УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени
А.С. Пушкина»

В.А. Плетюхов

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

электронный учебно-методический комплекс для студентов физико-математического факультета второй ступени получения высшего образования по специальности 1-31 80 05 Физика

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2022

Кафедра общей и теоретической физики

Автор-составитель:

В.А. Плетюхов, профессор кафедры общей и теоретической физики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина», доктор физико-математических наук, профессор.

Рецензенты:

Кафедра физики учреждения образования «Брестский государственный технический университет».

Н.Н. Сендер, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент.

ЭУМК написан в соответствии с действующей нормативной базой и учебной программой по учебной дисциплине «Современные проблемы фундаментальной физики» и ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям и семинарским занятиям.

СОДЕРЖАНИЕ

Кафедра общей и теоретической физики

Начало
Содержание
Страница 3 из ??
Назад
На весь экран
Закрыть

ВВЕДЕНИЕ

Данный электронный учебно-методический комплекс написан в соответствии с действующей учебной программой дисциплины «Современные проблемы фундаментальной физики», утвержденной ректором университета 04.07.2019 г. Рег. N УД-20-10-010-19/уч, а также в соответсвии с требованиями образовательного стандарта ОСВО 1-31 80 05-2019, специальность 1-31 80 05 физика, утвержденного и введенного в действиве постановлением Министерства образования Республики Беларусь от 26.06.2019 г. N 81, и учебного плана G-31-2-149/уч. от 30.05.2019.

Дисциплина входит в модуль «Современная физика». Её изучение завершается экзаменом в первом семестре.

ЭУМК «Современные проблемы фундаментальной физики» предназначен для студентов второй ступени дневной формы получения образования по специальности 1-31 80 05 Физика со сроком обучения 1 год. Его цель состоит в более глубоком, чем это было при изучении базовых физических дисциплин, ознакомлении с современным состоянием теоретической физики и астрофизики, последними достижениями и открытиями, главными нерешёнными проблемами в данных областях, а также с возможными путями, перспективами и последствиями решения этих проблем.

Для достижения указанной цели предусматривается:

- сформировать у магистранта глубокое и полное понятие о целостной физической картине мира;

- обеспечить понимание тесной взаимосвязи и взаимовлиянии естественно-научных дисциплин, места и роли фундаментальной физики среди других естественных наук;

- создать ясное представление о границах применимости физических моделей и теорий, понимание возможностей фундаментальной физики в решении проблем современного общества;

- сформировать умение работать на «стыке» различных наук, мыслить соответствующими категориями.

В результате изучения дисциплины «Современные проблемы фундаментальной физики» магистрант должен уметь:

- правильно соотносить содержание конкретных профессиональных задач с общими законами физики и естествознания в целом, эффективно применять эти законы в практической деятельности;

- использовать элементы естественно-научной культуры при выполнении социальных функций;

- безопасно обращаться с продуктами развития естествознания;

- правильно оценивать экологические последствия принимаемых решений;

- использовать при работе справочную литературу и другие источники информации для получения сведений, необходимых для проведения различных естественно-научных экспертиз.

Освоение дисциплины направлено на формирование следующие компетенций:

Универсальные компетенции:

Магистр должен обладать следующими универсальными компетенциями(далее – УК):

УК-1. Быть способным применять методы научного познания (анализ, сопоставление, систематизация, абстрагирование, моделирование, проверка достоверности фактов, принятие решений и др.) в самостоятельной исследовательской деятельности, генерировать и реализовывать идеи.

УК-2. Быть способным оценивать функциональные возможности сложного физического оборудования, границы применимости теоретических моделей и использовать это в планировании экспериментов и проведении теоретических расчетов.

Углублённые профессиональные компетенции:

Магистр должен обладать следующими углубленными профессиональными компетенциями (далее – УПК):

УПК-1. Быть способным в ходе профессиональной деятельности использовать методы классической и квантовой теории поля, проводить как аналитические, так и численные расчеты с использованием современных моделей гравитации и элементарных частиц, верификации результатов расчета на базе фундаментальных физических законов.

В соответствии с учебной программой дисциплины «Современные проблемы фундаментальной физики» комплекс рассчитан на 90 часов (общее количество), из них 46 часов аудиторных, в том числе 20 лекционных, 10 часов отводится на семинарские занятия, 16 на управляемую самостоятельную работу.

Комплекс включает в себя:

- теоретический раздел (лекционный материал);
- практический раздел (задания к семинарским занятиям);
- раздел контроля знаний (итоговый тест);
- вспомогательный раздел (содержание, учебно-методическая карта учебной дисциплины, список рекомендуемой литературы).

Содержание учебного материала

1. Фундаментальные взаимодействия и возможность их объединения

Понятие фундаментального взаимодействия. Константа взаимодействия, интенсивность и радиус действия. Гипотеза о том, что известные фундаментальные взаимодействия суть проявления единого суперфундаментального взаимодействия. Аргумента в пользу этой гипотезы, имеющиеся уже достижения по объединению взаимодействий. Трудности и проблемы, которые еще не решены.

2. Общая характеристика фундаментальных взаимодействий

Электромагнитное взаимодействие. Носители электромагнитного взаимодействия — частицы, обладающие электрическим зарядом. Переносчики взаимодействия — фотоны (на классическом уровне — электромагнитные волны). Проявления электромагнитного взаимодействия на микро- и макроуровне. Уравнения Максвелла и квантовая электродинамика.

Сильное взаимодействие. Носители сильного взаимодействия — адроны. Короткий радиус действия и наибольшая интенсивность по сравнению с другими взаимодействиями. Проявления на коротких расстояниях, обеспечиваем стабильность вещества в земных условиях. Квантовая хромодинамика — современная теория сильных взаимодействий.

Слабое взаимодействие. Проявления слабого взаимодействия в природе, распад частиц. Лептоны и нейтрино. Несохранение пространственной четности в слабых взаимодействиях. Теория Ферми. Возможность объединения слабых и электромагнитных взаимодействия — свершившийся факт.

Гравитационное взаимодействие. Универсальный характер взаимодействия. Минимальная интенсивность на микроуровне. Проявления в земных условиях и в астрономических масштабах. Масса как гравитационный «заряд». Общая теория относительности Эйнштейна как классическая теория гравитации. Трудности построения квантовой теории гравитационного взаимодействия и, как следствие, объедения гравитации с другими видами фундаментальных взаимодействий.

3. Группы унитарной симметрии

Понятие пространственно-временной и внутренней симметрии физической теории. Параметры и «бусты» преобразований внутренней симметрии. Определение унитарной симметрии. Симметрия уравнений теории и лагранжиана. Компактные и некомпактные группы симметрии. Подробная характеристики групп симметрии $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$: матричная реализация, параметры и генераторы групп, перестановочные соотношения, структурные константы. Значения этих групп для построения единой теории фундаментальных взаимодействий.

4. Теорема Нётер и законы сохранения

Формулировка теоремы Нётер и её доказательство. Общее выражение для сохраняющихся величин. «Заряд» комплексного поя и его сохране-

Начало
Содержание
Страница 10 из ??
Назад
На весь экран
Закрыть

ние. Связь между пространственно-временными симметриями и законами сохранения энергии, импульса, момента импульса. Унитарная фазовая симметрия $U(1)$ и закон сохранения электрического заряда. Группа $SU(2)$ и сохранение изотопического спина.

5. Группа унитарной симметрии $SU(3)$. Кварковая модель

Унитарная группа $SU(3)$ как группа симметрии сильных взаимодействий. Фундаментальное представление группы $SU(3)$ и кварковая гипотеза. Кварковая структура барионов и мезонов. Современное состояние кварковой модели. Шесть типов(ароматов) кварков и их сравнительная характеристика. Причины ненаблюдения кварков в свободном состоянии.

6. Принцип локальной калибровочной инвариантности и теоретико-групповая трактовка электромагнитных и слабых взаимодействий

Группа локальных преобразований $U(1)$ *и электромагнитное поле.* Наложение на лагранжиан свободного электрона требования инвариантности относительно локальной калибровочной группы $U(1)$. Необходимость введения в свободный лагранжиан вещественного векторного поля. Трактовка дополнительного члена в лагранжиане как взаимодействие электрона с электромагнитным полем.

Группа локальных преобразований $SU(2)$ *и поля Янга-Миллса.* Наложение на лагранжиан системы двух свободных уравнений Дирака. Требования инвариантности относительно локальной калибровочной группы $SU(2)$. Появление в теории трех неабелевых безмассовых векторных полей (полей Янга-Миллса). Их непригодность для описания сильных взаимодействий.

7. Локальная $SU(3)$ – инвариантность и квантовая хромодинамика

Требование инвариантности лагранжиана системы трех уравнений Дирака относительно преобразований локальной калибровочной группы $SU(3)$. Появление в теории октета безмассовых векторных полей. Глюоны как переносчики сильного взаимодействия между кварками. «Цветовой заряд» кварков. Самодействие кваркового поля. Экспериментальные подтверждения квантовой хромодинамики.

8. Механизм спонтанного нарушения симметрии (механизм Хиггса)

Применение механизма Хиггса к нелинейному скалярному вещественному полю. Появление массы у скалярных частиц. Нелинейное скалярное комплексное поле и механизм Хиггса. Голдстоуновские бозоны и их исключение из теории. Требование локальной $U(1)$ — инвариантности теории комплексного скалярного поля Хиггса и масса векторных бозонов — переносчиков калибровочного взаимодействия.

9. Теория электрослабых взаимодействий

Выбор в качестве исходных частиц — источников электрослабого взаимодействия — электрона и нейтрино. Наложение на свободный лагранжиан этих частиц. Требования инвариантности относительно глобальной группы преобразований $SU(2) \otimes U(1)$. Переход к локальной калибровочной инвариантности относительно преобразований этой группы. Появление в рассматриваемой модели четырех безмассовых калибровочных векторных полей. Введение в теорию четырех комплексных скалярных полей Хиггса. Проведение процедуры Хиггса, обеспечивающей появление массы у электрона из трех (из четырех) калибровочных векторных полей. Исключение из теории нефизических голдстоуновских полей. Физическая интерпретация основных соотношений теории и их экспериментальное подтверждение.

10. Стандартная Модель

Объединение электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий на основе локальной калибровочной группы $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Стандартная Модель как промежуточный этап построения теории Великого Объединения (ТВО). Космологические следствия Стандартной Модели. Распад протона. Косвенные подтверждения Модели, объективные причины проблематичности прямых экспериментальных подтверждений в обозримом будущем. Основная проблема — невозможность включения в схему Стандартной Модели гравитационного взаимодействия.

Учебно-методическая карта учебной дисциплины

Номер раздела, темы	Название раздела, темы, перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов					Средства обучения (оборудование, учебно-наглядные пособия и др.)	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
"Современные проблемы фундаментальной физики"(46 часов)		**20**		**10**		**16**		**экзамен**
1	Фундаментальные взаимодействия и возможность их объединения	2	2				компьютер, видеопроектор	Устный опрос
2	Общая характеристика фундаментальных взаимодействий	2					компьютер, видеопроектор	
3	Группы унитарной симметрии	2	2				компьютер, виеопроектор	
4	Теорема Нетер и законы сохранения	2					компьютер, видеопроектор	
5	Группа унитарной симметрии $SU(3)$. Кварковая модель	2	2				компьютер, видеопроектор	
6	Принцип локальной калибровочной инвариантности и теоретико-групповая трактовка электромагнитных и слабых взаимодействий	2	2				компьютер, видеопроектор	
7	Локальная SU(3) - инвариантность и квантовая хромодинамика	2					компьютер, видеопроектор	

8	Механизм спонтанного нарушения симметрии(механизм Хиггса)	2	2				компьютер, видеопроектор	
9	Теория электрослабых взаимодействий	2					компьютер, видеопроектор	
10	Стандартная Модель	2					компьютер, видеопроектор	
11	Управляемый термоядерный синтез					2		Письменный опрос, реферат
12	Ускорители заряженных частиц					2		Письменный опрос, реферат
13	Нейтринная физика					2		Письменный опрос, реферат
14	Кварки					2		Письменный опрос, реферат
15	Экзотические объекты во Вселенной					2		Письменный опрос, реферат
16	Теория Большого взрыва					2		Письменный опрос, реферат
17	Темная материя и Темная энергия					2		Письменный опрос, реферат
18	Теория струн					2		Письменный опрос, реферат

Тема: Фундаментальные взаимодействия и возможность их объединения

Понятие взаимодействия – одно из основных понятий физики. Если бы не было взаимодействий, то частицы материи двигались независимо, «не подозревая» о существовании других частиц. Благодаря взаимодействиям частицы как бы обретают способность распознавать другие частицы и реагировать на них, в результате чего рождается коллективное поведение.

В классической макроскопической физике (в технике, в быту) понятие взаимодействия сводится к понятию силы, под которой подразумевается способность тел толкать (отталкивать) или тянуть (притягивать) другие тела. Но существуют и другие, менее привычные проявления взаимодействий, например, радиоактивный распад ядер или взрыв звезды.

Поскольку вся материя состоит из элементарных (фундаментальных) частиц, для объяснения природы сил, или взаимодействий, необходимо обратиться к микромиру. Сделав это, физики обнаружили, что все взаимодействия (силы) независимо от того, как они проявляются в больших масштабах, можно свести к четырем фундаментальным типам: гравитационному, электрическому, слабому и сильному (ядерному).

Термин «фундаментальное взаимодействие» означает, во-первых, что это взаимодействие проявляется на самом фундаментальном структурном уровне материи (а значит и на всех других уровнях), и во-вторых, различные типы фундаментальных взаимодействий имеют разную физическую природу и их, строго говоря, невозможно объединить.

Что касается проявления фундаментальных взаимодействий на разных структурных уровнях материи, т.е. на разных масштабных (пространственных) расстояниях, то здесь имеется следующая закономерность: с увеличением масштаба относительное значение каждого из четырех взаимодействий меняется. На уровне кварков и атомных ядер доминируют сильное и слабое взаимодействия. Сильное взаимодействие, например, объединяет кварки в протоны и нейтроны и не позволяет атомным ядрам «разваливаться». Слабое взаимодействие, наоборот, приводит к самопроизвольному распаду. На уровне атомов и молекул преобладает уже электромагнитное взаимодействие, связывающее электроны с ядрами и обеспечивающее объединение атомов в молекулы. Большая часть сил, с которыми мы имеем дело в нашей повседневной жизни (силы упругости, силы трения) – это примеры макроскопического проявления электромагнитного взаимодействия. В астрономических масштабах господствующим становится гравитационное взаимодействие. В земных условиях его основное проявление – сила тяжести.

Еще одним существенным различием указанных типов взаимодействий является интенсивность (скорость протекания, или вероятность протекания процессов, обусловленных данным видом взаимодействия), или, как еще говорят, **интенсивность** взаимодействия. Существует такое понятие как **константа взаимодействия**, или **константа связи**. Поясним ее смысл на примере квантовой электродинамики. Расчет различных процессов в КЭД строится на основе метода теории возмущений. Решения уравнений теории ищутся в виде ряда по степеням малого безразмерного параметра

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \tag{1}$$

который имеет еще одно название – **постоянная тонкой структуры**. В конечных формулах для вероятностей различных процессов, обусловленных электромагнитным взаимодействием, входит эта константа. Следовательно, она и определяет интенсивность взаимодействия. Для сильного взаимодействий константа связи при низких энергиях взаимодействующих частиц примерно в 100 раз больше константы α (1). Для слабого и гравитационного взаимодействия константы связи приблизительно равны 10^{-6} и 10^{-38} (последняя приводится для протонов, поскольку зависит от массы взаимодействующих частиц); все эти данные приводятся для энергии в 1 ГЭВ.

Несмотря на такие существенные различия электромагнитного, сильного, слабого и гравитационного взаимодействий, физиков-теоретиков не покидала мысль о том, что на самом деле в природе существует одна единственная фундаментальная сила («суперсила»), а четыре вышеперечисленные – лишь ее различные проявления. Еще в 20-х годах прошлого века А. Эйнштейн предпринимал систематические попытки объединить электромагнетизм и ОТО в рамках единой теории поля. Вскоре, однако, были открыты сильное и слабое взаимодействия, и при любой попытке объединить силы природы приходилось считаться уже не с двумя, а с четырьмя фундаментальными взаимодействиями. Тем не менее, перспектива описания всего происходящего в природе на основе одной единственной суперсилы оставалась для физиков очень привлекательной.

Причин для этого было несколько. Назовем две, по-видимому основные, из них. Первая: **четыре** — это некрасиво и нелогично. Мир един, и, по идее, в его основе должна лежать **одна** фундаментальная сила. Вторая: попытки построить удовлетворительные замкнутые теории сильного и слабого взаимодействий, рассматриваемых по отдельности (теория Юкавы и теория Ферми соответственно), оказались неудачными – они не объясняли целый ряд экспериментальных фактов.

Но спрашивается, как вообще можно объединить такие непохожие друг на друга взаимодействия. И главным препятствием на этом пути является различие в их константах связи (интенсивности).

Для того чтобы пояснить принципиальную возможность преодоления указанной трудности, рассмотрим пример с силой Лоренца

$$F = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]. \tag{2}$$

Рассматривая электрическое и магнитное взаимодействия как самостоятельные, можно **условно** приписать заряду q смысл константы связи электрического поля и $q\frac{\nu}{c}$ – смысл константы связи магнитного поля. Полагая $|\overrightarrow{E}| = |\overrightarrow{B}|$, при $\nu \ll c$ получим, что магнитные силы пренебрежимо малы по сравнению с электрическими и их вообще можно не учитывать (аналогично тому, как в микромире гравитационные силы можно не учитывать по сравнению с электромагнитными из-за большой разницы в интенсивности (константы связи)). Но если рассмотреть случай, когда $\nu \to c$, константы электрического и магнитного взаимодействий сравниваются, т.е. происходит объединение электрического и магнитного полей. Большие скорости частиц означают большую энергию. Таким образом, можно сказать, что единство (единая природа) электрического и магнитного полей (взаимодействий) проявляется лишь при достаточно больших энергиях взаимодействующих частиц. При малых же энергиях ($\nu \ll c$) мы фактически имеем дело с постоянными электрическим (электростатика) и магнитным (магнитостатика) полями. Теории, описывающие эти поля, основываются на системах уравнений, которые совершенно не связанны друг с другом.

Аналогичная ситуация имеет место и в отношении констант связи каждого из четырех фундаментальных взаимодействий. Возьмем, например, константу связи электромагнитного взаимодействия (1). В нее входит элементарный заряд. В классической (максвелловской) электродинамике этот заряд e, например, электрона считается универсальной константой, следовательно, константой является и α, численное значение которой мы приводили ($\frac{1}{137}$). Иначе обстоит дело в более строгой и точной теории электромагнетизма – квантовой электродинамике.

В КЭД существуют понятия **физического вакуума** и **виртуальных частиц**. Сначала о виртуальных частицах. Это частицы, для которых не выполняется формула

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4, \tag{3}$$

связывающая энергию и импульс реальных частиц. Как следствие, при испускании или поглощении виртуальных частиц реальными частицами происходит кратковременное нарушение законов сохранения энергии и импульса. Возможность существования виртуальных частиц обусловлена квантовым соотношением неопределенности

$$\Delta E \cdot \Delta\tau \sim \hbar, \tag{4}$$

которое означает, что энергия реальной частицы может флуктуировать около ее среднего значения, причем величина этой функции ΔE обратно пропорциональна длительности флуктуации $\Delta\tau$. Данные флуктуации происходят вследствие испускания реальными частицами, например, электронами, виртуальных фотонов. Виртуальный фотон существует очень короткое время и затем поглощается либо самим электроном, либо другой находящейся поблизости заряженной частицей. В первом случае имеет место **самодействие**, во втором – **взаимодействие**. Зарегистрировать на опыте (наблюдать) виртуальные фотоны мы не можем, поскольку наши приборы являются классическими объектами и способны регистрировать только те частицы или процессы, для которых выполняются классические законы сохранения энергии и импульса. При этом надо пояснить, почему при взаимодействии электронов посредством виртуального фотона законы сохранения энергии и импульса в целом для всего процесса выполняются.

Виртуальные аналоги есть не только у фотона, но и у всех других реальных частиц (виртуальные электроны, позитроны, кварки, глюоны и т.д.). Поэтому вакуум буквально «кишит» виртуальными частицами всех сортов. Обладая энергией и импульсом, эти частицы образуют то, что мы называем энергией физического вакуума. Явление поляризации вакуума приводит в квантовой электродинамике к экранировке электрического заряда электрона вакуумными (виртуальными) позитронами. Электрон, поляризуя вакуум, как бы притягивает к себе виртуальные позитроны и отталкивает виртуальные электроны. В результате, если смотреть на электрон с большого расстояния, его заряд оказывается частично экранированным. Если же проникнуть глубоко внутрь облака виртуальных пар, то экранировка уменьшается и наблюдаемый заряд растет.

Электрический заряд электрона e является, таким образом, функцией расстояния: $e = e(r)$. То же относится и к величине $\alpha(r)$, которую по этой причине иногда называют «бегущей константой». Поскольку малые расстояния r соответствуют большим переданным импульсам $(r \sim \frac{\hbar}{p})$, то обычно говорят, что α является функцией p: $\alpha = \alpha(r)$. Что касается стандартного значения $\alpha = \frac{1}{137}$, то оно относится к сравнительно большим расстояниям и малым переданным импульсам $p \leq m_e c$. При $p \gg m_e c$ величина $\alpha(p)$ логарифмически растет с ростом p.

Как мы узнаем в дальнейшем, константы сильного и слабого взаимодействий также являются «бегущими». Но в отличие от константы электромагнитного взаимодействия, константа сильного взаимодействия, например, уменьшается с ростом p. Экстраполируя этот «бег» можно увидеть, что при некотором достаточно большом импульсе заряды (константы) всех трех взаимодействий становятся одинаковыми. Именно это обстоятельство лежит в основе моделей Великого Объединения электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий.

Тема: Общая характеристика фундаментальных взаимодействий

Прежде, чем строить теории (модели), объединяющие различные типы фундаментальных взаимодействий, дадим более подробную характеристику и привязку каждого из них к фундаментальным частицам материи – носителям фундаментальных взаимодействий.

1.Электромагнитное взаимодействие

Электромагнитное взаимодействие – взаимодействие электрических зарядов с электромагнитным полем. Изучено гораздо лучше, чем другие типы взаимодействий. Его интенсивность на два порядка меньше интенсивности сильных взаимодействий (в радиусе действия последних). Электромагнитное взаимодействие является дальнодействующим. В силу известного эмпирического соотношения $r \sim \frac{\hbar}{mc}$, связывающего радиус действия с массой переносчика взаимодействия, следует, что масса переносчиков Э.В., каковыми являются фотоны (реальные или виртуальные), равна нулю.

Основной областью проявления Э.В. являются масштабы от 10^{-12}см вплоть до космических. На расстояниях $< 10^{-12}$см Э.В. подавляются ядерными силами. Оно отвечает за формирование атомов и молекул, за

Начало
Содержание
Страница 24 из ??
Назад
На весь экран
Закрыть

все химические и физические свойства твердых тел, жидкостей и газов. Благодаря электромагнитным волнам возможна передача и получение информации на огромных расстояниях. Все наши чувства – зрение, осязание, слух, обоняние – также имеют электромагнитную природу. Действие электромагнитных сил мы постоянно ощущаем в своей жизни в виде сил упругости, трения.

В Э.В. участвуют все частицы, обладающие электрическим зарядом. Но и нейтральные частицы могут участвовать в Э.В. при условии наличия у них внутренней электромагнитной структуры. (Пример – взаимодействие атомов с образованием молекул). Однако в этом случае электромагнитные силы имеют короткий радиус действия.

Теория электромагнитного взаимодействия электронов и позитронов – квантовая электродинамика – является наиболее разработанной и самой точной из всех физических теорий. Здесь электромагнитное взаимодействие выступает практически в чистом виде. Наряду с электронами КЭД хорошо описывает электромагнитное взаимодействие двух других заряженных лептонов: μ и τ. В отличие от этого электромагнитные свойства адронов, которые в значительной степени подавляются сильными взаимодействиями, труднее поддаются расчету.

КЭД принесла с собой первую античастицу – позитрон. Именно в рамках КЭД впервые было осознано, что частицы являются проявлением более сложных объектов – квантованных полей, описываемых операторами рождения и уничтожения. Лагранжиан КЭД имеет вид

Кафедра общей и теоретической физики

$$L = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\nabla_\mu\psi + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\bar{\psi})\psi_\mu\gamma - \chi\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} + \frac{e}{c}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu, \qquad (1)$$

где величины $\psi, \bar{\psi}, A_\mu, F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ являются операторами. [Напомнить смысл всех слагаемых и обозначений в (1)].

Что касается константы электромагнитного взаимодействия $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ то еще раз акцентируем следующее обстоятельство. Приведенное значение α относится к значению передаваемого импульса $p = 2m_e c$. В КЭД явление поляризации вакуума приводит к экранировке электрического заряда виртуальными (вакуумными) позитронами. В результате, если смотреть на электрон с большого расстояния, соответствующего $p = 2m_e c$, то его заряд оказывается частично заэкранированным. Вследствие этого бегущая константа КЭД с расстоянием уменьшается, а с ростом передаваемого импульса растет. Расчеты, выполненные в рамках КЭД, определяют зависимость $\alpha = \alpha(p)$ уравнением

$$\alpha(p) = \frac{3\pi\alpha}{3\pi - \alpha ln\left(\frac{p^2}{4m_e^2c^2}\right)}. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что при $p = 80$ ГэВ/с, например, $\alpha(p) \approx \frac{1}{128}$.

Основы квантовой электродинамики были заложены в конце 20-х годов прошлого века Дираком. Свою современную форму эта теория приобрела на рубеже 40-х – 50-х годов в работах Фейнмана, Швингера, Дайсона и др. В чисто теоретическом плане роль КЭД трудно переоценить. В рамках КЭД были сформулированы и открыты многие фундаментальные понятия и закономерности квантовой теории поля. По ее образу и подобию строятся более сложные теории сильного и слабого взаимодействий и модели Великого Объединения.

2.Сильное взаимодействие

Это — преобладающий вид взаимодействий в ядерной физике высоких энергий. Частицы, участвующие в сильных взаимодействиях, называются адронами. Адроны с полуцелым спином получили название барионов, а адроны с целым спином – мезонов. Помимо сильных взаимодействий все адроны участвуют в слабых и гравитационных взаимодействиях. Кроме того, заряженные (в смысле электрического заряда) адроны участвуют в электромагнитных взаимодействиях. Сильное взаимодействие обуславливает связь протонов и нейтронов в ядрах и обеспечивает исключительную прочность этих образований, лежащую в основе стабильности вещества в земных условиях. Оно также ответственно за удержание кварков внутри адронов. Сильное взаимодействие может проявляться не только как обычное притяжение в ядре, но и как причина, приводящая к нестабильности некоторых элементарных частиц (частицы, распадающиеся за счет сильного взаимодействия, получили название резонансов). Вследствие большой величины сильное взаимодействие является источником огромной энергии (ядерная и термоядерная энергия).

Удовлетворительная теория сильного взаимодействия – квантовая хромодинамика – была построена только после установления кварковой структуры адронов. В настоящее время известно 6 типов (ароматов) кварков: u (“up” – верхний), d (“down” – нижний), s (“strange” – странный), c (“charm” – очарованный), b (“beauty” – красивый), t (“top” – верхний). Исходя из соображений симметрии между лептонами и кварками, 6 ароматов кварков разбиваются на три поколения: (u, d), (s, c), (b, t). Из кварков и лептонов первого поколения строится вся материя во Вселенной. Из u и d – кварков состоят нуклоны (протон – uud, нейтрон – udd), а значит и ядра атомов, из электронов – атомные оболочки. Что же касается кварков и лептонов второго и третьего поколений, то их роль в современном мире остается не выясненной. Отметим еще, что u и d кварки являются самыми легкими (5 и 7 МэВ соответственно[1]) ; в каждом из последующих поколений кварки массивнее, чем в предыдущем. Напомним также, что все кварки имеют спин $1/2$ и дробный электрический заряд $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$.

Помимо обычных квантовых чисел, кварки обладают дополнитель-

---

[1] Здесь необходимо различать так называемые блоковые кварки, из которых, как из блоков, построены адроны, и “голые” кварки, фигурирующие в лагранжиане. Блоковые кварки являются сложными, образованиями, которые возникают на базе “голых” (их еще называют токовыми) кварков за счет облака виртуальных глюонов. В результате масса блокового кварка примерно на 300МэВ больше массы токового. Здесь и далее мы приводим массы токовых кварков.

ной степенью свободы (физический признаком), который называется "цветом", или цветовым зарядом. Соответствующее квантовое число принимает три значения, которые из соображения удобства назвали красным, синим и зеленым цветом. В сильном взаимодействии цвет играет ту же роль, что и электрический заряд в электромагнитном взаимодействии. Во всех наблюдаемых на опыте адронах цветовые заряды кварков компенсируются, т.е. адроны - бесцветные (белые) образования. Бесцветность адрона может достигаться либо смешением трех основных цветов (имеет место у барионов), либо – цвета и антицвета (реализуется у мезонов).

Цветовой заряд является источником глюонного поля. При этом глюон (в отличие от фотона, который не имеет заряда) несет на себе цветовой и антицветовой заряд. Когда кварк испускает глюон, его цвет изменяется в зависимости от цветности глюона. Например, красный кварк, излучая красно-антисиний глюон, превращается в синий кварк. Аналогично синий кварк, поглощая красно-антисиний глюон, превращается в красный и т.д. Всего возможно 3 x 3 = 9 комбинаций цвет-антицвет, но среди них есть одна, отвечающая бесцветному состоянию вида $R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}$ (здесь R – red, G – green, B – blue), которая при поглощении или излучении кварком не меняет состояние последнего и, следовательно, не может играть роль глюона, переносящего взаимодействие между кварками. Тогда остается восемь независимых глюонов. Глюоны электрически нейтральны, имеют нулевую массу и спин, равный единице.

Все это делает их очень похожими на фотоны. Но в отличие от фотонов глюоны обладают "зарядом" (цветом), как и излучающие их кварки. Поэтому глюон может испускать и поглощать другой глюон и при этом происходит изменение его цвета. Другими словами, глюоны сами, независимо от кварков, создают вокруг себя новое глюонное поле. Фотоны таким свойством не обладают, у них нет электрического заряда и никакого нового электрического поля вокруг них не образуется. Наибольшую интенсивность электромагнитное поле имеет вблизи заряда, его источника, а далее оно постепенно рассеивается в пространстве и ослабевает. Глюонное же поле не ослабевает, а наоборот, возрастает при удалении от создающего это поле кварка. В этой области энергий теория возмущений не работает и надежных расчетов нет. Но на основе качественных соображений можно ожидать, что усиление взаимодействия с расстоянием должно привести к невозможности развести изолированные кварки на большие расстояния, т.е. к пожизненному заточению кварков в адронную тюрьму. Это явление получило название "конфайнмента". Оно и объясняет, почему кварки не наблюдаются в свободном состоянии.

С другой стороны, при уменьшении расстояния между кварками глюонное поле ослабевает и в асимптотическом пределе стремится к нулю, что делает кварки практически свободными. Этот феномен самовыключения взаимодействия на малых расстояниях, представляющий собой обратную сторону конфайниента, принято называть **асимптотической свободой**. Данное явление объясняет качественно, почему бегущая константа сильного взаимодействия с уменьшением расстояния (после преодоления порога $\sim 10^{-13}$см), т.е. с увеличением передаваемого импульса, начинает падать.

В заключение нам надо ответить еще на два вопроса, которые углубят понимание ядерных сил. Первый: каким образом взаимодействуют нуклоны в ядре, если их цветовой заряд равен нулю? Второй: говоря о радиусе действия ядерных сил, обычно называют величину 10^{-13}см, и в то же время масса глюонов – переносчиков этих сил считается равной нулю. Нет ли здесь противоречия с формулой $r \sim \frac{\hbar}{mc}$? Ответ на первый вопрос становится ясным, если провести аналогию со взаимодействием электронейтральных атомов, образующих молекулу. Что касается второго вопроса, то 10^{-13}см – это радиус действия ядерных сил, **создаваемых нуклонами**; они действительно являются короткодействующими, как и электромагнитные силы между атомами. Для кварков же в свободном состоянии радиус действия сил был бы равен ∞, если бы такие кварки существовали. Поэтому говоря о радиусе действия ядерных сил подразумевают **наблюдаемые** взаимодействия между **бесцветными** адронами.

3.Слабое взаимодействие

Слабое взаимодействие можно назвать деструктивным в том смысле, что оно не способно создавать устойчивые состояния вещества, как, например, сила тяготения поддерживает существование Солнечной системы, электромагнитное взаимодействие обеспечивает стабильность атома, сильное – стабильность ядер. Оно ответственно за ядерные β^{+-} - распады, за распады большинства нестабильных частиц.

Если бы удалось выключить слабое взаимодействие, то окружающая нас материя приобрела бы совсем иной состав. Она включила бы в себя все частицы, которые распадаются за счет слабого взаимодействия (мюоны, мезоны и т.д.).

Слабое взаимодействие присутствует во всех процессах, идущих с участием нейтрино. Частицы, принимающие участие в слабых взаимодействиях, а при наличии электрического заряда и в электромагнитных взаимодействиях, получили название **лептонов**. Их нетрудно перечислить: электрон(e), мюон(μ), таулептон(τ), электронное нейтрино(ν_e), мюонное нейтрино(ν_μ), таулептонное нейтрино(ν_τ).

Радиус действия слабых сил весьма мал, порядка 10^{-16} см, носители имеют значительную массу. Однако в некоторых случаях слабое взаимодействие проявляет себя и в макроскопических масштабах. Так, оно играет ключевую роль в процессах энерговыделения Солнца, поскольку благодаря ему происходит реакция образования ядра дейтерия из двух протонов (1)

$$p + p \to^2 D + e^+ + \nu_e. \tag{1}$$

Испускание нейтрино в процессах слабого взаимодействия определяет эволюцию звезд, особенно на ее заключительных стадиях, инициирует взрывы сверхновых и образование пульсаров.

Интенсивность слабого взаимодействия определяется, как уже говорилась в лекции 1, константой Ферми, которая в безразмерном варианте равна $\approx 10^{-6} = G_F$. Вероятность W распада частиц пропорциональна G_F^2. Время жизни частиц $\tau \approx \frac{1}{W}$. Для частиц, распадающихся за счет слабых взаимодействий, величина τ по меркам микромира оказывается достаточно большой и лежит в интервале $10^{-3} - 10^{-7}$с. С увеличением интенсивности взаимодействия, обуславливающего распад, время жизни частицы уменьшается. Для частиц, нестабильность которых обусловлена электромагнитным взаимодействием (π^0 - мезон, η^0 - мезон, $\sum^0$ - гиперон), $\tau \approx 10^{-16}$с, в то время как для частиц, распады которых происходят за счет сильных взаимодействий, $\tau \approx 10^{-23} - 10^{-24}$с.

Фундаментальной особенностью слабого взаимодействия является то, что слабые процессы зеркально ассиметричны, т.е. нарушает симметрию между «правым» и «левым»[2].

На языке физиков это звучит так: в слабых взаимодействиях не сохраняется пространственная четность. На первых порах это открытие вызвало шок. Ведь закон сохранения четности рассматривался как один из великих геометрических законов сохранения, наряду с законами сохранения импульса и момента импульса. Сохранение импульса следует из однородности пространства, сохранение момента импульса – из его

[2]Зеркальная симметрия процессов, идущих в природе, означает, что наряду с данным процессом, должен иметь место и процесс, который является зеркальным отражением данного. Для некоторых процессов слабого распада это правило не выполняется.

Начало
Содержание
Страница 33 из ??
Назад
На весь экран
Закрыть

изотропности. Точно так же сохранение четности должно следовать из, казалось бы, очевидной зеркальной симметрии пустого пространства. На языке уравнений сказанное означает, что они должны быть инвариантны относительно дискретных преобразований $x \to -x, y \to -y, z \to -z$ (привести примеры). В рамках лагранжевого формализма это означает, что лагранжиан должен быть истинным скаляром (а не псевдоскаляром!). После 1956 года стало ясно, что лагранжиан слабого взаимодействия состоит из двух слагаемых: скалярного и псевдоскалярного. Пустое пространство (вакуум) оказалось не таким уже простым. Заметим, что с точки зрения современных представлений на природу вакуума в несохранении четности нет ничего необычного.

Первую кватовополевую теорию β - распада предложил в 30-х годах Ферми. Согласно этой теории распад нейтрона происходит в результате взаимодействия двух токов. Один ток, адронный, переводит нейтрон в протон, другой ток, лептонный, рождает пару: электрон + антинейтрино. Взаимодействие этих токов получило название четырехфермионного взаимодействия, поскольку в нем участвуют четыре фермиона. Теория Ферми с современной точки зрения может рассматриваться как некоторая промежуточная модель типа теории Бора на пути создания квантовой механики.

Последовательная теория процессов, идущих с участием слабого взаимодействия, была построина в 1967 году. С.Вайнбергом, А.Саламом для лептонов, и чуть позже Ш.Глэшоу – для адронов и кварков. (Вайеберг, Глэшоу – американцы, Салам - пакистанец). И удалось это сделать, объединив слабые и электромагнитные явления в одной теории (модели) – модели электрослабых взаимодействий. Тут надо подчеркнуть, что объединение слабого и электромагнитного взаимодействий в рамках теории единого электрослабого взаимодействия носит вовсе не формальный характер.

Так, теория э.с. взаимодействия предсказывает ряд эффектов (например, рассеяние нейтрино, не обладающего электрическим зарядом, на лептонах и кварках; существование С-кварка), которые остаются вне поля зрения теорий электромагнитного и слабого взаимодействий по отдельности.

Здесь уместно провести аналогию с объединением электрических и магнитных полей. Теория Максвелла не только объяснила с единых позиций все известные свойства постоянных электрического и магнитного полей, но и предсказала такую форму их существования как электромагнитные волны, в которых электрические и магнитные компоненты существуют в неразрывном единстве и не могут быть оторваны друг от друга.

Аналогично выглядит ситуация и с объединением электромагнитного и слабого взаимодействий. И все-таки возникает вопрос: если электромагнитное и слабое взаимодействия являются равноправными компонентами единого электрослабого взаимодействия, то почему они так различаются по своим проявлениям в окружающем нас мире, почему одна компонента играет в нашей жизни такую важную роль, а другую мы практически не ощущаем. Оказывается дело в тех физических условиях, которые реализуются в настоящее время во Вселенной, в целом, и в земных условиях, в частности. Теория э.с. взаимодействий предсказывает, что константа слабого взаимодействия и радиус действия слабых сил растут с ростом энергии взаимодействующих частиц (передаваемым импульсом), и когда эти энергии становятся порядка $10^2 - 10^3$ Гэв, обе компоненты становятся сравнимыми как по интенсивности, так и по радиусу действия, выступая уже на равных как проявления единого электрослабого взаимодействия.

В естественных условиях на Земле частиц с такими энергиями нет. Такие энергии имели место в первые секунды после образования Вселенной (Большого Взрыва) и тогда обе компоненты были примерно равны по своим проявлениям. Спустя 10^{10} лет Вселенная остыла до 3^0 K, и в этих условиях слабое взаимодействие оказалось как бы в тени. Здесь опять-таки уместна аналогия с электрическим и магнитным полями. Если заряд движется ускоренно, он излучает электромагнитную волну, в которой электрическая и магнитная компоненты представлены на равных (симметрично). Однако, если изменить условия так, чтобы заряд покоился, мы будем регистрировать только электрическую компоненту и не будем замечать магнитную. Другими словами, уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) симметричны относительно электрической и магнитной компонент, а их решения для случая неподвижных зарядов уже такой симметрией не обладают. Происходит как бы самопроизвольное (или, как говорят, спонтанное) нарушение симметрии этих полей в данных условиях. Точно также общие уравнения теории электрослабых взаимодействий симметричны относительно слабой и электромагнитной компонент, но их решения в тех физических условиях, которые реализуются на Земле и, в целом, в нынешней Вселенной, такой симметрией не обладают. Здесь также произошло спонтанное нарушение симметрии электрослабых взаимодействий, обусловленные понижением температуры Вселенной.

4. Гравитационное взаимодействие

Гравитационное взаимодействие было открыто первым, и именно с его помощью в физике появился термин «сила». Это взаимодействие универсально, поскольку действует между всеми телами, обладающими массой. Оно относится к классу дальнодействующих. Нерелятивистская теория гравитационного взаимодействия создана Ньютоном в 1687г. Универсальное гравитационное взаимодействие между двумя телами с массами m_1, m_2 описывается в ней потенциалом:

$$\phi = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}, \tag{2}$$

где $G_N \approx 6.67 \cdot 10^{-8}$ см^3 г-1 c^-2 — константа Ньютона. Релятивистская теория гравитации ОТО создана Эйнштейном в 1915 году. Она предсказала и количественно описала ряд новых нетривиальных эффектов:

отклонение луча света и радиоволн в гравитационном поле Солнца, прецессию перигелия Меркурия и существование черных дыр.

В формальной иерархии фундаментальных взаимодействий гравитационное взаимодействие по интенсивности считается самым слабым. Константа гравитационного взаимодействия определяется следующим образом:

$$\alpha_g = \frac{G_n m}{4\pi\hbar c}, \qquad (3)$$

где m — масса частицы. В этом выражении присутствует неопределенность ¬ массу какой из частиц брать в качестве эталона. Ведь «зарядом» гравитационного взаимодействия является масса, спектр которой для элементарных частиц весьма широк. Так, для протона получается $\alpha_g = 10^{-38}$, для электрона $\alpha_g = 10^{-45}$ (обычно в литературе приводят первое значение). Отсюда следует, что в микромире вклад гравитационного взаимодействия по сравнению с другими взаимодействиями ничтожно мал и оно не приводит к измеримым эффектам на субатомном уровне. Однако на макроскопическом уровне гравитационное взаимодействие является доминирующим (из-за роста m): оно соединяет воедино все части Земли, Солнце и планеты, связывает звезды в галактики и управляет эволюцией всей Вселенной.

Квантовая теория гравитации до сих пор не построена. Связано это, в основном, с двумя причинами. Первая причина, как уже отмечалось, заключается в том, что гравитационное взаимодействие между отдельными элементарными частицами в лабораторных условиях очень слабо и поэтому недоступно экспериментальному наблюдению. В силу этого не обнаружены до сих пор гравитационные волны, а наблюдение отдельных квантов гравитационного поля гравитонов представляется проблемой, которую экспериментаторы не смогут решить и через сто лет.

Вторая причина заключается в том, что эта теория будет самой сложной(в случае построения) из всех известных физических теорий. Дело в том, что сложность релятивистской квантовой теории резко возрастает с ростом величины спина описываемых ею частиц. Спин же гравитона равен 2.

В связи с этим является весьма проблематичной перспектива объединения гравитационного взаимодействия с другими типами взаимодействий. Из-за того, что спин гравитона равен 2, гравитационное взаимодействие становится достаточно интенсивным при энергии порядка $m_p c^2 \approx 10^{19}$ ГэВ(!), где $m_p = \sqrt{\hbar \frac{c}{G_N}}$ — так называемая масса Планка.

Группы унитарной симметрии

Узловым понятием современной физики является понятие симметрии. Симметрия служит тем инструментом, используя который физикам удается все многообразие физического мира свести к некоторым десяткам формул. Особую роль соображения симметрии играют в теории поля, и в частности, в тех единых моделях фундаментальных взаимодействий, которые мы будем изучать. Понятие симметрии в физике тесно связано с понятиями преобразования и инвариантности.

Пусть у нас имеется уравнение

$$\hat{A}\psi(x_\mu) = 0, \tag{1}$$

где $\psi \equiv \psi_A$ – вообще говоря, комплексная многокомпонентная функция. Пусть также имеется некоторое линейное преобразование ее компонент

$$\psi'_A = U_{AB}\psi_B, (\psi' = U\psi), \tag{2}$$

где U_{AB} — в общем случае комплексная матрица, элементы которой не зависят от x_μ. И пусть преобразованная функция ψ' также удовлетворяет уравнению (1), то есть

$$\hat{A}\psi' = 0. \tag{3}$$

В этом случае говорят, что уравнение (1) инвариантно, или симметрично относительно преобразований (2).

Различают пространственно - временные (геометрические) и внутренние (динамические) симметрии. О пространственно - временных симметриях говорят тогда, когда преобразования функций поля обусловлены преобразованиями пространственно- временных координат

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu. \tag{4}$$

В этом случае преобразование (2) принимает вид

$$\psi'_A(x'_\mu) = U_{AB}\psi_B(x_\mu). \tag{5}$$

К данному типу преобразований и соответственно симметрий относится преобразования пространственно - временных сдвигов, пространственно - временных отражений, преобразования поворотов и преобразования Лоренца, причем первые два типа относятся к так называемым **дискретным** преобразованиям, вторые два – к непрерывным.

Внутренние симметрии обусловлены преобразованиями, которые задаются непосредственно на функциях поля, не затрагивая пространствено - временных координат. В этом случае формула (2) запишется так:

$$\psi'_A(x_\mu) = U_{AB}\psi_B(x_\mu). \tag{6}$$

Нас в дальнейшем будут интересовать, главным образом, внутренние симметрии.

В том случае, когда оператор $\hat{A}$ в (1) является матрично - дифференциальным оператором вида

$$\hat{A} = \Gamma_\mu \nabla_\mu + m, \tag{7}$$

то условием инвариантности уравнения (1) является условие

$$[U, \Gamma_\mu]_- = 0. \tag{8}$$

В лагранжевом подходе помимо инвариантности уравнения

$$(\Gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi = 0, \tag{9}$$

относительно преобразований внутренней симметрии требуется инвариантность лагранжиана

$$L = -\bar{\psi}(\Gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi, \tag{10}$$

где $\bar{\psi} = \psi^+ \eta$, η – матрица билинейной лоренц - инвариантной формы. Данное требование приводит к условию (вывод):

$$(\psi^{'})^+ \eta \Gamma_\mu \nabla_\mu \psi^{'} + m(\psi^{'})^+ \eta \psi^{'} = 0,$$

$$(U\psi)^+ \eta \Gamma_\mu \nabla_\mu U\psi + m(U\psi)^+ \eta \psi = 0,$$

$$\psi^+ U^+ \eta U \Gamma_\mu \nabla_\mu \psi + m\psi^+ U^+ \eta U \psi = 0,$$

$$U^+ \eta U = \eta. \tag{11}$$

В случае, когда матрица U коммутирует с η (а именно с таким случаем нам придется в дальнейшем сталкиваться; например, для уравнения Дирака $\eta = \gamma_4$ и $[U, \gamma_4]_- = 0$ в силу (8)), условие (11) принимает вид:

$$U^+U = I, U^+ = U^{-1}. \tag{12}$$

В самом общем случае произвольная комплексная матрица U размерности $n \times n$ имеет n^2 независимых комплексных элементов, или $2n^2$ вещественных (или мнимых) элементов, которые называются **параметрами** преобразования (6). Условия (8), (12) накладывают на них определенные ограничения (связи), уменьшая число независимых элементов матрицы U, т.е. число параметров преобразования.

Матрица U, удовлетворяющая условию (12), называется **унитарной**. (В случае вещественной матрицы Q условие (12) принимает вид $U^T = U{-}1$, и такая матрица называется **ортогональной**). Можно показать, что унитарная матрица $n \times n$ имеет n^2 независимых параметров.

Покажем, что множество всех унитарных матриц данной размерности образует **группу**. [Напомнить аксиоматику группы].

$$A^+A = 1, B^+B = 1$$

$$(AB)^+(AB) = B^+A^+AB = B^+B = 1.$$

Множество всех унитарных матриц размерности $n \times n$ образует специальную унитарную группу $U(n)$.

Унитарные $n \times n$ матрицы, удовлетворяющие дополнительно условию унимодулярности

$$|U| = 1, \tag{13}$$

составляют специальную **унитарную** группу $SU(n)$, которая является подгруппой группы $U(n)$. Группа $SU(n)$ содержит $R = (n^2 - 1)$ независимых параметров.

Группы $U(n)$ и $SU(n)$ относятся к классу конечнопараметрических непрерывных групп, называемых **группами Ли**. В соответствии с общей теорией групп Ли всякая унитарная унимодулярная матрица размерности $n \times n$ может быть записана в экспоненциальной форме

$$U = e^{iH}, \tag{14}$$

в том смысле, что

$$e^{iH} = 1 + iH + \frac{1}{2!}(iH)^2 + \dots . \tag{15}$$

Для бесконечно малых преобразований (15) принимает вид

$$e^{iH} = 1 + iH. \tag{16}$$

Из условия унитарности матрицы (16) вытекает, что матрица H должна быть **эрмитовской**. Действительно, в этом случае $(e^{iH})^{+} = e^{iH^{+}}$ и $(e^{iH})^{+}e^{iH} = 1$. Кроме того, поскольку матрица iH – антиэрмитовская, то ее след равен нулю. Значит **равен нулю** и **след** матрицы H.

Известно, что такую матрицу всегда можно представить в виде

$$H = \sum_{p=1}^{n^2-1} \omega_p J^p, \tag{17}$$

где ω_p – вещественные параметры группы, J^p — инфинитезимальные операторы (генераторы) группы $\left((J^p)^+ = J^p\right)$. Для генераторов J^pсправедливы перестановочные соотношения

$$[J^p, J^q]_- = -C_{[pqr]} J^r, (p, q, r = 1, 2, \ldots R), \tag{18}$$

определяющие так называемую алгебру Ли группы $SU(n)$; $C_{[pqr]}$ – структурные константы этой группы. Необходимо отметить, что генераторы J^p могут выбираться разными способами (не единственно возможными).

Еще некоторая информация, касающаяся теории унитарных групп. Максимальное число генераторов J^p группы, которые одновременно коммутируют между собой, называется рангом группы $SU(n)$. Он равен $n-1$.

В группе $SU(n)$ всегда можно выделить подгруппы $SU(m)$ и $SU(n-m)$, которые образуют прямое произведение $SU(m) \bigotimes SU(n-m)$, т.е. коммутируют между собой.

Рассмотрим преобразование

$$\psi'(x_\mu) = e^{i\phi}\psi(x_\mu), \tag{1}$$

где $\psi(x_\mu)$ может быть как однокомпонентной, так и многокомпонентной функцией, ϕ – вещественный параметр. Нетрудно видеть, что данное преобразование является унитарным:

$$(e^{i\phi})^{+}e^{i\phi} = e^{-i\phi}e^{i\phi} = 1. \qquad (2)$$

Параметр ϕ является параметром данного преобразования, его генератором является единичная матрица (или просто единица). Т.о. с точки зрения классификации унитарных групп $U(n)$ в данном случае мы имеем дело с преобразованием $U(1)$. Группа $U(1)$ относится к классу абелевых групп преобразований (т.е. коммутирующих: $e^{i\phi_1}e^{i\phi_2} = e^{i\phi_2}e^{i\phi_1}$).

В теории поля преобразование (1) называется фазовым преобразованием, или калибровочным преобразованием 1 рода. Нетрудно видеть, что любое уравнение теории поля инвариантно относительно фазовых преобразований. Покажем это на примере уравнения Дирака:

$$e^{i\phi}(\gamma_\mu\nabla_\mu + m)\psi = (\gamma_\mu\nabla_\mu + m)e^{i\phi}\psi = (\gamma_\mu\nabla_\mu + m)\psi' = 0.$$

Физическая причина этого состоит в том, что фазовый множитель $e^{i\phi}$ не влияет на квадрат модуля волновой функции $|\psi|^2$, который является наблюдаемой на опыте величиной.

Ранее мы говорили, что при наложении на преобразования группы $U(n)$ требования унимодулярности она переходит в группу $SU(n)$. Очевидно, что фазовое преобразование $U(1)$ входит в качестве подгруппы в преобразование $U(2)$. При наложении на унитарные $n \times n$ матрицы условия унимодулярности как раз исключаются фазовые преобразования. Поскольку фазовые преобразования коммутируют с любым другим, то справедливо соотношение:

$$U(n) = SU(n) \oplus U(1). \tag{3}$$

Теперь рассмотрим преобразование

$$\tag{4}$$

где матрица U размерности 2×2 удовлетворяет условию унитарности

$$U^{+}U = 1. \tag{5}$$

Связи, накладываемые условием (5) на элементы матрицы U, имеют вид

$$\begin{cases} |U_{11}|^2 + |U_{12}|^2 = 1 \\ |U_{21}|^2 + |U_{22}|^2 = 1 \\ U_{11}^* U_{21} + U_{12}^* U_{22} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

В (6) содержится четыре независимых условия (пояснить). Т.о. остается четыре независимых параметра.

Накладывая на матрицу U условие унимодулярности

$$U_{11} \cdot U_{22} - U_{12} U_{21} = 1, \tag{7}$$

получим трехпараметрическую группу $SU(2)$.

Преобразования этой группы можно представить в экспоненциальной форме.

$$U = e^{iH}, \tag{8}$$

где трехпараметрическая эрмитовская матрица H со следом, равным нулю, всегда может быть представлена в виде линейной комбинации матриц Паули с вещественными коэффициентами:

$$H = \sum_k \omega_k \sigma_k, \tag{9}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матрицы Паули.

Покажем это. Наиболее общий вид эрмитовской матрицы 2×2 таков:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} H_{12} \\ H_{12}^* - H_{11} \end{pmatrix} \quad H_{11} - \text{вещ.}, H_{12} - \text{комп.}$$

Введем обозначения: $H_{11} = \omega_3, H_{12} = \omega_1 - i\omega_2$. И тогда

$$H = \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 + \omega_3\sigma_3.$$

Т.о. генераторами группы $SU(2)$ являются матрицы Паули

$$I^1 = \sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), I^2 = \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right), I^3 = \sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right). \tag{10}$$

Мы знаем что матрицы Паули удовлетворяют перестановочным соотношением (проверить на практических):

$$|\sigma_i \sigma_j| = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{11}$$

Сравнивая (11) с формулой (18) лекции 4, заключаем, что роль структурной константы группы $SU(2)$ с точностью до множителя $-2i$ играет тензор Леви–Чивита $\varepsilon_{ijk} : C_{[ijk]} = -2i\varepsilon_{ijk}$

Рассмотрим уравнения для которых имеет место унитарная симметрия $SU(2)$. Возьмем систему из двух свободных уравнений Дирака

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi_1 &= 0, \\ (\gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Вводя в рассмотрение 8–компонентную функцию–столбец

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

эту систему можно записать в виде одного матрично-дифференциального уравнения

$$(\Gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi = 0, \tag{14}$$

где матрицы Γ_μ имеют вид

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix} = I_2 \otimes \gamma_\mu. \tag{15}$$

Матрица билинейной формы η, которая в случае одного уравнения Дирака совпадает с матрицей γ_4, в данном случае будет иметь вид:

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_4 = \Gamma_4. \tag{16}$$

Можно показать, что матрица 4×4, коммутирующая со всеми матрица γ_4, кратна единичной (сделать на практических). С матрицей I_2 коммутирует произвольная матрицей Q размерности 2×2.То есть наиболее общий вид матрицы U, коммутирующей с матрицами Γ_μ, является следующим:

$$U = q \otimes I_4. \tag{17}$$

Накладывая на матрицу U требование инвариантности лагранжиана на $U^+ \eta U = \eta$, придем к условию $q^+ q = I_2$, означающему, что матрица q, а значит и U, должна быть унитарной. Следовательно, внутренняя симметрия системы (12) и её лагранжиана описывается группой $U(2)$, которая раскладывается в прямое произведение группы $SU(2) \otimes U(1)$, где $U(1)$ соответствует фазовому преобразованию.

Рассмотрим преобразование в комплексном пространстве

$$\begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad (\psi' = U\psi), \tag{18}$$

где матрица U размерности $3 \otimes 3$ удовлетворяет условию (5). Связи, накладываемые этим условием на элементы матрицы U, таковы:

$$\begin{cases} |U11|^2 + |U12|^2 + |U13|^2 = 1 \\ |U21|^2 + |U22|^2 + |U23|^2 = 1 \\ |U31|^2 + |U32|^2 + |U33|^2 = 1 \\ U_{11}^+ U_{21} + U_{12}^+ U_{22} + U_{13}^+ U_{23} = 0 \\ U_{11}^+ U_{31} + U_{12}^+ U_{32} + U_{13}^+ U_{33} = 0 \\ U_{21}^+ U_{31} + U_{22}^+ U_{32} + U_{23}^+ U_{33} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

В (19) содержится 9 независимых условий. Остается 9 независимых параметров. После наложения условия модулярности

$$|U| = 1$$

получаем 8–параметрическую группу преобразований $SU(3)$. Преобразования этой группы можно представить в форме (8), где Н – восьмипараметрическая матрица со следом, равным нулю.

Матрицу Н можно параметризовать, т.е. представить в виде:

$$H = \sum_{p=1}^{8} \omega_p I^p = \sum_{p=1}^{8} \omega_p \lambda_p, \tag{20}$$

с помощью матриц Гелл–Манна λ_p:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

которые, таким образом, выступают в качестве генераторов группы $SU(3)$.

Очевидно, что группа симметрии $SU(3)$ присуща системе из трех свободных уравнений Дирака.

Тема. Теорема Нётер и законы сохранения

С понятиями симметрии и инвариантности тесно связаны законы сохранения. Так, с геометрическими симметриями связаны законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Внутренним симметриям уравнений теории поля также соответствуют определенные законы сохранения, которые мы и будем рассматривать.

"Взаимоотношения" между симметриями и законами сохранения устанавливаются теоремой Нётер, которая гласит: каждому параметру ω_p группы G непрерывных преобразований координат и функций поля, или только функций поля, относительно которых инвариантен лагранжиан поля, соответствует некоторая сохраняющаяся во времени комбинация функций поля и их производных.

Теорема Нётер в случае комплексного поля, дает следующее общее выражение для сохраняющихся величин:

$$\theta_{\mu p} = -\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu \psi_A)}(iJ^p)_{AB}\psi_B + \psi_B^*(iJ^p)_{BA}^*\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu \psi_A^*)}. \tag{1}$$

Здесь J^p – генераторы группы; индекс p пробегает столько значений, сколько у группы параметров (генераторов).

В случае фазовых преобразований p $=1$, $J_{AB} = \delta_{AB}$ и следовательно $\theta_{\mu p} \to \theta_\mu$

$$\theta_\mu = -i\left\{\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu \psi_A)}\psi_A - \psi_A^* \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu \psi_A^*)}\right\} \equiv j_\mu. \tag{2}$$

При этом согласно доказательству теоремы Нётер

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \tag{3}$$

т.е. четырехмерный вектор j_μ удовлетворяет уравнению непрерывности, откуда следует сохранение интегральной характеристики поля, определяемой выражением

$$Q = -i\int j_4 d^3x = -ic\int\left(\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\psi_A}{\partial t})}\psi_A - \psi_A^*\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\psi_A^*}{\partial t})}\right)d^3x. \tag{4}$$

Величину Q (4) с точностью до некоторой размерной постоянной называют зарядом комплексного поля, а 4-вектор $j_\mu(2)$ – четырехмерным вектором плотности тока.

Таким образом, инвариантность теории комплексного поля относительно группы калибровочных преобразований I рода $U(1)$ приводит к сохранению заряда поля.

При этом понятие “заряда поля” не обязательно относится к электрическому заряду. Таким же способом может быть дана математическая формулировка законов сохранения и для других вводимых в теорию элементарных частиц зарядов: барионного, лептонного, странности (гиперзаряда) и т.д. В случае электрического заряда в качестве размерной константы берется заряд e, что влечет за собой закон сохранения электрического заряда

$$Q = e\int\Big(\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\psi_A^*}{\partial t})}\psi_A - \psi_A^*\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\psi_A^*}{\partial t})}\Big)d^3x. \qquad (5)$$

Важно подчеркнуть, что при условии $\psi_A(x) = \psi_A^*(x)$, т.е. для вещественных полей, выражения (2), (5) для плотности тока и заряда поля обращаются в нуль. Это означает, что комплексные функции поля описывают заряженные частицы, а вещественные – нейтральные.

В случае если лагранжиан поля инвариантен относительно преобразований группы SU(2), то мы получаем для величин $\theta_{\mu p}$ выражение (1), где p= 1, 2, 3. J^p – генераторы группы SU(2), и для сохраняющихся интегральных характеристик поля выражение

$$\theta_p = \int\theta_{\mu p}d^3x = \int\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\psi_A)}(-iL^p)_{AB}\psi_B + \psi_B^*(-iL^p)_{BA}^*\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\psi_A)}\right]d^3x. \qquad (6)$$

Т. о. инвариантность теории поля относительно преобразований группы $SU(2)$ влечет за собой сохранение трех величин $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, сопоставляемых операторам J^1, J^2, J^3 — генераторам данной группы. Обычно в качестве генераторов группы $SU(2)$ используют матрицы $\frac{1}{2}\sigma_i$:

$$J^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что эти операторы с точностью до $\hbar$ совпадают с операторами проекций спина электрона

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Поэтому по своим свойствам трехкомпонентная физическая величина (в математическом плане) аналогична спину электрона и поэтому она называется **изотопическим спином**.

Закон сохранения изотопического спина является математическим выражением независимости сильных взаимодействий адронов от их электрических зарядов. Рассмотрение всевозможных неприводимых представлений изотопической группы $SU(2)$ лежит в основе разбиения адронов по изотопическим мультиплетам, объединяющим в себе близкие по своим свойствам сильновзаимодействующие частицы, отличающиеся друг от друга значениями электрических зарядов.

Поясним. Матрицы (7) рассматриваются в качестве операторов проекций изотопического спина. Будем обозначать их $\hat{J}^1$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}^3$. Поскольку эти операторы не коммутируют между собой, то проекции изоспина одновременно не измеримы. Одновременно измеримыми являются величины, соответствующие операторам $\hat{J}^3$ и

$$\hat{J}^2 = (\hat{J}^1)^2 + (\hat{J}^2)^2 + (\hat{J}^3)^2, \qquad (9)$$

где $\hat{J}^2$ – оператор абсолютной величины изоспина (оператор Казимира). Допустимые значения проекции изоспина и абсолютной величины совпадают с собственными значениями этих операторов

$$\hat{J}^3\psi = J_3\psi = 1/2, \quad J_3 = \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \psi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

$$\hat{J}^2\psi = \hat{J}^2\psi, \quad J^2 = \frac{3}{4}.$$

Т.о. число $j = \frac{1}{2}$ определяет как проекцию изоспина $\pm j$, так и абсолютную величину $\sqrt{j(j+1)}$. Поэтому в данном случае мы имеем дело с изоспином $\frac{1}{2}$.

Группа $SU(2)$, как и любая группа, имеет **представления**. Представления группы $SU(2)$ характеризуются одним числом j, которое может принимать значения j= 0, 1/2, 1, ... и называется весом неприводимого представления группы $SU(2)$. Размерность пр-ва представления определяется по формуле 2j+1. Таким образом, мы рассмотрели фундаментальное представление, которое соответствует весу $j = \frac{1}{2}$. Если рассмотреть представление с весом j=1, действующее в трехмерном комплексном пространстве, то мы получим три проекции изотопического спина 1, 0, -1. При этом оператор $\hat{J}^3$ и его собственные функции будут иметь вид

$$\hat{J}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Так вот, функции (10) могут быть отождествлены с функциями двух зарядовых состояний нуклона: протону сопоставляется значение проекции изоспина $J_3 = \frac{1}{2}$, нейтрону – $J_3 = -\frac{1}{2}$. Другими словами, протон и нейтрон образуют изотопический дублет. Ещё один пример такого рода: k^0 и k^- – мезоны.

Функции (12) сопоставляются обычно с тремя зарядовыми состояниями π -мезона: π^+, π^0, π^- соответствуют $J_3 = 1, 0, -1$ и образуют изотопический триплет.

Следует подчеркнуть, что в отличие от закона сохранения электрического заряда закон сохранения изотопического спина не является универсальным законом природы, он строго выполняется только для сильных взаимодействий, рассматриваемых в чистом виде, и нарушается при учете электромагнитных и слабых взаимодействий. В частности, строгое выполнение условий изотопической инвариантности требует, чтобы массы частиц, принадлежащих одному и тому же изотопическому мультиплету, были в точности одинаковыми. В действительности это не имеет места. Причина состоит в том, что в природе сильное взаимодействие в чистом виде не встречается, к нему обязательно примешиваются электромагнитное и (или) слабое взаимодействие. Это приводит к тому, что наблюдаемые массы реальных адронов, составляющих изотопический мультиплет, оказываются различными и вследствие этого изотопическая симметрия оказывается нарушенной.

Тема. Группа унитарной симметрии $SU(3)$. Кварковая модель

Введение нового квантового числа – изотопического спина – понадобилось нам для математической и физической трактовки законов сохранения, связанных с симметрией сильных взаимодействий адронов относительно преобразований группы $SU(2)$. Переход к группам симметрии более высоких порядков требует введение дополнительных квантовых чисел.

Можно заметить, что для изотопических мультиплетов значения третьей проекции изотопического спина в одних случаях совпадают со значениями электронного заряда в единицах $e(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$, а в других – не совпадают (p, n). Мерой этого различия может служить величина $\bar{Q}$, определяющая среднее значение электрических зарядов адронов, принадлежащих данному мультиплету. Действительно, для указанных в лекции 6 мультиплетов имеем: $\bar{Q}_\pi = 0, \bar{Q}_N = \frac{1}{2}, \bar{Q}_K = -\frac{1}{2}$ (N — нуклон). Отсюда вытекает справедливость следующего общего соотношения:

$$Q = \bar{Q} + I_3 \tag{1}$$

для каждого члена изотопического мультиплета.

Очевидно, в основе отмеченного различия значений $\bar{Q}$ лежит различие физических свойств адронов, относящихся к различным мультиплетам. Это находит свое отражение в значениях дополнительных квантовых чисел, которыми характеризуются адроны. В частности, протон и нейтрон относятся к группе адронов, называемых барионами, и характеризуются барионным числом (барионным зарядом) B, равным в данном случае $B = +1$. В отличие от барионов барионный заряд мезонов, к числу которых относятся π – и K – мезоны, равен $B = 0$. K – мезоны, в свою очередь, относятся к так называемым странным частицам, характерной особенностью которых является то, что, рождаясь в процессах сильного взаимодействия, они распадаются по законам слабого взаимодействия. Принадлежность (или непринадлежность) адронов к семейству странных частиц характеризуется определенным значением приписываемого им квантового числа – странность S. Странность K–мезонов равна $S = -1$, а для нуклонов и π–мезонов $S = 0$.

Величина среднего электрического заряда $\bar{Q}$ изотопического мультиплета связана со значением барионного заряда B и странности S соотношением

$$\bar{Q} = \frac{1}{2}(B + S),$$

учет которого позволяет перейти от формулы (1) к известной формуле Гелл – Манна – Нишиджимы.

$$Q = \frac{1}{2}(B + S) + I_3. \tag{2}$$

Эта формула записывается также в виде

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3, \quad Y = B + S = 2\bar{Q}. \tag{3}$$

Здесь величина $Y = B + S = 2\bar{Q}$ называется гиперзарядом. Гиперзаряд может рассматриваться как некоторая дополнительная характеристика изотопических мультиплетов, не только отличающая их друг от друга, но и связывающая различные мультиплеты между собой.

Описание сохранения барионного заряда может быть дано в полной аналогии с формулировкой сохранения электрического заряда, т. е. на основе использования инвариантности теории относительно однопараметрических (фазовых) преобразований, образующих группу U(1). Оба эти закона созранения считаются универсальными, т. е. справедливыми для всех типов фундаментальных взаимодействий[3]. В то же время закон сохранения странности и связанный с ним закон сохранения гиперзаряда, так же как и закон сохранения изотопического спина, не является универсальным. Они относятся к числу приближенных, или частных законов сохранения, присущих процессам с участием только сильных взаимодействий[4].

---

[3]Модель Великого Объединения предсказывает возможность весьма незначительного нарушения закона сохранения барионного заряда, выражающегося, например, в самопроизвольном распаде протона (пояснить подробно).

[4]Математически это связано с тем, что члены в лагранжиане, отвечающие за электромагнитное и слабое взаимодействия, неинвариантны относительно преобразований группы $SU(2)$.

В соответствии с вышеуказанным возникла идея о возможности и необходимости расширения группы симметрии, характерной для сильных взаимодействий, таким образом, чтобы она включала в себя преобразования, ответственные как за сохранение изотопического спина, так и гиперзаряда одновременно. Простейшее решение этой задачи сводится к переходу от группы $SU(2)$, три генератора которой связываются с операторами проекций изотопического спина, к более широкой, следующей после $SU(2)$ по своей сложности, группе $SU(3)$, имеющей 8 генераторов. Группа $SU(3)$ относится к классу групп второго ранга, и поэтому среди ее восьми генераторов имеются два, коммутирующих друг с другом, а следовательно одновременно приводимых к диагональному виду. Эти два генератора могут быть сопоставлены двум одновременно измеримым физическим величинам – проекции изотопического спина I_3 и гиперзаряду Y.

Обеспечив инвариантность теории поля относительно преобразований группы $SU(3)$, мы тем самым можно дать математическую формулировку законов сохранения этих двух величин. С этой целью, как и в предыдущих случаях применения теоремы Нётер, необходимо ввести в рассмотрение наборы функций поля, преобразующихся по представлениям группы $SU(3)$, чтобы можно было строить инвариантные относительно преобразований группы $SU(3)$ уравнения и лагранжиан. В качестве таких функций поля обычно берут три лоренцевских биспинора (в трехмерном фундаментальном представлении), подчиняющихся системе из трех уравнений Дирака.

В трехмерном (фундаментальном) представлении группы $SU(3)$ два указанных выше коммутирующих друг с другом генератора обычно выбираются в виде следующих диагональных 3×3 матриц

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3, \quad \lambda_8 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \hat{Y}, \tag{4}$$

$$\hat{I}_3\psi = I_3\psi, \quad \hat{Y}_3\psi = Y_3\psi. \tag{5}$$

Матрица λ_3 отождествляется с оператором $\hat{I}_3$, а матрица λ_8 – с оператором $\hat{Y}$. Три общие для этих двух операторов независимые друг от друга собственные функции, отвечающие собственным значениям этих операторов, равным соответствующим диагональным элементам указанных матриц, задают базис фундаментального представления группы $SU(3)$ в трехмерном комплексном пространстве. Эти функции могут быть выбраны в виде

$$\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^1, \quad \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^2, \quad \psi_{0,-\frac{2}{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^3. \tag{6}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3}; \quad I_3 = -\frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3}; \quad I_3 = 0, Y = -\frac{2}{3}.$$

Трехкомпонентные величины $\psi_n(\psi = \psi^n e^n)$, заданные в базисе (6) и преобразующие по закону $(\psi^n)' = U_{nm}\psi^m$, называются трехмерными (контравариантными) спинорами первого ранга, а комплексно сопряженные им величины $(\psi_n)^+ = \psi^n$ – сопряженными (ковариантными) спинорами первого ранга. (Напомним, что здесь идет речь не о лоренцевских спинорах, а о спинорах относительно преобразований группы SU(3). Поэтому трехкомпонентные величины ψ^n и ψ_n на самом деле являются 12 – компонентными (лоренцевский индекс опускается)).

В теории групп $SU(n)$ имеется хорошо разработанная процедура, которая позволяет строить всевозможные представления этой группы и соответствующие наборы функций в пространствах высших размерностей. Эта процедура сводится к построению прямых произведений исходных фундаментальных представлений с последующим разбиением полученных представлений на неприводимые. Согласно этой процедуре всякое неприводимое представление группы $SU(3)$ может быть задано с помощью двух целых положительных чисел k и l; оно обозначается символом $\mathrm{D}(k,l)$ и реализуется в пространстве смешанных спиноров ранга $k+l$ с симметричными k верхними и l нижними индексами $(k, l = 0, 1, 2, 3)$:

$$\psi\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \cdots n_k \\ m_1 & m_2 \cdots m_e \end{pmatrix}, \quad n_i, m_j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Можно показать, что число независимых компонент такого неприводимого спина равна $N = \frac{1}{2}(k+1)(l+1)(k+l+2)$. Это число определяет размерность пространства представления $\mathrm{D}(k, l)$. В частности, фундаментальное представление этой группы, реализуемое функциями $\psi^n (n = 1, 2, 3)$, обозначается $\mathrm{D}(1,\ 0)$, или сокращенно 3, в то время как для представления в пространстве сопряженного спинора ψ_n будет иметь $D(1,0) \to \{\bar{3}\}$. Так, например, в случаях произведений двух и трех представлений будем иметь:

$$
\begin{gathered}
D(1,0) \otimes D(0,1) = D(0,0) \oplus D(1,1); \\
\{3\} \otimes \{\bar{3}\} = \{1\} \oplus \{8\}; \\
\psi^n \otimes \psi_m \to \psi^n_m; \qquad (8) \\
D(1,0) \otimes D(1,0) \otimes D(1,0) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(3,0);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\{3\} \otimes \{3\} \otimes \{3\} = \{1\} \oplus \{8\} \oplus \{8^{'}\} \oplus \{10\}; \\
\psi^{n_1} \otimes \psi^{n_2} \otimes \psi^{n_3} \to \psi^{(n_1 n_2 n_3)}. \qquad (9)
\end{gathered}
$$

Вспомним теперь, что согласно основным положениям квантовой механики функция состояния связанной системы, образованной, например, из двух подсистем (взаимодействие между которыми мало), равно произведению функций составляющих ее подсистем: $\psi(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$. Отсюда возникает идея, что если фундаментальному представлению группы SU(3) (функциям ψ^n) сопоставить какие – либо три фундаментальные частицы, а сопряженному представлению (функции ψ^n) – их античастицы, то из них можно составить остальные адроны, которым сопоставляются функции (7). Это позволяет производить классификацию адронов по унитарным супермультиплетам, отвечающим неприводимым представлениям группы $SU(3)$. При этом в унитарные супермультиплеты объединяются изотопические мультиплеты с одним и тем же значением спина и пространственной четности. В случае мезонных состояний унитарный супермультиплет объединяет в себе частицы и соответствующие им античастицы, в то время как каждому унитарному супермультиплету барионов соответствует точно такой же по структуре мультиплет антибарионов. Основная часть реальных адронов в рамках SU(3) — симметрии может быть разбита по унитарным синглетам ψ_n^n (по n суммирование) D(0, 0), октетам ψ_m^n D(1, 1) и декаплетам $\psi^{(n_1 n_2 n_3)}$.

Возникает вопрос, какие частицы выступают здесь в качестве фундаментальных, а какие являются составными. В первоначальных моделях такого типа в качестве фундаментальных выступали реально наблюдаемые адроны. Однако вскоре стало ясно, что фундаментальное трехмерное представление D(1, 0) не может быть связано с какими – либо реально наблюдаемыми адронами, поскольку функциям ψ^n, реализующим это представление, отвечают не встречающиеся пока в физике дробные значения электрического $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ и барионного $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ зарядов. Это обстоятельство привело к известной гипотезе кварков, выдвинутой в 1964 г. независимо друг от друга Гелл–Манном и Цвейгом. Суть ее состоит в том, что исходному фундаментальному представлению группы $SU(3)$

D(1, 0) сопоставляется набор трех гипотетических частиц – кварков и соответственно сопряженному представлению D(1, 0) – три антикварка. Их назвали U-, d-, и S – кварками. Квантовые числа кварков и антикварков приведены в таблице (Богуш, стр.81).

Реально существующие адроны при этом рассматриваются как связанные состояния квантовомеханические канонические системы, образованные из этих гипотетических субэлементарных частиц. В частности, функциям $\psi^n_m = \psi^n \psi_m$ отвечают адроны, которые являются связанными системами из различных комбинаций кварка и антикварка $q\bar{q}$. Разложение получаемого таким образом 9-мерного представления на два неприводимых D(0, 0)$\otimes$ D(1, 1) приводит разбиению описываемых им адронов на два семейства: синглет и октет. Поскольку кваркам приписывается спин $\frac{1}{2}$, спин системы кварк–аникварк может равным либо 0, либо 1. Таким образом можно получить наиболее распространены скалярные и векторные мезоны.

Аналогичные образом всевозможное барионные состояния, описываемые функциями $\psi^{n_1}\psi^{n_2}\psi^{n_3}$, интерпретируются как связанные системы, составленные из трех кварков qqq и в согласии с (9), разбиваются на синглет D(0, 0), два октета D(1, 1), D(1, 1) барпонов со спином $\frac{1}{2}$ и декуплет барпонов D(3, 0) со спином 3/2.

Таблица

Кварки q антикварки $\bar{q}$	Спин	Электр. заряд Q	Изотоп. спин I	Проекция изотопа спина I_3	Барион. Заряд B	Странность S	Гипер-заряд $Y = \frac{1}{2}(B+S) = 2\bar{Q}$
u	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$
$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
$\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

Рассмотренная трехкварковая схема очень хорошо согласовывалась с наблюдаемым спектром адронов на момент её создания. Вакантные не тот момент места в унитарных супермультиплетах заполнялись новыми октетами, впоследствии адронами. Однако в 70-х и последующих десятилетиях экспериментальные данные привели к необходимости расширения первоначальной трехкварковой схемы за счет новых c-, в- и t-кварков. Группа $SU(3)$ в шестикваркой модели связывается не с симметрией ароматов, а поколений. Пара кварков, относящихся к одному поколению, образует изотопический дублет.

Тема. Принцип локальной калибровочной инвариантности и теоретико–групповая трактовка электромагнитных и слабых взаимодействий

Как уже говорилось, главным, внутренне присущим всякой всякой элементарной частице свойством, является ее способность к взаимодействию. Элементарные частицы выступают как первичные источники и носители известных фундаментальных взаимодействий. Поэтому основной задачей теоретических исследований в данной области физики является построение теории этих взаимодействий.

До сих пор мы исследовали свойства внутренней симметрии свободных полей и сопоставляемых им частиц. На этом этапе нам удалось достичь определенных успехов (закон сохранения заряда, изотопический спин, кварки). Однако теория свободных полей и частиц представляет собой лишь подготовительный, предварительный этап на пути построения теории их взаимодействий. Дело в том, что представление о свободной, невзаимодействующей элементарной частице это — некоторая абстракция, далекое от реальной физической картины приближение. Так, например, электрически заряженная частица неотделима от создаваемого ею же электромагнитного поля, она является источником этого поля и сама же взаимодействует с ним. В указанном смысле ее нельзя считать, строго говоря, свободной даже при отсутствии в ее окружении других электрически заряженных частиц.

В основе большинства современных теорий фундаментальных взаимодействий лежит принцип локальной калибровочной инвариантности. Поясним, что это такое. До сих пор мы рассматривали преобразования внутренней симметрии

$$\psi'_A(x_\mu) = U_{AB}\psi_B(x_\mu), \tag{1}$$

в глобальном смысле: параметры этих преобразований считали не зависящими от координат x_μ. Однако внесение в “пустое” пространство электрического (или какого-либо другого) заряда приводит в нем к таким изменениям (появляется электрическое поле), при которых уже нельзя считать все точки этого пространства равноправными, неразличимыми. Непонятно, почему в каждой точке пространства, где определены функции поля, они умножаются обязательно на один и тот же множитель, в то время как этот множитель может, вообще говоря, изменяться от точки к точке.

В связи с этим еще в первой половине XX века в качестве естественного обобщения глобальной инвариантности теории электрически заряженных частиц относительно преобразований группы $U(1)$ – инвариантности, смысл которой сводится к тому, что лагранжиан теории относительно фазовых преобразований I рода (калибровочных преобразований) должен оставаться инвариантным и в том случае, когда параметр этого преобразования является функцией пространственно-временных координат: $\phi = \phi(x_\mu)$.

Прежде, чем выяснять, к чему это требование приводит, вспомним, в чем состоит "обычный" способ введения взаимодействия электрически заряженной частицы, например электрона, с электромагнитным полем, принятый в классической электродинамике. В суммарном лагранжиане полей свободного электрона и электромагнитного поля

$$L_0 = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \tag{2}$$

в первом слагаемом вводится замена производной ∇_μ на удлиненную производную

$$\nabla_\mu \to D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu, \tag{3}$$

где A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля. Затем в результате несложных математических преобразований получается следующее выражение для лагранжиана

$$L_0 \to L = L_0 + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu, \tag{4}$$

где член

$$L_{B3} = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu = j_\mu A_\mu (j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \tag{5}$$

трактуется как лагранжиан взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Из лагранжиана (4) путем обычной процедуры варьирования получаются "правильные" уравнения

$$\begin{cases} \nabla_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu \\ [\gamma_\mu(\nabla_\mu - ieA_\mu) + m]\psi = 0 \end{cases} . \tag{6}$$

В данном подходе "удлиненная" производная $\nabla_\mu - ieA_\mu$ вводится "руками" без какого-либо фундаментального теоретического обоснования. Единственным критерием, обосновывающим такое введение взаимодействия с электромагнитным полем, является совпадение с экспериментом следствий, вытекающих из системы (6).

Покажем, как можно ввести взаимодействие заряженной частицы (электрона) с электромагнитным полем, руководствуясь принципом локальной калибровочной инвариантности. Возьмем лагранжиан свободного электрона

$$L_0 = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi. \tag{7}$$

Проверим его инвариантность относительно локальных калибровочных преобразований группы U(1)

$$\psi' = e^{ie\Lambda(x)}\psi = U(\Lambda(x))\psi; \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^*; \tag{8}$$

$$U(\Lambda) = e^{ie\Lambda}; \quad U^* = e^{-ie\Lambda}; \quad \nabla_\mu U = ie(\nabla_\mu \Lambda)U. \tag{9}$$

Штрихованный лагранжиан L_0' будет иметь вид

$$L_0' = -\bar{\psi}'\gamma_\mu \nabla_\mu \psi' - m\bar{\psi}'\psi' = -\bar{\psi}U^*\gamma_\mu \nabla_\mu (U\psi) - m\bar{\psi}U^*U\psi;$$

Преобразуем его и посмотрим, приводится ли он к виду (7). При этом учтем, что

$$\nabla_\mu(U\psi) = (\nabla_\mu U)\psi + U\nabla_\mu \psi = ie(\nabla_\mu \Lambda)U\psi + U\nabla_\mu \psi. \tag{10}$$

Итак,

$$\begin{aligned} L_0' &= -\bar{\psi}U^*\gamma_\mu[ie(\nabla_\mu \Lambda)U\psi + U\nabla_\mu \psi] - m\bar{\psi}\psi = \\ &= -\bar{\psi}\gamma_\mu \nabla_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - ie\bar{\psi}\gamma_\mu \psi \nabla_\mu \Lambda - = \\ &\quad -\bar{\psi}(\gamma_\mu \nabla_\mu + m + ie\gamma_\mu \nabla_\mu \Lambda)\psi. \end{aligned} \tag{11}$$

Сравнивая (11) и (7), видим, что они отличаются наличием в (11) последнего слагаемого. (Заметим, что если Λ не зависит от x, это слагаемое обращается в нуль). Т.о. если не вводить рассмотрение каких-либо дополнительных процедур, то лагранжиан (7) не инвариантен относительно локальных преобразований (8). Для того чтобы обеспечить искомую инвариантность, совершим в (7) замену вида (3), где A_μ – некоторое вещественное векторное поле, подчиняющееся следующему закону преобразования при локальных преобразованиях (8):

$$A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \Lambda(x). \tag{12}$$

Исходный и штрихованный лагранжианы теперь будут иметь вид

$$L = -\bar{\psi}[\gamma_\mu(\nabla_\mu - ieA_\mu) + m]\psi \to -\bar{\psi}(\gamma_\mu \nabla_\mu + m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu, \tag{13}$$

$$L' = -\bar{\psi}'[\gamma_\mu(\nabla_\mu - ieA'_\mu) + m]\psi'. \tag{14}$$

Преобразуем (14):

$$L' = -\bar{\psi}U^*\gamma_\mu\nabla_\mu(U\psi) + ieU^*\gamma_\mu(A_\mu + \nabla_\mu\Lambda)U\psi - m\bar{\psi}\psi.$$

Отсюда с учетом (10) имеем:

$$\begin{gathered} L' = -\bar{\psi}U^*\gamma_\mu(U\nabla_\mu\psi + ieU\psi\nabla_\mu\Lambda) + ie\bar{\psi}U^*\gamma_\mu A_\mu U\psi + \\ +ie\bar{\psi}U^*\gamma_\mu U\psi\nabla_\mu\Lambda - m\bar{\psi}\psi = \\ -\bar{\psi}U^*\gamma_\mu\nabla_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + ie\bar{\psi}U^*U\gamma_\mu\psi A_\mu = [U^*U = \Lambda] = \\ = -\bar{\psi}(\gamma_\mu\nabla_\mu + m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu. \end{gathered} \tag{15}$$

Теперь мы видим, что исходный и преобразованный лагранжианы L и L' совпадают.

Итак, мы обеспечили инвариантность исходного лагранжиана введя в него способом (3) некоторое вещественное векторное поле $A_\mu(x)$. Такое введение равносильно введению взаимодействия заряда e с полем $A_\mu(x)$. Физический характер этого поля легко установить, если обратиться к (12). Данные преобразования совпадают с хорошо известными градиентными преобразованиями потенциалов электромагнитного поля (калибровочными преобразованиями второго рода), устанавливающими допустимую неоднозначность в выборе потенциалов этого поля. Поэтому естественно отождествить поле вектора $A_\mu(x)$ с электромагнитным полем, и тогда последний член в (13) описывает взаимодействие (тока) электрона с электромагнитным полем. Заметим, что для получения замкнутой теории лагранжиан (13) надо дополнить членом $L_{E.M.} = -\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}$, описывающим собственно электромагнитное поле и заведомо инвариантным относительно градиентных преобразований (12).

Подчеркнем еще, что векторное поле $A_\mu(x)$ не может быть массивным, поскольку включение соответствующего "массового" члена $m^2A^2_\mu(x)$ в $L_{E.M.}$ приведет к нарушению его локальной $U(1)$ – инвариантности.

Резюмируя, можно сказать следующее. Наложение на лагранжиан свободного поля электрически заряженных частиц требования инвариантности относительно локальных $U(1)$ – преобразований приводит к необходимости таких изменений в исходном лагранжиане, в результате которых получается новый лагранжиан, описывающий взаимодействующие между собой исходное и электромагнитное поле. В соответствии с общепринятой терминологией локальная унитарная однопараметрическая группа $U(1)$ выступает здесь в качестве локальной калибровочной группы, а требование инвариантности лагранжиана полей относительно преобразований этой группы носит название локальной калибровочной инвариантности теории электромагнитных взаимодействий. Иначе говоря, принцип локальной калибровочной инвариантности играет здесь роль основного динамического принципа. Удлиненные производные $D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu$ называются локально-калибровочно-ковариантными производными, а входящие в них векторы $A_\mu(x)$ описывают поля, которые называются калибровочными полями. В данном случае калибровочным векторным полем является электромагнитное поле.

Изложенный подход к описанию электромагнитного взаимодействия обладает тем преимуществом, что он может претендовать на универсальность. Принцип локальной калибровочной инвариантности может быть использован в качестве ведущего динамического принципа при построении теории всех основных типов взаимодействий элементарных частиц.

Принцип локальной калибровочной инвариантности с использованием неабелевой группы преобразований впервые был применен Янгом и Миллсом в 1954 г. с целью построения теории сильных взаимодействий. В качестве калибровочной группы была взята трехпараметрическая группа $SU(2)$, с которой связан присущий сильным взаимодействиям закон сохранения изотопического спина. Математическая формулировка этого закона, осуществляемая в соответствии с теоремой Нетер, базируется на использовании преобразований с параметрами, не зависящими от пространственно – временных координат, т.е. на требовании $SU(2)$ – инвариантности в глобальном смысле. Янг и Миллс ввели локальные $SU(2)$ – преобразования. Однако их теория в своем первоначальном виде оказалась непригодной для описания сильных взаимодействий. Тем не менее, их идея и разработанный при этом математический аппарат стали основополагающими при построении всех последующих теоретико – полевых моделей фундаментальных взаимодействий.

Рассмотрим $SU(2)$ – инвариантный (в глобальном смысле) лагранжиан для свободных дираковских полей

$$L_o = -\frac{1}{2}\left\{\bar{\Psi}^\alpha\gamma_\mu\nabla_\mu\psi^\alpha - (\nabla_\mu\bar{\Psi}^\alpha)\gamma_\mu\psi^\alpha\right\} - m\bar{\Psi}^\alpha\psi^\alpha, \tag{1}$$

где $\alpha = 1, 2$. Функции $\psi^\alpha(x)$ реализуют некоторое представление группы SU(2), которое для простоты выберем двумерным (фундаментальное представление). Такой выбор соответствует описанию изотопического дублета адронов со спином $\frac{1}{2}$, например протон и нейтрон (без учета их электромагнитной структуры). Это означает, что лагранжиан (1) инвариантен относительно преобразований

$$(\psi^\alpha)' = U_{\alpha\beta}\psi^\beta \quad (\psi' = U\psi)$$

$$(\bar{\psi}^\alpha)' = \psi^\beta U^*_{\beta\alpha} \quad (\bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1} = \bar{\psi}U^+), \tag{2}$$

где

$$U = e^{iH}, H = \sum_{a=1}^{3} g\omega_a I^a \quad \left(I^a = \frac{1}{2}\sigma_a\right). \tag{3}$$

В (3) произведено переопределение параметров $\omega_a \to g\omega_a$, где g - некоторая константа, смысл которой выяснится позже.

Будем считать теперь, что $\omega = \omega(x)$, и потребуем инвариантность лагранжиана (1) относительно преобразований $U(x)$. Поступая, как и в рассмотренном в лекции 8 случае локальной $U(1)$ – инвариантности, произведем в лагранжиане (1) замену производных

$$\nabla_\mu \psi^\alpha(x) \to D_\mu^- \psi^\alpha(x) = (\nabla_\mu - igB_\mu(x))\psi^\alpha(x), \tag{4}$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi}^\alpha(x) \to D_\mu^+ \bar{\psi}^\alpha(x) = (\nabla_\mu - igB_\mu(x))\bar{\psi}^\alpha(x). \tag{5}$$

Тогда инвариантность нового лагранжиана

$$L_o = -\frac{1}{2}\left\{\bar{\Psi}^\alpha \gamma_\mu D_\mu^- \psi^\alpha - (D_\mu^+ \bar{\Psi}^\alpha)\gamma_\mu \psi^\alpha\right\} - m\bar{\Psi}^\alpha \psi^\alpha, \tag{6}$$

относительно локальных преобразований $(\psi^\alpha)' = U(x)\psi^\alpha$, $(\bar{\Psi}^\alpha)' = \bar{\Psi}^\alpha U^{-1}$ будет обеспечена, если потребовать, чтобы выполнялось операторное равенство

$$U^{-1}(x)(D_\mu^{\mp})' U(x) = D_\mu^{\mp}. \tag{7}$$

Произведя в (7) подстановку $D_\mu^{\mp} = \nabla_\mu \mp igB_\mu$ и подействовав на функцию $\psi(x) \equiv \psi^\alpha(x)$, (для определимости берем в (7) верхний знак), получим:

$$U^{-1}(x)(\nabla_\mu igB'_\mu(x))U(x)\psi^\alpha(x) = (\nabla_\mu igB_\mu(x))\psi^\alpha(x). \tag{8}$$

Отсюда после проведения очевидных операций будем иметь:

$$U^{-1}\nabla_\mu(U(x)\psi(x)) - igU^{-1}(x)B'_\mu(x))U(x)\psi(x) = \nabla_\mu\psi(x) - igB_\mu(x)\psi(x)$$

или

$$U^{-1}(x)(\nabla_\mu U(x) - igB'_\mu(x)U(x))\psi(x) = -igB_\mu(x)\psi(x).$$

Отсюда следует:

$$B'_\mu(x) = UB_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{1}{ig}(\nabla_\mu U(x))U^{-1}(x). \tag{9}$$

Учитывая, что

$$\nabla_\mu U(x) = \nabla_\mu e^{ig\sum_a \omega_a I^a} = ig\sum_a \frac{d\omega_a}{dx_\mu} I^a U(x),$$

для второго слагаемого в правой части (9) получим выражение

$$\sum_a \frac{d\omega_a}{dx_\mu} I^a (I^a = \frac{1}{2}\sigma_a). \tag{10}$$

В результате соотношение (9) принимает вид

$$B'_\mu(x) = UB_\mu(x)U^{-1}(x) + \sum_{a=1}^{3} \frac{d\omega_a}{dx_\mu} I^a. \tag{11}$$

(Заметим, что данное соотношение в случае $U(1)$ – преобразований переходит в калибровочные преобразование второго рода $A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \Lambda(x)$).

Оба слагаемых справа в формуле (11) и стоящая слева величина $B'_\mu(x)$ должна быть однотипными, т.е. подобно выражению (10) каждая из величин $B'_\mu(x)$ и $B_\mu(x)$ может быть записана в виде линейной комбинации трех генераторов $I^a = \frac{1}{2}\sigma_a (a = 1, 2, 3)$ группы SU(2):

$$B_\mu(x) = \sum_{a=1}^{3} b^a_\mu(x) I^a, \quad B'_\mu(x) = \sum_{a=1}^{3} b^{a'}_\mu(x) I^a. \tag{12}$$

Величины $b^a_\mu(x)$ должны быть в соответствии с вещественностью параметров ω_a вещественными при $\mu = 1,\ 2,\ 3$ и чисто мнимыми при $\mu = 4$. Они по индексу μ реализуют четырехмерное векторное представление собственной группы Лоренца. По верхнему индексу a они образуют трехмерный вектор в трехмерном пространстве представления калибровочной группы $SU(2)$, т.е. описывают изотопический триплет вещественных векторных полей. Иначе говоря, каждому из трех локальных параметров $\omega_a(x)$ ставится в соответствие свое неабелево калибровочное векторное поле $b^a_\mu(x)$ (a=1, 2, 3) – поле Янга – Миллся. С учетом всего вышесказанного калибровочно – инвариантный лагранжиан (6) принимает вид

$$L = -\frac{1}{2}\bar{\Psi}^{\alpha}\gamma_{\mu}\big(\nabla_{\mu} - igB_{\mu}(x)\bar{\Psi}^{\alpha}\big)\psi^{\alpha}(x) + \frac{1}{2}\big(\nabla_{\mu} - igB_{\mu}(x)\big)\bar{\Psi}^{\alpha}(x)\gamma_{\mu}\psi^{\alpha}(x) -$$

$$-m\bar{\Psi}^{\alpha}(x)\psi^{\alpha}(x) = -\frac{1}{2}\bar{\Psi}^{\alpha}\gamma_{\mu}\big(\nabla_{\mu} - igb^{a}_{\mu}(x)I^{\alpha}\big)\psi^{\alpha}(x) + \tag{13}$$

$$+\frac{1}{2}(\nabla_{\mu} - igb^{a}_{\mu}(x)I^{\alpha}\gamma_{\mu}\psi^{\alpha}(x) - m\bar{\Psi}^{\alpha}(x)\psi^{\alpha}(x).$$

Производя математические выкладки с лагранжианом (13), аналогичные тем, которые мы проводили с лагранжианом электромагнитного поля лагранжиан (13) можно привести к виду

$$L = L_0 + L_{int} = L_0 + ig\bar{\Psi}^{\alpha}(x)\gamma_{\mu}(I^{a})_{\alpha\beta}\psi^{\alpha}(x)b^{a}_{\mu}(x), \tag{14}$$

где второе слагаемое играет роль лагранжиана взаимодействия исходного дублета адронов (лагранжиан L_0) с триплетом калибровочных полей Янга – Миллса $b^{a}_{\mu}(x)$.

Замкнутая теория получится, если дополнить лагранжиан (14) лагранжианом, описывающим свободные поля Янга – Миллса. Обычно при решении этой задачи обращаются к аналогии с электродинамикой. Известно, что выражение для компонент тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(x) = \nabla_{\mu}A_{\nu}(x) - \nabla_{\nu}A_{\mu}(x), \tag{15}$$

может быть связано с $U(1)$ – ковариантными производными посредством коммутанта

$$F_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{ig}\big[D_\mu^-(x), D_\nu^-(x)\big]_-. \tag{16}$$

Взяв коммутант

$$B_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{ig}\big[D_\mu^-(x), D_\nu^-(x)\big]_-, \tag{17}$$

составленный из $SU(2)$ – ковариантных производных

$$D_\mu^-(x) = \nabla_\mu - igB_\mu(x) = \nabla_\mu - igb_\mu^a(x)I^a, \tag{18}$$

придем в конечном счете к следующему определению компонент $B_{\mu\nu}(x)$:

$$B_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu B_\nu(x) - \nabla_\nu B_\mu(x) - ig\big[B_\mu(x), B_\nu(x)\big]_-. \tag{9}$$

Учитывая обозначение (12) и перестановочные соотношения

$$\big[I^a, I^b\big]^- = i\varepsilon_{abc}I^c, \tag{20}$$

получаем для компонент тензоров полей Янга – Миллса $b_{\mu\nu}^a(x)(B_{\mu\nu}^a(x) = b_{\mu\nu}^a(x)I^a)$ следующее выражение:

$$b_{\mu\nu}^a(x) = \nabla_\mu b_\nu^a(x) - \nabla_\nu b_\mu^a(x) + g\varepsilon_{abc}b_\mu^b(x)b_\mu^c(x). \tag{21}$$

Из (21), в частности, вытекает, что компоненты $b^a_{\mu\nu}(x)$ нелинейны относительно потенциалов $b^a_\mu(x)$ в отличие от абелева электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu A_\nu(x) - \nabla_\nu A_\mu(x)$.

Локально $SU(2)$ – инвариантный лагранжиан для неабелевых калибровочных векторных полей $b^a_\mu(x)$, как и в случае электромагнитного поля, можно взять в следующем простом виде:

$$L_b = -\frac{1}{4}(b^a_{\mu\nu}(x))^2. \tag{22}$$

Здесь, как и в электродинамике, включение массовых слагаемых типа $m^2 b^{a^2}_\mu(x)$ также недопустимо, поскольку локальная калибровочная инвариантность будет нарушена.

Переписав лагранжиан (22) в эквивалентной форме

$$L_b = \frac{1}{4}b^a_{\mu\nu}(x)b^a_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}b^a_{\mu\nu}(x)\big(\nabla_\mu b^a_\nu(x) - \nabla_\nu b^a_\mu(x) + g\varepsilon_{abc}b^b_\mu(x)b^c_\nu(x)\big), \tag{23}$$

и проведя стандартную процедуру варьирования, придем к системе уравнений первого порядка

$$-\nabla_\mu b^a_\nu(x) + \nabla_\nu b^a_\mu(x) + \nabla_\nu b^a_{\mu\nu}(x) = g\varepsilon_{abc}b^b_\mu(x)b^c_\nu(x), \tag{24}$$

$$-\partial_\nu b^a_{\mu\nu}(x) = g\varepsilon_{abc}b^b_{\mu\nu}(x)b^c_\nu(x), \tag{25}$$

описывающих рассматриваемый триплет безмассовых неабелевых калибровочных векторных полей. Стоящие справа в уравнениях (24), (25) нелинейные слагаемые указывают на то, что эти поля являются самодействующими. Интенсивность самодействия характеризуется константой g.

Полный лагранжиан, описывающий дублет адронов и поля Янга – Миллса с учетом их взаимодействия имеет вид $L_0 + L_b + L_{int}$ (см. (14), (23)).

Лекция 7

Тема. Локальная $SU(3)$ – инвариантность и квантовая хромодинамика

Как уже говорилось, теория Янга—Миллса, базирующаяся на локализации $SU(2)$ – симметрии, оказалась непригодной для описания сильных взаимодействий. Корректная теория, которая получила название квантовой хромодинамики, получается, если в качестве основы взять группу симметрии $SU(3)$.

Итак, рассмотрим, $SU(3)$ – инвариантный в глобальном смысле лагранжиан, описывающий триплет дираковских полей (частиц)

$$L_0 = -\frac{1}{2}\{\bar{\psi}^{\alpha}\gamma_{\mu}\psi^{\alpha} - (\nabla_{\mu}\bar{\psi}^{\alpha})\gamma_{\mu}\psi^{\alpha}\} - m\bar{\psi}^{\alpha}\psi^{\alpha}, \tag{1}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. По индексу α функции $\psi^{\alpha}(x)$ реализуют трехмерное фундаментальное представление, что соответствует описанию изотопического триплета адронов со спином $1/2$. В данном случае этот триплет трактуется как кварки с различными значениями ароматов (поколений). Подчеркнем, что глобальная $SU(3)$ – симметрия это симметрия ароматов (поколений) кварков. Преобразования этой симметрии имеют вид

$$(\psi^{\alpha})' = U_{\alpha\beta}\psi^{\beta} \quad (\psi' = U\psi), \tag{2}$$

$$(\bar{\psi}^\alpha)' = \bar{\psi}^\beta U^*_{\beta\alpha} \quad (\bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1} = \bar{\psi}U^+);$$

$$U = e^{iH}, H = g\omega_a I^a \quad (I^a = \frac{1}{2}\lambda_a), \tag{3}$$

где ω_a – параметры, не зависящие от x, λ_a – матрицы Гелл-Манна, индекс а пробегает значения $a = 1 \div 8$.

Теперь будем считать, что $\omega = \omega(x)$, и потребуем инвариантность лагранжиана относительно преобразований $U(x)$. В этом случае локальная $SU(3)$ – симметрия лагранжиана трактуется уже как цветовая симметрия, то есть индекс соответствует цвету кварка и лагранжиан (1) описывает цветовой триплет кварков с одним значением аромата.

Поступая далее, как и в случае $SU(2)$-теории Янга-Миллса, произведем в лагранжиане (1) замену производных

$$\nabla_\mu \psi^\alpha(x) \to D^-_\mu \psi^\alpha(x) = (\nabla_\mu - igB_\mu(x))\psi^\alpha(x), \tag{4}$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi}^\alpha(x) \to D^+_\mu \bar{\psi}^\alpha(x) = (\nabla_\mu + igB_\mu(x))\bar{\psi}^\alpha(x).$$

Тогда инвариантность нового лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2}\{\bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu D^-_\mu \psi^\alpha - (D^+_\mu \bar{\psi}^\alpha)\gamma_\mu \psi^\alpha\} - m\bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha, \tag{5}$$

относительно локальных преобразований $(\psi^\alpha)' = U(x)\psi^\alpha, (\bar{\psi}^\alpha)' = \bar{\psi}^\alpha U^{-1}$ будет обеспечена, если потребовать, чтобы выполнялись операторные равенства

$$U^{-1}(x)(D_\mu^{(\mp)})' U(x) = D_\mu^{(\mp)},$$

или

$$U^{-1}(x)(\nabla_\mu \mp igB_\mu'(x))U(x) = \nabla_\mu \mp igB_\mu(x). \tag{6}$$

Выбирая в (6) для определенности верхние знаки и подействовав операторным равенством (6) на функцию $\psi = \psi^\alpha(x)$, будем иметь:

$$U^{-1}(x)(\nabla_\mu \mp igB_\mu'(x))U(x)\psi(x) = (\nabla_\mu - igB_\mu(x))\psi(x),$$

или

$$U^{-1}(x)\nabla_\mu(U(x)\psi(x)) - igU^{-1}(x)B_\mu'(x)U(x)\psi(x) = -igB_\mu(x)\psi(x),$$

откуда следует:

$$\{U^{-1}(x)(\nabla_\mu U(x)) - igU^{-1}(x)B_\mu'(x)\}U(x)\psi(x) = \{\nabla_\mu - igB_\mu(x)\}\psi(x). \tag{7}$$

Переходя обратно к операторной форме равенства (7), то есть отбрасывая $\psi(x)$, а также умножая (7) слева на $U(x)$ и справа на $U^{-1}(x)$, получим:

$$(\nabla_\mu U(x))U^{-1}(x) - igB'_\mu(x) = -igU(x)B_\mu(x)U^{-1}(x). \tag{8}$$

Отсюда имеем:

$$B'_\mu(x) = U(x)B_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{1}{ig}(\nabla_\mu U(x))U^{-1}(x). \tag{9}$$

Смысл равенства (9) заключается в том, что оно определяет трансформационные свойства величин $B_\mu(x)$ относительно преобразований группы $SU(3)$, которые необходимы для инвариантности лагранжиана (5) относительно данных преобразований.

С учетом (3) второе слагаемое в правой части (9) принимает вид

$$\frac{1}{ig}(\nabla_\mu U(x))U^{-1}(x) = \frac{1}{ig}ig\frac{d\omega_a(x)}{dx_\mu}I^a UU^{-1} = \frac{d\omega_a(x)}{dx_\mu}I^a, \tag{10}$$

с учетом которого выражение (9) запишется так:

$$B'_\mu(x) = U(x)B_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{d\omega_a(x)}{dx_\mu}I^a. \tag{11}$$

Подобно последнему слагаемому в (11) величины $B'_\mu(x)$ и $B_\mu(x)$ могут быть представлены в виде разложений

$$B_\mu(x) = b_\mu^a(x) I^a, B_\mu^{'}(x) = (b_\mu^a(x))^{'} I^a. \quad (12)$$

Коэффициенты этих разложений b_μ^a в соответствии с вещественностью параметров $\omega_a(x)$ также должны быть вещественными. По индексу μ величины b_μ^a являются лоренцовскими векторами. По верхнему индексу они образуют восьмимерный вектор в пространстве представления (1,1) группы $SU(3)$. Другими словами, эти величины (потенциалы) описывают октет вещественных векторных полей, то есть каждому из восьми локальных параметров $\omega_a(x)$ ставится в соответствие свое неабелево калибровочное векторное поле – глюонное поле.

Лагранжиан $L(5)$ с учетом сказанного принимает вид

$$L = -\frac{1}{2}\{\bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu (\nabla_\mu - igb_\mu^a I^a)\psi^\alpha - (\nabla_\mu + igb_\mu^a I^a)\bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu \psi^\alpha\} - m\bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2}\{\bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu \nabla_\mu \psi^\alpha - (\nabla_\mu \bar{\psi}^\alpha)\gamma_\mu \psi^\alpha\} - m\bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha + ig\bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu I^a \psi^\alpha b_\mu^a(x), \quad (13)$$

где последнее слагаемое играет роль лагранжиана взаимодействия кварков с глюонными полями. Постоянная g выступает в качестве "цветового" заряда, который связан с константой сильного взаимодействия соотношением

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (14)$$

Лагранжиан собственно глюонного поля может быть представлен в виде

$$L_{gl} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu}, \tag{15}$$

где $G^a_{\mu\nu}$ – тензоры глюонных полей:

$$G^a_{\mu\nu} = \nabla_\mu b^a_\nu(x) - \nabla_\nu b^a_\mu(x) + g C_{abc} b^b_\mu b^c_\nu, \tag{16}$$

(C_{abc} – структурные константы группы $SU(3)$).

Полный лагранжиан, описывающий кварк-глюонное поле с учетом их взаимодействия для одного аромата имеет вид

$$L = L_0 + L_{int} + L_{gl}. \tag{17}$$

Отметим, что в лагранжиан (17) нельзя добавить свободный массовый член вида $m^2 b^a_\mu(x) b^a_\mu(x)$, так как он нарушит калибровочную инвариантность теории. Другими словами, глюонное поле должно быть безмассовым.

Последнее слагаемое в (16) характеризует самодействие глюонного поля. Поскольку этот член содержит константу g, глюоны, как и кварки, обладают “цветовым” зарядом. В этом состоит одно из принципиальных отличий глюонов от фотона, который электрическим зарядом не обладает.

Из лагранжиана (17) можно получить уравнения, описывающие кварк-глюонное (сильное) взаимодействие и самодействие, выражение для тензора энергии—импульса и другие динамические характеристики хромодинамики.

Тема. Нелинейное вещественное скалярное поле и механизм Хиггса

Изложенные выше калибровочные модели непригодны для описания тех взаимодействий, носители которых должны быть массивными, например, для описания слабых взаимодействий. Требование локальной калибровочной инвариантности накладывает жесткие ограничения на свойства калибровочных векторных полей, выступающих в качестве носителей взаимодействия – они должны быть безмассовыми.

Решение проблемы введения ненулевых масс для калибровочных полей без нарушения требования локальной калибровочной инвариантности теории становится возможным благодаря использованию так называемого механизма спонтанного нарушения симметрии вакуумных состояний для вводимых дополнительно в калибровочную теорию нелинейных скалярных полей – полей Хиггса.

Сначала комментарий по терминологии. Понятие вакуумного состояния в классической теории поля совпадает с понятием основного состояния, т.е. состояния с минимальным значением энергии. Во вторично-квантованной теории на вакуумное состояние накладывается дополнительное требование равенства нулю средних значений от всех полевых величин в этом состоянии: $\langle 0|\hat{\psi}(x)|0\rangle = \langle\hat{\psi}(x)\rangle_0 = 0$.

Теперь о спонтанно нарушенной симметрии. В случае, когда внутренняя симметрия лагранжиана и уравнений поля имеет место и для вакуумного состояния поля (т.е. вакуумное состояние переходит само а себя), говорят, что имеет явная симметрия теории. Если же это условие не выполняется, т.е. для вакуумного состояния не будет справедливы свойства симметрии, присущие лагранжиану, то такую симметрию называют скрытой или спонтанно нарушенной. Первый случай имеет место, когда вакуумное состояние является невырожденным, т.е. единственным: тогда оно переходит само в себя при преобразованиях рассматриваемой группы симметрии. Второй случай реализуется тогда, когда вакуумное состояние является вырожденным: при этом преобразования симметрии перемешивают указанные состояния, не оставляя ни одно из них инвариантным.

Теперь перейдем к изложению на самом простейшем примере сущности математической процедуры, называемой механизмом спонтанного нарушения симметрии, или механизмом Хиггса. Рассмотрим вещественное скалярное поле, описываемое однокомпонентной функцией $\phi(x)$. Лагранжиан этого поля запишем в виде

$$L = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \phi)^2 - U\left(\phi, \mu^2\right), \tag{1}$$

где $U\left(\phi, \mu^2\right)$ – некоторая функция от ϕ, μ^2 – свободный параметр теории. Если член $U\left(\phi, \mu^2\right)$ зависит от μ квадратично, то мы получаем линейную теорию. Так, например, при $U = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ лагранжиан (1) переходит в лагранжиан свободного линейного скалярного поля частиц с массой $m = \mu$, из которого путем варьирования получается обычное уравнение КФГ $(\nabla_\mu^2 - m^2)\phi(x) = 0$.

Нас интересует случай нелинейного поля. Поэтому выберем $U\left(\phi, \mu^2\right)$, например, в виде

$$U\left(\phi, \mu^2\right) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{2}$$

где λ – произвольное положительное число. Запишем уравнения поля, вытекающие из (2), для следующих случаев:

$$a)\mu^2 = m^2 > 0; \quad b)\mu^2 = 0; \quad c)\mu^2 = -m^2 < 0. \tag{3}$$

Соответственно будем иметь:

$$(\nabla_\mu^2 - m^2)\phi(x) = \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x), \tag{4a}$$

$$\nabla_\mu^2\phi(x) = \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x), \tag{4b}$$

$$(\nabla_\mu^2 + m^2)\phi(x) = \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x). \tag{4c}$$

Уравнение (4a) представляет собой уравнение типа КФГ для скалярной частицы с массой m, содержащее в правой части нелинейный (кубический) член, отвечающий за самодействие рассматриваемого поля.

Уравнение (4b) – то же самое, только для безмассовых частиц. Уравнение (4c) соответствует формально мнимой массе, что надо трактовать как уравнение для безмассовой частицы с нелинейным членом $-m^2\phi(x)+\frac{\lambda}{3!}\phi^3(x)$:

$$\nabla_\mu^2\phi(x) = -m^2\phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x). \tag{5}$$

Лагранжиан (2) инвариантен относительно группы дискретных преобразований, состояшей всего из двух элементов: преобразования отражения функции ϕ

$$\phi \to R\phi = -\phi, \tag{6}$$

и тождественного (единичного) преобразования

$$\phi \to 1 \cdot \phi = \phi. \tag{7}$$

Это означает, что наряду с каждым решением $\phi(x)$ уравнений поля функция $-\phi(x)$ также является решением.

Можно показать, что минимальное значение плотности энергии T_{44} рассматриваемого скалярного поля соответствует состояниям

$$a)\phi_0 = 0; \quad b)\phi_0; \quad c)\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}} = \pm a. \tag{8}$$

Начало
Содержание
Страница 96 из ??
Назад
На весь экран
Закрыть

В случаях a) и b) основное состояние при преобразованиях (6) остается инвариантным и единственным. Соответствующие теории обладают явной симметрией относительно группы преобразований (6), (7) и нас не интересуют.

В то же время случай в) характеризуется всеми признаками спонтанно нарушенной симметрии: основное состояние $T_{44} = min$ является двукратно вырожденным $\phi_0 = \pm a$ и не симметрично относительно преобразований (6).

Отсюда ясно, что роль критического значения параметра ϕ^2 играет здесь $\phi^2 = 0$, поскольку при этом значении симметрия рассматриваемого поля остается еще явной, а при любом отрицательном значении $\phi^2 < 0$ переходит в скрытую симметрию.

Рассмотрим подробно третий случай. Замечаем, что основное состояние $\phi_0 = \pm a$ не удовлетворяет определению вакуумного состояния во вторично квантованном смысле $\langle 0| \pm a |0\rangle = \pm a \neq 0$. Теперь осуществим процедуру, состоящую из следующих этапов:

1. Зафиксируем одно из двух вырожденных состояний, например,

$$\mu_0 = +a, \tag{9}$$

в качестве основного.

2. Наложим на него требование, чтобы оно удовлетворяло определению вакуумного состояния. Для этого надо переопределить функции поля $\phi(x) \to \phi'(x)$ таким образом, что бы вакуумное среднее от новых

функций поля в состоянии (9) обращалось в ноль. Последнее достигается, если положить

$$\phi^{'}(x) = \phi(x) - a. \tag{10}$$

3. Выразим лагранжиан (2) и уравнение (4c) через новые функции поля. Для этого предварительно представим функцию $U(\phi, m^2)$ в более удобном виде.

$$U(\phi, -m^2) = \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - a^2)^2, \tag{11}$$

который отличается от (2) на несущественное слагаемое $-a^4$. Подставляя в (11) $\phi = \phi^{'} - a$, получим:

$$U(\phi^{'}, -m^2) = \frac{\lambda}{4!}\phi^{'4} + \frac{\lambda a}{6}\phi^{'3} + \frac{\lambda a^2}{6}\phi^{'2} = \frac{\lambda}{4!}\phi^{'4} + \frac{\lambda a}{6}\phi^{'3} + m^2\phi^{'2}, \tag{12}$$

что приводит к следующим выражениям для лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}(2m^2)\phi^{'2} - \frac{\lambda a}{6}\phi^{'3} - \frac{\lambda}{4!}\phi^{'4} \tag{13}$$

и уравнений поля

$$(\nabla_\mu^2 - 2m^2)\phi^{'}(x) = \frac{\lambda a}{2}\phi^{'2} + \frac{\lambda a}{6}\phi^{'3}. \tag{14}$$

В выражениях (13), (14) новые функции поля $\phi^{'}$ входят как в четных, так и нечетных степенях. Следовательно, имеет место нарушение симметрии новой теории относительно преобразований $\phi^{'} \to -\phi^{'}$. Кроме того, поле, которое ранее считалось безмассовым, после всех проведенных процедур может рассматриваться как поле скалярных частиц с ненулевой массой

$$m^{'} = m\sqrt{2}. \qquad (15)$$

Итак, подводя итог, еще раз кратко сформулируем смысл рассмотренной процедуры, которая называется механизмом спонтанного нарушения симметрии, или механизмом Хиггса. В качестве исходной берется теория нелинейного скалярного поля, которая обладает следующими свойствами: 1) лагранжиан и уравнения поля обладают внутренней симметрией относительно определенной группы преобразований; 2) основное (вакуумное) состояние является вырожденным и указанной симметрией не обладает; 3) при определенных значениях параметра μ^2 исходное поле является безмассовым.

После проведения процедуры Хиггса имеем новую полевую теорию, которая обладает уже следующими свойствами: 1) лагранжиан и уравнения поля симметрией относительно рассматриваемой группы преобразований не обладают; 2) основное (вакуумное) состояние является невырожденным и вышеуказанной симметрией обладает; 3) теория описывает поля массивных скалярных частиц.

Рассмотрим теперь в аналогичном плане комплексное скалярное нелинейное поле (поле Хиггса). Лагранжиан L этого поля имеет вид

$$L = -(\nabla_\mu \phi^*)(\nabla_\mu \phi) - U(\phi, \mu^2), \tag{1}$$

где ϕ – комплексная скалярная функция поля. Потенциальную функцию $U(\phi, \mu^2)$ будем брать в виде

$$U = \frac{\lambda}{4!}(\phi^* \phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^* \phi \tag{2}$$

и ограничимся только рассмотрением случая

$$\mu^2 = -m^2 < 0, \tag{3}$$

когда имеет место спонтанное нарушение симметрии. Комплексное скалярное поле может быть задано с помощью двух независимых вещественных функций, т.е. эквивалентно двухкомпонентному скалярному вещественному полю. Действительно, полагая

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + i\psi), \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi - i\psi), \tag{4}$$

имеем

$$\chi = \chi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + \phi^*), \psi = \psi^* = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\phi - \phi^*). \tag{5}$$

Кроме того, функцию $\phi(x)$, как и всякое комплексное число, можно представить в виде

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\eta(x)}, \phi^*(x) = \rho(x) e^{-i\eta(x)}, \tag{6}$$

или

$$\phi = \rho \cos\eta + i\rho \sin\eta, \phi^* = \rho\cos\eta - i\rho\sin\eta, \tag{7}$$

откуда следует

$$\rho(x) = \sqrt{\phi^*\phi} = \sqrt{\frac{1}{2}(\chi^2 + \psi^2)}; \eta(x) = \arctan\frac{\psi}{\chi}. \tag{8}$$

Таким образом, существуют по крайней мере три способа задания комплексного скалярного поля:

1) с помощью комплексной функции $\phi(x)$;

2) с помощью двух вещественных функций χ и ψ, определяющих вещественную и мнимую части ϕ;

3) с помощью двух вещественных функций ρ и η, определяющих модуль и фазу комплексной функции $\phi(x)$.

Мы в дальнейшем будем использовать, в основном, первый способ. Выпишем выражения для потенциальной функции U и лагранжиана L в соответствующих переменных. При первом способе будем иметь:

$$U=\frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^*\phi\to\frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi-a^2)^2, \tag{9}$$

$$L=-(\nabla_\mu\phi^*)(\nabla_\mu\phi)-\frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi-a^2)^2, \tag{10}$$

где использовано обозначение

$$a^2=\frac{6m^2}{\lambda}>0. \tag{11}$$

В переменных ρ и η получим:

$$U=\frac{\lambda}{4!}\rho^4(x)-\frac{m^2}{2}\rho^2(x)\to\frac{\lambda}{4!}(\rho^2(x)-a^2)^2, \tag{12}$$

$$L=-(\nabla_\mu\rho)^2-\rho^2(\nabla_\mu\eta)^2-\frac{\lambda}{4!}(\rho^2-a^2)^2. \tag{13}$$

Как и в случае вещественного поля, минимальное значение плотности энергии поля T_{44} будет соответствовать минимуму потенциальной функции, т.е. при условии

$$\rho^2\equiv(\phi^*\phi)^2=a^2. \tag{14}$$

Это означает, что в отличие от случая вещественного поля, когда возможны лишь две точки минимума энергии $\phi=\pm a$, здесь энергия поля (потенциальная функция) принимает минимальное значение для бесконечной совокупности точек. В полярных координатах (ρ, η) эти точки образуют окружность радиуса $|a|$.

Перейдем теперь к установлению группы скрытой симметрии, относительно которой инвариантен лагранжиан (10). Очевидно, это будет совокупность всех непрерывных однопараметрических преобразований

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x), \quad \phi^*(x) \to e^{-i\alpha}\phi^*(x), \tag{15}$$

образующих унитарную абелеву группу U(1). В переменных ρ, η данные преобразования имеют вид

$$\rho(x) \to \rho(x), \quad \eta(x) \to \eta(x) + \alpha. \tag{16}$$

Следуя далее процедуре, изложенной ранее для вещественного скалярного поля, зафиксируем одно из вырожденных состояний поля с минимальной энергией в качестве основного. Для простоты выберем состояние

$$\phi_0 = \phi_0^* = a = \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}}, \tag{17}$$

$$\rho_0 = a = \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}}, \eta_0 = 0. \tag{18}$$

Поскольку выбранное таким образом состояние не отвечает определению вакуумного состояния, переопределим функции поля следующим образом:

$$\phi^{'} = \phi - a, \quad (\phi^{*})^{'} = \phi^{*} - a; \tag{19}$$

$$\rho^{'} = \rho - a, \quad \eta^{'} = \eta. \tag{20}$$

После перехода к новым функциям поля выражения для лагранжианов (10), (13) принимают вид:

$$L = -(\nabla_\mu \phi^{'*})(\nabla_\mu \phi^{'}) - \frac{\lambda}{4!}[\phi^{'*}\phi^{'} + a(\phi^{'*} + \phi^{'})]^2, \tag{21}$$

$$L = -(\nabla_\mu \rho^{'})^2 - (\rho^{'} + a)^2(\nabla_\mu \eta^{'})^2 - \frac{\lambda}{4!}(\rho^{'2} + 2\rho^{'} a)^2. \tag{22}$$

Соответствующие лагранжианам (21), (22) уравнения поля таковы:

$$(\nabla_\mu^2 - \frac{1}{2}m^2)\phi^{'} = \frac{\lambda}{12}[\phi^{*'}\phi^{'}(\phi^{'} + 2a) + a(\phi^{'2} + a\phi^{'*})], \tag{23}$$

$$(\nabla_\mu^2 - m^2)\rho^{'}(x) = (\rho^{'}(x) + a)(\nabla_\mu \eta^{'}(x))^2 + \frac{\lambda}{12}\rho^{'2}(x)[\rho^{'}(x) + 3a], \tag{24a}$$

$$[\rho^{'}(x) + a]\nabla_\mu \eta^{'}(x) + 2(\nabla_\mu \eta^{'}(x))(\nabla_\mu \rho^{'}(x)) = 0. \tag{24b}$$

Из (23), (24) следует, что при учете спонтанного нарушения симметрии безмассовое комплексное скалярное поле Хиггса приобретает массу. При этом масса возникает только у той составляющей, которая описывается функцией $\rho'(x)$ $(\rho(x))$. Поле же, описываемое функцией $\eta'(x)$ $(\eta(x))$, остается безмассовым и после спонтанного нарушения симметрии. Скалярные бозоны, описываемые такими функциями поля, называются **голдстоуновскими бозонами**.

Очевидно, что голдстоуновские бозоны носят нефизический характер (частиц с нулевой массой, спином и не имеющих заряда не существует). Поэтому возникает задача об исключении голдстоуновских бозонов из теории. Оказывается, данная задача может быть решена при переходе к локально $U(1)$ – инвариантной формулировке теории комплексного скалярного поля Хиггса.

Действительно, полагая в (15) $\alpha = \alpha(x)$, нетрудно видеть, что при

$$\alpha(x) = -\eta(x), \tag{25}$$

получим

$$\phi'(x) = e^{-i\eta(x)}\rho e^{i\eta(x)} = \rho(x),$$
$$\phi^*(x) = e^{i\eta(x)}\rho e^{-i\eta(x)} = \rho(x),$$
$$\phi'(x) = (\phi'(x))^* = \rho(x), \tag{26}$$
$$\eta'(x) = 0. \tag{27}$$

Рассмотренный выше способ устранения голдстоуновского поля правомерен в том случае, если теория комплексного хиггсовского поля будет инвариантна относительно локальных $U(1)$ – преобразований. Рассмотренный в предыдущей лекции вариант глобальной $U(1)$ – инвариантной теории хиггсовского поля для этой цели не годится. Необходимо совершить переход к локальной $U(1)$ – инвариантной теории комплексного скалярного поля Хиггса. Поскольку речь идет об однопараметрической абелевой группе $U(1)$, этот переход может быть осуществлен так же, как и при введении электромагнитных взаимодействий для дираковских полей.

Действительно, исходя из лагранжиана поля Хиггса (см. лекцию 12, формула (10))

$$L = -(\nabla_\mu \phi^*)(\nabla_\mu \phi) - \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi - a^2)^2, \quad a^2 = \frac{6m^2}{\lambda}, \tag{1}$$

заведомо инвариантного относительно глобальных преобразований

$$\phi'(x) = e^{ig\alpha}\phi(x), \quad (\phi^*)' = e^{-ig\alpha}\phi^*(x), \tag{2}$$

наложим на лагранжиан (1) требование инвариантности относительно преобразований (2) с локальным параметром $\alpha = \alpha(x)$. Тогда в соответствии с общими правилами мы должны произвести в лагранжиане (1) замену обычных производных на калибровочно–инвариантные производные

$$\nabla_\mu\phi(x) \to D_\mu^{(-)}\phi(x) = \big(\nabla_\mu - igA_\mu(x)\big)\phi(x), \tag{3}$$

$$\nabla_\mu\phi^*(x) \to D_\mu^{(+)}\phi(x) = \big(\nabla_\mu + igA_\mu(x)\big)\phi^*(x), \tag{4}$$

т. е. вместо (1) взять лагранжиан

$$L_\phi = -\big(D_\mu^{(+)}\phi^*(x)\big)\big(D_\mu^{(-)}\phi(x)\big) - \frac{\lambda}{4!}\big(\phi^*\phi - a^2\big)^2. \tag{5}$$

Из условия локальной $U(1)$ – инвариантности лагранжиана (5), как и в случае электромагнитного поля, вытекают следующие трансформационные свойства функций $A_\mu(x)$, входящих в удлиненные производные $D_\mu^{(\pm)}$:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + g\nabla_\mu\alpha(x). \tag{6}$$

С учетом (3), (4) перепишем лагранжиан (5)в виде:

$$L_\phi = -\big(\nabla_\mu\phi^*\big)\big(\nabla_\mu\phi\big) - \frac{\lambda}{4!}\big(\phi^*\phi - a^2\big)^2 + \tag{7}$$

$$+igA_\mu\big[\big(\nabla_\mu\phi^*\big)\phi - \phi^*\big(\nabla_\mu\phi\big)\big] - g^2A_\mu^2\phi^*\phi.$$

Добавляя сюда лагранжиан

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu)^2, \tag{8}$$

также удовлетворяющий условию локальной $U(1)$ – инвариантности, можем интерпретировать функции $A_\mu(x)$ как потенциалы некоторого нейтрального безмассового векторного поля – абелева калибровочного поля, способного взаимодействовать со скалярным полем Хиггса с интенсивностью, которая характеризуется постоянной g. Получаемый в этом случае объединенный лагранжиан имеет вид

$$L = L_\phi + L_A, \tag{9}$$

где L_ϕ и L_A определены согласно формулам (7), (8). (Заметим, что при $g = e$ лагранжиан (9), (7), (8) описывает взаимодействующие комплексное хиггсовское и электромагнитное поля с учетом дополнительных слагаемых, определяемых потенциальной функцией $-\frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi - a^2)^2$ и учитывающих характерное для полей Хиггса самодействие).

Если же требуется рассмотреть взаимодействие комплексного скалярного поля Хиггса с массивным векторным полем $A_\mu(x)$, необходимо, как и в случае вещественного поля Хиггса, обратиться к процедуре спонтанного нарушения симметрии вакуумных состояний.

Будем исходить из $U(1)$ – инвариантного (в глобальном смысле) лагранжиана комплексного поля Хиггса, записанного в переменных ρ, η (см. формулу (13) лекции 12), обозначив его L^0_ϕ:

$$L^0_\phi = -(\nabla_\mu \rho(x))^2 - \rho^2(x)(\nabla_\mu \eta(x))^2 - \frac{\lambda}{4!}(\rho^2(x) - a^2)^2. \tag{10}$$

Для функции поля $\rho(x), \eta(x)$ локальные калибровочные преобразования определяются с помощью соотношений (см. формулу (16) лекции 12):

$$\rho^{'}(x) = \rho(x), \eta^{'}(x) = \eta(x) + g\alpha(x). \tag{11}$$

Отсюда следует, что локально $U(1)$ – ковариантные производные $D_\mu^{(\rho)}(x)$, действующие на функцию $\rho(x)$, совпадает с обычными производными

$$D_\mu^{(\rho)}(x)\rho(x) = \nabla_\mu \rho(x), \tag{12}$$

а производные $D_\mu^{(\eta)}(x)$ имеют следующую структуру:

$$D_\mu^{(\eta)}(x)\eta(x) = \nabla_\mu \eta(x) - gA_\mu(x). \tag{13}$$

В итоге локально калибровочный $U(1)$ – инвариантный лагранжиан поля Хиггса трансформируется к виду:

$$L_\phi = -(\nabla_\mu \rho(x))^2 - \rho^2(\nabla_\mu \eta(x) - gA_\mu(x))^2 - \frac{\lambda}{4!}(\rho^2(x) - a^2)^2. \tag{14}$$

Осуществляя теперь описанную в лекции 12 процедуру Хиггса и переходя к новым функциям поля $\rho^{'}, \eta^{'}$

$$\rho = \rho^{'} + a, \eta = \eta^{'}, \tag{15}$$

можем переписать лагранжиан (14) следующим образом:

$$L_{\phi'} = -(\nabla_\mu \rho'(x))^2 - (\rho'(x)+a)^2(\nabla_\mu \eta(x) - gA_\mu(x))^2 - \frac{\lambda}{4!}(\rho'^2(x) + 2\rho'(x)a)^2. \tag{16}$$

Переобозначая $\rho' \to \rho$ (чтобы не вводить ниже двойные штрихи) и добавляя к (16) лагранжиан свободного калибровочного векторного поля (8), получим:

$$L = -(\nabla_\mu \rho(x))^2 - (\rho(x)+a)^2(\nabla_\mu \eta(x) - gA_\mu(x))^2 -$$
$$-\frac{\lambda}{4!}(\rho^4(x) - \frac{\lambda}{3!}(\rho^3(x)a - \frac{\lambda}{3!}(\rho^2(x)a^2 - \frac{1}{4}(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu)^2. \tag{17}$$

Проводя теперь в лагранжиане (17) локальное калибровочное преобразование (6), (11) при значении параметра $\alpha(x)$

$$\alpha(x) = -\frac{1}{g}\eta(x), \tag{18}$$

(см. формулу (25) лекции 12), получим в конечном счете лагранжиан, не содержащий второй составляющей $\eta'(x)$ исходного комплексного скалярного поля Хиггса:

$$L = -(\nabla_\mu \rho'(x))^2 - (\rho'(x)+a)^2 g^2 A'^2_\mu(x) -$$

$$-\frac{\lambda}{4!}\rho'^4(x)-\frac{\lambda}{3!}\rho'^3(x)a-\frac{\lambda}{3!}\rho'^2\frac{6m^2}{\lambda}-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}. \tag{19}$$

Лагранжиан (19) естественным образом разделяется на четыре слагаемых

$$L=L_I+L_{II}+L_{III}+L_{IV}, \tag{20}$$

где

$$L_I=-(\nabla_\mu\rho'^{(x)})^2-m^2\rho'^2(x), \tag{21}$$

$$L_{II}=-\frac{1}{4}F^2_{\mu V}(x)-g^2a^2A'^2_\mu(x)=-\frac{1}{4}F^2_{\mu V}(x)-M^2A'^2_\mu(x) \tag{22}$$

$$\left(M=ga\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda}}gm\right),$$

$$L_{III}=-g^2(\rho'^2(x)+2\rho'(x)a)A'^2_\mu(x), \tag{23}$$

$$L_{IV}=-\frac{\lambda}{4!}(\rho'^4(x)+4\rho'^3(x)a). \tag{24}$$

Лагранжиан (21) – лагранжиан вещественного скалярного поля с массой m; лагранжиан (22) описывает массивное калибровочное векторное поле с массой M; лагранжиан (23) описывает взаимодействие между

Кафедра общей и теоретической физики

скалярным и калибровочным векторным полем; лагранжиан (24) есть лагранжиан самодействия скалярного поля.

При этом вторая составляющая $\eta(x)$ исходного скалярного комплексного поля Хиггса, устраненная из теории, имеет, очевидно, смысл нефизического голдстоуновского поля. Отвечающую этому полю степень свободы приобрело калибровочное векторное поле. Будучи вначале безмассовым, оно имело 2 спиновые степени свободы, в то время как массивное векторное поле должно иметь три степени свободы, отвечающие проекциям спина $+1$, 0, -1.

Теория электрослабых взаимодействий

Среди существующих вариантов локально-калибровочных теорий особое место занимает единая полевая теория электромагнитных и слабых взаимодействий, предложенная для случая лептонов Вайнбергом и Саламом. Теория Вайнберга – Салама явилась первой успешной попыткой построения полевой теории, объединяющей в себе описание двух различных типов фундаментальных взаимодействий: электромагнитного и слабого. Более того, эта теория явилась первым шагом на пути воплощения идеи о том, что все известные типы фундаментальных взаимодействий следует рассматривать лишь как различные проявления какого-то единого фундаментального взаимодействия природы. Поскольку слабое взаимодействие является близкодействующим, переносчики этого взаимодействия должны быть массивными. Отсюда следует, что теория электрослабых взаимодействий должна строиться с использованием не только принципа локальной калибровочной инвариантности, но и механизма спонтанного нарушения симметрии вакуумных состояний – механизма Хиггса.

При построении локально калибровочной полевой теории с использованием механизма Хиггса можно выделить пять узловых этапов:

1. Выбор исходных частиц, выступающих в качестве источников рассматриваемых взаимодействий, и свободного лагранжиана, построенно-

го из волновых функций этих частиц.

2. Выбор группы глобальной калибровочной инвариантности, относительно которой инвариантен лагранжиан исходных свободных полей. С этой группой обычно связываются характерные для рассматриваемых взаимодействий законы сохранения.

3. Наложение на лагранжианы исходных полей требования локальной калибровочной инвариантности относительно преобразований данной группы, что влечет за собой появление в теории калибровочных векторных полей, общее число которых определяется числом независимых параметров калибровочной группы. Это, в свою очередь, приводит к необходимости построения локально-калибровочно-инвариантных лагранжианов для этих полей. Разумеется, на данном этапе все калибровочные векторные поля являются безмассовыми.

4. Введение в теорию набора нелинейных скалярных полей Хиггса. Проведение процедуры Хиггса, обеспечивающей появление массовых членов в лагранжианах тех полей, которые по своему физическому смыслу должны быть массивными, и исключающей нефизические голдстоуновские поля, возникающие при этой процедуре.

5. Физическая интерпретация основных соотношений теории и разработка расчетной схемы, необходимой для получения следствий теории, допускающих экспериментальную проверку.

I этап.

В теории Вайнберга – Салама в качестве исходных частиц выбираются электрон и нейтрино, т.е. лептоны, для которых характерны как раз слабые и электромагнитные взаимодействия и которые не участвуют в сильных взаимодействиях. Для этих частиц электрослабое взаимодействие реализуется в чистом виде. Другими словами, в качестве исходных выбирается дублет лептонов, а не дублет адронов, как в теории Янга – Миллса. Еще одним отличием от теории Янга – Миллса является то, что исходное электронно-позитронное поле считается безмассовым, как и нейтринное. И то и другое поле, как известно, описываются безмассовым уравнением Дирака, которое распадается по группе Лоренца. В теории Вайнберга – Салама в качестве волновой функции исходных частиц (полей) берется функция, объединяющая левый электрон и левое нейтрино, образующие так называемый "слабый" изотопический дублет

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \nu_L(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} . \tag{1}$$

II этап.

Объединение в рамках одной полевой схемы двух различных типов взаимодействий приводит к необходимости при формулировке исходных положений теории введения двух различных констант связи. А поскольку в выражениях для локальных калибровочных преобразований константа связи выступает в качестве общего для всех параметров калибровочной группы множителя, введение двух различных констант связи неизбежно связано с двумя различными калибровочными простыми группами. Их объединение приводит к тому, что общая для двух типов взаимодействий калибровочная группа выступает в виде прямого произведения двух исходных простых групп. В нашем случае выбор в качестве исходных частиц дублета лептонов означает, что исходный лагранжиан инвариантен относительно группы глобальных преобразований $SU(2)$. Кроме того, как и любой лагранжиан квантовомеханического поля, он инвариантен относительно глобальных преобразований $U(1)$. Поскольку преобразования этих групп коммутируют между собой, полной группой глобальной симметрии исходного лагранжиана будет группа $SU(2) \otimes U(1)$. Таким образом, естественно предположить, что наложив на исходный лагранжиан требование локальной калибровочной инвариантности относительно группы $SU(2) \otimes U(1)$, мы придем к построению теории электрослабого взаимодействия.

III этап.

Основные математические соотношения, определяющие свойства группы $SU(2)$ и $U(1)$, нами были изучены ранее. С точки зрения математического аппарата теории групп теорию Вайнберга – Салама можно рассматривать как естественное объединение двух ранее изученных калибровочных теорий: абелевой калибровочной теории, отождествляемой с теорией электромагнитных взаимодействий, и неабелевой калибровочной теории Янга – Миллса. Напомним, что первая из них является однопараметрической, а вторая – трехпараметрической. Так что для совместного описания электромагнитных и слабых взаимодействий потребуется ввести четыре калибровочных векторных поля (по числу параметров группы $SU(2) \otimes U(1)$): одно безмассовое и три массивных. Важнейшим исходным положением теории Вайнберга – Салама является то, что группа $SU(2)$ здесь не может быть сама по себе отождествлена с группой симметрии слабого взаимодействия, а группа $U(1)$ не является исключительно группой симметрии электромагнитных взаимодействий. Действительно, при полевом описании электромагнитных взаимодействий мы использовали калибровочные преобразования, образующие группу $U(1)$, взятые в форме

$$U(x) = e^{ie\alpha(x)}, \tag{2}$$

где e – элементарный электрический заряд, выступающий в качестве меры интенсивности электромагнитных взаимодействий. В то же время калибровочные преобразования, образующие подгруппу U(1) в теории В. – С., задаются следующим образом:

$$U(x) = e^{-i\frac{Y}{2}g_0\alpha(x)} = e^{i(J_3-Q)g_0\alpha(x)}. \tag{3}$$

Здесь величина $(J_3 - Q)g_0$ не может быть отождествлена ни с электрическим зарядом e, ни только с константой связи электромагнитных взаимодействий $\alpha_{e.-m.} = \frac{e^2}{4\pi}$, поскольку в формулу (3) входит квантовое число J_3 (проекция изотопического спина), т.е. величина, связанная с однопараметрическим преобразованием группы SU(2)

$$U(x) = e^{i_3 g \omega_3(x) \hat{J}^3}. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что каждое из полей, описываемых потенциалами $a_\mu(x)$ и $b^3_\mu(x)$, не может рассматриваться как поле, ответственное только за слабое или только электромагнитные взаимодействия в чистом виде.

Произвольные параметры g_0 и g, фигурирующие в формулах (3), (4), могут быть выражены через другие параметры: e и θ_W по формулам:

$$\sin\theta_W = \frac{g_0}{\sqrt{g^2 + g_0^2}}, \quad \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g_0^2}},$$
$$e = \frac{g g_0}{\sqrt{g^2 + g_0^2}} = g \sin\theta_W = g_0 \cos\theta_W. \qquad (5)$$

Параметр θ_W называют **углом смешивания Вайнберга**. Его значение определяется экспериментальным путем. Он равен:

$$\sin^2\theta_W = 0,23 \pm 0,02,$$

т.е.

$$\theta_W \approx 28^\circ 40', \quad \sin\theta_W \approx 0,4796, \quad \cos\theta_W \approx 0,8775. \qquad (6)$$

Из соотношений (5) вытекает одна из важнейших особенностей теории Вайнберга–Салама, которая заключается в том, что интенсивности электромагнитных и слабых взаимодействий (при фиксированном значении угла Вайнберга θ_W) определяются через один и тот же параметр теории – известную константу связи электромагнитных взаимодействий $e = \sqrt{4\pi\alpha_{e.-m.}}$. Это как раз говорит о том, что мы имеем дело с одним единым фундаментальным взаимодействием – электрослабым, а не с электромагнитным и слабым по отдельности.

Накладывая на лагранжиан исходных безмассовых полей, описываемых волновой функцией (1), требование локальной калибровочной инвариантности, мы придем к появлению в теории четырех безмассовых калибровочных векторных полей $b^a_\mu(x)(a = 1, 2, 3), a_\mu(x)$, для которых обычно используются обозначения[5]:

$$b^1_\mu(x) = w^+_\mu(x); \quad b^2_\mu(x) = w^-_\mu(x); \quad b^3_\mu(x) = Z_\mu(x); \quad a_\mu(x) = A_\mu(x), \quad (7)$$

где поля, описываемые функциями $w^\pm_\mu(x), Z_\mu(x)$ ответственны за слабое взаимодействие, а функции $A_\mu(x)$ определяют 4-потенциал электромагнитного поля.

IV этап.

Поскольку три из четырех калибровочных полей должны быть массивными и, кроме того, масса должна появиться у электрона (функция $e(x)$), то для проведения процедуры Хиггса потребуется введение не менее четырех комплексных скалярных полей Хиггса.

Дальнейшие шаги являются объединением в одной математической

[5]Если говорить строго, то функции $A_\mu(x)$ и $Z_\mu(x)$ являются линейными комбинациями функций $a_\mu(x)$ и $b^3_\mu(x)$.

модели нескольких ранее рассмотренных теорий: $U(1)$ и $SU(2)$ — локально калибровочных теорий, проведение процедуры Хиггса для комплексных скалярных полей и исключение из теории трех голдстоуновких полей, относящихся к $SU(2)$ — составляющей рассматриваемой модели. В результате три калибровочных поля приобретают массу. Эти калибровочные поля отождествляются со слабым взаимодействием. Процедура спонтанного нарушения симметрии для четвертого комплексного скалярного поля приводит к появлению массы не у калибровочного поля $A_\mu(x)$, ответственного за электромагнитное взаимодействие, а у электрона. Поле же $A_\mu(x)$, как и нейтрино, остаётся безмассовым.

Массы квантов калибровочных полей, называемых промежуточными векторными бозонами, вычисляются по формулам:

$$m_{w^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} ga = \left[a = \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}} \approx 174\right] = 77,7 \text{ ГэВ}$$

$$m_{Z^\circ} = \frac{m_w}{\cos\theta_w} \approx 88,6 \text{ ГэВ}.$$

И так, переносчики слабого взаимодействия приобрели массу, а фотон остался безмассовым. Исходно безмассовые калибровочные бозоны имели по два поляризационных состояния. После приобретения массы число поляризационных состояний каждого из промежуточных векторных бозонов увеличилось на единицу. Эти три дополнительные степени свободы они позаимствовали у бозонов Хиггса. Однако, поле Хиггса имеет четыре степени свободы. Какова судьба последней хиггсовской компоненты? Оказывается, что оставшиеся четвертый бозон Хиггса становится массивным и переходит в сектор физических частиц (физический бозон Хиггса). Бозон Хиггса не является изолированным от остальной части модели. Он взаимодействует как с липтонами, так и с калибровочными бозонами.

В настоящее время теория Вайнберга – Салама считается безусловно верной. Основания для этого следующие:

1) в низкоэнергетическом приближении эта теория содержит в качестве предельных случаев квантовую электродинамику и четырехфермионную теорию слабого взаимодействия Ферми;

2) теория Вайнберга – Салама предсказывает ряд новых следствий, которые квантовая электродинамика и теория Ферми по отдельности не предсказывают. Эти следствия экспериментально подтверждены;

3) в 1983 году две независимые исследовательские группы, работающие в CERN на $p\hat{p}$-коллайдере, сообщили об открытии $W-$ и $Z-$ бозонов, характеристики которых в точности описываются теорией электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама—Глышоу;

4) в июле 2012 года ученые, работающие на Большом адронном коллайдере, объявили об обнаружении бозона Хиггса; Это открытие можно смело назвать одним из самых важных в недолгой истории человечества и триумфом теории ВСГ.

Стандартная модель

Расширение электрослабой теории на кварки логично приводит к постановке вопроса об объединении сильных и электрослабых взаимодействий. Соответствующая теория называется Стандартной Моделью (СМ). В схематическом виде картина фундаментальных сил в этой модели такова. Сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия обусловлены существованием группы локальной калибровочной симметрии

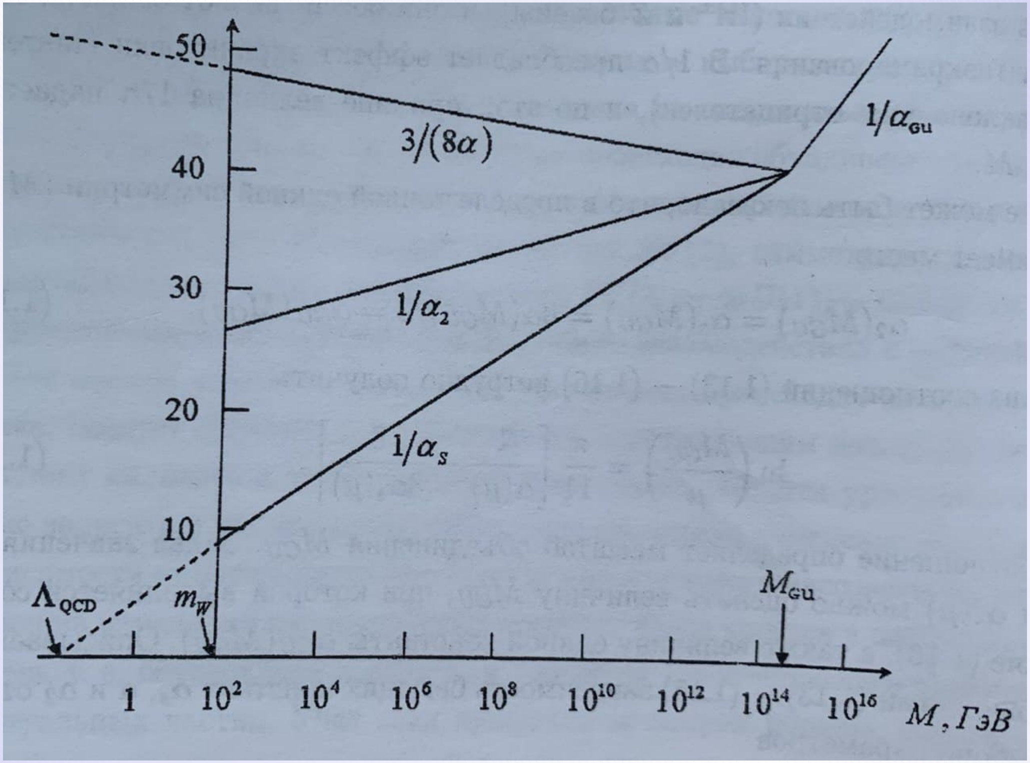
$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \tag{1}$$

с её тремя калибровочными константами g_S, g_E и g_W и двенадцатью калибровочными бозонами — переносчиками взаимодействий. На достаточно малых расстояниях все эти силы в основном похожи друг на друга и приводят к потенциалу типа кулоновской $\sim \frac{1}{r}$.

Поскольку калибровочная группа СМ — это прямое произведение трех несвязанных множеств преобразований групп $SU(3)_C$, $SU(2)_{EW}$, $U(1)_{EW}$, то и калибровочные константы этих групп также не связаны друг с другом. Свяжутся они в единое целое, если калибровочная группа (1) окажется вложенной в более широкую группу G. В результате все три взаимодействия будут описываться калибровочной теорией с одной константой g, причем калибровочные константы g_S, g_E, g_W будут связаны с g однозначным образом, определяемым выбором группы G. Полученная таким образом модель называется теорией Великого объединения (ТВО). Симметрия ТВО должна быть спонтанно нарушена на сверхмалых расстояниях (сверхбольших энергиях), которые на много порядков меньше тех, на которых происходит объединение электромагнитного и слабого взаимодействий. Другими словами, сильное и электрослабое взаимодействия окажутся низкоэнергетическими пределами калибровочного взаимодействия с группой G.

Для оценки масштаба расстояний (энергий), на которых происходит великое объединение, следует обратиться к соотношениям, определяющим эволюцию бегущих констант сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий в зависимости от изменения массового масштаба M. Не выписывая соответствующие формулы, изобразим эти зависимости графически:

Рис.1 Зависимость бегущих констант $\alpha_S, \alpha, \alpha_2$ от M



Из рис. 1 следует, что Великое объединение происходит при $M \approx 2 \cdot 10^{14}$ ГэВ$/c^2$, что соответствует расстояниям $\sim 10^{-28}$ см.

По всей вероятности, в лабораторных условиях нам никогда не удастся достичь энергий, соответствующих масштабам объединения. Следовательно, экспериментальная проверка ТВО представляет собой достаточно сложную задачу. Среди доступных наблюдению следствий ТВО можно отметить предсказания таких эффектов, как нестабильность протона и нейтрон-антинейтронные осцилляции. ТВО позволяет вычислить угол Вайнберга τ_W, дает естественное объяснение квантованию электрического заряда, которое проявляется в том, что заряды кварков кратны $\frac{e}{3}$, а заряды лептонов равны либо e, либо нулю.

ТВО имеет и ряд космологических следствий. Согласно общепринятой точке зрения, наша Вселенная образовалась примерно $2 \cdot 10^{10}$ лет назад в результате так называемого Большого взрыва и продолжает свое расширение до сих пор. Размер Вселенной изменился от величины порядка планковской длины 10^{-33} см до современного значения порядка 10^{28} см. Сжатое в объеме 10^{-33} см вещество начинало свою эволюцию с энергии порядка планковской 10^{19} ГэВ, т.е. ранняя Вселенная являлась той гигантской лабораторией, где выводы ТВО могли быть проверены непосредственно. В рамках ТВО можно получить объяснение наблюдаемого в настоящее время преобладания вещества над антивеществом (барионная асимметрия) во Вселенной, величину отношения концентрации барионов n_B к концентрации фотонов n_γ в микроволновом фоновом (реликтовом) излучении: $n_B/n_\gamma \approx 10^{-8} - 10^{-10}$.

Вместе с тем, помимо перечисленных достижений в ТВО остаются и серьезные трудности. До сих пор нет единого мнения по поводу структуры группы G. Рассматриваются варианты с группами $SU(5), SU(6)$ и даже $SU(8)$, однако существующий весьма ограниченный экспериментальный материал не позволяет сделать однозначный выбор в пользу какой-либо одной из них. В рамках существующих вариантов ТВО нельзя сделать никакого утверждения о числе поколений кварков и лептонов. Исключена из схемы объединения гравитация. Эти и другие трудности указывают на незаконченный характер ТВО в том смысле, что ТВО не является окончательной универсальной теорией фундаментальных частиц материи и их взаимодействий. На очереди построение более общей схемы объединения, включающей в себя ТВО и теорию гравитации в качестве составных частей.

Занятие 1

Тема: Фундаментальные взаимодействия

1. Расположить фундаментальные взаимодействия в порядке убывания их интенсивности. Привести значения констант взаимодействий при передаваемых импульсах ≈ 80 ГэВ/с.

2. Проанализировать формулы зависимости бегущих констант фундаментальных взаимодействий от величины передаваемого импульса. При каких импульсах, энергиях, пространственных масштабах происходит объединение: а) электромагнитных и слабых взаимодействий; б) электрослабых и сильных взаимодействий; в) электрослабых, сильных и гравитационных взаимодействий.

3. Что такое планковская масса и планковская длина? Каковы их численные значения и физический смысл?

Занятие 2

Тема: Группы унитарной симметрии

1. Показать, что унимодулярная матрица размерности 2×2 имеет три независимых параметра

2. Показать, что любую унитарную матрицу 2×2 можно представить в виде разложения по матрицам I_2, σ_i $(i = 1, 2, 3; \sigma_i$ — спиновые матрицы Паули)

3. Убедиться, что произвольная унитарная матрица размерности n×n имеет n^2 независимых параметров. Рассмотреть случаи n=2, 3.

4. Проверить, что множество унитарных матриц данной размерности образует группу.

5. Осуществить разложение произвольной эрмитовской матрицы размерности 2×2 со следом, равным нулю, в виде линейной комбинации матриц Паули с вещественными параметрами.

6. Найти структурные константы унимодулярной группы $SU(2)$.

Занятие 3

Группа унитарной симметрии $SU(3)$. Кварки

1. Показать, что произвольная унимодулярная матрица размерности 3×3 имеет восемь независимых параметров.

2. Проверить, что матрицы Гелл-Манна действительно образуют базис в пространстве унимодулярных матриц размерности 3×3.

3. Вычислить структурные константы группы $SU(3)$.

4. Найти собственные функции операторов изотопического спина $\hat{Y}_3$ и гиперзаряда $\hat{\Upsilon}$.

5. Рассчитать заряды кварков, исходя из известных значений величин Y (проекция изотопического спина), $\bar{Q}$ (средний электрический заряд), Υ (гиперзаряд).

Занятие 4

Теоретико-групповая трактовка электромагнитных и слабых взаимодействий

1. Показать, что введение электромагнитного взаимодействия можно осуществить на основе требования инвариантности лагранжиана свободного электрона относительно локальных преобразований группы $U(1)$.

2. Показать, что введение взаимодействия электрона с триплетом безмассовых векторных полей Янга-Миллса можно реализовать на основе требования инвариантности лагранжиана системы двух уравнений Дирака относительно группы локальных преобразований $SU(2)$.

3. Исходя из вида лагранжиана векторных полей Янга-Миллса, доказать, что эти поля обладают свойством самодействия.

Механизм спонтанного нарушения симметрии

1. Путем варьирования лагранжиана вещественного скалярного поля

$$L = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2,$$

получить уравнение Клена-Фока-Гордона.

2. Получить нелинейное уравнение второго порядка ля скалярного вещественного поля

$$U(\varphi, \mu^2) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4.$$

Рассмотреть случаи: $\mu^2 > 0, \mu^2 = 0, \mu^2 < 0$.

3. Показать, что минимальное значение плотности энергии скалярного поля, рассматриваемого в предыдущей задаче, соответствует состояниям: $\varphi_0 = 0$ при $\mu^2 > 0, \mu^2 = 0$; $\varphi_0 = \pm\sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}}$

Перечень вопросов по управляемой самостоятельной работе студентов (УСР), тем рефератов

Занятие 1. **Управляемый термоядерный синтез**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- термоядерные реакции, их роль во Вселенной;
- управляемый термоядерный синтез и проблема удержания плазмы;
- основные виды термоядерных реакторов (токамак, стелларатор);
- перспективы использования термоядерной энергии в мирных целях.

Занятие 2. **Ускорители заряженных частиц**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- физические принципы работы ускорителей;
- основные типы ускорителей (линейные, индукционные, циклические);
- Большой адронный коллайдер (БАК);
- роль ускорителей в современной физике фундаментальных частиц и взаимодействий.

Занятие 3. **Нейтринная физика**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- история предсказания нейтрино;
- поколения нейтрино, их свойства;

- осцилляции нейтрино как свидетельство существования у них массы;

- современные представления о роли нейтрино в физической картине мира.

Занятие 4. **Кварки**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- экспериментальные данные, указывающие на составную структуру адронов, партоны;

- модели Ферми-Янга, Сакаты, восьмеричный путь;

- кварковая гипотеза, основные свойства кварков;

- взаимодействие кварков, цветовой заряд, глюоны.

Занятие 5. **Экзотические объекты во Вселенной**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- что такое «черные дыры», экспериментальное подтверждение их существования;

- пульсары и квизары;

- существуют ли «параллельные миры»?

Занятие 6. **Теория Большого Взрыва**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- разбегание галактик как экспериментальная основа гипотезы «Большого Взрыва» ;

- реликтовое излучение и его свойства;

- современная космологическая модель строения и эволюции Вселенной, нерешенные вопросы.

Занятие 7. **Темная материя и Темная энергия**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- астрофизические наблюдения, указывающие на существование ненаблюдаемой массы во Вселенной;

- гипотеза Темной материи и её происхождение;

- инфляционная модель Вселенной, Темная энергия.

Занятие 8. **Теория суперструн**

Рассматриваемые на занятии вопросы:

- струны и суперструны как «истинные кирпичики мироздания»;

- возможность объединения фундаментальных взаимодействий через теорию суперструн;

- теория суперструн: красивая картинка или реальная физическая модель «всего»?

Итоговый тест

Скачайте и выполните, пожалуйста, этот тест!

Список рекомендуемой литературы

1. Бедрицкий, А. Реальная теоретическая физика: глобальная физическая теория / А. Бедрицкий. — М. : Ленанд, 2018. — 288 с.

2. Бояркин, О. М. Физика частиц — 2013: От электрона до бозона Хиггса. Квантовая теория свободных полей/ О. М. Бояркин, Г. Г. Бояркина. — М. : Ленанд, 2018. — 296 с.

3. Бояркин, О. М. Физика частиц — 2013: квантовая электродинамика и Стандартная модель/ О. М. Бояркин, Г. Г. Бояркина. —М. : КД Либроком, 2016. — 440 с.

4. Окунь, Л. Б. Физика элементарных частиц/ Л. Б. Окунь. — М. : Ленанд, 2018. — 218 с.

5. Проскурякова, Е. А. Физика элементарных частиц: учебное пособие/ Е. А. Проскурякова. — СПб. : Лань, 2016. — 104 с.

6. Казаков, Д. И. Перспективы физики элементарных частиц/ Д. И. Казаков// УФН. — 2019. — Т. 189. — с. 387 – 401 с.

7. Тредер, Г. Ю. Проблемы физики: классика и современность/ Г. Ю. Тредер, В. Штоф, А. М. Боу и др. — М. : Мир, 2012. — 328 с.

8. Грин, Б. Элегантная Вселенная/Б. Грин. — М.:ЛКИ, 2008.— 288 с.

9. Кузнецов, С. И. Курс физики с примерами решения задач. Ч. 3. Оптика. Основы атомной физики и квантовой механики. Физика атомного ядра и элементарных частиц: учебное пособие/ С. И. Кузнецов. — СПб. : Лань, 2015. — 336 с.

Кафедра общей и теоретической физики