммивояжер въезжает в каждый город только один раз, а система ограничений (10.9) — маршрута, когда он выезжает из каждого города только один раз. К сожалению, эти ограничения недостаточны, так как среди допускаемых ими решений имеются маршруты, необразующие полный цикл, включающий все города. Устранение подциклов достигается при добавлении системы ограничений:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n - 1 \quad (i, j = \overline{1, n}; i \ne j). \tag{10.10}$$

Ограничения (10.8)–(10.9) обусловливают задачу о назначении. Она отличается от задачи коммивояжера отсутствием требования цикличности пути. Аналитически требование цикличности записывается в виде неравенств (10.10), где переменные u могут принимать произвольные действительные значения. В самом деле, допустим обратное. Пусть имеется подцикл τ с числом ребер $k < n$, не проходящий через город 0. Складывая неравенства (10.10) при $x_{ij} = 1$ вдоль подцикла, получаем противоречивое неравенство $nk \le (n - 1)$, так как все разности $u_i - u_j$ уничтожаются. Таким образом, условие (10.10) не допускает цикла, непроходящего через город 0. Вместе с тем покажем, что можно выбрать значения, при которых для цикла, проходящего через город 0 ($i = 0$), удовлетворяются соотношения (10.10). Для этого предположим, что $u_i = p$, если i посещается на p-м шаге ($p = 1, 2, \ldots$). Очевидно, что при этом $u_i - u_j \le n - 1$ для любых i и j. Отсюда следует, что соотношения (10.10) для $x_{ij} = 0$ удовлетворяются. При $x_{ij} = 1$ они превращаются в равенства:

$$u_i - u_j + nx_{ij} = p - (p + 1) + n \cdot 1 = n - 1,$$

связанные с переналадкой с i-й работы на j-ю, как правило, отличны от затрат при переходе от j-й работы к i-й.

Существует несколько точных методов решения задачи коммивояжера: ветвей и границ, динамического программирования и др. Методом ветвей и границ с использованием современных ЭВМ можно решать задачи коммивояжера для $n \leq 40$, динамического программирования — для $n \leq 17$. В связи с малой эффективностью точных методов получили широкое применение эвристические. В настоящее время существует более ста приближенных методов решения задачи коммивояжера, среди которых наиболее прост метод *ближайшего соседа*. Он реализует требование включать в искомый замкнутый контур вершину, ближайшую к только что найденной. Алгоритм "ближайшего соседа" состоит в последовательном добавлении к начальной вершине следующей ближайшей к ней и т.д. Метод очень прост, однако степень приближения к оптимальному решению существенно зависит от выборана начальной вершины. Поэтому алгоритм целесообразно применять, начиная с каждой вершины, и затем выбрать замкнутый контур наименьшей длины. Отметим, что если ближайший сосед для некоторой вершины уже вошел в контур, то берется следующая по близости вершина и т.д.

Пример 10.2. Решить задачу коммивояжера для матрицы расстояний, представленной в таблица 10.1.

Таблица 10.1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	35	45	20	11
2	9	∞	17	6	8
3	21	31	∞	2	11
4	30	15	40	∞	10
5	10	9	8	7	∞

Решение. Начнем с первой вершины. Ближайшей к ней является пятая ($\min\limits_j c_{ij} = 11$). Процесс нахождения минимального контура целесообразно сопровождать построением дерева ветвления (рисунок 10.2). Если ближайшая вершина уже вошла в контур, то блокируем ее и переходим к следующей по степени близости. Ближайшей к пятой вершине является четвертая, к четвертой — пятая. Но она уже вошла в контур, поэтому блокируем ее и находим следующую по близости вершину — вторую, и т.д. Дерево ветвлений, начиная с первой вершины, представлено на рисунок 10.2.

В результате получаем

$$\min(z(x_1), z(x_2), z(x_3), z(x_4), z(x_5)) = \min(71, 75, 75, 80, 87) = 71.$$

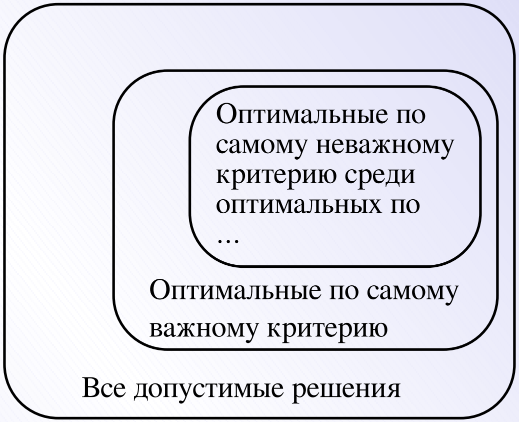


Рисунок 10.2 – Решение задачи с упорядоченными критериями

Таким образом, минимальным контуром, найденным способом ближайшего соседа, является контур

$$\Gamma_1 = \langle 1 - 5 - 4 - 2 - 3 - 1 \rangle\,, \quad z(\Gamma_1) = 71.$$

Дальше будет найдено точное решение методом ветвей и границ:

$$\Gamma^* = \langle 1 - 5 - 3 - 4 - 2 - 1 \rangle\,, \quad z(\Gamma^*) = 11 + 8 + 2 + 15 + 9 = 45.$$

Как видно, ошибка решения значительная.

На обширном статистическом материале показано, что с увеличением n ошибка решения убывает. Поэтому при $n \leq 40$ можно применять точные методы, при $n > 40$ — приближенные типа ближайшего соседа.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Задача оптимального использования оборудования. На предприятии имеется m видов оборудования (станков) соответственно в количестве b_i $(i=\overline{1,m})$ единиц. На каждом виде оборудования можно изготавливать n видов деталей, которые входят в комплект соответственно в количестве k_j $(j=\overline{1,n})$ единиц.

Пусть a_{ij} – производительность i-го вида оборудования при изготовлении j-го вида детали. Необходимо составить план выпуска использования оборудования, который обеспечит максимальный выпуск комплектной продукции. Обозначим через x_{ij} количество i-го оборудования, на котором изготавливаются детали j-го вида. За единицу времени их будет произведено $a_{ij}x_{ij}$ единиц, а на всех видах оборудования:

$$Z_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \quad (j=\overline{1,n}).$$

Так как в комплект должно входить k деталей, то отношения Z_j/k_j $(j=\overline{1,n})$ определяют количество комплектов, которое можно составить из деталей j-го вида. Количество полных комплектов по всем видам деталей определяется наименьшим из этих отношений. Для соблюдения условия полной комплектности, очевидно, должно выполняться равенство отношений:

$$Z_1/k_1=Z_2/k_2=\ldots=Z_j/k_j=\ldots=Z_n/k_n.$$

Откуда получаем $n-1$ ограничений по комплектности:

$$Z_j/k_j = Z_1/k_1 \quad (j=\overline{2,n})\,, \ \sum_{i=1}^{m}\left(a_{ij}x_{ij} - \frac{k_j}{k_1}a_{i1}x_{i1}\right) = 0 \quad (j=\overline{2,n})\,.$$

Так как оборудование используется полностью, то получаем еще m ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ \ (i=\overline{1,m})\,, \ \ x_{ij} \geq 0 \ \ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})\,.$$

Таким образом, математическая модель задачи оптимального использования оборудования запишется в виде:

$$f = \min_{1\leq j\leq n} \frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad (i=\overline{1,m})\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\left(a_{ij}x_{ij} - \frac{k_j}{k_1}a_{i1}x_{i1}\right) = 0 \quad (j=\overline{2,n})\,, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \ \text{ и целые.}$$

Задача оптимальной загрузки транспортного средства. Транспортное средство грузоподъемностью P и вместимостью V загружается

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

n неделимыми различными предметами. Каждый из предметов характеризуется весом p_j, стоимостью c_j и объемом v_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$. Требуется загрузить судно предметами таким образом, чтобы суммарная стоимость их была максимальной и выполнялись ограничения по грузоподъемности и вместимости.

Обозначим через x_j неизвестные параметры задачи, при этом

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ – предмет загружается на транспортное средство } j = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С учетом обозначения математическая модель задачи имеет вид

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j \le P, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} v_j x_j \le V, \\ x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \text{ и целые.} \end{cases}$$

При составлении модели экономической задачи следует учитывать, что, как правило, невозможно точно выразить в форме уравнений и неравенств все количественные связи экономического процесса, поэтому приходится ограничиваться только основными из них.

Все без исключения количественные связи различных экономических процессов не могут быть выражены в модели по следующим причинам;

1) полная информация о всех факторах, влияющих на данный процесс, отсутствует;

2) невозможно количественно соизмерить некоторые факторы;

3) с увеличением числа факторов чрезвычайно усложняется модель, что затрудняет ее практическое применение.

Несмотря на это, использование математических методов играет важную роль в планировании и управлении.

ЛЕКЦИЯ 11

Целочисленное программирование. Метод Гомори. Постановка задачи целочисленной оптимизации

Под **задачей целочисленного программирования** понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения. В том случае, когда ограничения и целевая функция представляют собой линейные зависимости, задачу называют целочисленной задачей линейного программирования. В противном случае, когда хотя бы одна зависимость будет нелинейной, это будет целочисленной задачей нелинейного программирования. Если требование целочисленности распространяется на часть неизвестных величин задачи, то такая задача называется частично целочисленной.

Целочисленное программирование возникло в 50–60-е годы XX века из нужд практики – главным образом в работах американских математиков Дж. Данцига и Р. Гомори. Первоначально целочисленное программирование развивалось независимо от геометрии чисел на основе теории и методов математической оптимизации, прежде всего, линейного программирования. Однако в последнее время исследования в этом направлении все чаще проводятся средствами математики целых чисел.

Задачи такого типа весьма актуальны, так как к их решению сводится анализ разнообразных ситуаций, возникающих в экономике, технике, военном деле и других областях. С появлением ЭВМ, ростом их производительности повысился интерес к задачам такого типа и к математике в целом.

Целочисленным (иногда его называют также дискретным) программированием называется раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна. Огромное количество экономических задач носит целочисленный характер, что связано, как правило, с физической неделимостью многих элементов расчета: например, нельзя построить два с половиной завода, купить полтора автомобиля и т.д. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплексным методом, с последующим округлением до целых чисел. Однако такой подход оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объема (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение.

Большинство целочисленных задач, таких как задача с неделимостями, принадлежит к разряду так называемых трудно решаемых. Это означает, что вычислительная сложность алгоритма их точного решения сравнима по трудоемкости с полным перебором вариантов. Получение их точного решения не может быть гарантировано, хотя для некоторых задач данного типа существуют эффективные методы, позволяющие находить точное решение даже при больших размерностях.

Для решения целочисленных задач используются следующие методы:

1) симплекс-метод (для транспортных задач, задач о назначениях);

2) метод отсечения (метод Гомори);

3) метод ветвей и границ (в общем случае не обеспечивает получения точного решения);

4) эвристические методы (не обеспечивают получения точного решения).

Последняя группа методов может использоваться в случаях, когда применение предыдущих методов невозможно или не приводит к успеху. Кроме того, эвристические методы можно использовать для решения задач любой сложности.

Математическая модель задачи целочисленного программирования представлена в виде:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{11.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{11.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{11.3}$$

$$x_j \ \left(j = \overline{1, n}\right) \text{ целые.} \tag{11.4}$$

Ограничения (11.2) определяют выпуклую область $OABCD$ в n-мерном пространстве, как показано на рисунке 11.1.

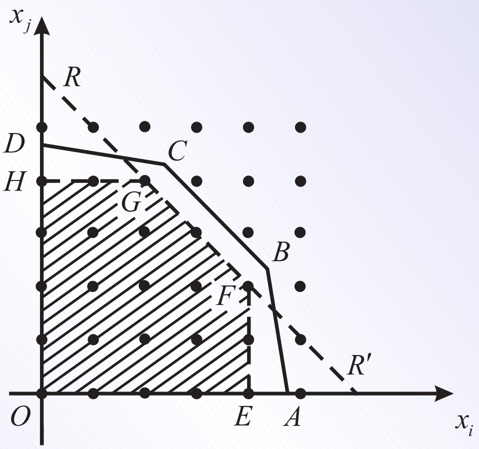


Рисунок 11.1 – ОДР задачи целочисленного программирования

Узлы целочисленной решетки на рисунке 11.1 изображены точками. Такие точки, расположенные внутри области $OABCD$, являются допустимыми решениями задачи целочисленного программирования. Ее оптимальные решения всегда располагаются на границе области решений. В данном случае граничные точки не являются даже допустимыми решениями, поскольку ни одна из них не целочисленная. Предположим, что область допустимых решений сужена до выпуклой оболочки допустимых целых точек внутри допустимой области. На рисунке 11.1 эта выпуклая оболочка показана затененной областью $OEFGH$. Эту затененную область можно рассматривать как область допустимых решений некоторой другой задачи линейного программирования. Действительно, если к задаче линейного программирования, определяющей допустимую область $OABCD$, добавить ограничение типа RR', как показано на рисунке 11.1, то вновь полученная задача будет иметь $OEFGH$ в качестве области допустимых решений. Такая вновь полученная область обладает двумя важными свойствами: во-первых, она содержит все допустимые целочисленные точки исходной задачи линейного программирования (поскольку она является выпуклой оболочкой этих точек), во-вторых, все крайние точки новой области – целочисленные. Поэтому любое базисное оптимальное решение модифицированной задачи линейного программирования имеет своими компонентами целые числа и является оптимальным решением исходной задачи целочисленного программирования.

Именно алгоритм целочисленного программирования, который будет описан ниже, реализует методы систематического введения дополнительных ограничений с целью сведения исходной допустимой области к выпуклой оболочке ее допустимых целочисленных точек.

ЛЕКЦИЯ 12

Алгоритм метода Гомори. Геометрическая иллюстрация метода Гомори

Метод Гомори основан на применении симплекс-метода и метода отсечения. Идея его достаточно проста и заключается в следующем.

Сначала находится оптимальное решение задачи целочисленного программирования симплекс-методом. Если полученное решение целочисленное, то цель достигнута. Если же оптимальное решение не является целочисленным, то в условия задачи вводится дополнительное ограничение, которое отсекает от области допустимых решений полученное нецелочисленное решение и не отсекает от нее ни одной точки с целочисленными координатами. Далее симплекс-методом решается расширенная задача, т.е. находится ее опорное и оптимальное решение. Если новое решение не будет целочисленным, то вводится еще одно дополнительное ограничение. Процесс построения дополнительных ограничений и решения задачи симплекс-методом продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное целочисленное решение или не будет установлено, что его не существует.

Приведем алгоритм метода Гомори.

1. Симплекс-методом находят оптимальный план задачи (11.1)–(11.3) (таблица 12.1). Если в таблице 12.1 все свободные члены $\beta_1, \ldots, \beta_m$ целые, то план $(\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$ является оптимальным и для исходной

задачи (11.1)–(11.4). Если задача (11.1)–(11.3) неразрешима, то и задача (11.1)–(11.4) неразрешима. Если среди свободных членов $\beta_1, \ldots, \beta_m$ есть нецелые, о переходят к пункту 2 алгоритма.

Таблица 12.1

С.П. / Б.П.	С.Ч.	$-x_{j_{m+1}}$	$-x_{j_{m+2}}$	$\ldots$	$-x_{j_n}$
$x_{j1} =$	β_1	$\alpha_{1,m+1}$	$\alpha_{1,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{1,n}$
$x_{j2} =$	β_2	$\alpha_{2,m+1}$	$\alpha_{2,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{2,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{jk} =$	β_k	$\alpha_{k,m+1}$	$\alpha_{k,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{k,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{jm} =$	β_m	$\alpha_{m,m+1}$	$\alpha_{m,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{m,n}$
$f =$	γ_0	γ_{m+1}	γ_{m+2}	$\ldots$	γ_n

2. Среди нецелых свободных членов выбирают, например, тот, который имеет наибольшую дробную часть. Пусть в нашем случае таковым является β_k. По строке x_{jk} формируют правильное отсечение в виде неравенства

$$\{\alpha_{k,m+1}\}\, x_{j_{m+1}} + \{\alpha_{k,m+2}\}\, x_{j_{m+2}} + \ldots + \{\alpha_{k,n}\}\, x_{j_n} \geq \{\beta_k\} \tag{12.1}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
Закрыть

3. Неравенство (12.1) введением дополнительной неотрицательной целочисленной переменной x_{n+1} преобразовывают в эквивалентное уравнение

$$\{\alpha_{k,m+1}\}\, x_{j_{m+1}} + \{\alpha_{k,m+2}\}\, x_{j_{m+2}} + \ldots + \{\alpha_{k,n}\}\, x_{j_n} - x_{n+1} = \{\beta_k\} \quad (12.2)$$

4. Расширяют таблицу 12.1 за счет включения в нее дополнительной строки для составленного уравнения (12.2) (таблица 12.2), получая тем самым симплексную таблицу для расширенной задачи.

Таблица 12.2

Б.П. \ С.П.	С.Ч.	$-x_{j_{m+1}}$	$-x_{j_{m+2}}$	$\ldots$	$-x_{j_n}$
$x_{j1} =$	β_1	$\alpha_{1,m+1}$	$\alpha_{1,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{1,n}$
$x_{j2} =$	β_2	$\alpha_{2,m+1}$	$\alpha_{2,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{2,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{jk} =$	β_k	$\alpha_{k,m+1}$	$\alpha_{k,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{k,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{jm} =$	β_m	$\alpha_{m,m+1}$	$\alpha_{m,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{m,n}$
$x_{n+1} =$	$-\{\beta_k\}$	$-\{\alpha_{k,m+1}\}$	$-\{\alpha_{k,m+2}\}$	$\ldots$	$-\{\alpha_{k,n}\}$
$f =$	γ_0	γ_{m+1}	γ_{m+2}	$\ldots$	γ_n

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

5. Составленную расширенную задачу вновь решают симплекс-методом. Если оптимальный план будет целочисленным, то он и станет решением исходной задачи (11.1)–(11.4). В противном случае возвращаются к пункту 2 алгоритма.

Если задача разрешима в целых числах, то через конечное число итераций оптимальный целочисленный план будет найден.

Если в процессе решения появится строка с нецелым свободным членом и целыми остальными коэффициентами, то соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах. В таком случае и исходная задача неразрешима в целых числах.

Геометрическая иллюстрация метода Гомори осуществляется с помощью графического поля, на которое нанесена целочисленная решетка (рисунок 12.1).

На рисунке 12.1 максимальное значение функции в области допустимых решений (четырехугольник $ABCD$) достигается в нецелочисленной точке . После построения первого дополнительного ограничения, прямая линия которого на рисунок 12.1 проходит через точки и F, максимальное значение функции в новой области допустимых решений (многоугольник $ABEFD$) достигается в нецелочисленной точке F. При включении в систему ограничений второго дополнительного ограничения, прямая которого проходит через точки E и K, максимум функции достигается в нецелочисленной точке в области допустимых решений, представленной многоугольником $ABEKD$. А после включения

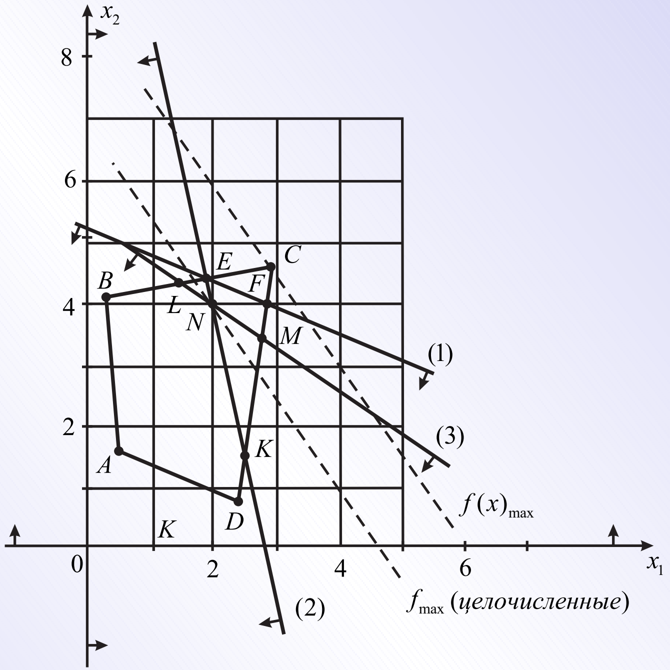


Рисунок 12.1 – Геометрическая иллюстрация метода Гомори

в систему ограничений третьего дополнительного ограничения, прямая которого проходит через точки L и , найдено максимальное значение функции в целочисленной точке N с координатами $(2;4)$ многоугольника $ABLNKD$.

Нетрудно увидеть, что дополнительные ограничения отсекали только нецелочисленные точки, и не была отсечена ни одна целочисленная точка.

В качестве преимуществ метода Гомори можно рассматривать его эффективность и точность, т.к. в результате решения получается наиболее оптимальное значение задачи. К недостаткам метода можно отнести:

– трудоемкость (в некоторых задачах для расчета симплексных таблиц необходимо производить множество расчетов);

– громоздкость (решение достаточно объемно, т.к. приходится искать оптимальные значения сначала симплекс-методом, а затем методом отсечения, который также может применяться несколько раз);

– малая применимость (метод применяется для задач с небольшим количеством переменных, т.к. при увеличении их числа происходит значительное увеличение трудоемкости вычислений).

Пример 12.1. На производственном участке предприятия необходимо установить оборудование трех типов. Стоимость единицы оборудования первого типа составляет 5 млрд. руб., второго – 3 млрд. руб. и третьего – 2 млрд. руб. На закупку оборудования предприятие располагает средствами в 15 млрд. руб. Площадь производственного участка для размещения оборудования составляет 25 м^2. Производительность единицы каждого типа оборудования равна соответственно 1 тыс. единиц, 2 тыс. единиц и 3 тыс. единиц продукции в смену. Требуется определить, сколько оборудования каждого типа закупать, чтобы получить максимальную производительность производственного участка, если известно, что для установки единицы оборудования первого типа, с учетом проходов, требуется 6 м^2 площади, второго – 4 м^2 и третьего – 3 м^2.

◀ 1. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 количество закупаемого оборудования каждого типа. Тогда математическая модель задачи запишется следующим образом:

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 25; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15; \\ x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right) \ \text{ и целые.} \end{cases}$$

Решаем задачу симплекс-методом без условия целочисленности. Приведем систему ограничений к каноническому виду. Добавим к левым частям ограничений неотрицательные дополнительные неизвестные x_4 и x_5:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 25; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 15; \\ x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

Выразим из системы ограничений базисные неизвестные x_4 и x_5:

$$\begin{cases} x_4 = -6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 25 \ge 0; \\ x_5 = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 15 \ge 0; \\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

Занесем коэффициенты системы ограничений и функции в симплексную таблицу (таблица 12.3).

Таблица 12.3

Б.П. \ С.П.	С.Ч.	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$t \geq 0$
$x_4 =$	25	6	4	3	$25/3$
$x_5 =$	15	5	3	$\boxed{2}$	$15/2$
$f =$	0	-1	-2	-3	

Решение в таблице 12.3 опорное, так как базисные неизвестные принимают положительные значения. Переходим к поиску оптимального решения. В строке функции наибольший по абсолютной величине (среди отрицательных) элемент находится в третьем столбце, поэтому этот столбец берем за разрешающий. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному отношению

$$t = \min\left(\frac{25}{3}; \frac{15}{2}\right) = \frac{15}{2}.$$

Наименьшее симплексное отношение соответствует второй строке, следовательно, она будет разрешающей. Выделим в таблице разрешающий элемент, который находится на пересечении разрешающих строки и столбца.

Рассчитаем элементы новой симплексной таблицы (таблице 12.4).

Таблица 12.4

С.П. / Б.П.	С.Ч.	$-x_1$	$-x_2$	$-x_5$
$x_4 =$	$5/2$	$-3/2$	$-1/2$	$-3/2$
$x_3 =$	$15/2$	$5/2$	$3/2$	$1/2$
$f =$	$45/2$	$13/2$	$5/2$	$3/2$

В таблице 12.4 получено оптимальное решение:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 15/2; \quad x_4 = 5/2; \quad x_5 = 0; \quad f = 45/2.$$

Однако это решение не удовлетворяет условию целочисленности, так как обе базисные переменные получили нецелые значения. Определим из них ту, которая имеет наибольшую дробную часть:

$$\{5/2\} = 5/2 - [2] = 1/2;$$

$$\{15/2\} = 15/2 - [7] = 1/2.$$

Поскольку дробные части у базисных переменных одинаковые, то сформируем правильное отсечение, например, по строке x_4.

2. Правильное отсечение в данном случае имеет вид:

$$\{-3/2\}\,x_1 + \{-1/2\}\,x_2 + \{-3/2\}\,x_5 \geq \{5/2\}\,.$$

Находим дробные части:

$$\{-3/2\} = -3/2 - [-2] = 1/2;$$

$$\{-1/2\} = -1/2 - [-1] = 1/2;$$

$$\{5/2\} = 5/2 - [2] = 1/2.$$

Правильное отсечение принимает следующий вид:

$$1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_5 \geq 1/2.$$

3. Преобразовываем полученное неравенство в эквивалентное уравнение:

$$1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_5 - x_6 = 1/2,$$

или

$$x_6 = 1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_5 - 1/2, \tag{12.3}$$

где $x_6 \geq 0$ и целое.

4. На основе таблице 12.4 составляем таблицу 12.5 расширенной задачи путем присоединения строки для уравнения (12.3).

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Таблица 12.5

Б.П. \ С.П.	С.Ч.	$-x_1$	$-x_2$	$-x_5$	$t \geq 0$
$x_4 =$	$5/2$	$-3/2$	$-1/2$	$-3/2$	–
$x_3 =$	$15/2$	$5/2$	$3/2$	$1/2$	3
$x_6 =$	$-1/2$	$\boxed{-1/2}$	$-1/2$	$-1/2$	1
$f =$	$45/2$	$13/2$	$5/2$	$3/2$	

5. Решаем расширенную задачу симплекс-методом. Замечаем, что содержавшийся в таблице 12.5 план опорным не является (в столбце свободных членов имеется отрицательный элемент $-1/2$). Поэтому, прежде всего, необходимо найти опорный план. Для этого за разрешающий примем, например, первый столбец и найдем в нем минимальное симплексное отношение:

$$\min\left(15/2 : 5/2; (-1/2) : (-1/2)\right) = \min(3; 1) = 1.$$

Таким образом, разрешающим будет элемент $-1/2$. Выполним с ним симплексное преобразование.

Решение в таблице 12.6 опорное, переходим к поиску оптимального решения. В строке функции наибольший по абсолютной величине (среди отрицательных) элемент находится в третьем столбце, поэтому

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Таблица 12.6

Б.П. \ С.П.	С.Ч.	$-x_6$	$-x_2$	$-x_5$	$t \geq 0$
$x_4 =$	4	-3	1	0	–
$x_3 =$	5	5	1	-2	–
$x_1 =$	1	-2	1	$\boxed{1}$	1
$f =$	4	13	-4	-5	

этот столбец берем за разрешающий. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному отношению, которое соответствует третьей строке. Рассчитываем новую таблицу.

Таблица 12.7

Б.П. \ С.П.	С.Ч.	$-x_6$	$-x_2$	$-x_1$
$x_4 =$	4			
$x_3 =$	7			
$x_5 =$	1			
$f =$	21	3	1	5

В таблице 12.7 содержится опорный план, оказавшийся одновременно и оптимальным, и целочисленным. Итак, $\bar{x}^*_{\mathrm{F}} = (0; 0; 7)$ и $f^*_{\mathrm{F}} = 21$. Значит, предприятию надо закупить 7 единиц оборудования третьего типа. При этом из денежных средств останется 1 млрд. руб. $(x^*_5 = 1)$, а 4 м^2 производственной площади не будут использованы $(x^*_4 = 4)$. Максимальная сменная производительность нового участка будет составлять 21 тыс. ед. продукции. ►

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 13

Целочисленное программирование. Метод ветвей и границ. Метод ветвей и границ решения задач целочисленного линейного программирования

Суть метода и технология его применения заключаются в том, что сначала в ОДР системы ограничений θ находится оптимальное решение задачи симплекс-методом без учета условия целочисленности (рассмотрим задачу нахождения максимума функции.). Если в полученном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из дробных переменных и по ней строим два ограничения. В одном ограничении величина переменной меньше или равна наибольшему целому числу, не превышающему значения дробной переменной в оптимальном решении, а в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не меньше значения дробной переменной.

Если, например, дополнительные ограничения строить по переменной $x_2 = 9/2$ $(4 \leq 9/2 \leq 5)$, то первое ограничение будет $x_2 \leq 4$, а второе $x_2 \geq 5$, этим мы исключаем из ОДР исходной задачи промежуток с дробными значениями неизвестной x_2 $(4 \leq x_2 \leq 5)$. Этот промежуток разбивает ОДР θ на две части: θ_1 и θ_2 где θ_1 – новая ОДР, полученная добавлением к ограничениям исходной задачи дополнительного ограничения $x_2 \leq 4$, а θ_2 – добавлением ограничения $x_2 \geq 5$.

В результате разбиения ОДР θ получены две новые задачи (подзадачи) линейной оптимизации. Если после их решения полученные значения неизвестных будут не целочисленные, то, сравнив значения функций этих задач, выбираем задачу с большим значением функции и по новой неизвестной с дробным значением строим снова два дополнительных ограничения (третье и четвертое) и разбиваем эту задачу еще на две новые подзадачи. В результате получаем ветви, изображенные на рисунке 13.1.

Ветвление заканчивается нахождением целочисленного решения, если оно существует. Границами в методе выступают значения функций задач каждой ветви. На каждом этапе решения задачи дальнейшему ветвлению (разбиению на новые задачи) подлежит та ветвь (задача), у которой значение функции больше. Поэтому отдельные подзадачи (ветви), у которых значение функции меньше, могут быть отброшены. Однако иногда, сравнивая значения функций подзадач, приходится возвращаться к ветвям, которые ранее были отброшены, и продолжать дальнейшее решение от них.

Поскольку множество всех решений задачи ЦЛО конечно, то после конечного числа разбиений исходной задачи на подзадачи оптимальное решение будет найдено.

Рисунок 13.1 – Схема разбиения задачи на подзадачи целочисленной оптимизации

Задание 13.1. Найти оптимальное целочисленное решение следующей задачи методом ветвей и границ

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{целые}.$$

◀ Для наглядности решение осуществим графическим методом. ОДР задачи является многоугольник $OABC$ (рисунок 13.2). В точке B находится максимальное значение функции: $f^B_{\max} = 9,64$ при $x_1 = 2,42$ и $x_2 = 3,61$.

Поскольку значения неизвестных дробные, то разобьем по неизвестной x_2 ОДР задачи на две части. Одна будет содержать множество точек, у которых $x_2 \le 3$, а вторая – у которых $x_2 \ge 4$. В результате получаем две новые задачи линейной оптимизации: № 2 и № 3 (исходная задача имеет № 1).

Задача № 2

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to \max \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 3

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to \max \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

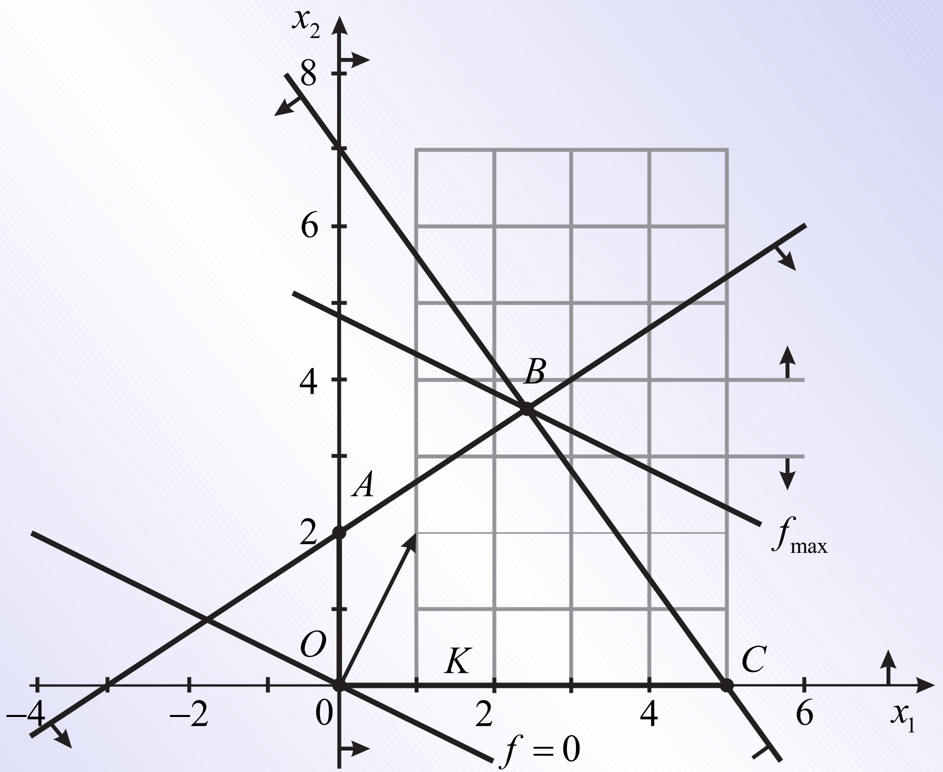


Рисунок 13.2 – Графический метод решения задачи

Из рисунка 13.3 видно, что ни одна целочисленная точка исходной ОДР не потеряна. ОДР задачи № 2 является многоугольник $OADEC$. В точке E с координатами $x_1 = 2,86$ и $x_2 = 3$ функция достигает максимального значения $f^E_{\max} = 8,86$.

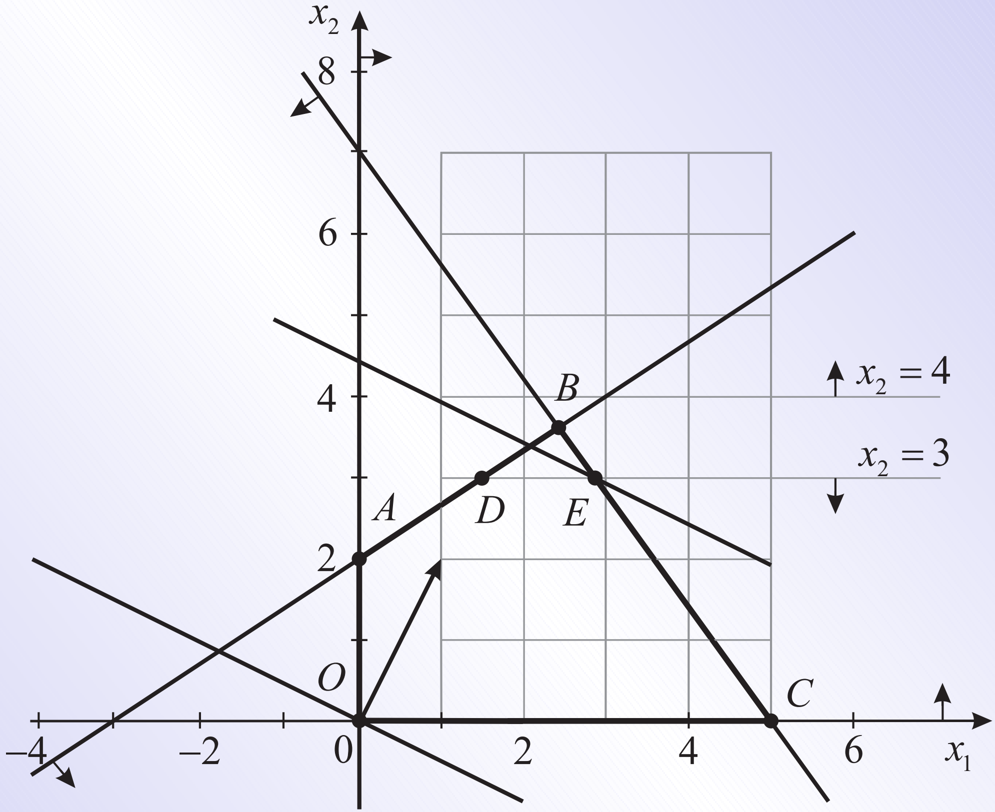


Рисунок 13.3 – Промежуточный этап решения задачи

Решение задачи № 2 не является целочисленным. Что касается задачи № 3, то ее ОДР пустая. Ограничения этой задачи противоречивы, и она не имеет решения.

Продолжая решение, разобьем ОДР задачи № 2 на два подмножества по неизвестной $x_1 = 2,86$. В результате получим две новые задачи № 4 и № 5 с соответствующими дополнительными ограничениями $x_1 \leq 2$ и $x_1 \geq 3$.

Задача № 4

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to \max \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача № 5

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to \max \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

ОДР этих задач представлены на рисунке 13.4. ОДР задачи № 4 является многоугольник $OADFK$. Максимальное значение функции достигается в точке F с координатами $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, $f^F_{\max} = 8$. Таким образом, получено целочисленное решение задачи № 4.

ОДР задачи № 5 является треугольник LMC. Максимальное значение функция достигает в точке L с координатами $x_1 = 3$ и $x_2 = 2,8$; $f^L_{\max} = 8,6$. Так как значение функции целочисленного решения задачи № 4 $f^F_{\max} = 8$ меньше $f^L_{\max} = 8,6$, то дальнейшему разбиению на две задачи № 6 и № 7 подлежит задача № 5 по нецелочисленной неизвестной $x_2 = 2,8$. Не проводя дополнительных построений, отметим, что ОДР задачи № 7 с дополнительным ограничением $x_2 \geq 3$ не су-

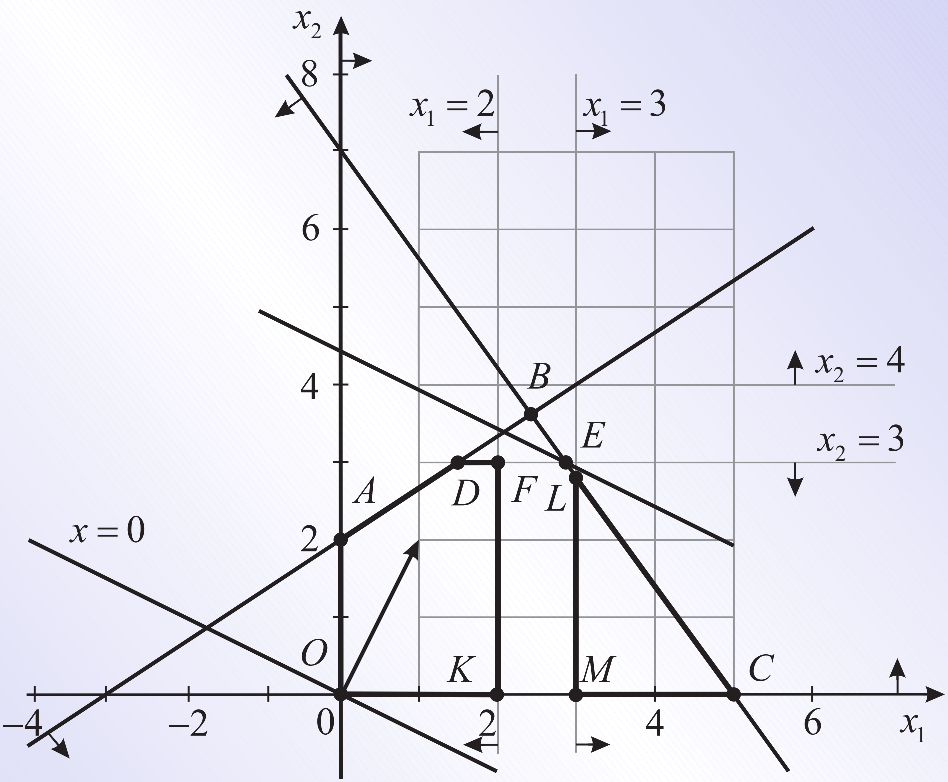


Рисунок 13.4 – Оптимальное решение задачи целочисленной оптимизации

ществует, а значение функции в оптимальном целочисленном решении задачи № 6 с дополнительным ограничением $x_2 \leq 2$ равно 7, что меньше $f^F_{\max} = 8$. Таким образом, целочисленное решение исходной задачи следующее: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $f^F_{\max} = 8$. ►

ЛЕКЦИЯ 14

Задача коммивояжера. Постановка задачи коммивояжера и решение методом ветвей и границ

Постановка задачи. Имеется n городов. Расстояния между любой парой городов известны и составляют a_{ij} $(i, j = \overline{1, n},\ i \neq j)$. Если прямого маршрута между городами i и j не существует, то $a_{ij} = \infty$. Расстояния между городами удобно записывать в виде матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ (таблица 14.1), где $a_{ij} = \infty$.

Таблица 14.1

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	∞	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	∞	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
n	a_{n1}	a_{n2}	...	∞

Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них один, и только один раз, и вернуться в исходный город. Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы наименьшей.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Если городам поставить в соответствие вершины графа, а соединяющим их дорогам – дуги, то в терминах теории графов задача заключается в определении гамильтонова контура минимальной длины. *Гамильтоновым контуром* (по имени английского математика Гамильтона) называется путь, проходящий через все вершины графа, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Здесь под длиной контура понимают не количество дуг, входящих в контур, а сумму их длин.

Для записи постановки задачи в терминах целочисленной линейной оптимизации определим булевы переменные следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер переезжает из города } i \text{ в город } j \ (i, j = \overline{1, n}), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда задача заключается в отыскании значений переменных x_{ij}, минимизирующих функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \qquad (14.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ j = \overline{1, n}, \ \ (\text{въезд в город } j); \qquad (14.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ i = \overline{1, n}, \ \ (\text{отъезд из города } i); \qquad (14.3)$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n - 1, \ (i, j = \overline{1, n}, \ i \ne j). \tag{14.4}$$

Переменные u_i, $i = \overline{1, n}$, могут принимать произвольные значения, однако без всякого ущерба на них может быть наложено условие неотрицательности и целочисленности.

Легко заметить, что задача целочисленной линейной оптимизации (14.1)–(14.4) эквивалентна задаче коммивояжера. Действительно, условия $a_{ii} = \infty$ исключают в оптимальном решении значения $x_{ii} = 1$, как не имеющие смысла. Ограничения (14.2) требуют, чтобы маршрут включал только один въезд в каждый город, а ограничения (14.3) – чтобы маршрут включал лишь один выезд из каждого города. Целевая функция (14.1) отражает длину гамильтонова контура. Ограничения (14.4) требуют, чтобы маршрут образовывал контур и проходил через все города.

Решение задачи, описанной только условиями (14.1)–(14.3), не обязательно является контуром, проходящим через все города. В частности, в результате решения задачи (14.1)–(14.3) могут быть получены два и более не связанных между собой частичных контуров. Для устранения возможности образования негамильтоновых контуров и служат ограничения (14.4).

Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ. Существуют различные версии метода ветвей и границ решения задачи коммивояжера. Рассмотрим стандартный метод Дж. Литла.

Вначале для множества R всех гамильтоновых контуров определяется некоторая оценка снизу (нижняя граница) $\varphi_{(R)}$ их длины. Затем множество всех гамильтоновых контуров разбивается на два подмножества. Первое подмножество состоит из гамильтоновых контуров, которые включают некоторую дугу (i,j), – обозначим его $\{(i,j)\}$, а второе состоит из гамильтоновых контуров, которые не включают эту дугу, – обозначим его $\{(\overline{i,j})\}$. Для каждого из подмножеств $\{(i,j)\}$ и $\{(\overline{i,j})\}$ определяется нижняя граница длины гамильтоновых контуров $\varphi_{(i,j)}$ и $\varphi_{(\overline{i,j})}$. Каждая новая нижняя граница оказывается не меньше нижней границы всего множества гамильтоновых контуров $\varphi_{(R)}$. Среди двух подмножеств маршрутов $\{(i,j)\}$ и $\{(\overline{i,j})\}$ выбирается подмножество с меньшей нижней границей. Это подмножество снова разбивается на два и для вновь образованных подмножеств находятся нижние границы. Процесс разбиения подмножеств аналогичным образом продолжается до тех пор, пока не будет выделено подмножество, содержащее единственный гамильтонов контур. Взаимосвязь подмножеств, полученных в результате разбиения, изображается в виде дерева (графа), вершинам которого приписываются нижние границы.

Получив гамильтонов контур, просматривают оборванные ветви дерева и сравнивают нижние границы подмножеств, соответствующих оборванным ветвям, с длиной полученного гамильтонова контура. Если нижние границы подмножеств, соответствующих оборванным ветвям, окажутся меньше длины гамильтонова контура, то эти ветви разбивают по тому же правилу. Процесс продолжается до тех пор, пока нижние границы вновь полученных подмножеств меньше длины гамильтонова контура. В результате могут быть получены новые гамильтоновы контуры. В этом случае сравниваются длины всех гамильтоновых контуров и среди них выбирается контур с наименьшей длиной. Решение задачи считается законченным, если нижние границы оборванных ветвей не меньше длины гамильтонова контура. В качестве оптимального выбирается гамильтонов контур с наименьшей длиной.

Все рассмотренные действия для большей четкости сформулируем в виде алгоритма.

1. Приводим матрицу расстояний по строкам и столбцам. Находим нижнюю границу всего множества маршрутов:

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j.$$

2. Каждый нуль в приведенной матрице условно заменяем на ∞ и находим сумму констант приведения $\gamma_{(\overline{i,j})} = \alpha_i + \beta_j$. Значения $\gamma_{(\overline{i,j})}$ записываем в соответствующие клетки рядом с нулями.

3. Априорно исключаем из гамильтонова контура ту дугу (i, j), для которой сумма констант приведения максимальна (исключение дуги (i, j) достигается заменой элемента в a_{ij} матрице расстояний на ∞. В

результате исключения дуги (i, j) будет образовано подмножество гамильтоновых контуров $\{(\overline{i, j})\}$.

4. Приводим полученную матрицу расстояний и определяем нижнюю границу $\varphi_{(\overline{i,j})}$ подмножества гамильтоновых контуров $\{(\overline{i, j})\}$.

5. Априорно включаем дугу (i, j) в гамильтонов контур, что ведет к исключению в матрице, полученной после выполнения пункта 2, i-й строки j-го столбца. Заменяем один из элементов матрицы на ∞ (в простейшем случае симметричный), чтобы не допустить образования негамильтонова контура.

6. Приводим сокращенную матрицу и находим нижнюю границу $\varphi_{(i,j)}$ подмножества маршрутов $\{(i, j)\}$.

7. Проверяем размерность сокращенной матрицы. Если сокращенная матрица размерности 2×2, то переходим к выполнению пункта 9; если же размерность матрицы больше, чем 2×2, то – к пункту 8.

8. Сравниваем нижние границы подмножеств гамильтоновых контуров $\varphi_{(i,j)}$ и $\varphi_{(\overline{i,j})}$ и переходим к выполнению пункта 2. При этом, если $\varphi_{(i,j)} > \varphi_{(\overline{i,j})}$, то разбиению подлежит подмножество $\{(\overline{i, j})\}$ (дальнейшему анализу подвергается матрица, полученная в результате последнего выполнения пункта 4). Если же $\varphi_{(i,j)} < \varphi_{(\overline{i,j})}$, разбиению подлежит подмножество $\{(i, j)\}$ (дальнейшему анализу подвергается матрица, полученная после последнего выполнения пункта 6).

Разбиение множества гамильтоновых контуров на подмножества сопровождаем построением дерева (рисунок 1).

9. Определяем гамильтонов контур и его длину.

10. Сравниваем длину полученного контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина гамильтонова контура не превышает нижних границ оборванных ветвей дерева, то задача решена. Если же длина контура больше нижней границы некоторых ветвей, то, действуя по алгоритму, развиваем эти ветви до тех пор, пока не получим маршрута с меньшей длиной или не убедимся, что его не существует.

Задание 1. Матрица расстояний между пятью городами представлена в таблице 1. Необходимо найти гамильтонов контур объезда городов минимальной длины.

◀ Для нахождения нижней границы множества всех гамильтоновых контуров $\varphi_{(R)}$ осуществляем приведение матрицы расстояний. Для этого в дополнительный столбец (таблица 1) запишем константы приведения a_i, $i = \overline{1,5}$, по строкам. Матрица, приведенная по строкам, представлена в таблице 2. В дополнительной строке этой матрицы записаны константы приведения по столбцам. Выполнив приведение по столбцам, получим полностью приведенную матрицу (таблица 3).

Нижняя граница множества всех гамильтоновых контуров R

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i + \sum_{j=1}^{5} \beta_j = 13 + 1 = 14.$$

Таблица 1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	9	8	4	10	4
2	6	∞	4	5	7	4
3	5	3	∞	6	2	2
4	1	7	2	∞	8	1
5	2	4	5	2	∞	2

Таблица 2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞
β_j	0	1	0	0	0

Таблица 3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0(4)	6
2	2	∞	0(2)	1	3
3	3	0(1)	∞	4	0(3)
4	0(1)	5	1	∞	7
5	0(0)	1	3	0(0)	∞
β_j	0	1	0	0	0

Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу, и разобьем все множество гамильтоновых контуров относительно этой дуги на два подмножества. Для этого определим сумму констант приведения для всех клеток матрицы с нулевыми элементами, условно (мысленно) заменяя нули на ∞. Заменим, например, элемент $a_{14} = 0$ на ∞. Тогда константа приведения по 1-й строке равна 4 (минимальному элементу этой строки), а по 4-му столбцу – нулю (минимальному элементу этого столбца). Сумма констант приведения

$$\gamma_{\overline{(1,4)}} = \alpha_1 + \beta_4 = 4 + 0 = 4$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд

Закрыть

записана в скобках в клетке (1,4). Аналогично вычислены все остальные константы и записаны в соответствующие клетки таблицы. Наибольшая из сумм констант приведения, равная 4, соответствует дуге (1,4). Следовательно, множество R разбивается на подмножества $\{\overline{(1,4)}\}$ и $\{(1,4)\}$. Таким образом, мы приступим к образованию дерева (рисунок 1).

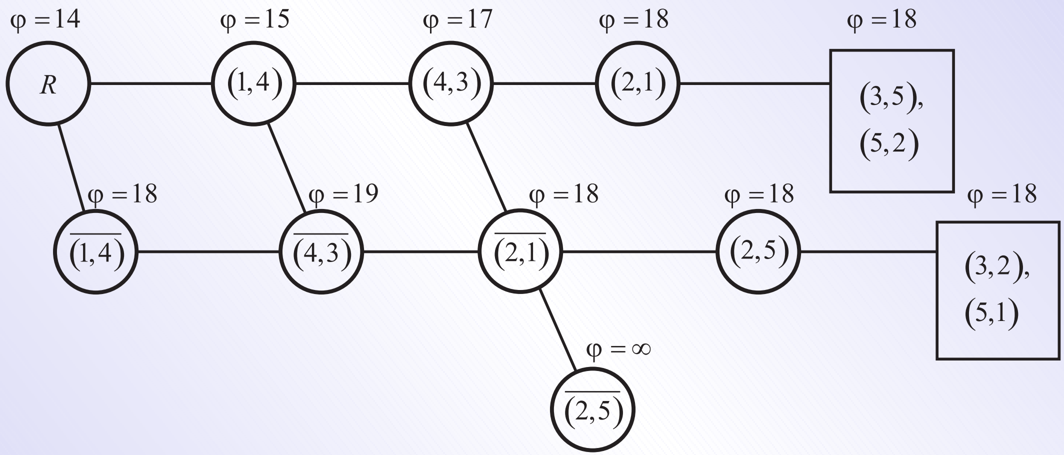


Рисунок 1 – Дерево ветвлений всех маршрутов задачи

Исключение дуги (1,4) из искомого гамильтонова контура осуществляется реальной заменой в матрице из таблицы 3 элемента $a_{14} = 0$ на ∞. Такая замена позволяет произвести дополнительное приведение матрицы путем вычитания из элементов 1-й строки 4 и из элементов 4-го столбца – 0. В результате приведения матрица расстояний для подмножества $\{\overline{(1,4)}\}$ примет вид, показанный в таблице 4, а нижняя граница

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

длин гамильтоновых контуров этого подмножества

$$\varphi_{\overline{(1,4)}} = \varphi_{(R)} + \gamma_{\overline{(1,4)}} = 14 + 4 = 18.$$

Таблица 4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	0	0	∞	2
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

Включение дуги (1,4) в искомый контур ведет к исключению элементов 1-й строки и 4-го столбца таблицы 3. Кроме того, элемент $a_{14} = 0$ заменяем на ∞, чтобы не допустить образования негамильтонова контура (1–4–1). Сокращенная матрица приведена в таблице 5. Эта матрица допускает дополнительное приведение на 1 единицу только по 4-й строке. Константы приведения записаны в столбце α_i, и строке β_j. Сумма констант приведения сокращенной матрицы, полученной в результате

Таблица 5

$i \backslash j$	1	2	3	5	α_i
2	2	∞	0	3	0
3	3	0	∞	0	0
4	∞	5	1	7	1
5	0	1	3	∞	0
β_j	0	0	0	0	

включения дуги (1,4) в искомый контур, составит:

$$\gamma_{(1,4)} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1 + 0 = 1.$$

Сокращенная матрица имеет вид таблица 6. Нижняя граница длин гамильтоновых контуров подмножества $\{(1,4)\}$

$$\varphi_{(R)} + \gamma_{(1,4)} = 14 + 1 = 15.$$

Так как после сокращения получена матрица 4×4, переходим к сравнению оценок $\varphi_{\overline{(1,4)}}$ и $\varphi_{(1,4)}$. Дальнейшему разбиению (ветвлению) подлежит подмножество $\{(1,4)\}$, так как его нижняя граница меньше.

Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу. Для этого определим сумму констант приведения для каждой клетки с нулем (таблица 6). Максимальная сумма констант приведения

$$\gamma_{\overline{(4,3)}} = \alpha_4 + \beta_3 = 4 + 0 = 4$$

соответствует дуге $(\overline{4,3})$. Следовательно, подмножество гамильтоновых контуров $\{(1,4)\}$, в свою очередь, разбиваем на два подмножества: $\{(1,4),(4,3)\}$ и $\{(1,4),\ (\overline{4,3})\}$. После замены элемента $a_{43} = 0$ на ∞ (таблица 6) и приведения матрица принимает вид таблицы 7. Нижняя граница длин гамильтоновых контуров подмножества $\{(1,4),(4,3)\}$

$$\varphi_{[(1,4),\overline{(4,3)}]} = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{\overline{(4,3)}} = 15 + 4 = 19.$$

Таблица 6

$i \backslash j$	1	2	3	5
2	2	∞	0(2)	3
3	3	0(1)	∞	0(3)
4	∞	4	0(4)	6
5	0(3)	1	3	∞

Таблица 7

$i \backslash j$	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	0	∞	2
5	0	1	3	∞

Включение дуги (4,3) в гамильтонов контур приводит к исключению из него дуг (4,2) и (4,5), т.е. элементов 4-й строки матрицы (таблица 6), а также дуг (2,3) и (5,3), т.е. элементов 3-го столбца. Кроме того, исключаем из контура дугу (3,1), чтобы не допустить образования негамильтонова контура (1–4–3–1). Сокращенная матрица (таблица 8) допускает приведение по 2-й строке на 2 единицы. После приведения эта матрица имеет вид таблица 9.

Сумма констант приведения

$$\gamma_{(4,3)} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 2 + 0 = 2,$$

а нижняя граница гамильтоновых контуров $\{(1,4),(4,3)\}$

$$\varphi_{[(1,4),(4,3)]} = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{(4,3)} = 15 + 2 = 17.$$

Таблица 8

$i \backslash j$	1	2	5	α_i
2	2	∞	3	2
3	∞	0	0	0
5	0	1	∞	0
β_j	0	0	0	

Таблица 9

$i \backslash j$	1	2	5
2	0(1)	∞	1
3	∞	0(1)	0(1)
5	0(1)	1	∞

Так как

$$\varphi_{[(1,4),(4,3)]} = 17 < \varphi_{[(1,4),\overline{(4,3)}]} = 19,$$

дальнейшему ветвлению подлежит подмножество $\{(1,4),(4,3)\}$. Все суммы констант приведения для клеток с нулями (таблица 9) равны, поэтому выбираем любую из дуг, например (2,1), и разбиваем подмножество $\{(1,4),(4,3)\}$ на два новых подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ и $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$. После исключения дуги (2,1) и приведения матрицы расстояний получим новую матрицу (таблица 10) для которой $\gamma_{\overline{(2,1)}} = 1$.

Таблица 10

$i \backslash j$	1	2	5
2	∞	∞	$0(\infty)$
3	∞	$0(1)$	$0(0)$
5	$0(\infty)$	1	∞

Нижняя граница подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}]} = \varphi_{[(1,4),(4,3)]} + \gamma_{\overline{(2,1)}} = 17 + 1 = 18.$$

Включение дуги (2,1) в контур приводит к исключению 2-й строки и 1-го столбца таблица 9, а также дуги (3,2). Сокращенная матрица имеет вид таблица 11. Сумма констант приведения этой матрицы $\gamma_{(2,1)} = 1$. Приведенная матрица представлена в таблице 12. Нижняя граница подмножества контуров $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),(2,1)]} = \varphi_{[(1,4),(4,3)]} + \gamma_{(2,1)} = 17 + 1 = 18.$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Таблица 11

$i \backslash j$	2	5
3	∞	0
5	1	∞

Таблица 12

$i \backslash j$	2	5
3	∞	0
5	0	∞

Так как в результате сокращения получена матрица 2×2 (таблица 12), то в искомый гамильтонов контур включаем дуги (3,5) и (5,2), соответствующие нулевым элементам этой матрицы. Сумма констант приведения таблица 12 равна нулю. Следовательно, длина гамильтонова контура совпадает с нижней границей подмножества $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$ и равна 18.

В соответствии с деревом ветвлений (рисунок 1) гамильтонов контур образуют дуги (1,4), (4,3), (2,1), (3,5), (5,2). Расположим их, начиная с города 1 так, чтобы конец одной совпадал с началом другой. Получим гамильтонов контур, соответствующий последовательности объезда городов коммивояжером $\mu = (1 - 4 - 3 - 5 - 2 - 1)$.

Длина найденного маршрута объезда городов не превышает нижних границ оборванных ветвей, следовательно, она является оптимальной. Однако возможно, что гамильтонов контур μ не единственный, так как имеются подмножества контуров $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ и $\{\overline{(1,4)}\}$, нижние границы которых также равны 18.

Продолжим ветвление подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$. Следуя алгоритму, найдем сумму констант приведения для каждой клетки с нулем таблица 10. Максимальная сумма, равная ∞, приходится на две клетки: (2,5) и (5,1). Выбираем любую дугу, например (2,5), и разбиваем подмножество $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ на два подмножества $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}\}$ и $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},(2,5)\}$. Нижние границы подмножеств:

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}]} = 18 + \infty = \infty;$$

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},(2,5)]} = 18 + 0 = 18.$$

Продолжив решение, найдем второй оптимальный гамильтонов контур $\mu = (1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 1)$.

Можно найти еще один оптимальный гамильтонов контур, продолжая развитие ветви, соответствующей подмножеству контуров $\{\overline{(1,4)}\}$.

Применять алгоритм в этом случае следует к матрице, приведенной в таблице 4. ►

Лабораторное занятие 4

Вариант 1

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3; \\ 2x_1 + x_2 \ge 1; \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 4; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	2	8	4	3
2	6	∞	5	1	3
3	5	2	∞	2	5
4	1	1	2	∞	3
5	3	6	4	2	∞

Вариант 2

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3; \\ x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,4}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 88; \\ x_1 \leq 22; \\ 5x_2 \leq 90; \\ x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,2}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	3	8	4	3
2	4	∞	5	2	3
3	5	2	∞	2	5
4	1	2	3	∞	4
5	3	6	4	2	∞

Вариант 3

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = x_4 - x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = 1; \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2; \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 70x_1 + 80x_2 + 110x_3 + 60x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 28; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 50; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 45; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	3	6	4	4
2	4	∞	5	3	3
3	5	1	∞	3	6
4	2	2	3	∞	4
5	3	6	4	2	∞

Вариант 4

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 10; \\ 2x_1 - 4x_3 \geq 14; \\ 2x_2 + x_3 \geq 7; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 50; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 50; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	2	4	5	4
2	5	∞	5	3	3
3	5	1	∞	3	6
4	1	2	4	∞	4
5	3	6	4	2	∞

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 5

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16; \\ x_1 + x_2 \le 7; \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 18; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 15x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 18; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \le 40; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \ge 60; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	1	2	5	3
2	1	∞	5	3	3
3	5	1	∞	3	7
4	1	2	5	∞	4
5	3	6	3	1	∞

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 6

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15; \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3; \\ 2x_1 + x_2 \ge 1; \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 4; \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	3	3	4	3
2	5	∞	3	2	2
3	5	2	∞	1	6
4	1	2	4	∞	4
5	2	6	4	1	∞

Вариант 7

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3; \\ x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,4}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 88; \\ x_1 \leq 1; \\ 5x_2 \leq 4; \\ x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,2}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	3	2	4	3
2	1	∞	3	2	1
3	5	2	∞	2	6
4	1	2	4	∞	4
5	2	6	4	1	∞

Кафедра алгебры,
геометрии
и математического
моделирования

Вариант 8

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = x_4 - x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = 1; \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2; \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 70x_1 + 80x_2 + 110x_3 + 60x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 28; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 50; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 45; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	2	2	4	3
2	1	∞	3	3	1
3	5	2	∞	2	6
4	1	2	4	∞	4
5	1	6	3	2	∞

Вариант 9

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 10; \\ 2x_1 + 4x_3 \geq 14; \\ 2x_2 + x_3 \geq 7; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 50; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 50; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	1	2	3	4
2	1	∞	2	3	1
3	4	2	∞	2	6
4	1	2	4	∞	4
5	2	6	3	2	∞

Вариант 10

1. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$$f = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16; \\ x_1 + x_2 \le 7; \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 18; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

2. Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ

$$f = 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 15x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 18; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \le 40; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 60; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

3. Решить следующую задачу коммивояжера методом ветвей и границ, а также приближенным методом:

	1	2	3	4	5
1	∞	1	2	3	4
2	2	∞	1	2	1
3	4	2	∞	2	6
4	4	2	3	∞	4
5	1	5	3	2	∞

ЛЕКЦИЯ 15

Программирование на сетях. Основные понятия теории графов

Основным объектом этой теории является граф.

Граф можно представить в виде некоторого множества точек плоскости или пространства и множества отрезков кривых или прямых линий, соединяющих все или некоторые из этих точек.

Граф G можно определить заданием двух множеств X и U и обозначается $G = (X, U)$. Элементы множества X называют *вершинами*. Будем обозначать их буквами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вершины изображают точками плоскости или пространства. Элементами множества U являются пары связанных между собой элементов множества X. Их изображают отрезками кривых или прямых линий. Обозначать их будем $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Взаимное расположение, форма и длины этих отрезков значений не имеют. Важно лишь то, что они соединяют две данные вершины множества X. Точки пересечения дуг (ребер) не всегда являются вершинами графа.

Графы, в которых множества X и U состоят из конечного числа элементов, называются *конечными*. Если два графа содержат одну и ту же информацию, то о таких графах говорят, что они изоморфны. Два графа *изоморфны*, если между множествами их вершин существует такое взаимно однозначное соответствие, при котором в одном из графов отрезками соединены вершины в том и только в том случае, если в другом графе отрезками соединены соответствующие вершины. При этом для орграфа ориентация дуг должна быть одинакова. Вершины в графе называются *смежными*, если они различны и существует дуга (ребро), соединяющая эти вершины. Если две дуги (ребра) имеют общую концевую вершину, они называются смежными.

Вершины в графе могут отличаться друг от друга количеством дуг (ребер), которым они инцидентны. *Степенью* $P(x_i)$ вершины x_i называется число дуг (ребер) графа G, инцидентных данной вершине. Вершина степени 0 называется *изолированной. Полустепенью захода (для орграфа)* $P^+(x_i)$ *вершины* $_i$ называется количество дуг, заходящих в x_i, и *полустепенью* исхода $P^-(x_i)$ – количество дуг, исходящих из x_i. Очевидно, что сумма $P^+(x_i) + P^-(x_i) = P(x_i)$.

Если в паре вершин (x_i, x_j) указано направление связи, т.е. какая из них является первой, а какая – второй, то соединяющий их направленный отрезок u_k называется дугой; если же ориентация не указана – ребром; а вершины, определяющие дугу (ребро) u_k, называют *концевыми вершинами дуги (ребра)* u_k. Если концевые вершины совпадают, то дугу (ребро) называют *петлей.* Дуги (ребра) с одинаковыми концевыми вершинами будем называть *параллельными.* Говорят, что дуга (ребро) инцидентна своим концевым вершинам, и обратно.

Если в графе G все элементы множества U являются дугами, то граф называется *ориентированным (орграфом)*, если ребрами – *неориенти-*

рованным. Иногда рассматривают *смешанные графы*, состоящие из дуг и ребер.

Геометрическое изображение графа часто бывает весьма наглядным. Этим и пользуются на практике. Примерами графа могут служить схемы железных и шоссейных дорог и т.п.

Граф называется простым, если он не содержит петель и параллельных дуг (ребер). Простой граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным.* Граф, содержащий хотя бы две параллельные дуги (ребра), называется *мульграфом.*

Путем в орграфе называется последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь, проходящий через все вершины и притом только по одному разу, называется *гамильтоновым.* Путь, содержащий все дуги графа, и притом только по одному разу, называется эйлеровым. Конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной называется *контуром.* Контур, проходящий через каждую вершину графа только по одному разу (за исключением конечной вершины), называется *гамильтоновым.*

В неориентированном графе последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра смежны, называется *путем*, а конечный путь, у которого начальные и конечные вершины совпадают – *циклом.*

Неориентированный граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем, и *несвязным* в противном случае. Для установления связности орграфа ориентацию его дуг принимать в расчет не следует. Говорят, что орграф сильно связный, если между любыми двумя его вершинами существует хотя бы один путь.

В различных приложениях теории графов дугам (ребрам) графов, моделирующим реальные процессы, обычно сопоставляют какие-либо числовые характеристики. Например, если дугами изображаются транспортные магистрали, то числовой характеристикой дуги может быть пропускная способность соответствующей магистрали; если же дугами изображаются работы некоторого комплекса, то числовая характеристика может означать время выполнения работы, количество некоторого ресурса, необходимого для ее выполнения, и т.д. В подобных случаях говорят, что дугам графа приписаны определенные веса, а граф G с весами на дугах называют *взвешенным*.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ЛЕКЦИЯ 16

Матричные способы задания графов

При большом числе вершин и дуг (ребер) изображение графа с помощью рисунка теряет наглядность. В таких случаях для задания графов и работы с ними используются матрицы. Особенно удобно использовать матричный эквивалент графа при его исследовании на ЭВМ.

Рассмотрим граф G без петель, имеющий n вершин и m дуг. Графу G можно сопоставить *матрицу инциденций* орграфа G. Это прямоугольная матрица размерности $m \times n$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – дугам графа. Элементы матрицы r_{ij} равны: -1 , если дуга u_j исходит из i-й вершины; $+1$, если дуга заходит в i-ю вершину; 0, если дуга не инцидентна i-й вершине. В случае неориентированного графа элементами матрицы будут 1 и 0.

Строки матрицы инциденций называют *векторами инциденций графа* G.

Как для орграфов, так и для неориентированных графов можно определить матрицу смежности вершин. *Матрица смежности вершин орграфа* G – это квадратная матрица $[p_{ij}]_{n\times n}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа G. Элементы этой матрицы равны числу дуг, идущих из i-й в j-ю вершину. Если орграф не содержит параллельных дуг, то матрица состоит только из 1 и 0.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

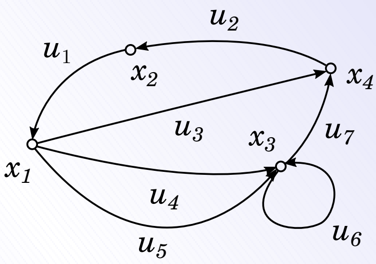
В случае неориентированного графа ему вместе с ребром (x_i, x_j) принадлежит и ребро (x_j, x_i) поэтому матрица будет симметричной. Справедливо и обратное утверждение: любой симметричной матрице с целыми неотрицательными элементами можно поставить в соответствие неориентированный граф.

По матрице смежности вершин легко определить полустепени захода и исхода вершин, а значит, и степень вершины. Полустепень захода $P^+(x_i)$ вершины x_i, равна сумме элементов i-го столбца; полустепень исхода $P^-(x_i)$ – сумме элементов i-й строки. Так, для графа, изображенного на рисунке ??, по его матрице смежности находим, например, для вершины x_3: $P^+(x_3) = 2$, $P^-(x_3) = 3$, так что $P(x_3) = 5$.

В дальнейшем используется понятие непосредственного предшествования дуг. Будем говорить, что дуга u_i, непосредственно предшествует дуге u_j, если конец дуги u_i, является началом дуги u_j.

Граф G можно задать *матрицей смежности дуг (ребер)*. Матрица смежности дуг орграфа – это квадратная матрица $[q_{ij}]_{m\times m}$ (m – число дуг). Строки и столбцы матрицы соответствуют дугам (ребрам) графа. Элементы q_{ij} равны 1, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j и 0 в остальных случаях. Матрицей смежности ребер неориентированного графа является матрица m-го порядка (m – число ребер) с элементами q_{ij}, равными 1, если ребра u_i и u_j смежны, и 0 в остальных случаях.

Пример 16.1. Для данного орграфа построить матрицу смежности вершин и матрицу смежности дуг.



Решение. Матрица смежности вершин имеет вид

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Элементы этой матрицы вычисляются следующим образом. Из вершины x_2 в вершину x_1 идет одна дуга, значит элемент, стоящий во второй строке и первом столбце $p_{21} = 1$. Аналогично получаем $p_{42} = 1$, $p_{14} = 1$ и $p_{34} = 1$. Из вершины x_1 в вершину x_3 идет две параллельные дуги u_4 и u_5, поэтому $p_{13} = 2$. Наконец, дуга u_6 – петля, поэтому $p_{33} = 1$.

Матрица смежности дуг имеет вид

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Элементы матрицы вычисляются следующим образом. Рассматриваем дуги в порядке возрастания номеров. Дуга u_2 непосредственно предшествует дуге u_1, значит элемент $q_{21} = 1$. Дуги u_3 и u_7 непосредственно предшествуют дуге u_2, следовательно $q_{32} = 1$ и $q_{72} = 1$. Дуга u_1 непосредственно предшествует дугам u_3, u_4 и u_5, значит $q_{13} = 1$, $q_{14} = 1$ и $q_{15} = 1$. Дугам u_6 и u_7 непосредственно предшествуют дуги u_4 и u_5, значит $q_{46} = 1$, $q_{47} = 1$, $q_5 = 1$ и $q_{57} = 1$. Наконец, так как дуге u_7 непосредственно предшествует дуга u_6, то $q_{67} = 1$.

ЛЕКЦИЯ 17

Упорядочение элементов орграфа

Расчеты в задачах, связанных с графами, заметно упрощаются, если их элементы упорядочены. Для упорядочения вершин графа потребуется понятие предшествования вершин. Вершина x_i предшествует вершине x_j, если существует путь из x_i в x_j. Тогда x_i называют предшествующей вершине x_j, а x_j – последующей за x_i. Под *упорядочением вершин* связного орграфа без контуров понимают такое разбиение его вершин на группы, при котором: вершины первой группы не имеют предшествующих, а вершины последней – последующих; вершины любой другой группы не имеют, предшествующих в следующей группе; вершины одной и той же группы дугами не соединяются. Можно показать, что для связного орграфа без контуров такое разбиение всегда возможно.

Аналогично вводится понятие *упорядочения* дуг.

В результате упорядочения элементов получают граф, изоморфный данному. Упорядочение элементов выполняют графическим или матричным способом.

Графический способ упорядочения вершин *(алгоритм Фалкерсона)* состоит из следующих шагов:

1. Находят вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Нумеруют вершины группы в натуральном порядке.

2. Мысленно вычеркивают все пронумерованные вершины и дуги, из них выходящие. В получившемся графе найдется, по крайней мере, одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присваивают очередной номер и т.д. Этот шаг повторяют до тех пор, пока все вершины не будут упорядочены (пронумерованы).

Аналогичным образом упорядочивают дуги орграфа. Сначала находят дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют I группу). После вычеркивания дуг I группы в оставшемся графе вновь выделяют дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют II группу). И так до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на группы.

Пример 17.1. Упорядочить вершины графа (рисунок 17.1) и построить изоморфный граф.

Решение. Анализируя исходный граф (рисунок 17.1*а*), замечаем, что в вершину x_6 не входит ни одна дуга. Следовательно, вершина x_6 не имеет предшествующих, и поэтому отнесем ее к I группе. Больше подобных вершин на графе нет. Исключаем из рассмотрения вершину x_6 и дуги, из нее исходящие (на рисунке 17.1*а* эти дуги отмечены одной

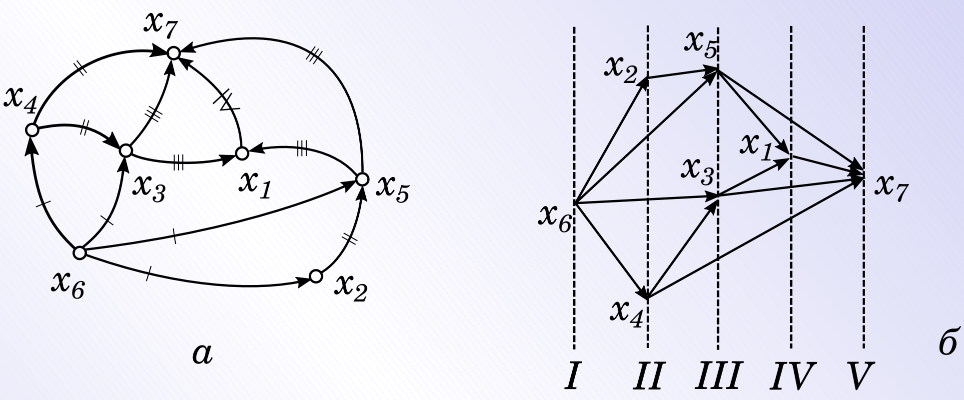


Рисунок 17.1 – **упорядочевание вершин графа**
(а – **исходный граф**; б – **упорядоченный граф**)

черточкой – первое вычеркивание). В оставшемся графе опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга – x_2 и x_4. Они образуют II группу. Выполняем второе вычеркивание и т.д. (рисунок 17.1*а*). На рисунке 17.1*б* для наглядности проведены вертикали, соответствующие группам разбиения, на которых последовательно отмечались точки: сначала x_6, затем x_2 и x_4 и т.д. В заключении эти точки соединим дугами так, как на данном графе, и получим изоморфный граф с упорядоченными вершинами. Остается перенумеровать его вершины в натуральном порядке.

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Пример 17.2. Упорядочить дуги графа (рисунок 17.2) и построить изоморфный граф.

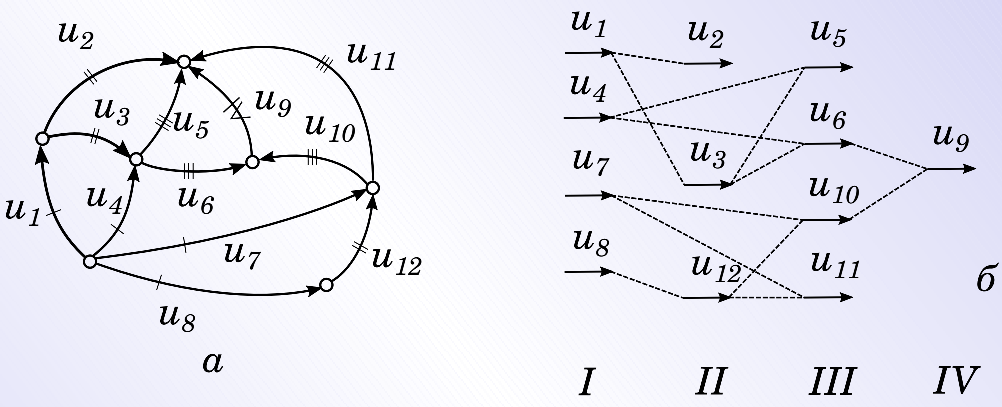


Рисунок 17.2 – **упорядочевание дуг графа**
(а – **исходный граф**; б – **упорядоченные дуги графа**)

Решение. К I группе относятся дуги u_1, u_4, u_7, u_8. После их вычеркивания непосредственно предшествующих не будут иметь дуги u_2, u_3, u_{10} и u_{11} (это дуги II группы). В III группу входят дуги u_5, u_6, u_{10} и u_{11}, а в IV – дуга u_9.

На рисунке 17.2*б* изображены упорядоченные дуги данного графа. Штриховыми линиями показаны связи между дугами, существующие в данном графе. Используя рисунок 17.2*б*, изобразим граф, изоморфный данному, но с упорядоченными дугами:

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

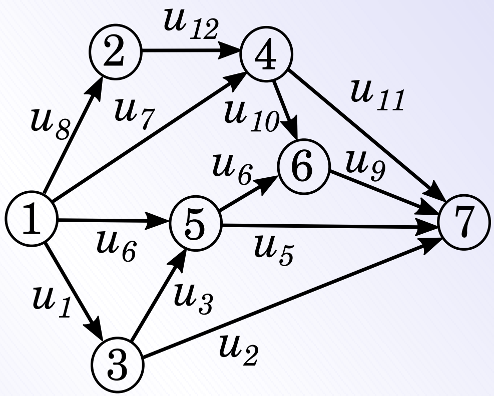


Рисунок 17.3 – изоморфный граф с упорядоченными дугами

ЛЕКЦИЯ 18

Потоки на сетях. Задача о максимальном потоке

Теория потоков возникла первоначально в связи с разработкой методов решения задач, связанных с рациональной перевозкой грузов. Схема доставки груза представлялась в виде графа, по ребрам которого проходит подлежащий максимизации поток этого груза. Позднее обнаружилось, что к задаче о максимальном потоке сводятся и другие важные оптимизационные практические задачи, такие, например, как задача отыскания минимального по стоимости плана выполнения комплекса работ при заданной его продолжительности; задача об определении максимального количества информации, которая может быть передана по разветвленной сети каналов связи из одного пункта в другой; задача об оптимальных назначениях; различные задачи организации снабжения; задачи автоматизации проектирования узлов вычислительных машин (печатный монтаж, трассировка плат); задачи, связанные с наиболее экономным строительством энергетических сетей, нефте- и газопроводов, железных и шоссейных дорог, ирригационных систем и много других прикладных задач.

Основным в теории потоков является понятие сети.

Сеть – это взвешенный конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от *истока* (начальная вершина I) к *стоку* (конечная вершина S). Общее количество вершин се-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ти обозначим через n. Ребрам сети присваивается одна или несколько числовых характеристик. Для наглядности будем представлять, что по ребрам сети из истока в сток направляется некоторое вещество (груз, ресурс, информация и т.п.). В теории потоков предполагается, что если ребро (i, j) входит в сеть, то в сеть входит в ребро (j, i).

Максимальное количество r_{ij} вещества, которое может пропустить за единицу времени ребро (i, j), называется его *пропускной способностью*. В общем случае $r_{ij} \neq r_{ji}$. Если вершины k и l на сети не соединены, то $r_{kl} = r_{lk} = 0$. На сети пропускные способности ребер указывают в скобках. При этом первое число – это пропускная способность в направлении от вершины i к вершине j, второе – в противоположном направлении. Пропускные способности сети можно задать квадратной матрицей R n-го порядка. Поскольку, согласно определения сети $r_{ii} = 0$, то на главной диагонали матрицы R стоят нули.

Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро (i, j) в единицу времени, называется *потоком по ребру* (i, j). Произвольно задать n^2 чисел x_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ нельзя. Они должны подчиняться определенным ограничениям, о которых пойдет речь дальше. Будем считать, что если поток из вершины i в вершину j равен x_{ij}, то поток из вершины j в вершину i будет равен – x_{ij}, т.е.

$$x_{ji} = -x_{ij}. \tag{18.1}$$

Принимается также, что $x_{ii} = 0$.

Если поток x_{ij} по ребру (i, j) меньше его пропускной способности, т.е. $x_{ij} < r_{ij}$, то ребро (i, j) называют *ненасыщенным*, если же $x_{ij} = r_{ij}$ – *насыщенным*.

Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков по всем ребрам сети называют *потоком* по сети или просто *потоком*. Из физического смысла грузопотока следует, что поток по каждому ребру (i, j) не может превышать его пропускную способность, т.е

$$x_{ij} \leq r_{ij} \ (i, j = \overline{1, n}). \tag{18.2}$$

Понятно также, что для любой вершины, кроме истока I и стока S, *количество вещества, поступающего в эту вершину, равно количеству вещества, вытекающего из нее.* С учетом (18.1) это требование можно выразить записью

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 \ (i \neq I, S). \tag{18.3}$$

Это ограничение называют *условием сохранения потока: в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают.* Отсюда следует, что *общее количество вещества, вытекающего из истока I, совпадает с общимколичеством вещества, поступающего в сток S*, т.е.

$$f = \sum_{j} x_{Ij} = \sum_{i} x_{iS}. \tag{18.4}$$

где j – конечные вершины ребер, исходящих из I; i – начальные вершины ребер, входящих в S. Линейную функцию f называют *мощностью потока на сети*.

Учитывая сказанное, задачу о максимальном потоке можно сформулировать следующим образом: *найти совокупность* $X^* = \{x^*_{ij}\}$ *потоков* x^*_{ij} *по всем ребрам* (i, j) *сети, которая удовлетворяет условиям* (18.1)–(18.3) *и максимизирует линейную функцию* (18.4). Это типичная задача линейного программирования.

Заметим, что числа x_{ij} образуют квадратную матрицу n-го порядка, на главной диагонали которой стоят нули ($x_{ii} = 0$, т.к. согласно определения сети $r_{ii} = 0$), а элементы, расположенные симметрично главной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (согласно (18.1)). Отсюда следует, что *задать поток* $X = \{x_{ij}\}$ *на сети – это значит задать* n^2 *чисел* x_{ij}, *удовлетворяющих условиям* (18.1)–(18.3).

Пусть дана некоторая сеть. Разобьем множество вершин сети на два непересекающихся подмножества A и B так, чтобы исток I попал в подмножество A, а сток S – в подмножество B. В этом случае говорят, что *на сети произведен разрез, отделяющий исток* I *от стока* S. В результате произведенного разбиения вершин появятся ребра (i, j), конечные точки которых окажутся в разных подмножествах. Совокупность ребер (i, j), начальные точки которых принадлежат подмножеству A, а конечные – подмножеству B, называют *разрезом сети* и обозначают A/B.

Величина $R(A/B) = \sum\limits_{i \in A} \sum\limits_{j \in B} r_{ij}$, представляющая собой сумму пропускных способностей r_{ij} всех ребер разреза, называется *пропускной способностью разреза.*

Пусть на сети задан поток $X = \{x_{ij}\}$ и произведен разрез A/B. Величина $X(A/B) = \sum\limits_{i \in A} \sum\limits_{j \in B} x_{ij}$, представляющая собой сумму потоков x_{ij} по всем ребрам разреза, называется *потоком через разрез.*

Если на сети задан поток X и произведен разрез A/B, то хотя бы одно ребро любого полного пути, ведущего из истока в сток, будет обязательно принадлежать разрезу A/B. При этом величина потока по любому полному пути не превышает пропускную способность каждого его ребра, а потому величина X суммарного потока, устремленного из истока в сток, не превышает пропускную способность любого разреза сети, т.е.

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij} \leq \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}. \tag{18.5}$$

Оказывается, если удастся построить на сети поток $X^* = \{x^*_{ij}\}$, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза A/B, то этот поток будет максимальным, а разрез A/B обладает минимальной пропускной способностью.

В самом деле, пусть для потока $X^* = \{x^*_{ij}\}$ и разреза A^*/B^* выполняется равенство

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} x_{ij} \le \sum_{i\in A}\sum_{j\in B} r_{ij}, \tag{18.6}$$

но максимальным является не X^*, а поток $\tilde{X} = \{\tilde{x}_{ij}\}$. В таком случае поток через разрез A^*/B^* потока $\tilde{X}$ будет больше потока через этот же разрез потока X^*, т.е.

$$\sum_{i\in A^*}\sum_{j\in B^*} \tilde{x}_{ij} > \sum_{i\in A^*}\sum_{j\in B^*} x^*_{ij}. \tag{18.7}$$

Объединив соотношения (18.6) и (18.7), получим

$$\sum_{i\in A^*}\sum_{j\in B^*} \tilde{x}_{ij} > \sum_{i\in A^*}\sum_{j\in B^*} r_{ij},$$

что противоречит неравенству (18.5). Вторую часть высказанного выше утверждения примем без доказательства.

Проведенные рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема Форда-Фалкерсона. Максимальная величина потока на сети равна минимальной пропускной способности разреза из множества всех разрезов на сети.

Сформулируем алгоритм решения задачи о максимальном потоке.

Пусть на сети задан некоторый поток $X = \{x_{ij}\}$. Разобьем все вершины сети на два подмножества A и B следующим образом: к подмножеству A отнесем исток I и все вершины, достижимые из истока хотя бы по одному пути, состоящему из ненасыщенных ребер; к подмножеству B отнесем все остальные вершины, т. е. такие, которые нельзя достичь из I по ненасыщенным ребрам. При этом возможны следующие случаи: 1) сток $S \notin A$; 2) сток $S \in A$.

Случай 1. Если $S \notin A$, то $S \in B$ и поэтому построенное разбиение является разрезом A/B. По условию разбиения для любой вершины $i \in A$ существует путь из I в i, состоящий из ненасыщенных ребер, а для любой вершины $j \in B$ такого пути нет. Отсюда следует, что любое ребро (i, j) разреза A/B (а у такого ребра $i \in A$, $j \in B$) будет насыщенным (иначе j принадлежало бы A), т. е. $x_{ij} = r_{ij}$. Просуммировав эти равенства по всем $i \in A$ и $j \in B$, получим

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij} = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}. \tag{18.8}$$

Из этого равенства по теореме Форда-Фалкерсона следует, что поток $X = \{x_{ij}\}$ является максимальным.

Случай 2. Если $S \in A$, то существует путь из ненасыщенных ребер, ведущий из I в S. По ребрам этого пути можно пропустить дополнительныйпоток величиной $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, где минимум берется по всем ребрам, входящим в этот путь. Потоки x_{ij} по всем остальным ребрам сети остаются прежними. В результате мощность суммарного потока возрастет на величину Δ. Это будет новый поток X^1.

Объединяя оба рассмотренных случая, можно предложить следующий алгоритм построения максимального потока.

1. Построить некоторый начальный поток X^0.

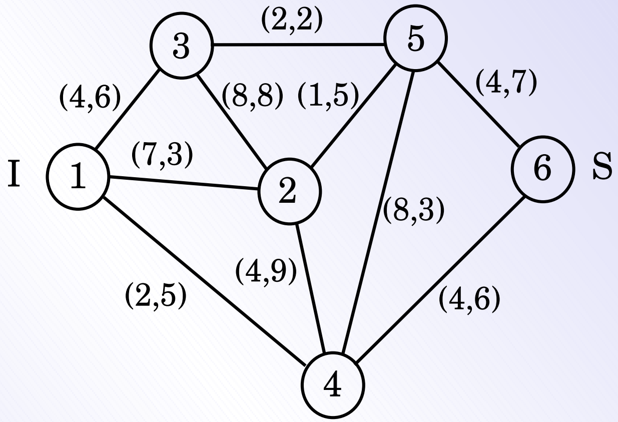
2. Составить подмножества A вершин, достижимых из истока по ненасыщенным ребрам. Если при этом сток не попадет в подмножество A, то построенный поток будет максимальным и задача решена. Если же сток попадет в A, то перейти к пункту 3 алгоритма.

3. Выделить путь из I в S, состоящий из ненасыщенных ребер, и увеличить поток x_{ij} по каждому ребру этого пути на величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, где минимум берется по ребрам (i, j) упомянутого пути. Тем самым будет построен новый поток X^1. После чего выполняем пункту 2 алгоритма.

Заметим, что при выполнении пункта 3 на каждом шаге, по крайней мере, одно из ненасыщенных ранее ребер становится насыщенным (именно то, которое соответствует Δ), а поскольку число ребер в сети конечно, через конечное число шагов максимальный поток будет построен.

Пример 18.1. Для данной сети построить поток максимальной мощности.

Решение. Построим матрицу R пропускных способностей данной сети.



R

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	7	4	2	0	0
2	3	0	8	4	1	0
3	6	8	0	0	2	0
4	5	9	0	0	8	4
5	0	5	2	3	0	4
6	0	0	0	6	7	0

Согласно пункту 1 алгоритма сформируем какой-либо начальный поток. Для этого рассмотрим все пути из истока в сток, не имеющие общих ребер. Очевидно, что такими путями будут $1-3-5-6$ и $1-4-6$. По ребрам первого пути можно пропустить не более 4, 2 и 4 ед. соответственно. Запишем это в виде $1\overset{4}{-}3\overset{2}{-}5\overset{4}{-}6$. Ребро $(3,5)$, лежащее на пути $1-3-5-6$, обладает минимальной пропускной способностью, не позволяя пропустить более 2 ед. Следовательно, поток по указанному пути мощностью в 2 ед. будет допустимым, так как условия (18.1)–(18.3) выполняются для всех вершин и ребер этого пути. Аналогично, по пути $1\overset{2}{-}4\overset{4}{-}6$ можно пропустить поток 2 ед., так как по ребру $(1,4)$ можно пропустить поток не более 2 ед.

Совокупность найденных элементарных потоков составит начальный поток по сети X^0. Учитывая равенство (18.1), представим полученный поток матрицей

X^0

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	2	2	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	-2	0	0	0	2	0
4	-2	0	0	0	0	2
5	0	0	-2	0	0	2
6	0	0	0	-2	-2	0

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Приступая к выполнению пункту 2 алгоритма, составим матрицу $R - X^0$, элементы $r_{ij} - x^0_{ij}$ которой позволяют судить о насыщенности ребер сети. Насыщенным ребрам будут соответствовать нулевые элементы, а ненасыщенным – ненулевые. В нашем случае, например, ребро $(1, 3)$ ненасыщенное, так как элемент $r_{13} - x^0_{13} \neq 0$, а вот ребро $(2, 5)$ насыщенное, так как элемент $r_{25} - x^0_{25} = 0$.

$R - X^0$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	7	2	0	0	0
2	3	0	8	4	1	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	9	0	0	8	2
5	0	5	4	3	0	2
6	0	0	0	8	9	0

Зная матрицу $R - X^0$, нетрудно сформировать подмножество A вершин, в которые можно попасть из истока I, двигаясь только по ненасыщенным ребрам (т.е. выполнить пункт 2 алгоритма), а также выделить эти пути и с их помощью увеличить мощность потока (т. е. выполнить пункт 3 алгоритма).

Вершины подмножества A выделяют из всего множества вершин постепенно, начиная с истока I. С этой целью просматривают первую строку матрицы $R - X^0$ (строку I) и выписывают номера $i_1, \ldots, i_k$ вершин, соответствующих ненулевым элементам строки. Это и будут вершины, в которые можно попасть из истока I, перемещаясь по ненасыщенным ребрам. Будем записывать выявленные таким образом вершины в виде $I||i_1, \ldots, i_k$ и называть подобную запись *списком вершины* I. Далее рассматривают каждую из вершин i_i полученного списка и составляют для нее аналогичным образом свой список. При этом вершины, встречавшиеся в прежних списках, повторно не выписываются.

Если в этом процессе сток S не встретится, то поток максимален и задача решена; если же при составлении очередного списка в нем появится сток S, то поток не максимален, и его мощность можно увеличить.

Обратимся к рассматриваемому примеру. В данном случае $I \equiv 1$, $S \equiv 6$. Построим подмножество A, последовательно составляя списки вершин, начиная с вершины I. Судя по первой строке матрицы $R - X^0$, в список вершины 1 войдут вершины 2 и 3, так как элементы второго и третьего столбцов этой строки отличны от нуля. Запишем это как $1||2, 3$. Переходим к составлению списка вершины 2 как вершины, вошедшей в список вершины 1. Во второй строке матрицы отличны от нуля элементы 1, 3, 4 и 5 столбцов. Но вершины 1 и 3, которые уже значатся в подмножестве A, поэтому повторно их в списки не включаем. Таким образом, получаем $2||4, 5$. Следующая вершина, для которой надлежит составить список, – это вершина 3. Однако в третьей строке матрицы $R - X^0$ ненулевым элементам соответствуют вершины 1 и 2, которые уже встречались в списках. Следовательно, список вершины 3 будет пустым: 3||. Далее аналогичным образом составляется список вершины 4: 4||6. Замечаем, что сток 6 попал в подмножество A, поскольку оказался в списке одной из вершин подмножества A (в данном случае вершины 4). Значит, поток X^0 не максимален и существует путь из истока I в сток S (у нас из 1 в 6), состоящий из ненасыщенных ребер. Таким образом, необходимо переходить к выполнению пункта 3 алгоритма – выделению ненасыщенного пути из 1 в 6 и преобразованию с его помощью имеющегося на сети потока X^0 в новый поток X^1 большей мощности.

Продолжим общие рассуждения. Построение ненасыщенного пути из I в S начинают с последнего ребра этого пути. Понятно, что им будет ребро (i_{n-1}, S), где i_{n-1} – вершина, в список которой попал сток S. Далее выписывают ребро (i_{n-2}, i_{n-1}), где i_{n-2} – вершина, в список которой попала вершина i_{n-1}, и т. д., пока на очередном шаге не встретится ребро (I, i_1), которым и начинается искомый ненасыщенный путь. Итак, ненасыщенный путь из I в S состоит из ребер (I, i_1), $(i_1, i_2), \dots, (i_{n-2}, i_{n-1})$, (i_{n-1}, S).

Вернемся к нашему примеру. Просматривая списки от конца к началу, замечаем, что путь из истока 1 в сток 6 по ненасыщенным ребрам пройдет через вершины 1, 2, 4 и 6.

После выделения ненасыщенного пути из истока I в сток S остается с помощью матрицы $R - X^0$ определить величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, на которую нужно увеличить поток по каждому ребру (i, j) выделенного пути, чтобы получить новый поток X^1 мощности, большей на Δ единиц.

Как видно из таблицы $R - X^0$, по ребру $(1, 2)$ дополнительно можно пропустить 7 ед., по ребру $(2, 4)$ – 4 ед., а по ребру $(4, 6)$ – только 2 ед., поэтому увеличить поток по всему пути $1-2-4-6$, составленному из указанных ребер, можно лишь на $\Delta = \min\limits_{1-2-4-6}(7, 4, 2) = 2$ ед.

Для построения матрицы нового потока X^1 к соответствующим элементам матрицы X^0 прибавляем найденное значение Δ, после чего возвращаются к пункту 2 алгоритма, и так до получения максимального потока.

В рассматриваемом примере на величину $\Delta = 2$ возрастут потоки по ребрам $(1, 2)$, $(2, 4)$ и $(4, 6)$, составляющим ненасыщенный путь. По остальным ребрам сети величины потоков не изменятся. Итак, прибавляя 2 ед. к элементам x^0_{12}, x^0_{24} и x^0_{46} матрицы x^0_{46} и учитывая равенство (18.1), приходим к матрице нового потока X^1.

X^1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	2	2	2	0	0
2	-2	0	0	2	0	0
3	-2	0	0	0	2	0
4	-2	-2	0	0	0	4
5	0	0	-2	0	0	2
6	0	0	0	-4	-2	0

Этот поток вновь надо исследовать на оптимальность, т.е. вернуться к пункту 2 алгоритма. С этой целью, как и при исследовании потока X^0, составляем матрицу $R - X^1$,

$R - X^1$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	5	2	0	0	0
2	5	0	8	2	1	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	11	0	0	8	0
5	0	5	4	3	0	2
6	0	0	0	10	9	0

а по ней – списки вершин, достижимых из истока по ненасыщенным ребрам:

$$1||2,3 \qquad 2||4,5 \qquad 3|| \qquad 4||5 \qquad 5||6.$$

Из этих списков видно, что сток 6 оказался в подмножестве A, а путь $1\overset{5}{-}2\overset{2}{-}4\overset{8}{-}5\overset{2}{-}6$, ведущий в него, состоит из ненасыщенных ребер. Новый поток X^2 получается преобразованием потока X^1, если увеличить на $\Delta = \min\limits_{1-2-4-5-6}(5,2,8,2) = 2$ ед. потоки по указанным ребрам найденного ненасыщенного пути.

X^2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	4	2	2	0	0
2	−4	0	0	4	0	0
3	−2	0	0	0	2	0
4	−2	−4	0	0	2	4
5	0	0	−2	−2	0	4
6	0	0	0	−4	−4	0

Для исследования этого потока составляем матрицу $R - X^2$,

$R - X^2$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	3	2	0	0	0
2	7	0	8	0	1	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	13	0	0	6	0
5	0	5	4	5	0	0
6	0	0	0	10	11	0

а по ней – списки

$$1||2,3 \qquad 2||5 \qquad 3|| \qquad 5||4 \qquad 4||$$

из которых видно, что сток 6 не попал в подмножество A вершин, достижимых из истока 1 по ненасыщенным ребрам. Значит, поток X^2 максимален. Иногда его наносят на сеть с указанием направления потоков по отдельным ребрам.

На основании вышеуказанных рассуждений выделим множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ вершин, достижимых из истока по ненасыщенным ребрам и множество $B = \{6\}$ не достижимых из истока по ненасыщенным ребрам. Следовательно, ребра $(4, 6)$ и $(5, 6)$ образуют разрез минимальной пропускной способности, и который, согласно теореме Форда-Фалкерсона, определяет величину максимального потока на сети, равного 8 ед.

Вывод о том, что построенный поток максимален, можно также сделать на основе следующих рассуждений. Заметим, что в столбце под номером 6 матрицы насыщенности ребер $R - X^2$ все элементы равны нулю, т.е. все ребра инцидентные стоку насыщены. Следовательно, построенный поток X^2 увеличить больше нельзя, значит, он максимален.

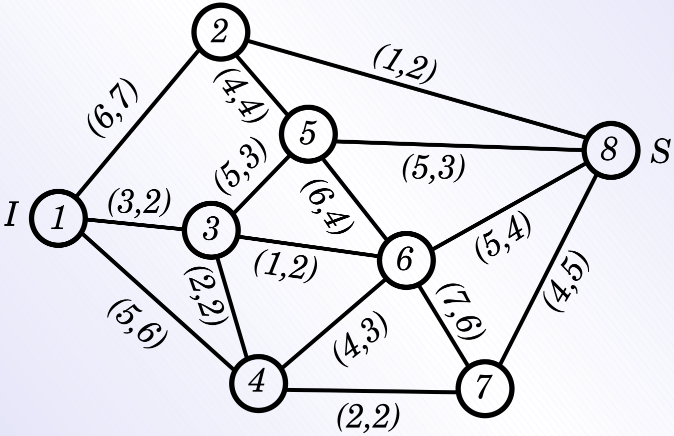
Аналогичный вывод о максимальности построенного потока можно сделать, если в матрице насыщенности ребер все элементы строки, соответствующей истоку будут равны нулю.

Задачу о максимальном потоке можно применить для решения других задач: транспортной задачи по критерию времени, задачи об оптимальных назначениях.

Лабораторное занятие 5

Вариант 1

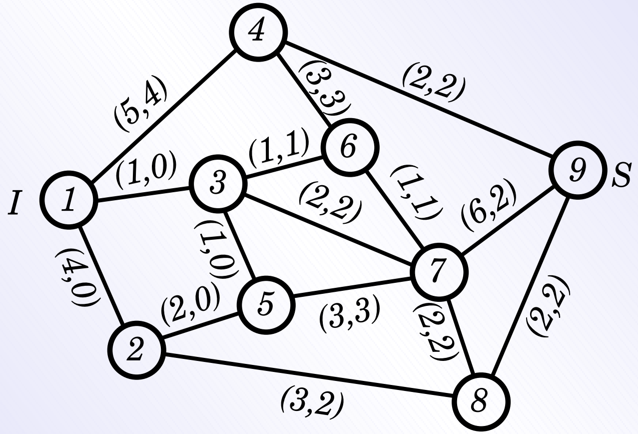
На сети с истоком I и стоком S построить поток максимальной мощности. Выписать ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.



Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

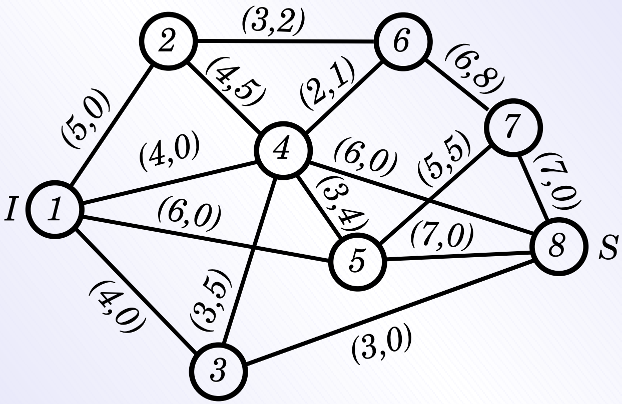
Вариант 2

На сети с истоком I и стоком S построить поток максимальной мощности. Выписать ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.



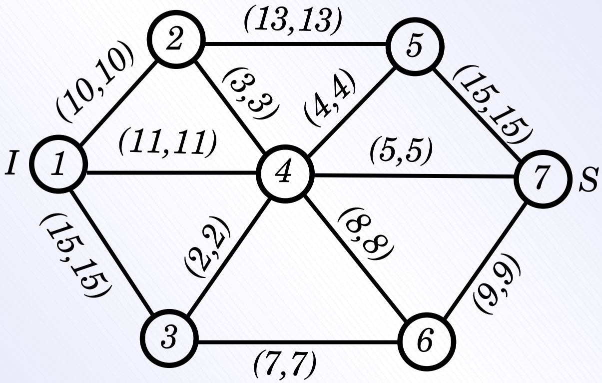
Вариант 3

На сети с истоком I и стоком S построить поток максимальной мощности. Выписать ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.



Вариант 4

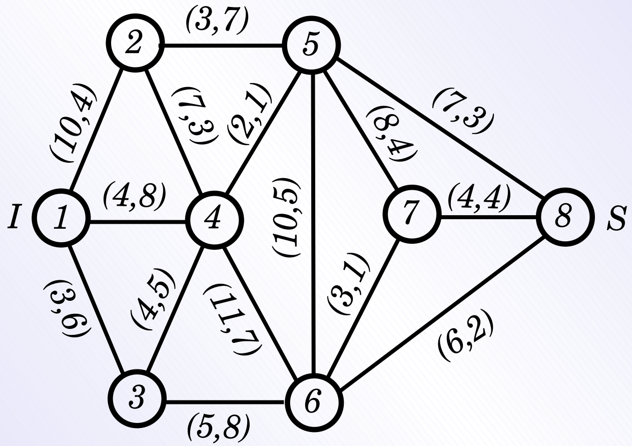
На сети с истоком I и стоком S построить поток максимальной мощности. Выписать ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.



Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 5

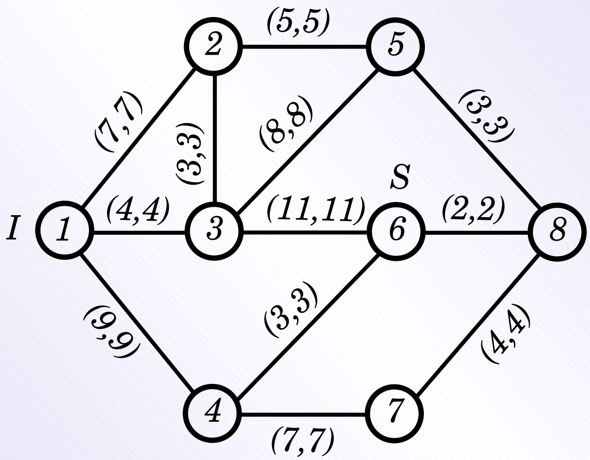
На сети с истоком I и стоком S построить поток максимальной мощности. Выписать ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.



Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 6

На сети с истоком I и стоком S построить поток максимальной мощности. Выписать ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.



ЛЕКЦИЯ 19

Приложения задачи о максимальном потоке

Транспортная задача по критерию времени. Проблемы, возникающие при рациональной организации перевозок различных грузов, имеют исключительное народнохозяйственное значение. Математические задачи, к которым можно свести указанные проблемы, называют *транспортными*. Изучение методов решения транспортных задач важно еще и потому, что большое количество других прикладных задач можно описать математической моделью, сходной с моделью задачи о перевозках, а следовательно, и решить по аналогичным алгоритмам. Качество плана транспортной задачи можно оценивать по различным критериям. Здесь мы ограничимся лишь критерием времени. Поставим задачу.

Пусть известны запасы груза a_i $(i = \overline{1, m})$ у поставщиков A_i, спрос b_j $(j = \overline{1, n})$ потребителей B_j и время t_{ij} доставки груза (независимо от объема поставки) по маршруту $A_i - B_j$. Составить реализуемый за минимальное время план перевозок, при котором спрос удовлетворяется полностью.

Если суммарный запас груза совпадает с суммарным спросом, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то задачу называют *закрытой*, в противном случае – *открытой*.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество груза, планируемое к перевозке из i-го пункта поставки в j-й пункт потребления, через t – время наиболее продолжительной перевозки. Оптимальным будем считать план $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn})$, самая продолжительная перевозка которого минимизируется. Модель закрытой задачи имеет вид:

$$\min t = \max_{x_{ij}>0} t_{ij}; \tag{19.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{19.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}), \tag{19.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \tag{19.4}$$

Как видно, целевая функция (19.1) является нелинейной. Уравнения (19.2) – ограничения по запасам – выражают требование, чтобы сумма всех поставок, идущих из i-го пункта, равнялась запасу a_i груза в нем; уравнения (19.3) – ограничения по потребностям – чтобы сумма всех поставок, направляемых в j-й пункт, равнялась его спросу b_j. Условие (19.4) означает, что обратные перевозки (возврат груза) не предполагаются.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

Закрыть

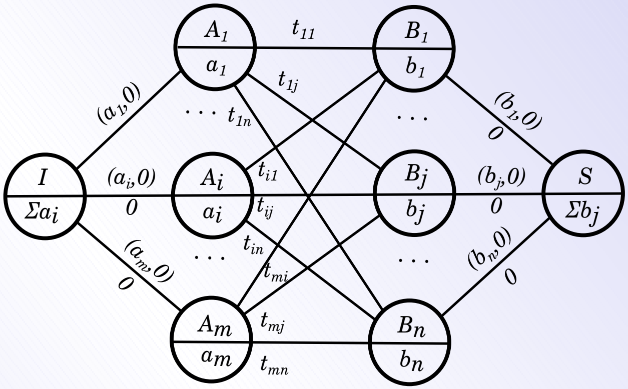


Рисунок 19.1

Решение задачи (19.1) – (19.4) сведением ее к задаче о максимальном потоке является одним из известных методов. Суть метода в следующем. Строится сеть с $m+n+2$ вершинами, m из которых соответствуют поставщикам A_i, а n – потребителям B_j; две оставшиеся соответствуют истоку I и стоку S (рисунок 19.1). Пропускные способности ребер полагают равными:

$$r_{IA_i} = a_i,\ \ r_{A_iI} = 0,\ \ r_{B_jS} = b_j,\ \ r_{SB_j} = 0,\ \ r_{A_iB_j} = r_{B_jA_i} = \infty.$$

У ребер (A_i, B_j) проставляются времена t_{ij} доставки груза. Время доставки по ребрам (I, A_i) и (B_j, S) считают равным нулю, т.е. $t_{IA_i} = t_{B_jS} = 0$. После построения сети отыскивается поток заданной мощности

$$f_{\max} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

при котором t_{ij} достигает минимальной величины. В процессе этого поиска при наличии альтернативы исключаются из рассмотрения маршруты с более продолжительными поставками. Решение заканчивается, когда замена более продолжительных маршрутов менее продолжительными становится невозможной.

Задача об оптимальном назначении. Мы ограничимся рассмотрением упрощенного варианта задачи, сохраняющего, однако, все основные особенности общей задачи.

Пусть некоторая комплексная работа P связана с производством совокупности m более мелких работ $P_1, P_2, \ldots, P_m$, которые могут выполняться независимо одна от другой. В распоряжении планирующего органа находится n организаций-исполнителей $И_1, И_2, \ldots, И_n$, каждая из которых может выполнять только некоторые определенные работы. При этом каждый исполнитель одновременно может выполнять только какую-либо одну работу и каждая работа, одновременно может выполняться только одним исполнителем. Задача, состоит в распределении работ между исполнителями таким образом, чтобы одновременно выполнялось возможно большее их число.

Составим математическую модель задачи в предположении, что задана матрица $[a_{ij}]_{m\times n}$, элементы которой характеризуют возможности исполнителей, а именно: $a_{ij}=1$, если i-я работа может выполняться j-м исполнителем, и $a_{ij}=0$ в противном случае.

Обозначим через x_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ переменные, характеризующие распределение работ между исполнителями, и согласимся приписывать переменной x_{ij} значение, равное 1, если i-я работа поручена j-му исполнителю, и значение, равное 0, в противном случае. Итак,

$$x_{ij}=1 \text{ или } 0 \ \ (i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n}). \tag{19.5}$$

Поскольку каждому исполнителю можно поручить небольше одной работы, должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\le 1 \ (j=\overline{1,n}). \tag{19.6}$$

По условию задачи каждую работу можно поручить только такому исполнителю, который способен ее выполнить. Это можно выразить записью

$$x_{ij}\le a_{ij} \ \ (i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n}). \tag{19.7}$$

Поскольку каждая работа поручается не более чем одному исполнителю, то должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\le 1 \ (i=\overline{1,m}). \tag{19.8}$$

Очевидно, что общее число m работ, одновременно выполняемых всеми n исполнителями, можно представить в виде

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}. \tag{19.9}$$

Из математической модели (19.5) – (19.9) видно, что задача об оптимальных назначениях является задачей целочисленного линейного программирования, а потому может быть решена известными аналитическими методами.

Здесь мы рассмотрим решение задачи сведением ее к задаче о максимальном потоке. С этой целью строится сеть с $m+n+2$ вершинами, m из которых соответствуют работам P_i, а n – исполнителям $И_j$, одна – истоку I и одна – стоку S (рисунок 19.2). Исток I соединяют с вершинами P_i и считают пропускные способности ребер (I, P_i) равными 1, а ребер (P_i, I) равными 0. Вершины $И_j$ соединяют со стоком S и считают пропускные способности получившихся ребер $(И_j, S)$ равными 1, а ребер $(S, И_j)$ равными 0. Вершину P_i соединяют ребром с вершиной $И_j$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 1$, т.е. когда работа P_i может быть выполнена исполнителем $И_j$. При этом пропускную способность такого ребра $(P_i, И_j)$ считают равной 1, а ребра $(И_j, P_i)$ – равной 0.

Каждому распределению работ можно поставить в соответствие поток на сети. В самом деле,если работа P_i поручается исполнителю $И_j$, то по цепочке ребер (I, P_i), $(P_i, И_j)$, $(И_j, S)$ пропускается поток единичной

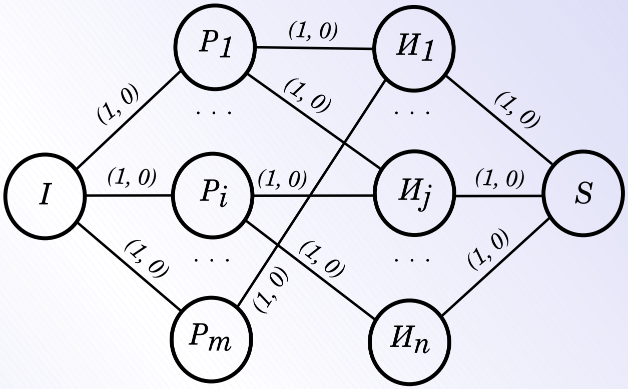


Рисунок 19.2

мощности. Можно показать и обратное: любому потоку с целочисленными компонентами соответствует некоторое распределение работ. При таком соответствии число распределенных работ равно мошности суммарного потока из истока I в сток S. Поэтому, чтобы решить задачу об оптимальных назначениях, достаточно найти в соответствующей сети максимальный поток с целочисленными потоками по ребрам сети.

Лабораторное занятие 6

Вариант 1

1. Известны запасы a_i груза у поставщиков, спрос b_j потребителей и время t_{ij} доставки груза по маршруту $A_i - B_j$. Составить реализуемый за минимальное время план перевозок, при котором полностью удовлетворяется спрос потребителей. Числовые данные приведены в следующей таблице.

a_i \ b_j	13	5	2
9	3	10	6
7	4	2	5
4	7	4	8

2. Найти оптимальное распределение работ между исполнителями с учетом их возможностей, оцениваемых элементами данной матрицы, и исходя из указанного начального распределения.

	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$
P_1	1	0	1	0
P_2	0	1	1	1
P_3	1	0	0	1
P_4	1	0	0	1

Работы P_1, P_2, P_3 первоначально закреплены за исполнителями $И_1$, $И_2$ и $И_4$ соответственно.

Вариант 2

1. Известны запасы a_i груза у поставщиков, спрос b_j потребителей и время t_{ij} доставки груза по маршруту $A_i - B_j$. Составить реализуемый за минимальное время план перевозок, при котором полностью удовлетворяется спрос потребителей. Числовые данные приведены в следующей таблице.

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

2. Найти оптимальное распределение работ между исполнителями с учетом их возможностей, оцениваемых элементами данной матрицы, и исходя из указанного начального распределения.

	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	$И_5$
P_1	1	0	1	0	1
P_2	0	1	1	1	0
P_3	1	0	0	1	0
P_4	1	0	0	1	1

Работы P_1, P_2, P_3 первоначально закреплены за исполнителями $И_5$, $И_2$ и $И_1$ соответственно.

ЛЕКЦИЯ 20

Элементы сетевого планирования

При планировании и оперативном управлении сложными комплексами работ, объединенных общностью цели, с успехом используются их графические модели – *сетевые графики (сети)*. С математической точки зрения сетевой график – это связный орграф без петель и контуров. В настоящее время разработаны специальные математические методы *сетевого планирования и управления* (СПУ). Основными понятиями СПУ являются работа и событие. Под *работой* понимаются любые действия, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам. Под *событием* понимают результат завершения одной или нескольких работ. Событие является предпосылкой для выполнения работ, следующих за ним. Поэтому любая работа на сети может быть определена двумя событиями, между которыми она находится. Событием же может заканчиваться или начинаться сразу несколько работ. Работы на сети изображают произвольной длины направленными отрезками прямых (стрелками), а события – обычно кружками, в которых указывают порядковый номер или шифр события. У каждой стрелки проставляется время выполнения работы, а иногда и другие числовые характеристики (расход ресурса, количество исполнителей и т.д.). Сетевые графики выполняются с соблюдением определенных правил. В частности, он должен иметь только одно исходное событие (исток сети I) – начало работ комплекса – и только одно завершающее событие (сток сети S) – окончание всех работ комплекса. Но,прежде чем строить сеть, надо составить подробный список работ комплекса, в отношении каждой работы выяснить ее технологические связи с другими работами, место работы в комплексе, конечные результаты (события) каждой работы. После того как описанный подготовительный этап будет закончен, приступают к построению сети.

Пример 20.1. По данным таблицы 20.1 построить сеть.

Таблица 20.1

Обозначение работы	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
Непосредственно предшествующие работы	–	–	–	a_1	a_1, a_2	a_1, a_2	a_3, a_5	a_4, a_6, a_7	a_3, a_5
Продолжительность работы	3	6	4	5	1	9	6	8	5

Решение. Работы a_1, a_2 и a_3 не имеют предшествующих, поэтому реализация комплекса начинается с этих работ. Они изображаются дугами, выходящими из одного кружка – события 1 (исток I сети) (рисунок 20.1). Масштаб при этом не соблюдается и дуги a_1, a_2, a_3 располагаются достаточно произвольно. Работе a_4 предшествует работа a_1, поэтому дуга a_4 на сети изображена вслед за дугой a_1. Далее надо изобразить работы a_5 и a_6, выполняемые после работ a_1 и a_2. Во избежание путаницы на сетях не рекомендуется изображать параллельными дугами одновременно выполняемые работы. В подобных случаях условились вводить дополнительные события и фиктивные работы (нулевой продолжительности), которые изображаются штриховыми линиями. Их назначение – показать, что одна работа не может быть выполнена ранее какого-либо события или работы. Учитывая сказанное, введем фиктивную работу, соединив конечное событие 2 работы a_1 с конечным событием 3 работы a_2, и после этого изобразим работы a_5 и a_6 дугами a_5 и a_6, выходящими из события 3. Дуги a_3 и a_5 пришлось свести в одно событие 4, поскольку работы a_7 и a_9 могут начаться лишь после завершения работ a_3 и a_5.

Аналогичным образом поступим и с дугами a_4, a_6 и a_7, направив их в общее событие 5, учитывая, что работа a_8 может быть начата только после выполнения работ a_4, a_6 и a_7. И, наконец, дуги a_8 и a_9 моделируют заключительные работы a_8 и a_9 комплекса, а потому сведем их в одно завершающее комплекс событие 6 (сток S сети). Правильность нумерации событий (вершин графа) следует проверить, воспользовавшись алгоритмом Фалкерсона.

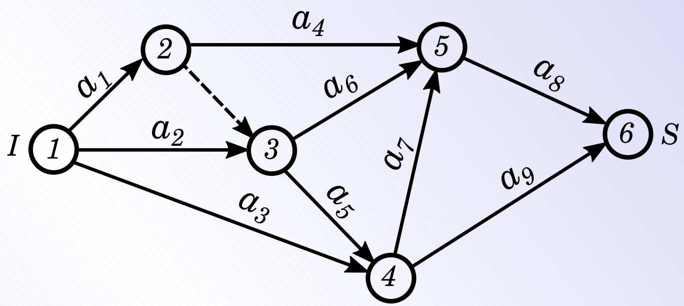


Рисунок 20.1

Допустим, что сеть некоторого комплекса построена и известна продолжительность каждой работы (например, в днях) (рисунок 20.2). Возникает вопрос: за какое минимальное время можно выполнить все работы комплекса? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим все полные пути L_i на сети. В данном случае таких путей три: $L_1 : 1-2-4-5$; $L_2 : 1-3-4-5$; $L_3 : 1-3-5$. Находим продолжительности $t(L_i)$ полных путей: $t(L_1) = 8$, $t(L_2) = 12$, $t(L_3) = 6$. Наиболее продолжительным оказался полный путь L_2. Его называют критическим. Он и определяет минимальное время выполнения всех работ данного комплекса. Это минимальное время называют *критическим сроком* и обозначают $t_{\text{кр}}$. В нашем случае $t_{\text{кр}} = 12$.

Работы и события, лежащие на критическом пути, называются *критическими*, остальные работы и события сети – *некритическими*. Если

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

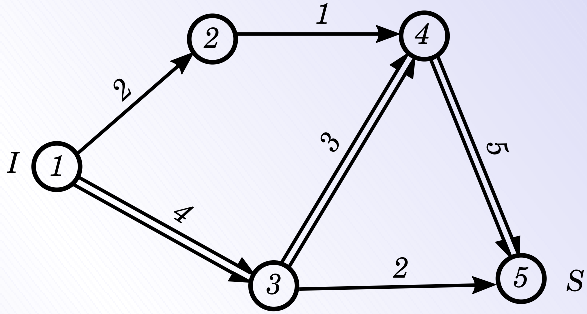


Рисунок 20.2

выполнение какой-либо критической работы будет задержано, это вызовет задержку выполнения всего комплекса на тот же срок. Чтобы ускорить выполнение комплекса, необходимо сократить сроки выполнения критических работ. Некритические работы допускают некоторое запаздывание их выполнения без нарушения критического срока. Чтобы определить время, на которое можно задержать выполнение некритических работ, вводят понятия *резервов времени событий* и *работ*, которые в свою очередь выражаются через ранние и поздние сроки свершения событий.

Как отмечалось, в событие может входить и выходить из него несколько работ. Под свершением события будем понимать момент, к которому заканчиваются все входящие в него работы и может быть начата любая выходящая работа. Событие может иметь некоторый интервал свободы свершения. Поясним эту мысль. Событие 2 на рисунке 20.2 может свершиться через 2 дня (по окончании работы $(1,2)$). Но оно может наступить и позже, если добавить время на выполнение работы $(1,2)$. А это сделать можно, поскольку на полном пути L_1, на котором лежит эта, работа, есть резерв времени $R(L_1) = t\text{кр} - t(L_1) = 12 - 8 = 4$. Так что работу $(1,2)$ можно выполнять даже за $2 + 4 = 6$ дней, и это не повлияет на критический срок. Но тогда событие 2 наступит через 6 дней. Именно поэтому для событий различают ранний и поздний сроки свершения.

Ранним сроком $t_{\text{кр}}(j)$ *свершения события* j назовем самый ранний момент времени, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию. Чтобы получить общую расчетную формулу, обратимся к рисунку 20.2. Согласимся, что $t_{\text{р}}(1) = 0$, а $t_{\text{р}}(5) = t_{\text{кр}} = 12$. И вообще, $t_{\text{р}}(I) = 0$, $t_{\text{р}}(S) = t_{\text{кр}}$.

Событие 2 произойдет по завершении работы $(1,2)$, т.е. через два дня. Значит, $t_{\text{р}}(2) = 2$. Запишем это иначе: $t_{\text{р}}(2) = 0 + 2 = t_{\text{р}}(1) + t(1,2)$, где $t(1,2)$ – время выполнения работы $(1,2)$. Аналогично $t_{\text{р}}(3) = 0 + 4 = t_{\text{р}}(1) + t(1,3)$. Немного сложнее с событием 4, поскольку им завершается несколько работ (две). По работе $(2,4)$ аналогично предыдущему можно записать: $t_{\text{р}}(2) + t(2,4) = 2 + 1 = 3$, а по работе $(3,4)$ – $t_{\text{р}}(3) + t(2,4) = 4 + 3 = 7$. Поскольку к моменту $t_{\text{р}}(4)$ должны закончиться все предшествующие работы, понятно, что $t_{\text{р}}(4)$ следует выбрать из условия $t_{\text{р}}(4) = \max(t_{\text{р}}(2) + t(2,4), t_{\text{р}}(3) + t(3,4))$. И мы приходим к

формуле
$$t_{\text{р}}(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+} (t_{\text{р}}(i) + t(i,j)), \tag{20.1}$$
где U_j^+ – множество работ, входящих в j-е событие; $t_{\text{р}}(j)$ – ранний срок свершения начального события работы (i, j); $t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Итак, если событием j заканчивается одна работа (i, j), то $t_{\text{р}}(j)$ равен сумме $t_{\text{р}}(i)$ – раннего срока свершения ее начального события – и $t(i, j)$ – продолжительности этой работы; если же событием j заканчивается несколько работ, то по каждой работе находится свой ранний срок, а искомым $t_{\text{р}}(j)$ будет максимальный из них.

Поздним сроком $t_n(i)$ *свершения события* i назовем самый поздний момент времени, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием.

Можно согласиться с тем, что $t_{\text{п}}(I) = 0$, $t_{\text{п}}(S) = t_{\text{р}}(S) = t_{\text{кр}}$.

В нашем примере $t_{\text{кр}} = 12$, поэтому $t_{\text{кр}}(5) = 12$. Чтобы не нарушился критический срок, событие 4 должно произойти в крайнем случае на 5 дней раньше события 5 (5 дней необходимо для выполнения работы (4,5)), поэтому $t_{\text{п}}(4) = 12 - 5 = t_{\text{п}}(5) - t(4, 5) = 7$. Аналогично для события 3: по работе $(3, 5)$ можно записать: $12 - 2 = t_{\text{п}}(5) - t(, 5) = 10$, а по работе $(3, 4)$ $7 - 3 = t_{\text{п}}(4) - t(, 4) = 4$. Поскольку $t_{\text{п}}(3)$ – это предельный момент времени, после которого должны быть выполнены все последующие работы, то за $t_{\text{п}}(3)$ придется принять $\min(t_п(4) - t(3,4); t_п(5) - t(3,5)) = \min(4, 10) = 4$. Если взять 10 и учесть, что для выполнения работ $(3,4)$ и $(4,5)$ потребуется еще $3+5 = 8$ дней, то общий срок реализации комплекса возрастет до 18 дней (вместо $t_{кр} = 12$). Обобщая результат, приходим к расчетной формуле

$$t_п(i) = \min_{(i,j)\in U_i^-} (t_п(j) + t(i,j)), \tag{20.2}$$

где U_i^- – множество работ, выходящих из i-го события; $t_п(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i,j).

Итак, если событием i начинается одна работа (i,j), то $t_п(i)$ равен разности $t_п(j)$ – позднего срока свершения ее конечного события – и $t(i,j)$ – продолжительности этой работы; если же событием i начинается несколько работ, то по каждой работе находят свой поздний срок, а искомым $t_п(i)$ будет минимальный из них. Разность между поздним и ранним сроками свершения события i составляет резерв $R(i)$ времени этого события:

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i).$$

Резерв $R(i)$ показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без изменения срока наступлении завершающего события S. Понятно, что у критических событий ранние и поздние сроки свершения совпадают, так что резерв времени у них равен нулю.

Зная сроки свершения событий, для работы (i,j) можно найти: ранний срок $t_{\text{р.н.}}(i,j)$ начала работы, ранний срок $t_{\text{р.о.}}(i,j)$ окончания работы, поздний срок $t_{\text{п.о.}}(i,j)$ окончания работы, поздний срок $t_{\text{п.н.}}(i,j)$ начала работы:

$$t_{\text{р.н.}}(i,j) = t_{\text{р}}(i), \quad t_{\text{р.о.}}(i,j) = t_{\text{р}}(i) + t(i,j),$$

$$t_{\text{п.о.}}(i,j) = t_{\text{п}}(j), \quad t_{\text{п.н.}}(i,j) = t_{\text{п}}(j) - t(i,j).$$

Для работ отметим два основных вида резервов времени: полный резерв $R_{\text{п}}(i,j)$ и свободный резерв $R_{\text{с}}(i,j)$.

Полный резерв времени работы – это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не нарушая критический срок.

Можно показать, что

$$R_{\text{п}}(i,j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t(i,j). \tag{20.3}$$

Формулу (20.3) проиллюстрируем рисунком 20.3.

Отдельные работы, помимо полного резерва, имеют свободный резерв времени, составляющий часть полного резерва, остающуюся после исключения резерва времени $R(j)$ конечного события j данной работы. Можно показать, что

$$R_{\text{с}}(i,j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t(i,j).$$

Свободный резерв времени работы – это запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что она начнется в свой ранний срок и при этом ранние сроки начала последующих работ не изменятся, а потому комплекс завершится в критический срок.

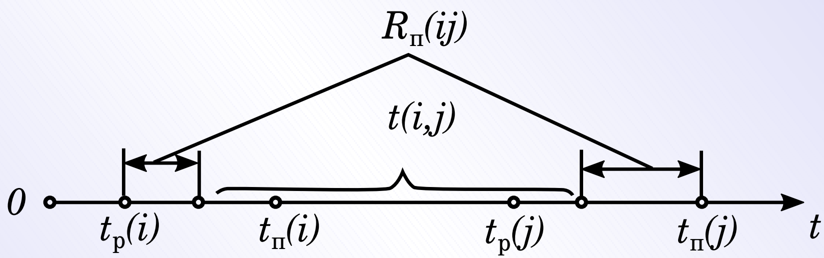


Рисунок 20.3

Понятно, что о резервах времени можно говорить лишь применительно к некритическим работам, резервы критических работ равны нулю.

Существуют различные способы расчета временных параметров сети. При небольших комплексах расчеты производятся вручную, при значительных (свыше 500 событий) – на ЭВМ. Мы ограничимся способом расчета, параметров непосредственно на сети и разберем его на примере сети, приведенной на рисунке 20.1. С этой целью каждое событие

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

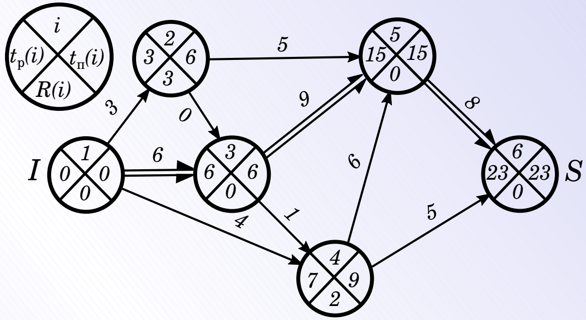


Рисунок 20.4

изобразим кружком, разделенным диаметрами на четыре сектора (рисунок 20.4). В верхнем секторе запишем номер i события, в левом по мере вычислений будем записывать ранний срок $t_р(i)$ свершения события, в правом – поздний срок $t_п(i)$, в нижнем – резерв $R(i)$ времени события. Продолжительности работ возьмем из таблицы 20.1.

Расчеты выполняют в четыре этапа, а именно вычисляют: 1) $t_р(i)$; 2) $t_п(i)$; 3) $R(i)$; 4) критический путь.

I этап. При вычислении $t_р(i)$ перемещаются по сети от события I к событию S в порядке возрастания номеров. Поскольку $t_р(I) = 0$, в левый сектор кружка 1 записываем 0. Затем рассматриваем событие 2, в которое входит работа $(1, 2)$. В соответствии с формулой (20.1) $t_р(2) = t_р(1) + t(1, 2) = 0 + 3 = 3$; это число и записываем в левый сектор кружка 2. При вычислении, $t_р(3)$ учитываем, что в событие 3 входят две работы: $(1,3)$ и $(2,3)$. (Особо подчеркнем, что во всех расчетах фиктивные работы учитываются наряду с реальными!) Поэтому по формуле (20.1) получаем

$$t_{\text{р}}(3) = \max(t_{\text{р}}(1) + t(1,3), t_{\text{р}}(2) + t(2,3)) =$$

$$= \max(0+6,\ \ 3+0) = 6,$$

что и записываем в левый сектор кружка 3. Аналогично вычисляем ранние сроки и остальных событий, в том числе $t_{\text{р}}(6) = 23$, т.е. критический срок. Итак, $t_{\text{кр}} = 23$.

II этап. При вычислении поздних сроков свершения событий $t_{\text{п}}(i)$ перемещаются по сети от события S к событию I в порядке убывания номеров. Поскольку $t_{\text{п}}(S) = t_{\text{р}}(S)$, в правый сектор кружка 6 записываем число $t_{\text{п}}(6) = 23$. Рассматриваем предшествующее событие 5, из которого выходит только одна работа (5, 6). Следовательно, по формуле (20.2) находим $t_{\text{п}}(5) = t_{\text{п}}(6) - t(5,6) = 23 - 8 = 15$. Этот результат и записываем в правый сектор кружка 5. Из события 4 выходят две работы $(4,5)$ и $(4,6)$, поэтому

$$t_{\text{п}}(4) = \min(t_{\text{п}}(5) - t(4,5), t_{\text{п}}(6) + t(4,6)) =$$

$$= \min(15-6,\ \ 23-5) = 9,$$

что и записываем в правый сектор кружка 4. Аналогично определяются поздние сроки свершения всех остальных событий сети. Заметим только, что результатом расчетов должно быть равенство $t_{\text{п}}(1) = t_{\text{р}}(1) = 0$.

III этап. Для определения резервов событий $R(i) = t_{\text{п}}(i) - t_{\text{р}}(i)$ достаточно из чисел, записанных в правых секторах кружков, вычесть числа, записанные в левых секторах, и заполнить нижние секторы.

IV этап. У критических событий резерв времени равен 0. В нашем примере критическими являются события 1, 3, 5 и 6, они и определяют критические работы и критический путь $1 - 3 - 5 - 6$.

Все остальные временные параметры (сроки начала и окончания работ, резервы времени работ) выражаются через $t_{\text{р}}$ и $t_{\text{п}}$, а поэтому легко могут быть вычислены. Так, например,

$$t_{\text{р.о.}}(2,5) = t_{\text{р}}(2) + t(2,5) = 3 + 5 = 8,$$

$$R_{\text{п}}(3,4) = t_{\text{п}}(4) - t_{\text{р}}(3) - t(3,4) = 9 - 6 - 1 = 2.$$

В рассмотренном примере критический путь на сети оказался единственным. Их может быть несколько. Заметим еще, что критический путь может включать и фиктивные работы.

При анализе и оптимизации комплекса работ наряду с сетевым графиком с успехом применяется *линейный график*. Построить его можно по данному сетевому графику или матрице, которой он задан. Линейный график позволяет решать целый ряд задач, связанных с комплексом работ.

Пример 20.2. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рисунок 20.5). Известны продолжительность t_{ij} (в днях) каждой работы и количество r_{ij} единиц ресурса, необходимое для выполнения работы в единицу времени, – интенсивность потребления ресурса (число в скобках). Построить линейный график и найти по нему критический срок, критические работы и резервы времени некритических работ. Построить шкалу потребления ресурса.

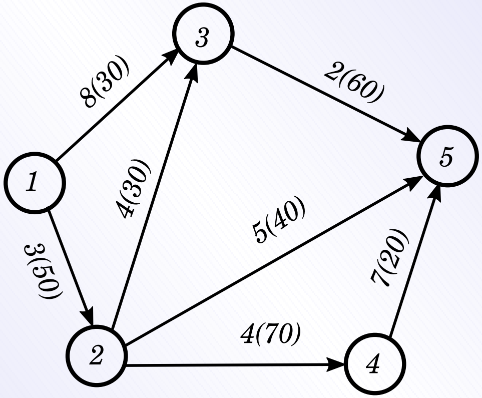


Рисунок 20.5

Решение. Каждая работа (i, j) на линейном графике изображается в привязке к оси времени Ot прямолинейным отрезком, длина которого в выбранном масштабе равна продолжительности t_{ij} ее выполнения (рисунок 20.6). Поэтому время у отрезков не проставляется, но указывается интенсивность r_{ij} потребления ресурса. Работы изображаются в той же последовательности, что и на сети.

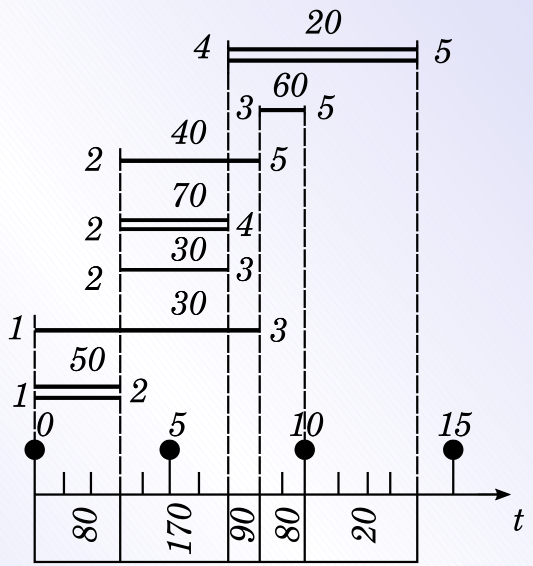


Рисунок 20.6

В нашем случае комплекс начинается работами $(1,2)$ и $(1,3)$, поэтому начала отрезков $1-2$ и $1-3$ расположим на вертикали $t=0$ (в произвольных точках), а длины возьмем равными соответственно 3 и 8 единиц После работы $(1,2)$ выполняются работы $(2,3)$, $(2,4)$ и $(2,5)$, поэтому начала всех трех отрезков $2-3$, $2-4$ и $2-5$ следует взять на вертикали $t=3$, а длины их будут равны соответственно 4, 4 и 5 единиц. Работа $(3, 5)$ выполняется после завершения двух работ: $(1, 3)$ и $(2, 3)$, поэтому начало отрезка $3 - 5$ придется расположить на вертикали $t = 8$ (а не $t = 7$). Начало после дней работы $(4, 5)$, следующей за работой $(2, 4)$, находится на вертикали $t = 7$. График построен.

Найдем критический срок $t_{\text{кр}}$ и критические работы. В нашем случае последней является работа $(4, 5)$, ее конечной точке 5 соответствует на оси времени Ot отметка $t = 14$, которая и определяет критический срок.

Ясно, что работа $(4, 5)$, будучи заключительной работой комплекса, является критической. Непосредственно ей предшествует работа $(2, 4)$, а этой работе – работа $(1, 2)$; обе эти работы также являются критическими. Все остальные работы – некритические. Критические работы на рисунке 20.6 выделены двойной чертой.

По линейному графику можно найти полные резервы времени $R_{\text{п}}(i, j)$ некритических работ. Так, работу $(3, 5)$ в случае необходимости можно отсрочить или увеличить время ее выполнения на 4 дня (отрезок $3 - 5$ на графике можно сдвинуть вправо на 4 единиц или "растянуть" его на 4 единицы), и это не вызовет нарушения $t_{\text{кр}} = 14$. Значит, $R_{\text{п}}(3, 5) = 4$. Аналогично $R_{\text{п}}(2, 5) = 6$. Что касается работы $(2, 3)$, то через день после нее выполняется работа $(3, 5)$, которую, как установлено, можно сдвинуть на 4 дня. В связи с этим при необходимости работу $(2, 3)$ можно сдвинуть в общей сложности на 5 дней. Итак, $R_{\text{п}}(2, 3) = 5$. Аналогично определяется $R_{\text{п}}(1, 3) = 4$.

Определяя величину $R_{\text{п}}(2,3)$, мы учли возможность сдвига работы $(3,5)$. Если же оперировать только с данной работой и совсем не затрагивать последующие работы, то найдется свободный резерв времени данной работы. В случае работы $(2,3)$ ее свободный резерв составляет всего 1 день, т.е. $R_{\text{с}}(2,3) = 1$. Из рисунка 20.6 непосредственно видно, что $R_{\text{с}}(1,3) = 0$, $R_{\text{с}}(2,5) = 6$, $R_{\text{с}}(3,5) = 4$.

Чтобы проследить, как меняется интенсивность потребления ресурса в ходе работ, спроецируем на ось Ot начальные и конечные точки работ. Получим промежутки постоянства интенсивности: $(0,3)$; $(3,7)$; $(7,8)$; .... Остается просуммировать в этих промежутках интенсивности r_{ij} работ, расположенных над ними: в промежутке $(0,3)$ суммарная интенсивность составляет $r_{12} + r_{13} = 50 + 30 = 80$ (ед.), в $(3,7)$ – $30+30+70+40 = 170$ (ед.) и т.д. Получили шкалу потребления ресурса.

Одной из наиболее распространенных оптимизационных задач сетевого планирования является задача о сокращении срока выполнения комплекса работ при ограниченных ресурсах. Она возникает в случаях, когда для реализации комплекса работ в плановый срок имеющихся ресурсов недостаточно. В такой обстановке приходится пересматривать сроки выполнения работ, переносить отдельные работы, сдвигая их во времени. При этом продолжительность выполнения комплекса, как правило, увеличивается, в связи с чем требуется произвести работы в новые сроки при имеющихся ресурсах в минимально возможное время. Здесь возникает вопрос: какие же работы целесообразнее отсрочить? Ответить на этот вопрос можно, полагаясь на опыт, здравый смысл, интуицию.

Пусть, например, за некоторый промежуток времени предполагается выполнить две работы, причем одна из них уже началась ранее. Выясняется, что одновременно вести обе работы невозможно из-за нехватки ресурсов. В подобной ситуации представляется естественным отсрочить (сдвинуть за пределы рассматриваемого промежутка) именно вторую работу, а ту, которая начата, оставить в первоначальном положении и продолжать.

Другой пример. В рассматриваемом промежутке должны начаться две работы, но вести их одновременно нет возможности. В этом случае целесообразнее оставить в первоначальном положении ту работу, у которой меньше полный резерв времени, а сдвинуть работу с большим резервом. При равенстве резервов следует оставить работу с большей интенсивностью, а работу с меньшей интенсивностью сдвинуть.

Мы говорили о двух работах. Если же предполагалось вести одновременно несколько работ, а это невозможно, то для выявления работ, подлежащих отсрочке, придется, руководствуясь приведенными соображениями, упорядочить эти работы, присвоив им соответствующие номера, и в порядке номеров проследить за тем, какая же работа вызывает превышение имеющегося в наличии ресурса; ее и сдвинуть.

Пример 20.3. Предположим,что в условиях примера 20.2 требуется установить время начала и окончания каждой работы так, чтобы завершить комплекс в возможно меньшее время при условии, что в любой момент в период выполнения работ расход ресурса не должен превышать $R = 100$ ед.

Решение. Из рисунка 20.6 видно, что в промежутке $(0, 3)$ суммарное потребление ресурса меньше имеющегося объема $(80 < 100)$, поэтому работы $(1, 2)$ и $(1, 3)$ остаются в первоначальном положении и оптимизационный процесс начинается анализом промежутка $(3, 7)$, где потребность в ресурсе превышает допустимый уровень $(170 > 100)$.

Первый шаг. Над промежутком $(3, 7)$ расположены четыре работы. Все их выполнять одновременно нет возможности. Для выявления работ, подлежащих отсрочке, прежде всего упорядочим их. Работа $(1, 3)$ начата раньше, поэтому она получает №1. Для остальных работ сравниваем полные резервы времени: $R_п(2, 3) = 5$, $R_п(2, 4) = 0$, $R_п(2, 5) = 6$. В порядке их возрастания присваиваем номера: работе $(2, 4)$ – 2, работе $(2, 3)$ – 3, работе $(2, 5)$ – 4.

Для выявления работы, подлежащей сдвигу, выясним, какая из них вызывает превышение наличного запаса ресурса. С этой целью в порядке возрастания номеров суммируем интенсивности r_{ij} работ: $r_{13} + r_{24} = 30 + 70 = 100$. Поскольку имеющийся запас ресурса не превышен, работы $(1, 3)$ и $(2, 4)$ оставляем в прежнем положении, а суммирование

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
Закрыть

продолжаем: $r_{13} + r_{24} + r_{23} = 30 + 70 + 30 = 130 > 100$. Превышение вызвано третьим слагаемым, поэтому соответствующую ему работу $(2,3)$ надлежит сдвинуть вправо на длину рассматриваемого промежутка $(3,7)$, т.е. до момента $t = 7$.

Остается решить вопрос о четвертой работе $(2,5)$. Возвращаясь к суммированию интенсивностей, отбрасываем слагаемое r_{23}, вызвавшее превышение запаса ресурса, а вместо него прибавляем интенсивность следующей по порядку номеров работы $(2,5)$ r_{25}: $r_{13} + r_{24} + r_{25} = 30+$ $+70+40 = 140 > 100$. Аналогично предыдущему заключаем, что работа $(2,5)$ также подлежит сдвигу до момента $t = 7$.

Из рисунка 20.6 видно, что сдвиг работы $(2,3)$ на длину промежутка $(3,7)$, т.е. на 4 дня, вызывает смещение следующей за ней через 1 день работы $(3,5)$ на 3 дня. Сдвиг работы $(2,5)$ последствий не вызывает, так как за ней других работ нет.

Смещение работ повлечет за собой и преобразование шкалы потребления ресурса. На рисунке 20.7 приведен преобразованный линейный график с соответствующей шкалой потребления ресурса. Первый шаг оптимизации закончен.

Второй шаг. Анализируя шкалу потребления ресурса (рисунок 20.7), замечаем, что теперь исследованию подлежит промежуток $(7,8)$, так как до момента, $t = 7$ запаса ресурса достаточно для выполнения работ. По сравнению с первым шагом здесь в рассуждениях ничего нового нет. Принимая во внимание, что работа $(1,3)$ началась раньше, и учитывая

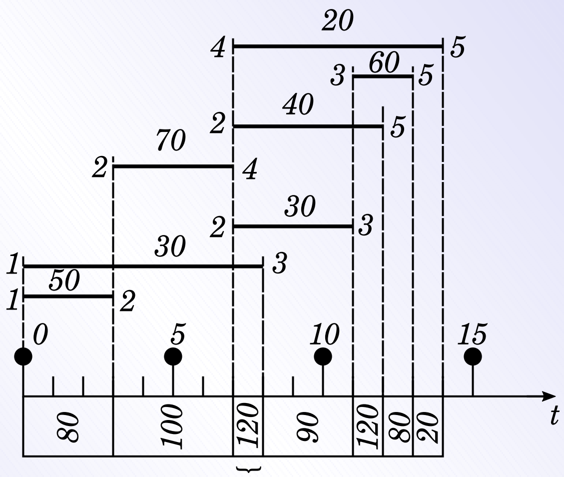


Рисунок 20.7

полные резервы времени работ: $R_{\text{п}}(2,3) = 1$, $R_{\text{п}}(2,5) = 2$, $R_{\text{п}}(4,5) = 0$, присваиваем номера 1, 2, 3 и 4 соответственно работам $(1,3)$, $(4,5)$, $(2,3)$ и $(2,5)$. По результатам суммирования интенсивностей заключаем, что сдвигу до $t = 8$ подлежит работа $(2,5)$. На рисунке 20.8 приведен преобразованный линейный график вместе с изменившейся шкалой потребления ресурса. Тем самым завершен второй шаг оптимизации.

Третий шаг. Из рисунка 20.8 видно, что теперь исследованию подлежит промежуток $(11,13)$. Над ним расположены три работы, две из

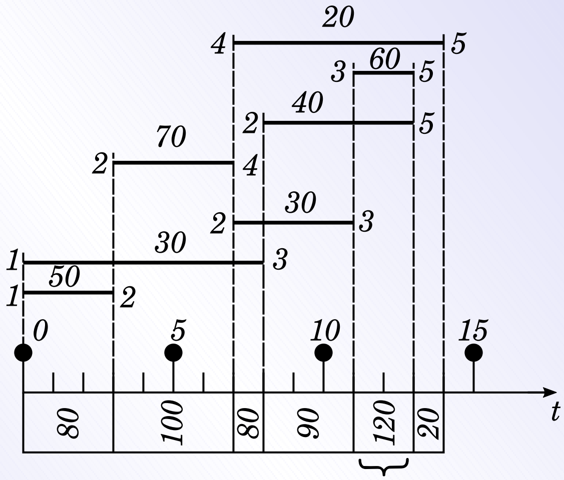


Рисунок 20.8

которых – $(2, 5)$ и $(4, 5)$ – начаты ранее. Их и следует пронумеровать в первую очередь. Так как $R_п(2, 5) = 1$, а $R_п(4, 5) = 0$, то работе $(4, 5)$ присваиваем 1, а работе $(2, 5)$ – 2. Оставшейся работе $(3, 5)$, естественно, присваивается 3. Суммированием интенсивностей устанавливаем, что работа $(3, 5)$ подлежит отсрочке до момента $t = 13$.

На рисунке 20.9 приведен вновь преобразованный линейный график с соответствующей шкалой потребления ресурса. По шкале видно, что в любой момент реализации комплекса запаса ресурса достаточно для выполнения работ. В связи с этим процесс оптимизации заканчивается. Время, необходимое для производства всех работ, составляет 15 дней.

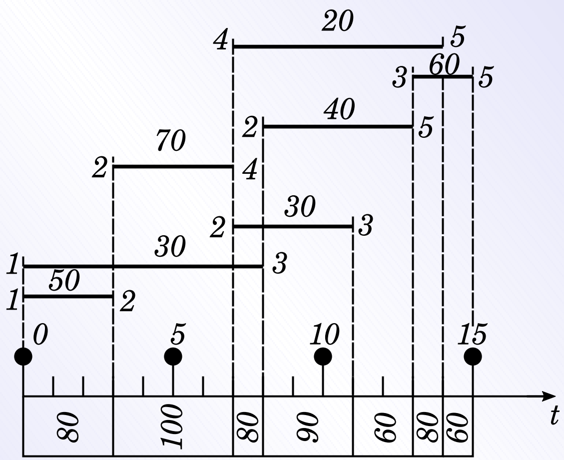


Рисунок 20.9

По линейному графику (рисунок 20.9) составлена таблица 20.2, в которой помещены новые сроки начала ($t_н$) и окончания ($t_о$) работ комплекса.

Рассмотренный при решении примера 20.3 эвристический метод оптимизации по времени комплекса работ, когда ресурсы ограничены, не

Таблица 20.2

Сроки	Работы						
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 3)	(4, 5)	(2, 5)	(3, 5)
$t_{н}$	0	0	3	7	7	8	13
$t_{о}$	3	8	7	11	14	13	15

обязательно точно минимизирует время выполнения комплекса работ, но обеспечивает достаточно хорошее приближение к нему.

Использованный метод кратко можно описать следующим образом. Анализируя шкалу потребления ресурса линейного графика комплекса работ, выделяют первый слева временной промежуток, в котором суммарная потребность в ресурсе для одновременного производства всех работ, расположенных над ним, превышает имеющийся запас R ресурса.

Затем определяют работы, подлежащие отсрочке (сдвигу). Для этого все работы упорядочивают по возрастанию полных резервов времени, а при их равенстве – по убыванию интенсивностей потребления ресурса. При этом первые номера отдают работам, начатым ранее анализируемого промежутка (если таковые имеются). Далее нумеруют работы, начинающиеся в анализируемом промежутке.

После упорядочения работ производят последовательное (по возрастанию номеров) суммирование интенсивностей r_{ij} потребления ресурса. Как только суммарная интенсивность превысит имеющийся запас R ресурса, слагаемое, вызвавшее превышение, отбрасывают, а соответствующую ему работу назначают к отсрочке на величину анализируемого промежутка, если работа начинается в этом промежутке, и до совмещения начала работы с моментом завершения анализируемого промежутка, если работа начинается левее его. После этого суммирование продолжают, пока вновь не обнаружится превышение R. И так до полного перебора всех работ над промежутком. Сроки выполнения работ, для которых суммарная интенсивность не превышает R, не меняются.

После завершения анализа производят преобразование линейного графика: сдвигают назначенные к отсрочке работы и работы, следующие за ними. Затем строят новую шкалу потребления ресурса. Этим завершается первый шаг оптимизационного процесса, в результате которого в рассмотренном временном промежутке потребление ресурса уже не превышает имеющегося запаса R.

Если на шкале потребления ресурса, преобразованного линейного графика имеются промежутки, в которых суммарная потребность в ресурсе превышает R, то выполняют второй шаг оптимизационного процесса: выбирают самый левый из упомянутых промежутков и анализируют его аналогично предыдущему.

Описанную процедуру продолжают до тех пор, пока на шкале потребления ресурса не останется промежутков, в которых суммарное потребление превышает имеющийся запас R.

После завершения процесса оптимизации получают линейный график, по которому известным способом можно выделить критический путь. Он, как правило, отличается от критического пути исходного графика, составляющими его работами. Изменится (увеличится) и продолжительность нового критического пути (критический срок). Это неизбежное следствие ограничения ресурса, используемого при производстве работ комплекса.

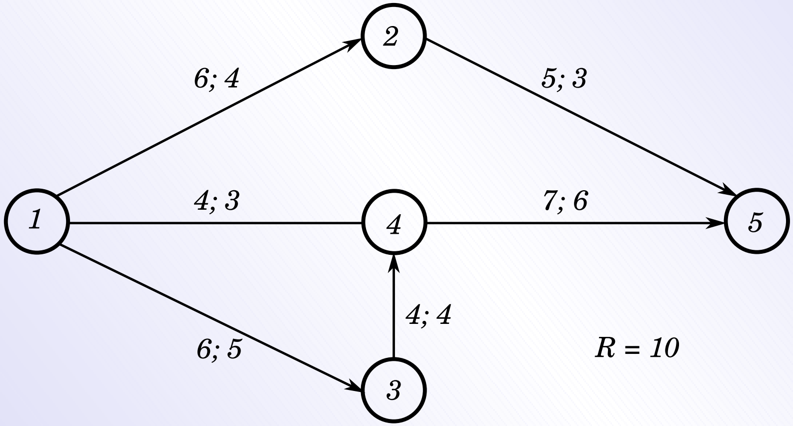
Так, на рисунке 20.9 критический путь образуют работы $(1, 3)$, $(2, 5)$ и $(3, 5)$, а продолжительность критического пути составляет 15 дней (сравните с рисунком 20.6).

Мы рассмотрели пример использования сетевых (линейных) графиков для решения оптимизационной задачи с достаточно простыми условиями. На практике нередко возникают гораздо более сложные задачи, когда, требуется, например, определить работы, на производство которых необходимо выделить дополнительные ресурсы с целью форсирования этих работ, с тем чтобы критический срок выполнения всего комплекса не был сорван. Возможна и иная постановка: какие дополнительные ресурсы и в какие работы следует вложить, чтобы общий срок выполнения комплекса не превышал заданный, а стоимость дополнительных ресурсов минимизировалась.

Лабораторное занятие 7

Вариант 1

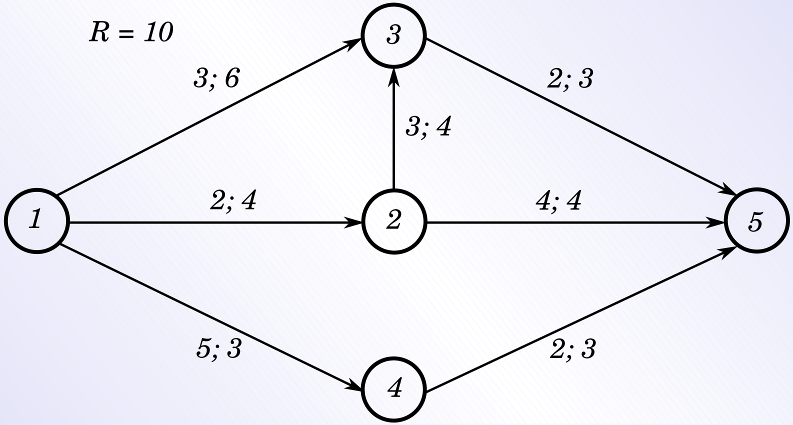
1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



$R = 10$

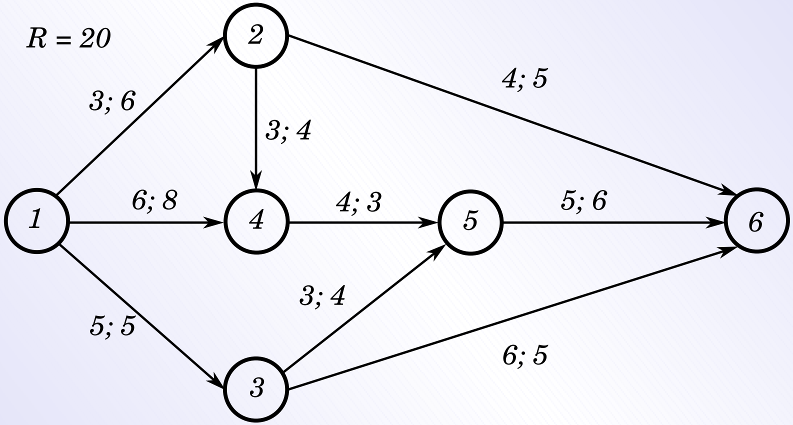
Вариант 2

1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



Вариант 3

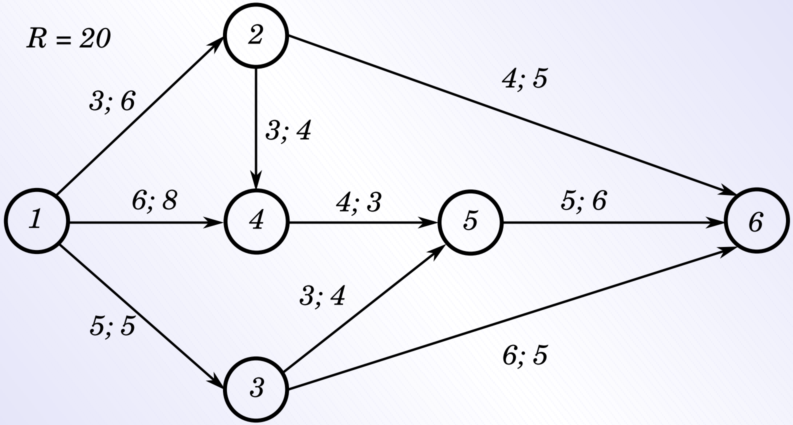
1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 4

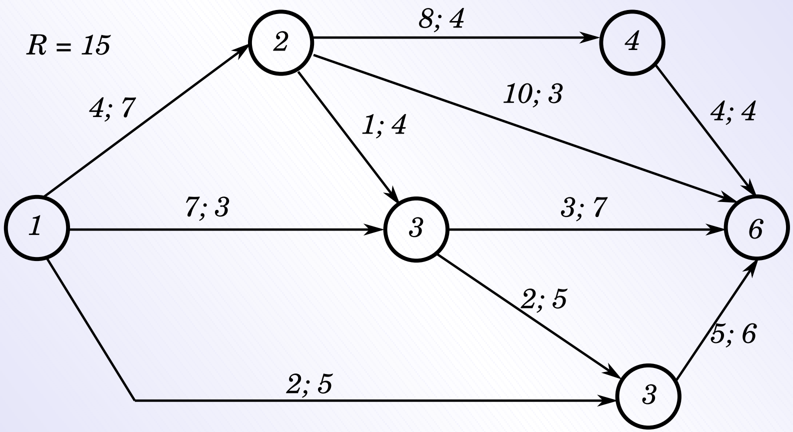
1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

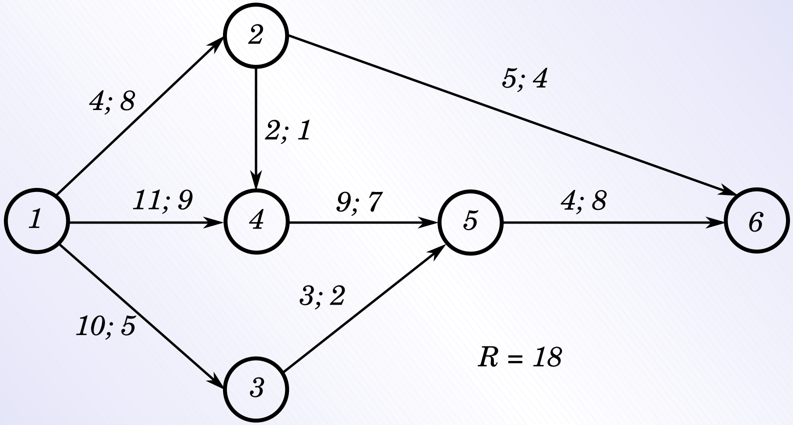
Вариант 5

1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



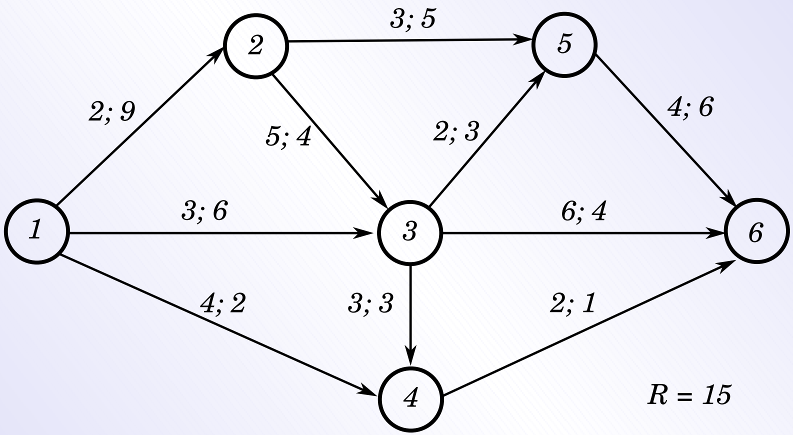
Вариант 6

1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



Вариант 7

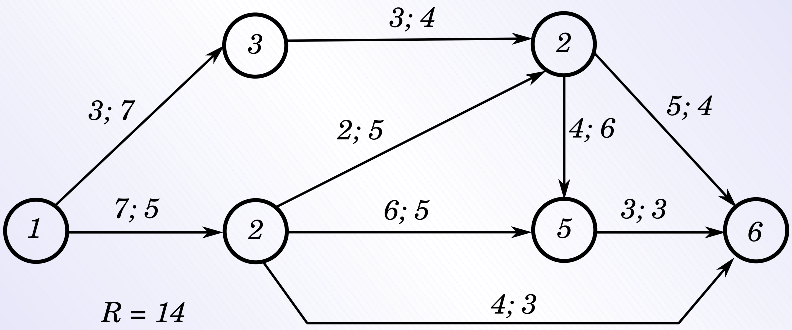
1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



$R = 15$

Вариант 8

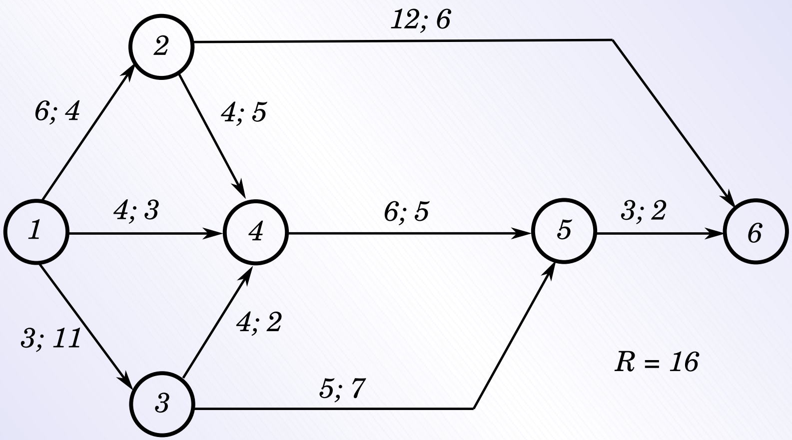
1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 9

1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.

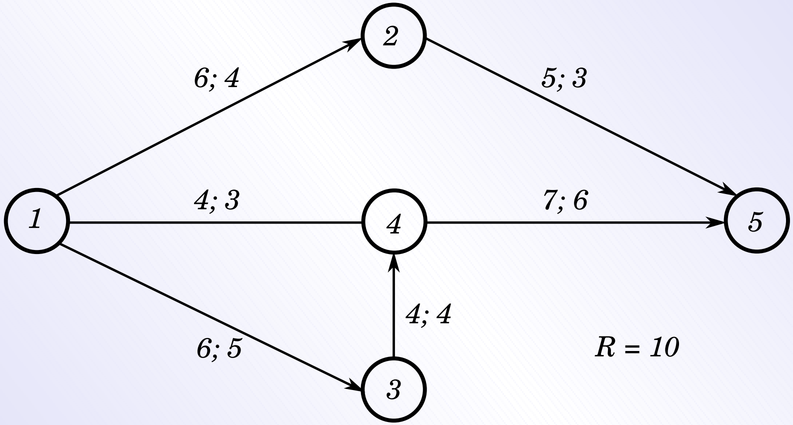


Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Вариант 10

1. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Первая цифра, приписанная дуге графика, означает время выполнения операции (работы), а вторая – требуемое количество ресурса для выполнения операции. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



ЛЕКЦИЯ 21

Марковские случайные процессы. Понятие о марковском процессе

До сих пор мы рассматривали главным образом детерминированные исследования операций и методы оптимизации решений в этих задачах. Начиная с этой лекции и до лекции 26 мы будем заниматься задачами исследования операций в условиях неопределенности. В этой главе мы рассмотрим сравнительно благоприятный случай «доброкачественной» или «стохастической» неопределенности, когда неопределенные факторы, входящие в задачу, представляют собой случайные величины (или случайные функции), вероятные характеристики которых либо известны, либо могут быть получены из опыта. Мы будем здесь заниматься, главным образом, прямыми задачами исследования операций, т.е. построением математических моделей некоторых случайных явлений, лишь бегло останавливаясь на обратных задачах (оптимизации решений), потому что они, как правило, сложны. В стохастических задачах исследования операций часто затруднительно даже построение математической модели, уже не говоря об оптимизации. В большинстве случаев не удается построить простую математическую модель, позволяющую в явном (аналитическом) виде найти интересующие нас величины (показатели эффективности) в зависимости от условий операции α и элементов решения x. Однако в некоторых особых случаях такую математическую модель удается построить. Это – когда исследуемая операция представляет собой (точно или приближенно) так называемый *марковский случайный процесс*

А что такое «марковский случайный процесс»? Определение этого понятия мы дадим не сразу, сначала поговорим о том, что такое вообще «случайный процесс».

Пусть имеется некоторая физическая система S, которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое), причем заранее не известным, случайным образом. Тогда мы будем говорить, что в системе S протекает *случайный процесс*.

Под «физической системой» можно понимать что угодно: техническое устройство, группу таких устройств, предприятие, отрасль промышленности, живой организм, популяцию и т. д. Большинству процессов, протекающих в реальных системах, свойственны, в той или иной мере, черты случайности, неопределенности.

Пусть, например, система S — космический корабль, выводимый на заданную орбиту. Процесс вывода неизбежно сопровождается случайными ошибками, отклонениями от заданного режима, на которые приходится вводить коррекцию (если бы не случайные ошибки, коррекция была бы не нужна). Значит, процесс вывода на орбиту – случайный процесс.

Теперь спустимся из космоса в околоземную зону. Физическая система S – обыкновенный самолет, совершающий рейс на заданной высоте, по определенному маршруту. Является ли этот процесс случайным? Безусловно, да, так как он неизбежно (в силу турбулентности атмосферы и других факторов) сопровождается случайными возмущениями, колебаниями (в этом не усомнится никто, испытавший на себе так называемую «болтанку» или нарушение графика полетов).

Еще пример: система S – техническое устройство, состоящее из ряда узлов, которые время от времени выходят из строя, заменяются или восстанавливаются. Процесс, протекающий в этой системе, безусловно, случаен. А столовая самообслуживания? В ней время от времени могут образовываться и рассасываться очереди, возникать задержки, нехватка подносов и т.д.

Вообще, если подумать, труднее привести пример «неслучайного» процесса, чем случайного. Даже процесс хода часов – классический пример точной, строго выверенной работы («работает, как часы») подвержен случайным изменениям (уход вперед, отставание, остановка).

Так что же, выходит, все процессы в природе случайны? Да,строго говоря, это так – случайные возмущения присущи любому процессу. Но до тех пор, пока эти возмущения несущественны, маловлияют на интересующие нас параметры, мы можем ими пренебречь и рассматривать процесс как детерминированный, неслучайный. Необходимость учета случайностей возникает тогда, когда они прямо касаются нашей заинтересованности. Например, составляя расписание самолетов, можно пренебречь случайными колебаниями самолета вокруг центра массы, а проектируя автопилот – безусловно, нет. Большинство процессов, которые мы изучаем в физике, технике, по существу являются случайными, но только некоторые из них мы изучаем как случайные – когда нам это «позарез» надо.

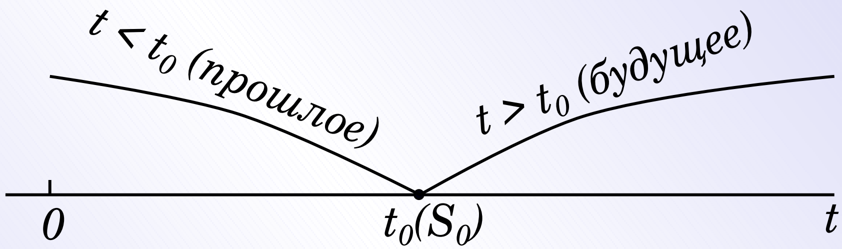


Рисунок 21.1

Теперь, когда нам ясно, что такое «случайный процесс», дадим определение «марковского случайного процесса». Случайный процесс, протекающий в системе, называется *марковским*, если *для любого момента времени* t_0 *вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.*

Это очень важное определение стоит того, чтобы его растолковать подробнее. Пусть в настоящий момент t_0 (рисунок 21.1) система находится в определенном состоянии S_0. Мы наблюдаем процесс со стороны и в момент t_0 знаем состояние системы S_0 и всю предысторию процесса,

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования
На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

все, что было при $t < t_0$. Нас, естественно, интересует будущее ($t > t_0$). Можем ли мы его предугадать (предсказать)? В точности – нет, наш процесс случайный, значит – непредсказуемый. Но какие-то вероятностные характеристики процесса в будущем мы найти можем. Например, вероятность того, что через некоторое время τ система S окажется в состоянии S_1 или сохранит состояние S_0, и т.п.

Так вот, для марковекого случайного процесса такое «вероятностное предсказание» оказывается гораздо проще, чем для немарковского. Если процесс – марковский, то предсказывать можно, только учитывая настоящее состояние системы S_0 и забыв о его «предыстории» (поведении системы при $t < t_0$). Само состояние S_0, разумеется, зависит от прошлого, но как только оно достигнуто, о прошлом можно забыть. Иначе формулируя, в марковском процессе «будущее зависит от прошлого только через настоящее».

На практике часто встречаются процессы, которые если не в точности марковские, то могут быть в каком-то приближении рассмотрены как марковские. Пример: система S – группа самолетов, участвующих в воздушном бою. Состояние системы характеризуется числом самолетов «красных» – x и «синих» – y, сохранившихся (не сбитых) к какому-то моменту. В момент t_0 нам известны численности сторон – x_0 и y_0. Нас интересует вероятность того, что в какой-то момент $t_0 + \tau$ численный перевес будет на стороне «красных». Спросим себя, от чего зависит эта вероятность? В первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент t_0, а не от того, когда и в какой последовательности погибали сбитые до момента t_0 самолеты.

На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются, но нередко приходится иметь дело с процессами, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь. При изучении таких процессов можно с успехом применять марковские модели. Мы в дальнейшем увидим, как это делается.

В исследовании операций большое значение имеют так называемые *марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.* Процесс называется *процессом с дискретными состояними*, если его возможные состояния S_1, S_2, S_3, ... можно заранее перечислить (перенумеровать), и переход системы из состояния в состояние происходит «скачком», практически мгновенно. Процесс называется *процессом с непрерывным временем*, если моменты возможных переходов из состояния в состояниене фиксированы заранее, а неопределенны, случайны, если переход может осуществиться, в принципе, в любой момент. Мы здесь будем рассматривать только процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Пример такого процесса: техническое устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Возможные состояния системы можно перечислить:

S_0 – оба узла исправны,

S_1 – первый узел ремонтируется, второй исправен,

S_2 – второй узел ремонтируется, первый исправен,

S_3 – оба узла ремонтируются.

Переходы системы S из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или другого узла или окончания ремонта.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – так называемым *графом состояний*. Состояния системы изображаются прямоугольниками (или кругами, или даже точками), а возможные переходы из состояния в состояние – стрелками, соединяющими состояния. Мы будем изображать состояния прямоугольниками, в которых записаны обозначения состояний: $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Построим граф состояний для рассмотренного выше примера (рисунок 21.2). Стрелка, направленная из S_0 в S_1, означает переход в момент отказа первого узла; стрелка, направленная обратно, из S_1 в S_0, – переход в момент окончания ремонта этого узла. Остальные стрелки объясняются аналогично.

Внимательный читатель может спросить: а почему нет стрелки, ведущей непосредственно из S_0 в S_3? Разве не может быть, что оба узла откажут одновременно, например, вследствие короткого замыкания? Вопрос законный. Ответим, что мы предполагаем узлы выходящими из строя

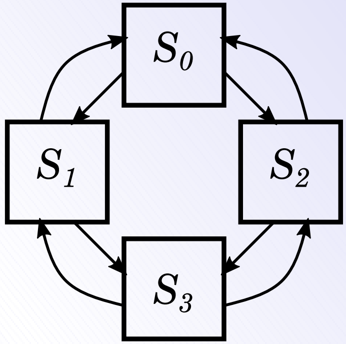


Рисунок 21.2

независимо друг от друга, а вероятностью строго одновременного выхода их из строя пренебрегаем (ниже будет дано более точно обоснование этого допущения).

Если процесс, протекающий в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, является марковским, то для его описания можно построить довольно простую математическую модель. Но перед тем, как ее строить, нам полезно познакомиться с важным понятием теории вероятностей – понятием «потока событий».

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ЛЕКЦИЯ 22
Потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени Ot (рисунок 22.1); не надо только забывать, что положение каждой из них случайно, и на рисунке 22.1 изображена только какая-то одна реализация потока.

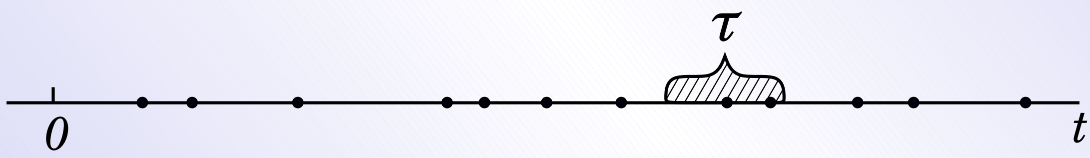


Рисунок 22.1

Говоря о «потоке событий», нужно иметь в виду, что здесь термин «событие» имеет значение, несколько отличное от того, к которому мы привыкли в теории вероятностей. Там «событием» (или «случайным событием») называется какой-то исход опыта, обладающий той или другой вероятностью. События, образующие поток, сами по себе вероятностями не обладают; вероятностями обладают другие, производные от них события, например: «на участок времени τ (рисунок 22.1) попадет ровно два события», или «на участок времени Δt попадет хотя бы одно событие», или «промежуток времени между двумя соседними событиями будет не меньше t».

Важной характеристикой потока событий является его *интенсивность* λ – среднее число событий, приходящееся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной ($\lambda = const$), так и переменной, зависящей от времени t. Например, поток автомашин, движущихся по улице, днем интенсивнее, чем ночью, в часы пик – интенсивнее, чем в другие часы.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные, равные промежутки времени. На практике чаще встречаются потоки не регулярные, со случайными интервалами.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность λ стационарного потока должна быть постоянной.

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 (рисунок 22.2) число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. По сути это означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени *независимо друг от друга*, вызванные каждое своими собственными причинами.

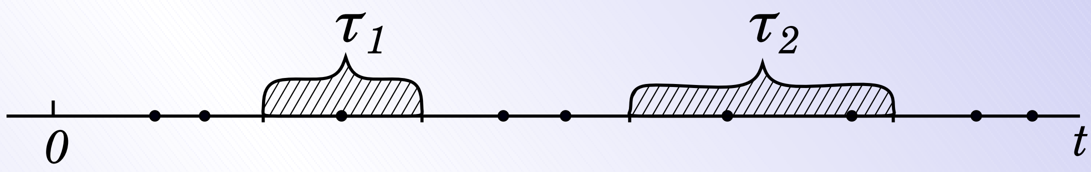


Рисунок 22.2

Поток событий называется *ординарным*, если события в нем появляются по одиночке, а не группами по нескольку сразу. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую или к зубному врачу, обычно ординарен, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в загс для регистрации брака. Поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов – неординарен. Если поток событий ординарен, то вероятностью попадания на малый участок времени Δt двух или более событий можно пренебречь.

Поток событий называется *простейшим*, (или стационарным пуассоновским), если он обладает сразу тремя свойствами: стационарен, ординарен и не имеет последействия. Название «простейший» связано с тем, что процессы, связанные с простейшими потоками, имеют наиболее простое математическое описание.

Для простейшего потока с интенсивностью λ интервал T между соседними событиями имеет так называемое *показательное распределение* с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0) \tag{22.1}$$

(рисунок 22.3). Величина λ в формуле (22.1) называется *параметром* показательного закона. Для случайной величины T, имеющей показательное распределение, математическое ожидание m_T есть величина, обратная параметру, а среднее квадратическое отклонение σ_T равно математическому ожиданию:

$$m_T = \sigma_T = 1/\lambda. \tag{22.2}$$

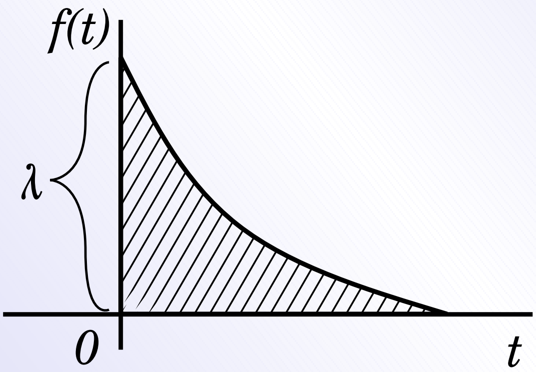


Рисунок 22.3

В теории вероятностей в качестве «меры случайности» неотрицательной случайной величины нередко рассматривают так называемый *коэф-*

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

фициент вариации:

$$v_T = \sigma_T / m_T. \tag{22.3}$$

Из формул (22.2), (22.3) следует, что для показательного распределения $v_T = 1$, т.е. *для простейшего потока событий коэффициент вариации интервалов между событиями равен единице.*

Очевидно, что для регулярного потока событий, у которого интервал между событиями вообще не случаен ($\sigma_T = 0$), коэффициент вариации равен нулю. Для большинства потоков событий, встречающихся на практике, коэффициент вариации интервалов между событиями заключен между нулем и единицей и может служить некоторой мерой «степени регулярности» потока: чем v_T ближе к нулю, тем «регулярнее» поток. Простейший поток – это «наименее регулярный» из встречающихся на практике потоков.

Поток событий называется *рекуррентным* (иначе — «потоком Пальма»), если он стационарен, ординарен, а интервалы времени между событиями $T_1, T_2, T_3, \ldots$ (рисунок 22.4) представляют собой независимые случайные величины с одинаковым *произвольным* распределением.

Очевидно, простейший поток представляет собой частный случай рекуррентного потока, когда интервалы между событиями имеют показательное распределение (22.1). Другим частным (вырожденным) случаем рекуррентного потока является регулярный поток событий, где интервалы вообще не случайны, постоянны.

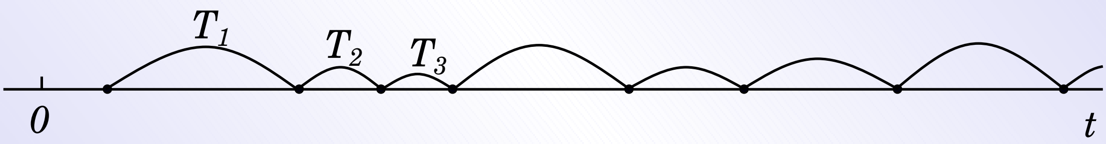


Рисунок 22.4

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ЛЕКЦИЯ 23

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний

Рассматривая марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, нам удобно будет представлять себе, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, поток отказов, поток восстановлений и т.д.). Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние, – простейшие, то процесс протекающий в системе, будет марковским). Это и естественно, так как простейший поток не обладает последействием: в нем «будущее» не зависит от «прошлого».

Если система S находится в каком-то состоянии S_i, из которого есть непосредственный переход в другое состояние S_j (стрелка, ведущая из S_i в S_j на графе состояний), то мы себе это будем представлять так, как будто на систему, пока она находится в состоянни S_i, действует простейший поток событий, переводящий ее по стрелке $S_i \to S_j$. Как только появится первое событие этого потока, происходит «перескок» системы из S_i в S_j.

Для наглядности очень удобно на графе состояний у каждой стрелки проставлять интенсивность того потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Обозначим λ_{ij} интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния S_i в S_j. На рисунок 23.1 дан граф состояний с проставленными у стрелок интенсивностями (мы будем называть такой граф *размеченным*).

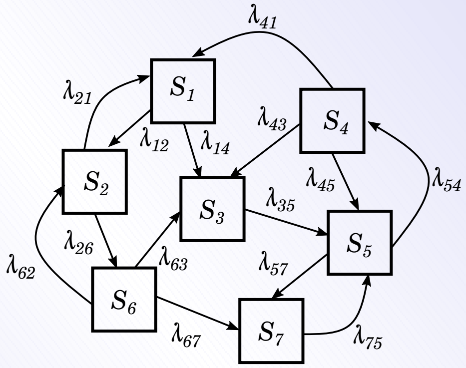


Рисунок 23.1

Построим размеченный граф состояний для примера, данного ранее (техническое устройство из двух узлов). Напомним состояния системы:

S_0 – оба узла исправны,

S_1 – первый узел ремонтируется, второй исправен,

S_2 – второй узел ремонтируется, первый исправен,

S_3 – оба узла ремонтируются.

Интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, будем вычислять, предполагая, что среднее время ремонта узла не зависит от того, ремонтируется ли один узел или оба сразу. Это будет именно так, если ремонтом каждого узла занят отдельный специалист. Найдем все интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние. Пусть система находится в состоянии S_0. Какой поток событий переводит ее в состояние S_1? Очевидно, поток отказов первого узла. Его интенсивность λ_1 равна единице, деленной на среднее время безотказной работы первого узла. Какой поток событий переводит систему обратно из S_1 в S_0? Очевидно, поток «окончаний ремонтов» первого узла. Его интенсивность μ_1 равна единице, деленной на среднее время ремонта первого узла. Аналогично вычисляются интенсивности потоков событий, переводящих систему по всем стрелкам графа рисунок 23.2. Имея в своем распоряжении размеченный граф

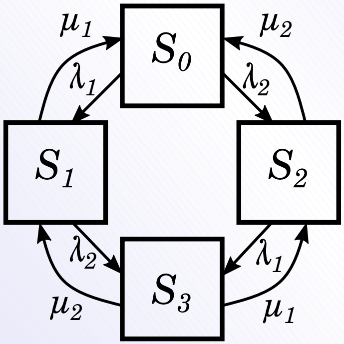


Рисунок 23.2

состояний системы, легко построить математическую модель данного процесса.

В самом деле, пусть рассматривается система S, имеющая n возможных состояний S_1, S_2, …, S_n. Назовем вероятностью i-го состояния вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \tag{23.1}$$

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний, можно найти все вероятности состояний $p_i(t)$ как функции времени. Для этого составляются и решаются так называемые *уравнения Колмогорова* – особого вида дифференциальные уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний.

Покажем на конкретном примере, как эти уравнения составляются. Пусть система имеет четыре состояния: S_1, S_2, S_3, S_4, размеченный граф которых показан на рисунке 23.3. Рассмотрим одну из вероятностей состояний, например $p_1(t)$. Это – вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S_1. Придадим t малое приращение Δt и найдем $p_1(t+\Delta t)$ – вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система будет в состоянии S_1. Как это может произойти? Очевидно, двумя способами: либо 1) в момент t система *уже была0* в состоянии S_1, а за время Δt *не вышла* из него; либо 2) в момент t сиетема была в состоянии S_2, а за время Δt *перешла* из него в S_1.

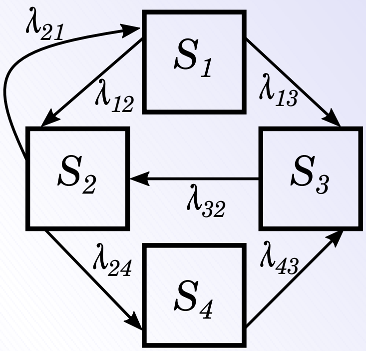


Рисунок 23.3

Найдем вероятность первого варианта. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S_1, равна $p_1(t)$. Эту вероятность нужно умножить на вероятность того, что, находившись в момент t в состоянии S_1, система за время Δt не перейдет из него ни в S_2, ни в S_3. Суммарный поток событий, выводящий систему из состояния S_1, тоже будет простейшим, с интенсивностью $\lambda_{12} + \lambda_{13}$ (при наложении – суперпозиции – двух простейших потоков получается опять простейший поток, так как свойства стационарности, ординарности и отсутствия последействия сохраняются). Значит, вероятность того, что за время Δt система выйдет из состояния S_1, равна $(\lambda_{12} + \lambda_{13})$; вероятность того, что не выйдет: $1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\Delta t$. Отсюда вероятность первого варианта равна $p_1(t)[1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\Delta t]$.

Складывая вероятности обоих вариантов (по правилу сложения вероятностей), получим:

$$p_1(t+\Delta t) = p_1(t)[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t] + p_2(t)\lambda_{21}\Delta t.$$

Раскроем квадратные скобки, перенесем $p_1(t)$ в левую часть и разделим обе части на Δt:

$$\frac{p_1(t+\Delta t)-p_1(t)}{\Delta t} = \lambda_{21}p_2(t) - (\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1(t).$$

Устремим, как и полагается в подобных случаях, Δt к нулю; слева получим в пределе производную функции $p_1(t)$. Таким образом, запишем дифференциальное уравнение для $p_1(t)$:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{21}p_2(t) - (\lambda_{12}+\lambda_{12})p_1(t),$$

или, короче, отбрасывая аргумент t у функций p_1, p_2 (теперь он нам больше уже не нужен):

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda_{21}p_2 - (\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1. \tag{23.2}$$

Рассуждая аналогично для всех остальных состояний, напишем еще три дифференциальных уравнения. Присоединяя к ним уравнение (23.2), получим систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= \lambda_{21}p_2 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1, \\
\frac{dp_2}{dt} &= \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{24} + \lambda_{21})p_2, \\
\frac{dp_3}{dt} &= \lambda_{31}p_1 + \lambda_{43}p_4 - \lambda_{32}p_3, \\
\frac{dp_4}{dt} &= \lambda_{24}p_2 - \lambda_{43}p_4.
\end{aligned}\right\} \qquad (23.3)$$

Это – система четырех линейных дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями p_1, p_2, p_3, p_4. Заметим, что одно из них (любое) можно отбросить, пользуясь тем, что $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$: выразить любую из вероятностей p_i через другие, это выражение подставить в (23.3), а соответствующее уравнение с производной $\frac{dp_i}{dt}$ отбросить.

Сформулируем теперь общее правило составления уравнений Колмогорова. В левой части каждого из них стоит производная вероятности какого-то (i-го) состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, *из которых идут стрелки в данное состояние*, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, *выводящих систему из данного состояния*, умноженная на вероятность данного (i-го) состояния.

Пользуясь этим правилом, запишем уравнения Колмогорова для системы S, размеченный граф состояний которой дан на рисунке 23.3:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_0}{dt} &= \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) p_0,\\
\frac{dp_1}{dt} &= \lambda_1 p_0 + \mu_2 p_3 - (\lambda_2 + \mu_1) p_1,\\
\frac{dp_2}{dt} &= \lambda_2 p_0 + \mu_1 p_3 - (\lambda_1 + \mu_2) p_2,\\
\frac{dp_3}{dt} &= \lambda_2 p_1 + \lambda_1 p_2 - (\mu_1 + \mu_2) p_3.
\end{aligned}\right\} \tag{23.4}$$

Чтобы решить уравнения Колмогорова и найти вероятности состояний, прежде всего, надо задать начальные условия. Если мы точно знаем начальное состояние системы S_i, то в начальный момент (при $t = 0$) $p_i(0) = 1$, а все остальные начальные вероятности равны нулю. Так, например, уравнения (23.4) естественно решать при начальных условиях $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$ (в начальный момент оба узла исправны).

Как решать подобные уравнения? Вообще говоря, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами можно решать аналитически, но это удобно только когда число уравнений не превосходит двух (иногда – трех). Если уравнений больше, обычно их решают численно – вручную или на ЭВМ.

Таким образом, уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени.

Поставим теперь вопрос: что будет происходить свероятностями состояний при $t \to \infty$? Будут ли $p_1(t)$, $p_2(t)$, ... стремиться к каким-то пределам? Если эти пределы существуют и не зависят от начального состояния системы, то они называются *финальными вероятностями состояний*. В теории случайных процессов доказывается, что *если число n состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое, то финальные вероятности существуют).*

Предположим, что это условие выполнено и финальные вероятности существуют:

$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23.5}$$

Финальные вероятности мы будем обозначать теми же буквами p_1, p_2, ..., что и сами вероятности состояний, но разумея под ними уже не переменные величины (функции времени), а постоянные числа. Очевидно, они тоже образуют в сумме единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{23.6}$$

Как понимать эти финальные вероятности? При $t \to \infty$ в системе S устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого система случайным образом меняет свои состояния, но их вероятности уже не зависят от времени. Финальную вероятность состояния S_i можно истолковать как *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии*. Например, если система S имеет три состояния S_1, S_2, S_3 и их финальные вероятности равны $0,2$, $0,3$ и $0,5$, это значит, что в предельном, стационарном режиме система в среднем две десятых времени проводит в состоянии S_1, три десятых – в состоянии S_2 и половину времени – в состоянии S_3.

Как же вычислить финальные вероятности? Очень просто. Если вероятности $p_1, p_2, \ldots$ постоянны, то их производные равны нулю. Значит, чтобы найти финальные вероятности, нужно все левые части в уравнениях Колмогорова положить равными нулю и решить полученную систему уже не дифференциальных, а *линейных алгебраических уравнений*. Можно и не писать уравнений Колмогорова, а прямо по графу состояний написать систему линейных алгебраических уравнений. Если перенести отрицательный член каждого уравнения из правой части в левую, то получим сразу систему уравнений, где слева стоит финальная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, *ведущих из данного состояния*, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, *входящих в i-е состояние*, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Пользуясь этим правилом, напишем линейные алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний системы, граф состояний которой дан на рисунке 23.2:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)p_0&=\mu_1p_1+\mu_2p_2,\\(\lambda_2+\mu_1)p_1&=\lambda_1p_0+\mu_2p_3,\\(\lambda_1+\mu_2)p_2&=\lambda_2p_0+\mu_1p_3,\\(\mu_1+\mu_2)p_3&=\lambda_2p_1+\lambda_1p_2.\end{aligned}\right\}\tag{23.7}$$

Эту систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными p_0, p_1, p_2, p_3, казалось бы, вполне можно решить. Но вот беда: уравнения (23.7) однородны (не имеют свободного члена) и, значит, определяют неизвестные только с точностью до произвольного множителя. К счастью, мы можем воспользоваться так называемым *нормировочным условием*:

$$p_0+p_1+p_2+p_3=1\tag{23.8}$$

и с его помощью, решить систему. При этом одно (любое) из уравнений можно отбросить (оно вытекает как следствие из остальных).

Давайте зададимся численными значениями интенсивностей $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\mu_1=2$, $\mu_2=3$ и решим систему (23.7). Пожертвуем четвертым уравнением, добавив вместо него нормировочное условие (23.8). Уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} 3p_0 &= 2p_1 + 3p_2, \\ 4p_1 &= p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 &= 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (23.9)$$

Решая их, получим:

$$p_0 = 6/15 = 0,40;\ p_1 = 3/15 = 0,20;\ p_2 = 4/15 \approx 0,27;$$

$$p_3 = 2/15 \approx 0,13,$$

т.е. в предельном,стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет проводить в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20% – в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% – в состоянии S_2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% – в состоянии S_3 полной негодности (оба узла ремонтируются). Знание этих финальных вероятностей может помочь оценить среднюю эффективность работы системы и загрузку ремонтных органов. Предположим, что система S в состоянии S_0 (полностью исправная) приносит в единицу времени доход 8 (условных единиц), в состоянии S_1 – доход 3, в состоянии S_2 – доход 5, в состоянии S_3 — вообще не приносит дохода. Тогда в предельном, стационарном режиме средний доход в единицу времени будет

$$W = 0,40 \cdot 8 + 0,20 \cdot 3 + 0,27 \cdot 5 = 5,15.$$

Теперь оценим загрузку ремонтных органов (рабочих), занятых ремонтом узлов 1 и 2. Узел 1 ремонтируется долю времени, равную

$$p_1 + p_3 = 0,20 + 0,13 = 0,33.$$

Узел 2 ремонтируется долю времени $p_2 + p_3 = 0,40$.

Здесь уже может возникнуть вопрос об оптимизации решения. Допустим, что мы можем уменьшить среднее время ремонта того или другого узла (может быть, и того, и другого), но это нам обойдется в какую-то сумму. Спрашивается, «стоит ли овчинка выделки»? Т.е. окупит ли увеличение дохода, связанное с ускорением ремонта, повышенные расходы на ремонт?

Предоставим читателю самостоятельно поставить и решить такую экономическую задачу. При этом ему придется решать систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, но это ничего (характер, как известно, укрепляется в бедствиях!).

ЛЕКЦИЯ 24

Теория массового обслуживания. Задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с работой своеобразных систем, называемых системами массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, магазины, парикмахерские и т.п.

Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц (или «приборов»), которые мы будем называть каналами обслуживания. Каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, кассиры, продавцы, лифты, автомашины и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок (или «требований»), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, вообще говоря, случайное время $T_{\text{об}}$, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).

Предмет теории массового обслуживания – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками – показателями эффективности СМО, описывающими, с той или другой точки зрения, ее способность справляться с потоком заявок. В качестве таких показателей (в зависимости от обстановки и целей исследования) могут применяться разные величины, например: среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит какое-то значение, и т.д. Среди заданных условий работы СМО мы намеренно не выделяем элементов решения: ими могут быть, например, число каналов, их производительность, режим работы СМО и т.д. Важно уметь решать прямые задачи исследования операций, а обратные ставятся и решаются в зависимости от того, какие именно параметры нам нужно выбирать или изменять. Что касается задач оптимизации, то мы ими здесь почти не будем заниматься, разве только в простейших случаях.

Математический анализ работы СМО очень облегчается, если процесс этой работы – марковский. Мы уже знаем, что для этого достаточно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние (потоки заявок, потоки «обслуживаний»), были простейшими. Если это свойство нарушается, то математическое описание процесса становится гораздо сложнее и довести его до явных, аналитических формул удается лишь в редких случаях. Однако все же аппарат простейшей, марковской теории массового обслуживания может пригодиться для приближенного описания работы СМО даже в тех случаях, когда потоки событий – не простейшие. Во многих случаях для принятия разумного решения по организации работы СМО вовсе и не требуется точного знания всех ее характеристик – зачастую достаточно и приближенного, ориентировочного.

Системы массового обслуживания делятся на типы (или классы) по ряду признаков. Первое деление: *СМО с отказами и СМО с очередью*. В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. Примеры СМО с отказами встречаются в телефонии: заявка на разговор, пришедшая в момент, когда все каналы связи заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной. В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной. На практике чаще встречаются (и имеют большее значение) СМО с очередью; недаром теория массового обслуживания имеет второе название: «теория очередей».

СМО с очередью подразделяются на разные виды, в зависимости от того, как организована очередь – ограничена она или не ограничена. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания (так называемые «СМО с нетерпеливыми заявками»). При анализе СМО должна учитываться также и «дисциплина обслуживания» – заявки могут обслуживаться либо в порядке поступления (раньше пришла, раньше обслуживается), либо в случайном порядке. Нередко встречается так называемое *обслуживанием с приоритетом* – некоторые заявки обслуживаются вне очереди. Приоритет может быть как *абсолютным* – когда заявка с более высоким приоритетом «вытесняет» из-под обслуживания заявку с низшим (например, пришедший в парикмахерскую клиент высокого ранга прогоняет с кресла обыкновенного клиента), так и *относительным* – когда начатое обслуживание доводится до конца, а заявка с более высоким приоритетом имеет лишь право на лучшее место в очереди.

Существуют СМО с так называемым *многофазовым* обслуживанием, состоящим из нескольких последовательных этапов или «фаз» (например, покупатель, пришедший в магазин, должен сначала выбрать товар, затем оплатить его в кассе, затем получить на контроле).

Кроме этих признаков, СМО делятся на два класса: «открытые» и «замкнутые». В *открытой* СМО характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии сама СМО (сколько каналов занято). В *замкнутой* СМО – зависят. Например, если один рабочий обслуживает группу станков, время от времени требующих наладки, то интенсивность потока «требований» со стороны станков зависит от того, сколько их уже неисправно и ждет наладки. Это – пример замкнутой СМО. Классификация СМО далеко не ограничивается приведенными их разновидностями, но мы ограничимся ими.

Оптимизация работы СМО может производиться под разными углами зрения: с точки зрения организаторов (или владельцев) СМО или с точки зрения обслуживаемых клиентов. С первой точки зрения желательно «выжать все, что возможно» из СМО и добиться того, чтобы ее каналы были предельно загружены. С точки зрения клиентов желательно всемерное уменьшение очередей, которые зачастую становятся настоящим «бичом быта», приводя к бессмысленной трате сил и времени и, в конечном итоге, к понижению производительности труда. При решении задач оптимизации в теории массового обслуживания существенно необходим «системный подход», полное и комплексное рассмотрение всех последствий каждого решения. Например, с точки зрения клиентов СМО желательно увеличение числа каналов обслуживания; но ведь работу каждого канала надо оплачивать, что удорожает обслуживание. Построение математической модели позволяет решить оптимизационную задачу о разумном числе каналов с учетом всех «за» и «против». Поэтому мы не выделяем в задачах массового обслуживания какого-либо одного показателя эффективности, а сразу ставим эти задачи как многокритериальные.

Все перечисленные выше разновидности СМО (и многие другие, здесь не упомянутые) исследуются в теории массового обслуживания. Однако почти нигде изложение не ведется на должном методическом уровне: выводы часто проводятся излишне сложно; верные (почти всегда) формулы доказываются не лучшим путем). В настоящем (по необходимости кратком) изложении теории массового обслуживания мы приведем два методических приема, позволяющих сильно упростить выводы формул. Этим приемам будет посвящен следующий параграф.

ЛЕКЦИЯ 25

Схема гибели и размножения. Формула Литтла

1. Схема гибели и размножения. Мы знаем, что имея в распоряжении размеченный граф состояний, можно легко написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, а также написать и решить алгебраические уравнения для финальных вероятностей. Для некоторых случаев удается последние уравнения решить заранее, в буквенном виде. В частности, это удается сделать, если граф состояний системы представляет собой так называемую «схему гибели и размножения».

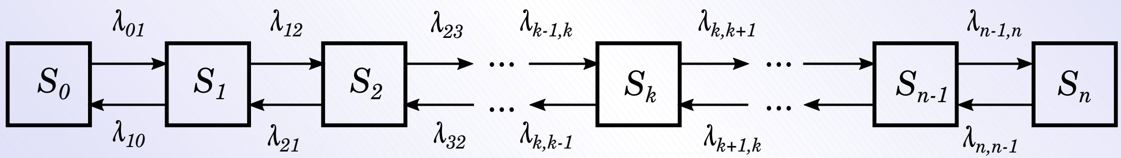


Рисунок 25.1

Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет вид, показанный на рисунке 25.1. Особенность этого графа в том, что все состояния системы можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний ($S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$) связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний – правым и левым, а крайние состояния (S_0, S_n) – только с одним соседним состоянием. Термин «схе-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ма гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается изменение численности популяции.

Схема гибели и размножения очень часто встречается в разных задачах практики, в частности – в теории массового обслуживания, поэтому полезно, один раз и навсегда, найти для нее финальные вероятности состояний.

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, – простейшие (для краткости будем называть и систему S и протекающий в нейпроцесс – простейшими).

Пользуясь графом рисунок 25.1, составим и решим алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний (их существование вытекает из того, что из каждого состояния можно перейти в каждое другое, и число состояний конечно). Для первого состояния S_0 имеем:

$$\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1. \tag{25.1}$$

Для второго состояния S_1:

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2.$$

В силу (25.1) последнее равенство приводится к виду

$$\lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2$$

далее, совершенно аналогично

$$\lambda_{23}p_2 = \lambda_{32}p_3$$

и вообще
$$\lambda_{k-1,k} = \lambda_{k,k-1} p_k,$$
где k принимает все значения от 0 до n. Итак, финальные вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1, \\
\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n-1} p_n,
\end{array}\right\} \qquad (25.2)$$

кроме того, надо учесть нормировочное условие
$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \qquad (25.3)$$

Решим эту систему уравнений. Из первого уравнения (25.2) выразим p_1 через p_0:
$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} p_0. \qquad (25.4)$$

Из второго, с учетом (25.4), получим:
$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \qquad (25.5)$$

из третьего, с учетом (25.5),

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \tag{25.6}$$

и вообще, для любого k (от 1 до n):

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0. \tag{25.7}$$

Обратим внимание на формулу (25.7). В числителе стоит произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо (с начала и до данного состояния S_k), а в знаменателе – произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево (с начала и до S_k).

Таким образом, все вероятности состояний p_0, p_1, …, p_n выражены через одну из них (p_0). Подставим эти выражения в нормировочное условие (25.3). Получим, выноса за скобку p_0:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right) = 1,$$

отсюда получим выражение для p_0:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1} \tag{25.8}$$

(скобку мы возвели в степень -1, чтобы не писать двухэтажных дробей). Все остальные вероятности выражены через p_0 (см. формулы (25.4)–(25.7)). Заметим, что коэффициенты при p_0 в каждой из них представляют собой не что иное, как последовательные члены ряда, стоящего после единицы в формуле (25.8). Значит, вычисляя p_0 мы уже нашли все эти коэффициенты.

Полученные формулы очень полезны при решении простейших задач теории массового обслуживания.

2. Формула Литтла. Теперь мы выведем одну важную формулу, связывающую (для предельного, стационарного режима) среднее число заявок $L_{\text{сист}}$, находящихся в системе массового обслуживания (т.е. обслуживаемых или стоящих в очереди), и среднее время пребывания заявки в системе $W_{\text{сист}}$.

Рассмотрим любую СМО (одноканальную, многоканальную, марковскую, немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью) и связанные с нею два потока событий: поток заявок, *прибывающих* в СМО, и поток заявок, *покидающих* СМО. Если в системе установился предельный, стационарный режим, то среднее число заявок, прибывающих в СМО за единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Обозначим: $X(t)$ – число заявок, прибывших в СМО до момента t, $Y(t)$ – число заявок, покинувших СМО до момента t. И та, и другая функции являются случайными и меняются скачком (увеличиваются на единицу) в моменты приходов заявок ($X(t)$) и уходов заявок ($Y(t)$). Вид функций $X(t)$ и $Y(t)$ показан на рисунке 25.2; обе линии – ступенчатые, верхняя – $X(t)$ нижняя – $Y(t)$. Очевидно, что для любого момента t их разность $Z(t) = X(t) - Y(t)$ есть не что иное, *как число заявок находящихся в СМО*. Когда линии $X(t)$ и $Y(t)$ сливаются, в системе нет заявок.

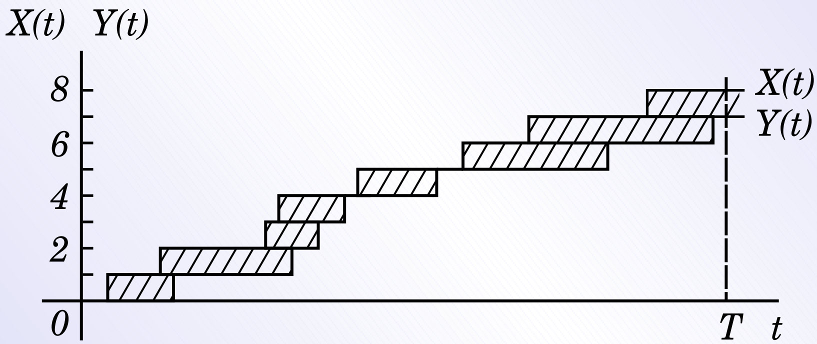


Рисунок 25.2

Рассмотрим очень большой промежуток времени T (мысленно продолжив график далеко за пределы чертежа) и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Оно будет равно интегралу от функции $Z(t)$ на этом промежутке, деленному на длину интервала T:

$$L_{\text{сист}} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T Z(t)dt. \tag{25.9}$$

Но этот интеграл представляет собой не что иное, как площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 25.2. Разглядим хорошенько этот рисунок. Фигура состоит из прямоугольников, каждый из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени пребывания в системе соответствующей заявки (первой, второй и т.д.). Обозначим эти времена t_1, t_2, ... Правда, под конец промежутка T некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью, а частично, но при достаточно большом T эти мелочи не будут играть роли. Таким образом, можно считать, что

$$\int\limits_0^T Z(t)dt = \sum_i t_i, \tag{25.10}$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время T.

Разделим правую и левую часть (25.10) на длину интервала T. Получим, с учетом (25.9),

$$L_{\text{сист}} = \frac{1}{T} \sum_i t_i. \tag{25.11}$$

Разделим и умножим правую часть (25.11) на интенсивность λ:

$$L_{\text{сист}} = \frac{1}{T\lambda} \sum_i t_i \cdot \lambda.$$

Но величина $T\lambda$ есть не что иное, как *среднее число заявок пришедших за время* T. Если мы разделим сумму всех времен t_i на среднее число заявок, то получим *среднее время пребывания заявки в системе* $W_{\text{сист}}$. Итак,

$$L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}},$$

откуда

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}. \qquad (25.12)$$

Это и есть замечательная *формула Литтла*: для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания *среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Точно таким же образом выводится вторая формула Литтла, связывающая среднее время пребывания заявки *в очереди* $W_{\text{оч}}$ и среднее число заявок в *в очереди* $L_{\text{оч}}$:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}. \qquad (25.13)$$

Для вывода достаточно вместо нижней линии на рисунке 25.2 взять функцию $U(t)$ – количество заявок, ушедших до момента t не из системы, а из очереди (если заявка, пришедшая в систему, не становится в очередь, а сразу идет под обслуживание, можно все же считать, что она становится в очередь, но находится в ней нулевое время).

Формулы Литтла (25.12) и (25.13) играют большую роль в теории массового обслуживания. К сожалению, в большинстве существующих руководств эти формулы (доказанные в общем виде сравнительно недавно) не приводятся.

ЛЕКЦИЯ 26

Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики

В этой лекции мы рассотрим некоторые простейшие СМО и выведем выражения для их характеристики (показателей эффективности). При этом мы продемонстрируем основные методические приемы, характерные для элементарной, «марковской» теории массового обслуживания. Наша цель – познакомить с некоторыми «маленькими хитростями», облегчающими путь сквозь теорию массового обслуживания, которая в ряде имеющихся (даже претендующих на популярность) книг может показаться бессвязным набором примеров.

Все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние в данной лекции мы будем считать простейшими (не оговаривая это каждый раз специально). В их числе будет и так называемый «поток обслуживаний». Под ним разумеется *поток обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом*. В этом потоке интервал между событиями, как и всегда в простейшем потоке, имеет показательное распределение (во многих руководствах вместо этого говорят: «время обслуживания – показательное», мы и сами в дальнейшем будем пользоваться таким термином). В данном лекции показательное распределение времени обслуживания будет само собой разуметься, как всегда для «простейшей» системы.

Характеристики эффективности рассматриваемых СМО мы будем вводить по ходу изложения.

1. n-канальная СМО с отказами (задача Эрланга).

Здесь мы рассмотрим одну из первых по времени, «классических» задач теории массового обслуживания; эта задача возникла из практических нужд телефонии и была решена в начале XX века датским математиком Эрлангом. Задача ставится так: имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интесивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания $\overline{t}_{\text{об}}$). Найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

A – абсолютную пропускную способность, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q – относительную пропускную способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа, т.е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;

$\overline{k}$ – среднее число занятых каналов.

Решение. Состояния системы S (СМО) будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

S_0 – в СМО нет ни одной заявки,

S_1 – в СМО находится одна заявка (один канал занят, остальные свободны),

. . . .

S_k – в СМО находится k заявок (k каналов заняты, остальные свободны),

. . . .

S_n – в СМО находится n заявок (все n каналов заняты).

Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения (рисунок 26.1). Разметим этот граф – проставим у стрелок интенсивности потоков событий. Из S_0 в S_1 систему переводит поток заявок с интенсив-

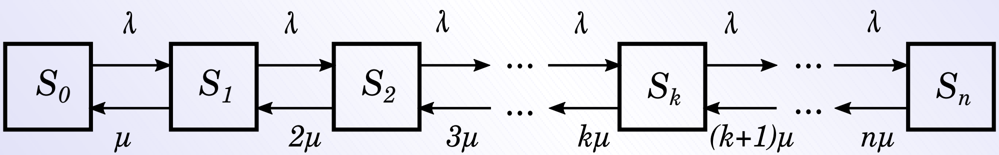


Рисунок 26.1

ностью λ (как только приходит заявка, система перескакивает из S_0 в S_1). Тот же поток заявок переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое (см. верхние стрелки на рисунке 26.1).

Проставим интенсивности у нижних стрелок. Пусть система находится в состоянии S_1 (работает один канал). Он производит μ обслуживаний в единицу времени. Проставляем у стрелки $S_1 \to S_0$ интенсивность μ. Теперь представим себе, что система находится в состоянии S_2 (работают два канала). Чтобы ей перейти в S_1, нужно, чтобы либо закончил обслуживание первый канал, либо второй; суммарная интенсивность их потоков обслуживаний равна 2μ; проставляем ее у соответствующей стрелки. Суммарный поток обслуживаний, даваемый тремя каналами, имеет интенсивность 3μ, k каналами – $k\mu$. Проставляем эти интенсивности у нижних стрелок на рисунке 26.1.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2\cdot 3\mu^3} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}. \qquad (26.1)$$

Члены разложения $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda^2}{2\mu^2}$, …, $\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ будут представлять собой коэффициcнты при p_0 в выражениях для p_1, p_2, …, p_n:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0,\ p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}p_0,\ \ldots,\ p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k}p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}. \qquad (26.2)$$

Заметим, что в формулы (26.1), (26.2) интенсивности λ и μ входят не по отдельности, а только в виде отношения λ/μ. Обозначим

$$\lambda/\mu = \rho \qquad (26.3)$$

и будем называть величину ρ «приведенной интенсивностью потока заявок». Ее смысл – *среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки*. Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы (26.1), (26.2) в виде:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \tag{26.4}$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0,\ \ldots,\ p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0. \tag{26.5}$$

Формулы (26.4), (26.5) для финальных верятностей состояний называются *формулами Эрланга* – в честь основателя теории массового обслуживания. Большинство других формул этой теории не носит никаких специальных имен.

Таким образом, финальные вероятности найдены. По ним мы вычислим характеристики эффективности СМО. Сначала найдем $P_{\text{отк}}$ – вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена). Для этого нужно, чтобы все n каналов были заняты, значит,

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0. \tag{26.6}$$

Отсюда находим относительную пропускную способность – вероятность того, что заявка будет обелужена:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0. \tag{26.7}$$

Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \tag{26.8}$$

Осталось только найти среднее число занятых каналов $\overline{k}$. Эту величину можно было бы найти «напрямую», как математическое ожидание дискретной случайной величины с возможными значениями 0, 1, ..., n и вероятностями этих значений p_0, p_1, ..., p_n:

$$\overline{k} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + n \cdot p_n.$$

Подставляя сюда выражения (26.5) для p_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и выполняя соответствующие преобразования, мы, в конце концов, получили бы верную формулу для $\overline{k}$. Но мы выведем ее гораздо проще (вот она, одна из «маленьких хитростей»!) В самом деле, нам известна абсолютная пропускная способность A. Это – не что иное, как интенсивность потока *обслуженных системой* заявок. Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок. Значит, среднее число занятых каналов равно

$$\overline{k} = A/\mu, \tag{26.9}$$

или, учитывая (26.8),

$$\overline{k} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \tag{26.10}$$

Рекомендуем читателю самостоятельно решить пример. Имеется станция связи с тремя каналами ($n = 3$), интенсивность потока заявок $\lambda = 1,5$ (заявки в минуту); среднее время обслуживания одной заявки $\overline{t_{об}} = 2$ минуты, все потоки событий – простейшие. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{отк}$, $\overline{k}$. На всякий случай сообщаем ответы: $p_0 = 1/13$, $p_1 = 3/13$, $p_2 = 9/26$, $p_3 = 9/26 \approx 0,346$, $A \approx 0,981$, $Q \approx 0,654$, $P_{отк} \approx 0,346$, $\overline{k} \approx 1,96$.

Из ответов видно, между прочим, что наша СМО в значительной мере перегружена: из трех каналов занято в среднем около двух, а из поступающих заявок около 35% остаются необслуженными. Предлагаем читателю, если он любопытен и неленив, выяснить: сколько потребуется каналов для того, чтобы удовлетворить не менее 80% поступающих заявок? И какая доля каналов при этом будет простаивать?

Тут уже проглядывает некоторый намек на *оптимизацию*. В самом деле, содержание каждого канала в единицу времени обходится в какую-то сумму. Вместе с тем, каждая обслуженная заявка приносит какой-то доход. Умножая этот доход на среднее число заявок A, обслуживаемых в единицу времени, мы получим средний доход от СМО в единицу времени. Естественно, при увеличении числа каналов этот доход растет, но растут и расходы, связанные с содержанием каналов. Что перевесит – увеличение доходов или расходов? Это зависит от условий операции, от «платы за обслуживание заявки» и от стоимости содержания канала.

Зная эти величины, можно найти оптимальное число каналов, наиболее эффективное экономически.

2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью. На практике довольно часто встречаются одноканальные СМО с очередью (врач, обслуживающий пациентов; ЭВМ, выполняющая заказы пользователей). В теории массового обслуживания одноканальные СМО с очередью также занимают особое место (именно к таким СМО относится большинство полученных до сих пор аналитических формул для немарковских систем). Поэтому мы уделим одноканальной СМО с очередью особое внимание.

Пусть имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). На эту СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ; поток обслуживаний имеет интенсивность μ, обратную среднему времени обслуживания заявки $\bar{t}_{\text{об}}$. Требуется найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

$L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе,

$W_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в системе,

$L_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди,

$W_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания заявки в очереди,

$P_{\text{зан}}$ – вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Что касается абсолютной пропускной способности A и относительной Q, то вычислять их нет надобности: в силу того, что очередь неограниченна, каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому $A = \lambda$, по той же причине $Q = 1$.

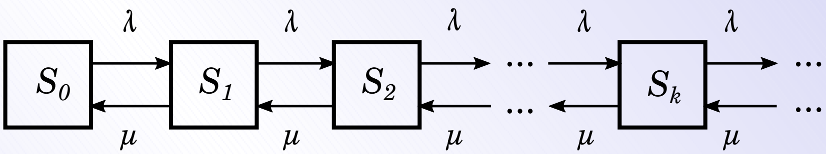


Рисунок 26.2

Решение. Состояния системы, как и раньше, будем нумеровать по числу заявок, находящихся в СМО:

S_0 – канал свободен,

S_1 – канал занят (обслуживает заявку), очереди нет,

S_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди,

. . . .

S_k – канал занят, $k - 1$ заявок стоят в очереди,

. . . .

Теоретически число состояний ничем не ограничено (бесконечно). Граф состояний имеет вид, показанный на рисунке 26.2. Это – схема гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний. По всем стрелкам поток заявок с интенсивностью λ переводит систему слева направо, а справа налево – поток обслуживаний с интенсивностью μ.

Прежде всего спросим себя, а существуют ли в этом случае финальные вероятности? Ведь число состояний системы бесконечно, и, в принципе, при $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать! Да, так оно и есть: финальные вероятности для такой СМО существуют не всегда, а только когда система не перегружена. Можно доказать, что если ρ строго меньше единицы ($\rho < 1$), то финальные вероятности существуют, а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно. Особенно «непонятным» кажется этот факт при $\rho = 1$. Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований: за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке, а вот на деле – не так. При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот – регулярен, и время обслуживания – тоже не случайное, равное интервалу между заявками. В этом «идеальном» случае очереди в СМО вообще не будет, канал будет непрерывно занят и будет регулярно выпускать обслуженные заявки. Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайными – и очередь уже будет расти до бесконечности. На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» – абстракция. Вот к каким грубым ошибкам может привести замена случайных величин их математическими ожиданиями!

Но вернемся к нашей одноканальной СМО с неограниченной очередью. Строго говоря, формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения выводились нами только для случая конечного числа состояний, но позволим себе вольность – воспользуемся ими и для бесконечного числа состояний. Подсчитаем финальные вероятности состояний по формулам (25.8), (25.7). В нашем случае число слагаемых в формуле (25.8) будет бесконечным. Получим выражение для p_0:

$$p_0 = [1+\lambda/\mu+(\lambda/\mu)^2+\ldots+(\lambda/\mu)^k+\ldots]^{-1} = (1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^k+\ldots)^{-1}. \tag{26.11}$$

Ряд в формуле (26.11) представляет собой геометрическую прогрессию. Мы знаем, что при $\rho < 1$ ряд сходится – это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем ρ. При $\rho > 1$ ряд расходится (что является косвенным, хотя и не строгим доказательством того, что финальные вероятности состояний p_0, p_1, …, p_k, … существуют только при $\rho < 1$). Теперь предположим, что это условие выполнено, и $\rho < 1$. Суммируя прогрессию в (26.11), имеем

$$1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^k+\ldots = \frac{1}{1-\rho},$$

откуда

$$p_0 = 1-\rho. \tag{26.12}$$

Вероятности p_0, p_1, …, p_k, … найдутся по формулам:

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0,\ \ldots,\ p_k = \rho^k p_0,\ \ldots,$$

откуда, с учетом (26.12), найдем окончательно:

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho),\ \ldots,\ p_k = \rho^k(1-\rho),\ \ldots \tag{26.13}$$

Как видно, вероятности p_0, p_1, ..., p_k, ... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем ρ. Как это ни странно, максимальная из них p_0 – вероятность того, что канал будет вообще свободен. Как бы ни была нагружена система с очередью, если только она вообще справляется с потоком заявок ($\rho < 1$), самое вероятное число заявок в системе будет 0.

Найдем среднее число заявок в СМО $L_{\text{сист}}$. Тут придется немного повозиться. Случайная величина Z – число заявок в системе – имеет возможные значения 0, 1, 2, ..., k, ... с вероятностями p_0, p_1, p_2, ..., p_k, ... Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + k \cdot p_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \qquad (26.14)$$

(сумма берется не от 0 до ∞, а от 1 до ∞, так как нулевой член равен нулю).

Подставим в формулу (26.14) выражение для p_k (26.13):

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k (1 - \rho).$$

Теперь вынесем за знак суммы $\rho(1 - \rho)$:

$$L_{\text{сист}} = \rho(1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}.$$

Тут мы опять применим «маленькую хитрость»: $k\rho^{k-1}$ есть не что иное, как *производная по* ρ от выражения ρ^k; значит,

$$L_{\text{сист}} = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k.$$

Меняя местами операции дифференцирования и суммирования, получим:

$$L_{\text{сист}} = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k. \tag{26.15}$$

Но сумма в формуле (26.15) есть не что иное, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом ρ и знаменателем ρ; эта сумма равна $\frac{\rho}{1-\rho}$, а ее производная $\frac{1}{(1-\rho)^2}$. Подставляя это выражение в (26.15), получим:

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{26.16}$$

Ну, а теперь применим формулу Литтла (25.12) и найдем среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}. \tag{26.17}$$

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$. Будем рассуждать так: число заявок в очереди равно числу заявок в системе минус число заявок, находящихся под обслуживанием. Значит (по правилу сложения математических ожиданий), среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием. Число заявок под обслуживанием может быть либо нулем (если канал свободен), либо единицей (если он занят). Математическое ожидание такой случайной величины равно вероятности того, что канал занят (мы ее обозначили $P_{\text{зан}}$). Очевидно, $P_{\text{зан}}$ равно единице минус вероятность p_0 того, что канал свободен:

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = \rho. \tag{26.18}$$

Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно

$$L_{\text{об}} = \rho, \tag{26.19}$$

отсюда

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

и окончательно

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{26.20}$$

По формуле Литтла (25.13) найдем среднее время пребывания заявки в очереди:

$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{26.21}$$

Таким образом, все характеристики эффективности СМО найдены.

Предложим читателю самостоятельно решить пример: одноканальная СМО представляет собой железнодорожную сортировочную станцию, на которую поступает простейший поток составов с интенсивностью $\lambda = 2$ (состава в час). Обслуживание (расформирование) состава длится случайное (показательное) время со средним значением $\bar{t}_{\text{об}} = 20$ (минут). В парке прибытия станции имеются два пути, на которых могут ожидать обслуживания прибывающие составы; если оба пути заняты, составы вынуждены ждать на внешних путях. Требуется найти (для предельного, стационарного режима работы станции): среднее число составов $L_{\text{сист}}$, связанных со станцией, среднее время $W_{\text{сист}}$ пребывания состава при станции (на внутренних путях, на внешних путях и под обслуживанием), среднее число $W_{\text{оч}}$ составов, ожидающих очереди на расформирование (все равно, на каких путях), среднее время $W_{\text{оч}}$ пребывания состава на очереди. Кроме того, попытайтесь найти среднее число составов, ожидающих расформирования на внешних путях $L_{\text{внеш}}$ и среднее время этого ожидания $W_{\text{внеш}}$ (две последние величины связаны формулой Литтла). Наконец, найдите суммарный суточный штраф Ш, который придется заплатить станции за простои составов на внешних путях, если за один час простоя одного состава станция платит штраф a (рублей). На всякий случай сообщаем ответы: $L_{\text{сист}} = 2$ (состава), $W_{\text{сист}} = 1$ (час), $L_{\text{оч}} = 4/3$ (состава), $W_{\text{оч}} = 2/3$ (часа), $L_{\text{внеш}} = 16/27$ (состава), $W_{\text{внеш}} = 8/27 \approx 0,297$ (часа). Средний суточный штраф Ш за ожидание составов на внешних путях получим, перемножая среднее

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

число составов, прибывающих на станцию за сутки, среднее время ожидания состава на внешних путях и часовой штраф a: Ш $\approx 14,2a$.

3. n-канальная СМО с неограниченной очередью. Совершенно аналогично задаче 2, но чуточку более сложно, решается задача об n-канальной СМО с неограниченной очёредью. Нумерация состояний – опять по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 – в СМО заявок нет (все каналы свободны),

S_1 – занят один канал, остальные свободны,

S_2 – занято два канала, остальные свободны,

. . . .

S_k – занято k каналов, остальные свободны,

. . . .

S_n – заняты все n каналов (очереди нет),

S_{n+1} – заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди,

. . . .

S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди,

. . . .

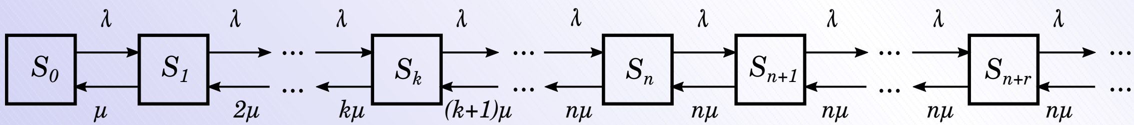


Рисунок 26.3

Граф состояний показан на рисунке 26.3. Предлагаем читателю самому обдумать и обосновать значения интенсивностей, проставленных у стрелок. Граф на рисунке 26.3 есть схема гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний. Сообщим без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n < 1$. Если $\rho/n \geq 1$, очередь растет до бесконечности.

Предположим, что условие $\rho/n < 1$ выполнено, и финальные вероятности существуют. Применяя все те же формулы (25.8), (25.7) для схемы гибели и размножения, найдем эти финальные вероятности. В выражении для p_0 будет стоять ряд членов, содержащих факториалы, плюс сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем ρ/n. Сумируя ее, найдем

$$\left.\begin{aligned} &p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}, \\ &p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0, \\ &p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (26.22)$$

Теперь найдем характеристики эффективности СМО. Из них легче всего находится среднее число занятых каналов $\overline{k} = \lambda/\mu = \rho$ (это вообще справедливо для любой СМО с неограниченной очередью). Найдем среднее число заявок в системе $L_{\text{сист}}$ и среднее число заявок в очереди

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$L_{\text{оч}}$. Из них легче вычислить второе, по формуле $L_{\text{оч}} = \sum\limits_{r=1}^{\infty} rp_{n+r}$; выполняя соответствующие преобразования по образцу задачи 2 (с дифференцированием ряда), получим:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!\,(1 - \rho/n)^2}. \tag{26.23}$$

Прибавляя к нему среднее число заявок под обслуживанием (оно же – среднее число занятых каналов) $\overline{k} = \rho$, получим:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \rho. \tag{26.24}$$

Деля выражения для $L_{\text{оч}}$ и $L_{\text{сист}}$ на λ, по формуле Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}. \tag{26.25}$$

А теперь решим любопытный пример. Железнодорожная касса по продаже билетов с двумя окошками представляет собой двухканальную СМО с неограниченной очередью, устанавливающейся сразу к двум окошкам (если одно окошко освобождается, ближайший в очереди клиент его занимает). Касса продает билеты в два пункта: A и B. Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билет) для обоих пунктов A и B одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0,45$ (пассажира в минуту), а в сумме они образуют общий поток заявок с интенсивностью

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$\lambda_A + \lambda_B = 0,9$. Кассир тратит на обслуживание пассажира в среднем две минуты. Опыт показывает, что у кассы скапливаются очереди, пассажиры жалуются на медленность обслуживания. Поступило рационализаторское предложение: вместо одной кассы, продающей билеты и в A и в B, создать две специализированные кассы (по одному окошку в каждой), продающие билеты одна – только в пункт A, другая – только в пункт B. Разумность этого предложения вызывает споры – кое-кто утверждает, что очереди останутся прежними. Требуется проверить полезность предложения расчетом. Так как мы умеем считать характеристики только для простейших СМО, допустим, что все потоки событий – простейшие (на качественной стороне выводов это не скажется).

Ну, что же, возьмемся за дело. Рассмотрим два варианта организации продажи билетов – существующий и предлагаемый.

Вариант 1 (существующий). На двух канальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0,9$; интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1/2 = 0,5$; $\rho = \lambda/\mu = 1,8$. Так как $\rho/2 = 0,9 < 1$, финальные вероятности существуют. По первой формуле (26.22) находим $p_0 \approx 0,0525$. Среднее число заявок в очереди находим по формуле (26.23): $L_{\text{оч}} \approx 7,68$; среднее время, проводимое заявкой в очереди (по первой из формул (26.25)), равно $W_{\text{оч}} \approx 8,54$ (минут).

Вариант 2 (предлагаемый). Надо рассмотреть две одноканальные СМО (два специализированных окошка); на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0,45$; и по-прежнему равно $0,5$; $\rho = \lambda/\mu =$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Вперёд

Закрыть

$0,9 < 1$; финальные вероятности существуют. По формуле (26.21) находим среднюю длину очереди (к одному окошку) $L_{оч} = 8,1$.

Вот тебе и раз! Длина очереди, оказывается, нетолько не уменьшилась, а увеличилась! Может быть, уменьшилось среднее время ожидания в очереди? Посмотрим. Деля $L_{оч} = 0,45$, получим $W_{оч} \approx 18$ (минут).

Вот так рационализация! Вместо того чтобы уменьшиться, и средняя длина очереди, и среднее время ожидания в ней увеличились!

Давайте попробуем догадаться, почему так произошло? Пораскинув мозгами, приходим к выводу: произошло это потому, что в первом варианте (двух канальная СМО) меньше средняя доля времени, которую простаивает каждый из двух кассиров: если он не занят обслуживанием пассажира, покупающего билет впункт A, он может заняться обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт B, и наоборот. Во втором варианте такой взаимозаменяемости нет: незанятый кассир просто сидит, сложа руки...

– Ну, ладно, – готов согласиться читатель, – увеличение можно объяснить, но почему оно такое существенное? Нет ли тут ошибки в расчете?

И на этот вопрос мы ответим. Ошибки нет. Дело в том, что в нашем примере обе СМО работают на пределе своих возможностей; стоит немного увеличить время обслуживания (т.е. уменьшить μ), как они уже перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно возрастать. А «лишние простои» кассира в каком-то смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Таким образом, кажущийся сначала парадоксальным (или даже просто неверным) результат вычислений оказывается на поверку правильным и объяснимым.

Такого рода парадоксальными выводами, причина которых отнюдь не очевидна, богата теория массового обслуживания.

Размышляя над последней задачей, читатель может поставить вопрос так: ведь если касса продает билеты только в один пункт, то, естественно, время обслуживания должно уменьшиться, ну, и не вдвое, а хоть сколько-нибудь, а мы считали, что оно по-прежнему в среднем равно 2 минуты. Предлагаем такому придирчивому читателю ответить на вопрос: а насколько надо его уменьшить, чтобы «рационализаторское предложение» стало выгодным? Снова мы встречаемся хотя и с элементарной, но все же задачей оптимизации. С помощью ориентировочных расчетов даже на самых простых, марковских моделях удается прояснить качественную сторону явления – как выгодно поступать, а как – невыгодно.

После того, как мы ознакомились с приемами вычисления финальных вероятностей состояний и характеристик эффективности для простейших СМО (овладели схемой гибели и размножения и формулой Литтла), ему можно предложить для самостоятельного рассмотрения еще две простейшие СМО.

4. Одноканальная СМО с ограниченной очередью. Задача отличается от задачи 2 только тем, что число заявок в очереди ограничено (не может превосходить некоторого заданного m). Если новая заявка приходит в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной (получает отказ). Надо найти финальные вероятности состояний (кстати, они в этой задаче существуют при любом ρ – ведь число состояний конечно), вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, абсолютную пропускную способность A, вероятность того, что канал занят $P_{\text{зан}}$, среднюю длину очереди $L_{\text{оч}}$, среднее число заявок в СМО $L_{\text{сист}}$, среднее время ожидания в очереди $W_{\text{оч}}$, среднее время пребывания заявки в СМО $W_{\text{сист}}$. При вычислении характеристик очереди можно пользоваться тем же приемом, какой мы применяли в задаче 2, с той разницей, что суммировать надо не бесконечную прогрессию, а конечную.

5. Замкнутая СМО с одним каналом и m источниками заявок. Для конкретности поставим задачу в следующей форме: один рабочий обслуживает m станков, каждый из которых время от времени требует наладки (исправления). Интенсивность потока требований каждого работающего станка равна λ. Если станок вышел из строя в момент, когда рабочий свободен, он сразу же поступает на обслуживание. Если он вышел из строя в момент, когда рабочий занят, он становится в очередь и ждет, пока рабочий освободится. Среднее время наладки станка $\bar{t}_{\text{об}} = 1/\mu$. Интенсивность потока заявок, поступающих к рабочему, зависит от того, сколько станков работает. Если работает k станков, она равна $k\lambda$. Найти финальные вероятности состояний, среднее число работающих станков и вероятность того, что рабочий будет занят.

Заметим, что и в этой СМО финальные вероятности будут существовать при любых значения λ и $\mu = 1/\bar{t}_{\text{об}}$ так как число состояний системы конечно.

Лабораторное занятие 8

1. На станции технического обслуживания (СТО) автомобилей работает одиа бригада рабочих с интенсивностью $\mu = 0,5$. Поток машин, прибывающих на СТО, является пуассоновским с параметром $\lambda = 1$. Если система СТО занята, то клиент (водитель машины) уезжает. Найти характеристики системы p_0, $p_{\text{об}}$, p_1, $p_{\text{отк}}$, Q, A, $T_{\text{об}}$, $T_{\text{пр}}$.

2. В офике банка работают $m = 3$ сотрудников, производительность каждого из них при обслуживании клиента равна $\mu = 0,9$. Клиенты прибывают для совершения деловых операций с интенсивностью $\lambda = 2,5$. Если все сотрудники банка заняты, то клиент уходит в другой банк. Найти характеристики системы p_k, $p_{\text{отк}}$, Q, A, $\overline{k}$.

3. В парикмахерской работают две девушки $n = 2$, каждая из которых обслуживает клиента в течение времени $\overline{t_{\text{об}}} = 30$ минут. Поступающий поток клиентов является пуассоновским с параметром $\lambda = 2$. Если очередь большая $m \geq 6$, то клиент уходит. Найти характеристики системы p_0, p_4, $p_{\text{отк}}$, $L_{\text{ож}}$, W.

4. Решить предыдущую задачу при $n = 1$.

5. В стоматологической поликлинике работают 2 врача ($n = 2$), причем каждый из них обслуживает клиента в среднем за время $\overline{t_{\text{об}}} = 20$ минут. Поступающий поток клиентов (больных) является пуассоновским с параметром $\lambda = 1$ (человека часов). Так как у клиента другого

выхода нет, то он будет ожидать обслуживания неопределенно долго. Найти параметры сформулированной СМО Q, A, $L_{\text{ож}}$, W.

6. Решить предыдущую залачу при $n = 1$.

ЛЕКЦИЯ 27

Элементы динамического программирования. Примеры задач динамического программирования, их особенности и геометрическая интерпретация

Основные понятия. *Динамическое программирование* (иначе – *динамическое планирование*) – это метод нахождения оптимальных решений в задачах с многошаговой (многоэтапной) структурой. Многие экономические процессы расчленяются на шаги естественным образом. Это все процессы планирования и управления, развивающиеся во времени. Естественным шагом в них может быть год, квартал, месяц, декада, неделя, день и т.д. Однако метод динамического программирования может использоваться при решении задач, где время вообще не фигурирует; разделение на шаги в таких задачах вводится искусственно. Поэтому "динамика" задач динамического программирования заключается в методе решения.

В экономической практике встречается несколько типов задач, которые по постановке или способу решения относятся к задачам динамического программирования. Это задачи оптимального перспективного и текущего планирования во времени. Их решают либо путем составления комплекса взаимосвязанных статических моделей для каждого периода, либо путем составления единой динамической задачи оптимального программирования с применением многошаговой процедуры принятия решений. К задачам динамического программирования следует отнести задачи многошагового нахождения оптимума при размещении производительных сил, а также оптимального быстродействия. Смысл задач последнего типа состоит в следующем. Известна некоторая оптимальная структура производства с эффективностью Z_1. В начальный момент времени существует неоптимальная структура с эффективностью Z_0. Необходимо определить такие управляющие воздействия, которые за кратчайший период переведут структуру из начального положения в оптимальное (задача оптимальной перестройки).

Особенности задач динамического программирования. На основании приведенных примеров можно выделить типичные особенности многошаговых задач.

1. Рассматривается система, состояние которой на каждом шаге определяется вектором x_t. Дальнейшее изменение ее состояния зависит только от данного состояния x_t и не зависит от того, каким путем система пришла в него. Такие процессы называются процессами без последействия.

2. На каждом шаге выбирается одно решение u_t, под действием которого система переходит из предыдущего состояния x_{t-1} в новое x_t. Это новое состояние является функцией состояния на начало интервала x_{t-1} и принятого в начале интервала решения u_t, т.е.

$$x_t = x_t(x_{t-1}, u_t).$$

3. Действие на каждом шаге связано с определенным выигрышем (доходом, прибылью) или потерей (издержками), которые зависят от состояния на начало шага (этапа) и принятого решения.

4. На векторы состояния и управления могут быть наложены ограничения, объединение которых составляет область допустимых решений $u \in \Omega$.

5. Требуется найти такое допустимое управление и, для каждого шага t, чтобы получить экстремальное значение функции цели за все T шагов.

Любую допустимую последовательность действий для каждого шага, переводящую систему из начального состояния в конечное, называют *стратегией управления*. Допустимая стратегия управления, доставляющая функции цели экстремальное значение, называется оптимальной.

Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования состоит в следующем. Пусть n — размерность пространства состояний. В каждый момент времени координаты системы имеют вполне определенные значения. С изменением времени t могут изменяться значения координат вектора состояния. Назовем переход системы из одного состояния в другое траекторией ее движения в пространстве состояний. Такой переход осуществляется воздействием на координаты состояния. Пространство, в котором координатами служат состояния системы, называется фазовым. Особенно наглядно задачу динамического программирования можно интерпретировать в случае, если пространство состояний двухмерно.

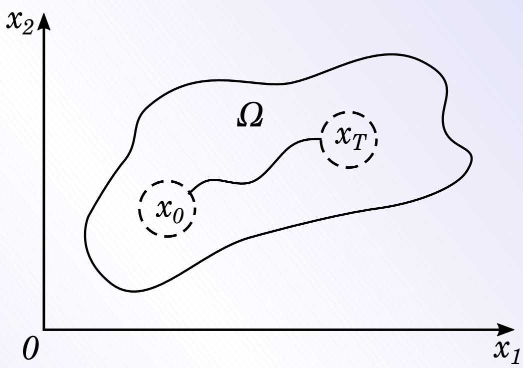


Рисунок 27.1

Область возможных состояний в этом случае изобразится некоторой фигурой Ω, начальное и конечное состояния системы – точками x_0, $x_T \in \Omega$ (рисунок 27.1). *Управление* – это воздействие, переводящее систему из начального состояния в конечное. Для многих экономических задач не известно начальное либо конечное состояние, а известна область X_0 или X_T, которой эти точки принадлежат. Тогда допустимые управления переводят точки из области X_0 в X_T. Задача динамического программирования геометрически может быть сформулирована следующим образом: найти такую фазовую траекторию, начинающуюся в области X_0 и оканчивающуюся в области X_T, для которой функция цели достигает экстремального значения. Если в задаче динамического программирования известны начальное и конечное состояния, то говорят о задаче с закрепленными концами. Если известны начальные и конечные области, то говорят о задаче со свободными концами.

ЛЕКЦИЯ 28

Принципы динамического программирования. Функциональные уравнения Беллмана

Принцип оптимальности и погружения. Любую многошаговую задачу можно решать по-разному. Во-первых, можно считать неизвестными величинами u_t и находить экстремум целевой функции одним из существующих методов оптимизации, т.е. искать сразу все элементы решения на всех N шагах. Отметим, что этот путь не всегда приводит к цели, особенно когда целевая функция задана в виде таблиц или число переменных очень велико. Второй путь основан на идее проведения оптимизации поэтапно. Поэтапность отнюдь не предполагает изолированности в оптимизации этапов. Наоборот, управление на каждом шаге выбирается с учетом всех его последствий. Обычно второй способ оптимизации оказывается проще, чем первый, особенно при большом числе шагов. Идея постепенной, пошаговой оптимизации составляет суть метода динамического программирования. Оптимизация одного шага, как правило, проще оптимизации всего процесса в целом. Лучше много раз решать сравнительно простую задачу, чем один раз – сложную.

С первого взгляда идея может показаться тривиальной: если трудно оптимизировать сложную задачу, то следует разбить ее на ряд более простых. На каждом шаге оптимизируется задача меньшего размера, что уже нетрудно. При этом принцип динамического программирования вовсе не предполагает, что каждый шаг оптимизируется изолированно, независимо от других. Напротив, пошаговое управление должно выбираться с учетом всех его последствий.

Пусть, например, планируется работа группы промышленных предприятий, из которых одни заняты выпуском предметов потребления, а другие производят для этого машины. Задачей является получение за T лет максимального объема выпуска предметов потребления. Пусть планируются капиталовложения на первый год. Исходя из узких интересов этого года, мы должны были бы все средства вложить в производство предметов потребления, пустить имеющиеся машины на полную мощность и добиться к концу года максимального объема выпуска продукции. Однако относительно всего периода планирования такое решение будет нерациональным. Необходимо выделить часть средств на производство машин. При этом объем продукции за первый год снизится, зато будут созданы условия, позволяющие увеличить ее выпуск в последующие годы.

Приведем второй пример. Пусть прокладывается участок железнодорожного пути между пунктами A и B. Различные варианты трассы требуют неодинаковых затрат в связи с неоднородностью грунта, особенностями рельефа, естественными препятствиями и т.д. Требуется так провести дорогу из A в B, чтобы суммарные затраты на ее сооружение были минимальны.

Отметим, что в данной задаче нет естественного деления на шаги. Это деление вводится искусственно, для чего расстояние между A и B разбивается на N частей и за шаг оптимизации принимается каждая такая часть.

Таким образом, одним из условий применимости метода динамического программирования является возможность разбиения процесса оптимизации решения на ряд однотипных шагов (этапов), каждый из которых планируется отдельно, но с учетом состояния системы на начало этапа и последствий принятого решения. Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться без учета последствий. Это последний шаг. Он может быть изучен и спланирован сам по себе наилучшим (в смысле выбранного критерия) образом, поскольку за ним нет больше этапов. Отсюда получаем одну из специфических особенностей динамического программирования: всю вычислительную процедуру программирования целесообразно разворачивать от конца к началу. Раньше всех планируется последний N-й шаг, за ним $(N-1)$-й и т.д. Но как найти оптимальное управление u_N на N-м шаге, если оно определяется не только целью управления, но и состоянием системы на начало этого шага? Сделать это можно на основе предположений об ожидаемых исходах предшествующего, но еще не исследованного этапа, т.е. о значениях x_{N-1}.

Для каждого возможного исхода x_{N-1} на $(N-1)$-м этапе находим оптимальное управление на N-м этапе. Такой набор оптимальных управлений, зависящих от возможных исходов предыдущего этапа, называется условно-оптимальным решением $u_N^* \ (x_{N-1})$. Завершив анализ конечного этапа, рассматривают аналогичную задачу для предпоследнего этапа, требуя, чтобы функция цели достигала экстремального значения на двух последних этапах вместе. Это дает условнооптимальное решение на предпоследнем этапе $u_{N-1}^* \ (x_{N-2})$, т.е. делаются всевозможные предположения о том, чем закончился предыдущий $(N-2)$-й шаг, и для каждого из предположений находится такое управление на $(N-1)$-м шаге, при котором эффект за последние два шага (из них последний уже оптимизирован) будет максимален. Тем самым мы найдем для каждого исхода $(N-2)$-го шага условно-оптимальное управление на $(N-2)$-м и условно-оптимальное значение функции цели на последних двух шагах. Проделав такой поиск условно-оптимальных управлений для каждого шага от конца к началу, найдем последовательность условно-оптимальных управлений $u_1^* \ (x_0)$, $u_2^* \ (x_1)$, $\ldots$, $u_N^* \ (x_{N-1})$.

Условно-оптимальные управления дают возможность найти не условное, а просто оптимальное управление на каждом шаге. В самом деле, пусть начальное состояние x_0 известно. Тогда, проделав процедуру движения от конца к началу, находим $u_1^*(x_0)$. Так как начальное состояние x_0 определяется однозначно, это оптимальное управление для первого шага. Вместе с тем находим экстремальное значение целевой функции относительно всего процесса. Зная оптимальное действие (с точки зрения всего процесса) для первого шага, выявим, к какому состоянию перейдет система в результате этого действия, т.е. найдем оптимальное состояние системы x_1^* на начало второго этапа. Но для всех возможных состояний на начало второго этапа выявлены оптимальные управления. Таким образом, зная x_1^*, установим оптимальное управление для второго этапа $u_2^*(x_1^*)$ и т.д. Проделав обратное движение по условно-оптимальным управлениям от начала к концу, найдем оптимальные управления для всех этапов.

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс проходится дважды. Первый раз от конца к началу, в результате чего находятся условно-оптимальные управления и условно-оптимальное значение функции цели для каждого шага, в том числе оптимальное управление для первого шага и оптимальное значение функции цели для всего процесса. Второй раз – от начала к концу, в результате чего находятся уже оптимальные управления на каждом шаге с точки зрения всего процесса. Первый этап сложнее и длительнее второго, на втором остается лишь отобрать рекомендации, полученные на первом. Следует отметить, что понятия "конец" и "начало" можно поменять местами и разворачивать процесс оптимизации в другом направлении. С какого конца начать – диктуется удобством выбора этапов и возможных состояний на их начало.

Из качественного анализа идеи поэтапной оптимизации можно сформулировать следующие принципы, лежащие в основе динамического программирования: принцип оптимальности и принцип погружения.

Принцип оптимальности. Оптимальное управление на каждом шаге определяется состоянием системы на начало этого шага и целью управления. Или в развернутой форме: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и начальные решения, последующие решения должны приниматься исходя из оптимальной стратегии с учетом состояния, вытекающего из первого решения. Ниже будет показано, что этот принципи имеет довольно простую математическую интерпретацию, выражающуюся в составлении определенных рекуррентных соотношений (функциональных уравнений Р. Беллмана).

Принцип погружения. Природа задачи, допускающей использование метода динамического программирования, не меняется при изменении количества шагов N, т.е. форма такой задачи инвариантна относительно N. В этом смысле всякий конкретный процесс с заданным числом шагов оказывается как бы погруженным в семейство подобных ему процессов и может рассматриваться с позиции более широкого класса задач.

Реализация названных принципов дает гарантию того, что решение, принимаемое на очередном шаге, окажется наилучшим относительно всего процесса в целом, а не узких интересов данного этапа. Последовательность пошаговых решений приводит к решению исходной N-шаговой задачи.

Функциональные уравнения Беллмана. Как отмечалось выше, в основе динамического программирования лежит принцип оптимальности, указывающий на процедуру построения оптимального управления. Так как оптимальной стратегией может быть только та, которая одновременно оптимальна и для любого количества оставшихся шагов, ее можно строить по частям: сначала для последнего этапа, затем для двух последних, для трех и т.д., пока не придем к первому шагу. Отсюда принцип оптимальности связан со вторым принципом — погружения, согласно которому при решении исходной задачи ее как бы погружают в семейство подобных ей и решают для одного последнего этапа, для двух последних и т.д., пока, не получат решение исходной задачи.

Дадим математическую формулировку принципа, оптимальности для задач с аддитивным критерием оптимальности (сепарабельная функция цели). Для простоты будем считать, что начальное x_0 и конечное x_T состояния системы заданы. Обозначим через $z_1(x_0, u_1)$ значение функции цели на первом этапе при начальном состоянии системы x_0 и при управлении u_1, через $z_2(x_1, u_2)$ – соответствующее значение функции цели только на втором этапе, ..., через $z_i(x_{i-1}, u_i)$ – на i-м этапе, ..., через $z_N(x_{N-1}, u_N)$ – на N-м этапе. Очевидно, что

$$Z = z(x_0, u) = \sum_{i=1}^{N} z_i(x_{i-1}, u_i). \tag{28.1}$$

Надо найти оптимальное управление $u^* = (u_1^*; u_2^*; \ldots; u_N^*)$, такое, что доставляет экстремум целевой функции (28.1) при ограничениях $u \in \Omega$.

Для решения этой задачи погружаем ее в семейство подобных. Введем обозначения. Пусть Ω_N, $\Omega_{N-1,N}$, ..., $\Omega_{\overline{1,n}} \equiv \Omega$ – соответственно области определения для подобных задач на последнем этапе, двух последних и т.д.; Ω – область определения исходной задачи. Обозначим через $F_1(x_{N-1})$, $F_2(x_{N-2})$, ..., $F_1(x_{N-1})$, ..., $F_N(x_0)$ соответственно условно-оптимальные значения функции цели на последнем этапе, двух последних и т.д., на k последних и т.д., на всех N этапах.

Начинаем с последнего этапа. Пусть x_{N-1} – возможные состояния системы на начало N-го этапа. Находим:

$$F_1(x_{N-1}) = \max_{u_N \in \Omega_N} (\min) z_N(x_{N-1}, u_N). \tag{28.2}$$

Для двух последних этапов получаем

$$F_2(x_{N-2}) = \max_{u_{N-1} \in \Omega_{N-1,N}} (\min)(z_{N-1}(x_{N-2}, u_{N-1}) + F_1(x_{N-1})). \tag{28.3}$$

Аналогично:

$$F_3(x_{N-3}) = \max_{u_{N-2} \in \Omega_{N-2,N-1,N}} (\min)(z_{N-2}(x_{N-3}, u_{N-2}) + F_2(x_{N-2})), \tag{28.4}$$

. . . .

$$F_k(x_{N-k}) = \max_{u_{N-k+1} \in \Omega_{N-k+1,\ldots,N}} (\min)(z_{N-k+1}(x_{N-k}, u_{N-k+1}) + F_{k-1}(x_{N-k+1})), \tag{28.5}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

. . . .

$$F_N(x_0) = \max_{u_1 \in \Omega}(\min)(z_1(x_0, u_1) + F_{N-1}(x_1)). \qquad (28.6)$$

Выражение (28.6) представляет собой математическую запись принципа оптимальности. Выражение (28.5) – общая форма записи условно-оптимального значения функции цели для k оставшихся этапов. Выражения (28.2) – (28.6) называются *функциональными уравнениями Беллмана*. Отчетливо просматривается их рекуррентный (возвратный) характер, т.е. для нахождения оптимального управления на N шагах нужно знать условно-оптимальное управление на предшествующих $N-1$ этапах и т.д. Поэтому функциональные уравнения часто называют *рекуррентными (возвратными) соотношениями Беллмана.*

ЛЕКЦИЯ 29

Задача о замене оборудования

Задача о замене оборудования (обновлении, восстановлении, перестройке) имеет важное значение. Рассмотрим ее в упрощенной постановке. Известно, что оборудование со временем изнашивается, стареет физически и морально. В процессе эксплуатации, как правило, падает его производительность и растут эксплуатационные расходы на текущий ремонт. Со временем возникает необходимость замены оборудования, так как его дальнейшая эксплуатация обходится дороже, чем ремонт. Отсюда задача о замене может быть сформулирована так. В процессе работы оборудование дает ежегодно прибыль, требует эксплуатационных затрат и имеет остаточную стоимость. Эти характеристики зависят от возраста оборудования. В любом году оборудование можно сохранить, продать по остаточной цене и приобрести новое. В случае сохранения оборудования возрастают эксплуатационные расходы и снижается производительность. При замене нужны значительные дополнительные капитальные вложения. Задача состоит в определении оптимальной стратегии замен в плановом периоде, с тем чтобы суммарная прибыль за этот период была максимальной.

Для количественной формулировки задачи введем следующие обозначения: $r(t)$ – стоимость продукции, производимой за год на единице оборудования возраста t лет, $u(t)$ – расходы, связанные с эксплуатацией этого оборудования, $s(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста t лет, p – покупная цена оборудования, T – продолжительность планового периода, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ номер текущего года.

Решение. Чтобы решить задачу, применим принцип оптимальности Беллмана. Рассмотрим интервалы (годы) планового периода в последовательности от конца к началу. Введем функцию условно-оптимальных значений функции цели $F_k(t)$. Эта функция показывает максимальную прибыль, получаемую от оборудования возраста t лет за последние k лет планового периода. Здесь возраст оборудования рассматривается в направлении естественного хода времени. Например, $t = 0$ соответствует использованию совершенно нового оборудования. Временные же шаги процесса нумеруются в обратном порядке. Например, при $k = 1$ рассматривается последний год планового периода, при $k = 2$ – последние два года и т.д., при $k = T$ последние T лет, т.е. весь плановый период. Направления изменения t и k показаны на рисунке 29.1.

В этой задаче систему составляет оборудование. Ее состояние характеризуется возрастом. Вектор управления это решение в момент $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ о сохранении или замене оборудования. Для нахождения оптимальной политики замен следует проанализировать, согласно принципу оптимальности, процесс от конца к началу. Для этого сделаем предположение о состоянии оборудования на начало последнего года ($k = 1$). Пусть оборудование имеет возраст t лет. В начале T-го года имеется две возможности: 1) сохранить оборудование на T-й год, тогда

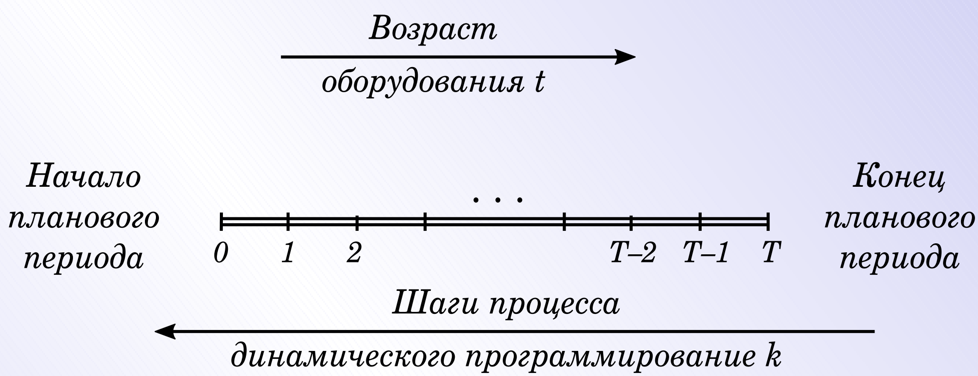


Рисунок 29.1

прибыль за последний год составит $r(t) - u(t)$; 2) продать оборудование по остаточной стоимости и купить новое, тогда прибыль за последний год будет равна $s(t) - p + r(0) - u(0)$, где $r(0)$ – стоимость продукции, выпущенной на новом оборудовании за первый год его ввода, $u(0)$ эксплуатационные расходы в этом году. Здесь целесообразно разворачивать процесс от конца к началу (рисунок 29.1). Для последнего года ($k = 1$) оптимальной политикой с точки зрения всего процесса будет политика, обеспечивающая максимальную прибыль только за последний год. Учитывая значение прибыли при различном образе действия (замена – сохранение), приходим к выводу, что решение о замене оборудования возраста t лет следует принять в случае, когда прибыль от

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

нового оборудования на последнем периоде больше, чем от старого, т.е. при условии

$$s(t) - p + r(0) - u(0) > r(t) - u(t).$$

Если же

$$s(t) - p + r(0) - u(0) \leq r(0) - u(0),$$

то старое оборудование целесообразно сохранить.

Итак, для последнего года оптимальная политика и максимальная прибыль $F_1(t)$ находятся из условия

$$F_1(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) \quad \text{(сохранение)}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0) \quad \text{(замена)}. \end{cases}$$

Пусть $k = 2$, т.е. рассмотрим прибыль за два последних года. Делаем предположение о возможном состоянии t оборудования на начало предпоследнего года. Если в начале этого года принять решение о сохранении оборудования, то к концу года будет получена прибыль $r(t) - u(t)$. На начало последнего года оборудование перейдет в состояние $t + 1$, и при оптимальной политике в последнем году оно принесет прибыль, равную $F_1(t+1)$. Значит общая прибыль за два года составит $r(t)-u(t)+F_1(t+1)$. Если же в начале предпоследнего года будет принято решение о замене оборудования, то прибыль за предпоследий год составит $s(t)-p+r(0)-u(0)$. Поскольку приобретено новое оборудование, на начало последнего года оно будет в состоянии $t = 1$. Следовательно, общая прибыль за последние два года при оптимальной политике в последнем году составит

$$s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1).$$

Условно-оптимальной в последние два года будет политика, доставляющая максимальную прибыль:

$$F_2(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_1(t+1) & \text{(сохранение)}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1) & \text{(замена)}. \end{cases}$$

Аналогично находим выражения для условно оптимальной прибыли за три последних года, четыре и т.д. Общее функциональное уравнение примет вид

$$F_k(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_{k-1}(t+1) & \text{(сохранение)}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_{k-1}(1) & \text{(замена)}. \end{cases}$$

При $k = T$ получим $\max Z = F_T(t_0)$, причем

$$F_T(t) = \max_t \begin{cases} r(t_0) - u(t_0) + F_{T-1}(t_0+1) & \text{(сохранение)}, \\ s(t_0) - p + r(0) - u(0) + F_{T-1}(1) & \text{(замена)}. \end{cases}$$

Таким образом, разворачивая весь процесс от конца к началу, получаем, что максимальная прибыль за плановый период составит $F_T(t_0)$. Так как начальное состояние t_0 известно, из выражения для $F_T(t_0)$ находим оптимальное решение в начале первого года, потом вытекающее из него оптимальное решение для второго года и т.д. Обратимся к числовому примеру.

Разработать оптимальную политику.замены оборудования при условиях: 1) стоимость $r(t)$ продукции, производимой с использованием оборудования за год, и расходы $u(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования, заданы таблицей 29.1; 2) ликвидационная стоимость машины не зависит от ее возраста и равна 2; 3) цена нового оборудования со временем не меняется и равна 15; 4) продолжительность планового периода 12 лет. Итак, $s(t) = 2$, $p = 15$, $T = 12$.

Таблица 29.1

r, u \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r(t)$	30	30	29	29	29	28	28	27	27	26	24	23	23
$u(t)$	10	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20	23	23

Запишем функциональные уравнения для $F_1(t)$ и $F_k(t)$ при числовых значениях нашего примера:

$$F_1(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t), \\ s(t) - p + r(0) - u(0), \end{cases} = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t), \\ 2 - 15 + 30 - 10, \end{cases} =$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$$= \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) & \text{(сохранение)}, \\ 7 \quad \text{(замена)}, \end{cases} \tag{29.1}$$

$$F_k(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_{k-1}(t+1), & \text{(сохранение)}, \\ 7 + F_{k-1}(1) \quad \text{(замена)}. \end{cases} \tag{29.2}$$

Пользуясь выражениями (29.1), (29.2), будем последовательно вычислять значения максимальной прибыли $F_k(t)$ и записывать их в специальную таблицу 29.2. Первую строку получим, придавая параметру t в равенстве (29.1) значения $0, 1, \ldots, 12$ и используя исходные данные таблицы 29.1. Например, при $t = 0$

$$F_1(0) = \max \begin{cases} r(0) - u(0), \\ 7, \end{cases} = \max \begin{cases} 30 - 10, \\ 7, \end{cases} = 20 \quad \text{(сохранение)}.$$

Аналогично расчет ведется до $t = 9$:

$$F_1(9) = \max \begin{cases} 26 - 19, \\ 7, \end{cases} = 7 \quad \text{(сохранение)}.$$

Заметим, что если прибыль от нового оборудования равна прибыли от старого, то старое лучше сохранить еще на год:

$$F_1(10) = \max \begin{cases} 24 - 20, \\ 7, \end{cases} = 7 \quad \text{(замена)}.$$

Из таблицы 29.1 видно, что $r(t) - u(t)$ с ростом t убывает. Поэтому при $t > 9$ оптимальной будет политика замены оборудования. Чтобы различать, в результате какой политики получается условно-оптимальное

Таблица 29.2

F_k \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F_1(t)$	20	20	17	16	15	13	12	10	9	7	7	7	7
$F_2(t)$	40	37	33	31	28	27	27	27	27	27	27	27	27
$F_3(t)$	57	53	48	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44
$F_4(t)$	73	68	61	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
$F_5(t)$	88	81	77	76	75	75	75	75	75	75	75	75	75
$F_6(t)$	101	97	93	91	90	88	88	88	88	88	88	88	88
$F_7(t)$	117	113	108	106	104	104	104	104	104	104	104	104	104
$F_8(t)$	133	128	123	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
$F_9(t)$	148	143	137	136	135	135	135	135	135	135	135	135	135
$F_{10}(t)$	166	157	153	151	150	150	150	150	150	150	150	150	150
$F_{11}(t)$	177	173	168	166	165	164	164	164	164	164	164	164	164
$F_{12}(t)$	193	188	183	181	180	180	180	180	180	180	180	180	180

значение прибыли, будем эти значения (до $t = 9$ включительно оптимальной является политика сохранения) разграничивать жирной линией. Для заполнения второй строки таблицы 29.2 используя формулу 29.2. Для $k = 2$ получаем

$$F_2(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_1(t+1), \\ 7 + F_1(1), \end{cases} =$$

$$= \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_1(t+1) & \text{(сохранение)}, \\ 27 \quad \text{(замена)}. \end{cases}$$

Придадим параметру t значения $0, 1, 2, \ldots, 12$ значения $r(t)$ и $u(t)$ возьмем из таблицы 29.1, а значения $F_1(t+1)$ – из первой строки таблицы 29.2. Для третьй строки расчетную формулу получим из равенства (29.2) при $k = 3$:

$$F_3(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_2(t+1), \\ 7 + F_2(1), \end{cases} =$$

$$= \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_2(t+1) & \text{(сохранение)}, \\ 44, \quad \text{(замена)}. \end{cases}$$

и т.д. Заполнив таблицу 29.2, данные ее используем для решения поставленной задачи. Эта таблица содержит много ценной информации и позволяет решать все семейство задач, в которое мы погружали исходную задачу.

Пусть, например, в начале планового периода имеем оборудование возраста 6 лет. Разработаем "политику замен" на двенадцатилетний период, доставляющую максимальную прибыль. Информация для этого имеется в таблице 29.2. Максимальная прибыль, которую можно получить за 12 лет при условии, что вначале имелось оборудование возраста 6 лет, находится в таблице 29.2 на пересечении столбца $t = 6$ и строки $F_{12}(t)$; она составляет 180 единиц.

Значение максимальной прибыли $F_{12}(6) = 180$ записано справа от ломаной линии, т.е. в области "политики замены". Это значит, что для достижения в течение 12 лет максимальной прибыли в начале первого года оборудование надо заменить. В течение первого года, новое оборудование постареет на год, т.е., заменив оборудование и проработав на нем 1 год, мы за 11 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 1 год. Из таблицы 29.2 берем $F_{11}(1) = 173$. Это значение располагается в области "политики сохранения", т.е. во втором году планового периода надо сохранить оборудование возраста 1 год, и, проработав на нем год, за 10 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 2 года.

Выясняем, что значение $F_{10}(2) = 153$ помещено в области сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Теперь до конца планового периода осталось 9 лет, а возраст оборудования составляет 3 года. Находим $F_9(3) = 136$. Это область сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Его возраст становится равным 4 годам. До конца планового периода остается 8 лет. Определяем $F_8(4) = 120$. Это область замен. Заменяем оборудевание на новое. Проработаем на нём в течение четвёртого года. Оно постареет на год. До конца планового периода останется 7 лет. Находим $F_7(1) = 113$. Это область сохранения. Продолжив подобные рассуждения, установим, что $F_6(2) = 93$, $F_5(3) = 76$ расположены в области сохранения, $F_4(4) = 60$ – в области замен, $F_3(1) = 53$, $F_2(2) = 33$, $F_1(3) = 16$ – в области сохранения. Разработанную политику изобразим следующей цепочкой:

$$F_{12}(6) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-й год}} F_{11}(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{2-й год}} F_{10}(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{3-й год}}$$

$$F_{9}(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{4-й год}} F_{8}(4) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{5-й год}} F_{7}(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{6-й год}}$$

$$F_{6}(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{7-й год}} F_{5}(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{8-й год}} F_{4}(4) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{9-й год}}$$

$$F_{3}(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{10-й год}} F_{2}(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{11-й год}} F_{1}(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{12-й год}} .$$

Таким образом, вместо поиска оптимальной "политики замен" на плановый период в 12 лет мы погрузили исходную задачу в семейство подобных, когда период меняется от 1 до 12. Решение ведется по принципу оптимальности для любого состояния системы, независимо от ее предысторий. Оптимальная "политики замен" является оптимальной на оставшееся число лет.

Таблица 29.2 содержит информацию для решения и других задач. Из нее можно найти оптимальную стратегию замены оборудования с любым начальным состоянием от 0 до 17 лет и на любой плановый период, не превосходящий 12 лет. Например, найдем "политику замен" на плановый период в 10 лет, если вначале имелось оборудование пятилетнего возраста:

$$F_{10}(5) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-й год}} F_{9}(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{2-й год}} F_{8}(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{3-й год}}$$

$$F_7(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{4-й год}} F_6(4) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{5-й год}} F_5(5) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{6-й год}}$$

$$F_4(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{7-й год}} F_3(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{8-й год}} F_2(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{9-й год}}$$

$$F_1(4) \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{10-й год}} .$$

Задачу о замене оборудования мы упростили. На практике же деталями не пренебрегают. Легко учесть, например, случай, когда остаточная стоимость оборудования $s(t)$ зависит от времени. Может быть принято решение о замене оборудования не новым, а уже проработавшим некоторое время. Не составляет также труда учесть возможность капитального ремонта старого оборудования. При этом в понятие "состояние" системы необходимо включить время последнего ремонта оборудования. Функция $F_k(t_1, t_2)$ выражает прибыль за последние k лет планового периода при условии, что вначале имелось оборудование возраста t_1, прошедшее капитальный ремонт после t_2 лет службы. Характеристики r, s и u также будут функциями двух переменных t_1 и t_2.

ЛЕКЦИЯ 30

Оптимальное управление поставками сырья

Для ритмичной работы предприятия необходима систематическое пополнение запаса сырья C, расходуемого при производстве продукции. Потребность в сырье C по месяцам рассматриваемого планового периода выражается числами 150, 50, 100, и 100 единиц. Пополнение запаса производится партиями, кратными 50 единиц. На начало плавного периода на складах предприятия имеется запас сырья в 100 единиц. Складские помещения не позволяют хранить одновременно более 300 единиц сырья. К концу плавного периода весь запас должен быть израсходовани, поскольку предприятие переходит на выпуск новой продукции, для которой сырье C не потребуется. Затраты на пополнение запаса зависят от объема x партии поставки и описываются функцией $P(x)$, заданной таблицей 30.1. Затраты на хранение сырья зависят от среднего уровня $\overline{m}$ запаса сырья в данном месяце, определяемого по формуле $\overline{m} = D/2 + j$, где D – объем потребления сырья в данном месяце, j – остаток сырья к концу этого месяца. Затраты на хранение описываются функцией $\varphi(\overline{m})$, заданной таблица 30.2.

Требуется так организовать процесс пополнения и хранения сырья на предриятии в плановом периоде, чтобы сумарные затраты минимизировать при непременном условии бесперебойного функционирования производства.

Таблица 30.1

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$P(x)$	0	50	48	44	40	36	32	27	24	22	21	21	20

Таблица 30.2

$\overline{m}$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325
$\varphi(\overline{m})$	0	3	8	15	30	36	41	46	50	51	52	53	54	56

Функциональные уравнения Беллмана для рассматриваемой задаци имеют следующий вид:

для $n = 1$

$$f_1(i) = P_1(x) + \varphi_1(d_1/2), \tag{30.1}$$

где $i = 0, 50, 100, \ldots; \min(d_1; M)$; $x = d_1 - i$;

для $n = 2,\ 3,\ 4$

$$f_n(i) = \min_{i,x}(P_n(x) + \varphi_n(d_n/2 + (i + x - d_n) + f_{n-1}(i + x - d_n)), \tag{30.2}$$

где $i = 0, 50, 100, \ldots; \min(d_1 + \ldots + d_n; M)$; $d_n - i \leq x \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_n - i$.

Если в условии поставленной задачи нумерация месяцев планового периода осуществляется в прямом направлении: от начала периода к

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
Закрыть

его концу, т.е. $t = 1, 2, 3, 4$, то в уравнениях (30.1), (30.2) используется, как это принято в динамическом программировании, встречная нумерация: от конца к началу, т.е. $n = 1, 2, 3, 4$. В уравнениях (30.1), (30.2) i – уровень запаса сырья на начало месяца; x – объем партии поставки сырья; d_n – объем потребления сырья в n-м месяце; M – вместимость складских помещений предприятия; $f_n(i)$ – минимальные суммарные затраты на пополнение и хранение сырья за последние n месяцев планового периода при уровне запаса на начало n-го месяца в i единиц; $i + x - d_n$ – уровень запаса сырья на конец n-го месяца (одновременно это и уровень запаса сырья на начало $(n-1)$-го месяца).

В уравнении (30.2) первое слагаемое в правой части характеризует затраты в n-м месяце на пополнение запаса сырья в объеме x единиц, второе – затраты на хранение сырья в этом месяце, если средний уровень запаса составляет $(d_n/2+(i+x-d_n))$ единиц, третье – минимальные суммарные затраты на пополнение и хранение сырья за $n-1$ последних месяцев планового периода.

Используем функциональные уравнения (30.1), (30.2) для решения поставленной задачи.

Пусть $n = 1$. Функциональное уравнение (30.1) примет вид

$$f_1(i) = P_1(x) + \varphi(100/2), \tag{30.3}$$

где i – уровень запаса сырья на начало последнего месяца (первого от конца) – может принимать значения 0, 50 или 100, а x будет равнять-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ся 100, 50 или 0 соответственно, что и записано в первых двух столбцах таблицы 30.3. В последнем столбце в соответствии с упавнением (30.3) приведены суммарные минимальные затраты на пополнение запаса (таблица 30.1) и его хранение (таблица 30.2).

Таблица 30.3

$i \backslash x$	$x_1^*(1)$	$f_1(i)$
0	100	40+8
50	50	48+8
$\underline{100}$	$\underline{0}$	0+8

Переходим к анализу периода, состоящего из двух последних месяцев. Полагая в уравнении (30.2) $n = 2$, получаем соответствующее этому периоду функциональное уравнение Беллмана

$$f_2(i) = \min_{i,x}(P_2(x) + \varphi_2(100/2 + (i + x - 100)) + f_1(i + x - 100). \quad (30.4)$$

Уровень i запаса сырья на начало второго (от конца) месяца может сотавить 0, 50, 100, 150 или 200 единиц, а объем x – поставки сырья соответственно 200, 150, 100, 50 или 0 единиц (таблица 30.4). В клетки основного поля таблицы будем вписывать значение суммы трех слагае-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

мых: P_2, φ_2 и f_1 (уравнение (30.4)). Первое слагаемое находим по таблице 30.1, второе – по таблице 30.2, а третье берем из последнего столбца таблицы 30.3. Некоторые клетки таблицы останутся незаполненными, так как соответствуют недопустимым сочетаниям i и x. Рассмотрим,

Таблица 30.4

i \ x	0	50	100	150	200	$x_2^*(i)$	$f_2(i)$
$\underline{0}$	–	–	40+8+48	32+30+56	24+41+8	$\underline{200}$	73
50	–	48+8+48	40+30+56	32+41+8	–	150	81
100	0+8+48	48+30+56	40+41+8	–	–	0	56
150	0+30+56	48+41+8	–	–	–	0	86
200	0+41+8	–	–	–	–	0	49

например, первую строку таблицы 30.4. Она соответствует нулевому уровню запаса сырья на начало второго (от конца) месяца. Поскольку в этом месяце потребуется 100 единиц сырья, то первой заполняемой будет клетка, соответствующая поставке в 100 единиц. При этом первое слагаемое $P_2(100) = 40$, второе $\varphi_2(50) = 8$, а третье $f_1(0) = 48$. Аналогично заполняются и две следующие клетки. Сравнивая суммарные затраты по заполненным клеткам (96, 118 и 73), заключаем, что в рассматриваемой ситуации ($i = 0$) оптимальной во втором месяце будет поставка в 200 единиц, ибо ей соответствуют минимальные сумарные

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

затраты в 73 денежных единиц. Аналогичным образом заполняются и остальные строки таблицы.

Функиональное уравнение для $n = 3$ имеет вид

$$f_3(i) = \min_{i,x}(P_3(x) + \varphi_3(i + x - 25) + f_2(i + x - 50)),$$

а результаты анализа приемлемых вариантов приведены в таблице 30.5.

Таблица 30.5

i \ x	0	50	100	150	200	250	$x_3^*(i)$	$f_3(i)$
0	–	124	136	124	156	121	250	121
$\underline{50}$	76	144	132	164	124	–	$\underline{0}$	76
100	96	140	172	132	–	–	0	96
150	92	180	140	–	–	–	0	92
200	132	148	–	–	–	–	0	132
250	100	–	–	–	–	–	0	100

Последнему шагу оптимизационного анализа ($n = 4$) соответствует функциональное уравнение

$$f_4(100) = \min_{100,x}(P_4(x) + \varphi_4(25 + x) + f_3(x - 50)),$$

а результаты помещены в таблицу 30.6

Таблица 30.6

$i \backslash x$	50	100	150	200	250	300	$x_4^*(i)$	$f_4(i)$
$\underline{100}$	184	152	174	167	206	175	$\underline{100}$	152

Теперь можно подвести окончательные итоги. Из таблицы 30.6 видно, что в четвертом (от конца) месяце оптимальной будет поставка $x_4^*(100) = 100$ единиц. С учетом начального запаса (см. условие задачи) в 100 единиц общий запас в четвертом месяце составит 200 единиц. В этом месяце для нужд производства потребуется 150 единиц сырья, так что к началу третьего месяца уровень запаса будет равен 50 единиц. Обращаясь к таблице 30.5 (см. вторую строку, отвечающую $i = 50$), замечаем, что такому уровню соответствует поставка $x_3^*(50) = 0$ единиц. Имеющийся запас в 50 единиц будет полностью израсходован в этом месяце, так что к началу второго месяца уровень запаса $i = 0$. Судя по первой строке ($i = 0$) таблицы 30.4, во втором месяце необходимо поставить предприятию 200 единиц сырья ($x_2^* = 200$). Из них 100 единиц будет израсходовано в этом месяце. Подтверждением тому служат данные, приведенные в таблице 30.3, из последней строки которой ясно, что в первом месяце сырья приобретать не придется ($x_1^*(100) = 0$).

Итак, суммарные затраты предприятия на пополнение и хранение запаса сырья будут минимальными и составят 152 денежных единиц, если в первом месяце будет приобретено 100 единиц сырья, а в третьем – 200 единиц. Во втором и четвертом месяцах пополнять запас не придется.

Лабораторное занятие 9

Вариант 1

Задание 1. В начале планового периода из N лет имеется оборудование возраста не более t лет. Для каждого года планового периода известны стоимость $r(t)$ произведенной с использованием этого оборудования продукции и затраты $u(t)$, связанные с его эксплуатацией. Известны также остаточная стоимость s оборудования и цена p единицы нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования). Требуется разработать оптимальную стратегию в отношении имеющегося оборудования, т.е. в начале каждого года планового периода установить, сохранять в этом году оборудование или продать его по остаточной стоимости и купить новое, с тем чтобы ожидаемая прибыль за N лет, достигла максимального значения.

Задачу решить при следующих числовых данных: $N = 8$, $s = 2$, $p = 6$, значения $r(t)$ и $u(t)$ смотри в таблице 1

Таблица 1

t	0	1	2	3	4	5
$r(t)$	46	46	45	45	45	43
$u(t)$	15	15	17	18	18	19

Пользуясь составленной матрицей максимальных прибылей для оборудования не старше 5 лет, сформировать оптимальную стратегию по отношению к оборудованию, использовавшемуся до начала планового периода в течение: 4 лет; 1 года;

Задание 2. Решить задачу 1 при плановом периоде в 6 лет и следующих числовых данных: $t = 4$, $s = 2$, $p = 10$, значения $r(t)$ и $u(t)$ смотри в таблице 2

Таблица 2

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	22	21	20	18	16	15	13
$u(t)$	12	13	14	15	16	17	18

Задание 3. В условиях рассмотренной задачи, отказавшись от фиксированного запаса сырья в 100 единиц на начало планового периода, установить, при каком значении начального запаса, из допустимого множества уровней от 0 до 300 единиц суммарные затраты на пополнение и хранение сырья достигают минимальной величины. Найти соответствующий план обеспечения предприятия сырьем C.

Вариант 2

Задание 1. В начале планового периода из N лет имеется оборудование возраста не более t лет. Для каждого года планового периода известны стоимость $r(t)$ произведенной с использованием этого оборудования продукции и затраты $u(t)$, связанные с его эксплуатацией. Известны также остаточная стоимость s оборудования и цена p единицы нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования). Требуется разработать оптимальную стратегию в отношении имеющегося оборудования, т.е. в начале каждого года планового периода установить, сохранять в этом году оборудование или продать его по остаточной стоимости и купить новое, с тем чтобы ожидаемая прибыль за N лет, достигла максимального значения.

Задачу решить при следующих числовых данных: $N = 8$, $s = 2$, $p = 6$, значения $r(t)$ и $u(t)$ смотри в таблице 1

Таблица 1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	31	30	28	28	27	26	26	25	24	24	23
$u(t)$	8	9	9	10	10	10	11	12	14	16	18

На основе матрицы максимальных прибылей, составленной для оборудования не старше 10 лет, сформировать оптимальную стратегию для оборудования возраста: 7 лет; 3 года; 9 лет.

Задание 2. Решить задачу 1 при плановом периоде в 6 лет и следующих числовых данных: $t = 5$, $s = 1$, $p = 11$, значения $r(t)$ и $u(t)$ смотри в таблице 2

Таблица 2

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	25	23	21	19	17	15	13
$u(t)$	13	15	17	19	21	23	25

Задание 3. В условиях рассмотренной задачи, отказавшись от фиксированного запаса сырья в 100 единиц на начало планового периода, установить, при каком значении начального запаса, из допустимого множества уровней от 0 до 300 единиц суммарные затраты на пополнение и хранение сырья достигают минимальной величины. Найти соответствующий план обеспечения предприятия сырьем C.

ЛЕКЦИЯ 31

Основные понятия теории расписаний

Теория расписаний является частью научной дисциплины ТПР и содержит методы и модели, предназначенные для анализа и синтеза процесса планирования. Система планирования представляет собой концептуальную модель, основными компонентами которой являются последовательности и операции работ, а так же приборы и технологические матрицы. В системе планирования операция может быть представлена как соответствующий этап технологии выполнения работ, поэтому довольно часто эти два понятия используются как равнозначные. Например, для информационных систем работа – это задание или программа. Для производственного процесса работа это технологическая операция. Для организационно-экономической системы работа – это некая функция делового процесса. В теории расписаний под прибором понимается структурный элемент системы планирования, предназначенный для выполнения работ. В качестве приборов могут выступать компоненты вычислительной сети (маршрутизаторы), производственное оборудование, персонал предприятия. Технологическая матрица определяет последовательность прохождения работ через прибор.

При разработке модели систем планирования предполагается наличие следующих условий:

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

– процесс выполнения операции должен быть непрерывным, то есть следующая операция на этом приборе может выполняться сразу после полного выполнения предыдущей операции.

– последовательность операций строго упорядочена, то есть существует не более одной операции как непосредственно до, так и после данной операции.

– любая работа в каждый момент времени может выполняться только прибором одного типа.

– каждый прибор в данный момент времени выполняет не более одной операции.

– все приборы эксплуатируются в течении непрерывного периода времени, то есть исключается их остановка или поломка.

Задачи теории расписаний делятся на **детерминированные** и **стохастические**. В детерминированных задачах, такие параметры как число работ, моменты их готовности к выполнению, продолжительность выполнения, число приборов, являются постоянными и заранее известными. В стохастических задачах указанные параметры могут изменяться случайным образом.

К детерминированным задачам теории расписаний относятся задачи упорядочения, планирования и согласования. В задачах упорядочения необходимо определить последовательность выполнения работ на каждом приборе. Задача календарного планирования связана с установлением сроков выполнения операций, это значит, что если каждая работа начинает выполняться, во-первых, сразу после наступления момента ее очередности и при наступлении момента доступности прибора, то можно однозначно установить моменты начала выполнения каждой операции. В этом случае задачи детерминированного календарного планирования сводятся к задачам упорядочения.

В задачах согласования находятся значения необходимых ресурсов, которые обеспечивают выполнение работ в директивные сроки. В некоторых классификациях к задачам теории расписания могут быть отнесены, например, задачи распределения, в которых множество работ с заданными временными характеристиками необходимо распределить по приборам, у которых заранее установлены параметры производительности. Реальные задачи теории расписания, как правило, включают в себя элементы всех ранее написанных задач. Например, задача составления университетского расписания включает оптимальное распределение занятий по аудиториям и одновременно установление графика проведения занятий.

В качестве **критерия эффективности графика выполнения работ** могут применяться, например, минимизация длительности производственного цикла. Во-вторых, минимизация суммарного времени ожидания, в-третьих, минимизация суммарного штрафа за нарушение директивных сроков выполнения работ. В-четвертых, максимизация коэффициента загрузки приборов.

Основными методами решения задач теории расписания являются:

– метод прямого перебора;

– метод решающих правил;

– метод выбора из активных расписаний;

– метод ветвей и границ;

– метод динамического программирования;

– метод генераторов расписаний.

Методы решения задач в теории расписаний.

Метод прямого перебора для решения задачи теории расписаний. Этот метод предполагает во-первых, генерацию множества возможных решений. Во-вторых, вычисление целевой функции для каждого из решений. В-третьих, выбор решения, имеющего минимальное или максимальное значение целевой функции. Элементами решения являются перестановка, сочетание, размещение либо другие комбинаторные способы упорядочения элементов. Трудоемкость генерации вариантов резко возрастает при увеличении размерности задач, поэтому метод прямого перебора используется в основном либо в сочетании с другими методами, либо для проверки точности эвристических методов решения задач планирования малой размерности. Основная сложность при реализации этого метода состоит именно в генерации множества перестановок, сочетаний и размещений.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Приложение
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Применение решающих правил. Решающие правила применяются для синтеза таких сравнительно простых моделей планирования, как «задача директора», «задача одного станка», «задача двух станков». Особенность решающих правил состоит в том, что последовательность выполнения работ определяется путем применения простых процедур над исходными данными.

Постановка задачи директора. Общие условия: в задаче директора предполагается, что на прием к директору записалось n посетителей. Референт путем предварительного опроса посетителей установил значение времени T_j, которое необходимо каждому посетителю для решения его вопроса. Таким образом, исходные данные для задачи включают множество времен для собеседования.

Цель задачи: определить такую последовательность приглашения посетителей на прием, при которой суммарное время ожидания всеми посетителями было бы минимальным. Решением задачи является перестановка из n чисел, которая задает последовательность приема посетителей.

Математическая постановка задачи: Допустим, $T_j(\sigma_n^i)$ – это вероятность ожидания j-посетителя в случае использования для σ_n^i перестановки приглашения. Критическая оптимальность:

$$F = \sum t_j(\sigma_n^i) \to \min .$$

Решение правил для минимизации критерия F времени собеседования $t_j (j = 1, \ldots, n)$. Для минимизации критерия оптимальности времена собеседования необходимо установить в порядке их возрастания. Тогда оптимальная перестановка – это последовательность номеров.

Пример применения решающих правил для управления обработкой информации на узле маршрутизации, известно время обработки каждого пакета. Надо определить последовательность выдачи пакетов на обработку, чтобы общее время пакетов было минимальным.

Решающее правило для задачи одного станка.

Общие условия для постановки задачи. И для каждой задано время обработки на станке, величина штрафа.

$$T_j \ (j = 1, \ldots, n) \ \ \alpha_j \ (j = 1, \ldots, n).$$

Штраф устанавливается за единицу времени ожидания для j детали в момент поступления ее на обработку.

Цель: Определить такую последовательность запуска детали на обработку, при которой суммарный штраф за время нахождения всех деталей в очереди был бы минимальным. Время ожидания $t_j(\sigma_n^i)$. Критерий оптимальности будет определен выражением:

$$\sum_{j=1}^{n} = \alpha_j t_j(\sigma_n^i) \to \min .$$

Решающее правило для определения оптиальной последовательности запуска деталей на обработку необходимо: вычислить коэффициент, равный отношению величины штрафа к времени обработки. Упорядочить значения полученных коэффициентов в порядке их убывания.

$$\frac{\alpha_{j_1}}{T_{j_1}} \geq \frac{\alpha_{j_2}}{T_{j_2}} \geq \ldots \geq \frac{\alpha_{j_n}}{T_{j_n}}$$

$$\sigma_n^i = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}.$$

Решающее правило для задачи двух станков.

Общее условие постановки задачи: имеется два станка. Задано n деталей. Для каждой детали определено время обработки на каждом из станков. Все детали обрабатываются по единому технологическому маршруту, а именно стачала на станке A, потом на станке B. Каждый станок одновременно обрабатывает только одну деталь. И соответственно каждая деталь обрабатывается только одним станков.

Цель задачи – определить такую последовательность запуска деталей на обработку, при которой длительность производственного цикла была бы минимальной. Длительность производственного цикла – промежуток времени между началом обработки первой по порядку детали на станке A и окончанием обработки последней по порядку детали на станке B. Формулировка решающего правила: последовательность операций или шагов, выполняемых при выполнении решающего правила для двух станков, выглядит следующим образом:

Шаг 1 – формируется множество всех деталей.

$$I = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, n\}.$$

Шаг 2 – определяется множеств j деталей, для которых время обработки на станке A меньше времени обработки на станке B.

$$J = \{i \in I, \quad if \quad a_j \leq b_j\}.$$

Шаг 3 – определяется множество оставшихся деталей Q.

$$Q = \{q \in (I - J)\}.$$

Шаг 4 – формируется первый кортеж из номеров деталей, принадлежащих множеству J и упорядочены в порядке возрастания времени обработки на первом станке A_j.

$$J^* = \{j_1, j_2, \ldots, j_k, \quad if \quad a_{j_1} \leq a_{j_2} \leq \ldots \leq a_{j_k}\}.$$

Шаг 5 – из номеров оставшихся деталей формируется второй кортеж Q^*, детали упорядочены по возрастанию времени B_j.

$$Q^* = \{q_1, q_2, \ldots, q_l, \quad if \quad b_{q_1} \geq b_{q_2} \geq \ldots \geq b_{q_l}\}.$$

Шаг 6 – оптимальная последовательность запуска деталей на обработку будет выглядеть следующим образом.

$$\sigma_n^0 = \{j_1, \ldots, j_k, q_1, q_2, \ldots, q_l\}.$$

В рамках описанного алгоритма принятия решений можно получить соотношение для вычисления длительности производственного цикла и соответственно времени ожидания, которое при оптимальной последовательности поступления деталей на обработку должно быть минимальным. Рассмотренные решающие правила представляют собой сравнительно несложные операции, которые позволяют оптимизировать заданные критерии.

Метод выбора из активных расписаний.

1) Задано множество работ $M = \{1, 2, \ldots, m\}$.

2) Задано множество приборов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

3) Определена матрица $T = ||t_{ij}||$ элементы соответствующего времени выполнения i-работ j-приборами.

4) $F = ||f_{il}||$ – технологическая матрица, которая устанавливает порядок прохождения работ через приборы. Элементы матрицы f_{il} – номер очереди прибора, на котором выполнена i-работа l-этапе технологии.

Здесь l-текущий номер этапов технологий и L-максимальное количество этапов. При планировании и назначении работ на приборы возможны конфликтные ситуации, так называемые конфликты первого и второго рода.

Вопросы, выносимые на экзамен по дисциплине “Исследование операций“

1. Основные понятия исследования операций. Классификация задач. Многокритериальные задачи.

2. Элементы теории матричных игр. Матричные игры с нулевой суммой.

3. Чистые и смешанные стратегии и их свойства.

4. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

5. Игры с природой. Критерии для принятия решений.

6. Линейное программирование. Примеры экономических задач линейного программирования.

7. Формы записи задач линейного программирования.

8. Алгоритм построения двойственной задачи. Теория двойственности и их экономическое содержание.

9. Дискретное программирование. Классические задачи целочисленного программирования и краткая классификация методов их решения.

10. Метод Гомори решения задач целочисленного линейного программирования.

11. Метод ветвей и границ решения задач целочисленного линейного программирования.

12. Постановка задачи коммивояжера и решение ее методами ветвей и границ и ближайшего соседа.

13. Программирование на сетях. Основные понятия теории графов.

14. Программирование на сетях. Матричные способы задания графов.

15. Упорядочение элементов орграфа.

16. Потоки на сетях. Задача о максимальном потоке. Теорема Форда-Фалкерсона.

17. Приложения задачи о максимальном потоке. Транспортная задача по критерию времени.

18. Приложения задачи о максимальном потоке. Задача об оптимальном назначении.

19. Элементы сетевого планирования: правила построения сетевых графиков, временные параметры сетевого графика.

20. Элементы сетевого планирования: оптимизация сетевого графика по ресурсам.

21. Понятие о марковском процессе.

22. Потоки событий.

23. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний.

24. Задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания.

25. Схема гибели и размножения. Формула Литтла.

26. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. Многоканальная СМО с отказами.

27. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. Одноканальная СМО с неограниченной очередью.

28. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. Многоканальная СМО с неограниченной очередью.

29. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. Одноканальная СМО с ограниченной очередью. Замкнутая СМО с одним каналом и m источниками.

30. Динамическое программирование. Примеры задач динамического программирования и их геометрическая интерпретация.

31. Принципы динамического программирования. Функциональные уравнения Беллмана. Принцип оптимальности и погружения.

32. Задача об оптимальной политике замены оборудования.

33. Задача оптимального управления поставками ресурсов.

34. Основные понятия теории расписаний.

Тестовый опрос по дисциплине "Исследование операций"

Литература

1. Акоф, Р.Л. Основы исследования операций / Р.Л. Акоф, М.В. Сасиени. М., 1971.

2. Вагнер, Г. Основы исследования операций: в 3 т. / Г. Вагнер. М., 1972–1973. 3 т.

3. Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. М., 1972.

4. Дегтярев, Ю.И. Исследование операций / Ю.И. Дегтярев. М., 1986.

5. Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программмирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод., под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова. Мн., 1994.

6. Кузнецов, А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование / под. общ. ред. проф. А.В. Кузнецова. Мн., 1995.

7. Исследование операций: в 2 т. / под ред. Дж. Маудера, С. Элмаграби. М., 1981. 2 т.

8. Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. М., 1981.

9. Таха, Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. М.; СПб.; Киев, 2001.

10. Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е.С. Вентцель. М., 1980.

11. Воробьев, Н.Н. Теория игр / Н.Н. Воробьев. Л., 1975.

12. Исследование операций в экономике / под ред. Н.Ш. Кремера. М., 1997.

13. Кофман, А. Массовое обслуживание. Теория и приложения / А. Кофман, Р. Крююн. М., 1965.

14. Краснощеков, П.С. Принципы построения моделей / П.С. Краснощеков, А.А. Петров. М., 1983.

15. Крушевский, А.В. Теория игр / А.В. Крушевский. Киев, 1977.

16. Кудрявцев, Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программа / Е.М. Кудрявцев. М., 1984.

17. Макаров, И.М. Теория выбора и принятия решений / И.М. Макаров. М., 1981.

18. Танаев, В.С. Введение в теорию расписаний / В.С. Танаев, В.В. Шкурба. М., 1975.

19. Форд, Л. Потоки в сетях / Л.Форд, Д. Фалькерсон. М., 1966.