УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Электронное учебное пособие
для студентов физических специальностей
учреждений высшего образования

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по физическим специальностям

2020

Кафедра
МАДУП

Авторы:
кандидат физико-математических наук, доцент **С.А. Марзан**
кандидат физико-математических наук, доцент **А.Н. Сендер**
кандидат физико-математических наук, доцент **Н.Н. Сендер**

Рецензенты:
кафедра теории функций Белорусского государственного университета
заведующий кафедрой – доктор физико-математических наук, профессор
В.Г. Кротов

профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», доктор физико-математических наук, профессор
И.П. Мартынов

Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2020. – Ч. 1: Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 475 с.

Учебное пособие содержит курс лекций и практических занятий, вопросы и тестовые задания для самоконтроля, а также задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальных работ по разделам «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Предназначено студентам физических специальностей учреждений высшего образования.

Знакомство с ЭУП

Электронное учебное пособие (далее – ЭУП) содержит курс лекций и практических занятий, задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальной работы, а также интерактивные тестовые задания для самоконтроля по разделам «Введение в анализ» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Математический анализ».

ЭУП не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы с пособием необходим компьютер, планшет или смартфон с любой операционной системой, на котором установлена программа для чтения документов формата pdf, например, Adobe Acrobat Reader. Для работы с тестовыми заданиями требуется подключение к сети интернет. Тесты, включенные в ЭУП, предназначены исключительно для самоконтроля студентов.

После запуска ЭУП в правой части экрана читатели увидят навигационную панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

– кнопка «На весь экран» позволяет «развернуть» ЭУП на весь экран монитора;

– кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУП;

– кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУП;

– кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУП, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

– кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУП.

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУП, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУП можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУП. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУП.

Весь текст ЭУП снабжен необходимыми гиперссылками, позволяющими реализовать интуитивно понятную навигацию с возможностью быстрого поиска требуемой информации.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Предлагаемый вниманию читателей учебно-методическое пособие (далее – ЭУП) является первой частью следующей серии учебно-методических комплексов для студентов специальностей 1–31 04 08 «Компьютерная физика», 1–02 05 02 «Физика и информатика» по учебной дисциплине «Математический анализ»:

1. Математический анализ. Часть 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
2. Математический анализ. Часть 2. Интегральное исчисление функций одной переменной.
3. Математический анализ. Часть 3. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.
4. Математический анализ. Часть 4. Числовые и функциональные ряды.

ЭУП разработан в соответствии с ОСВО 1–31 04 08–2013 специальности «Компьютерная физика» и ОСВО 1–02 05 02–2013 «Физика и информатика».

ЭУП обеспечивает достижение основной дидактической цели – самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной и учебной информации количество часов, предусмотренных учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко.

При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, ЭУП содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы с наиболее способными студентами.

Тесты, включенные в ЭУП, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. В ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить, приобрести навыки решения задач и основное внимание следует уделить построению математических рассуждений и приобретению навыка решения задач.

ЭУП содержит обширный материал для контрольных и индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену и зачету по разделам «Введение в анализ» и «Дифференциальное исчисление».

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
	Введение в анализ	**26**	**22**
1	**Множества.** Множества и операции над ними. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Геометрическое изображение действительных чисел. Модуль действительного числа, его свойства. Числовые промежутки. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Грани ограниченного множества. Непрерывность множества действительных чисел	4	6
2	**Функции.** Понятие функции. График функции. Способы задания функции. Сложная функция. Преобразование графиков функций. Классификация функций по свойствам (четность, периодичность, монотонность, ограниченность). Обратные функции	4	4
3	**Предел числовой последовательности.** Понятие числовой последовательности и ее предела. Ограниченные и неограниченные последовательности. Монотонные последовательности. Предел монотонной последовательности. Число e. Натуральные логарифмы. Принцип вложенных отрезков. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности	4	2
4	**Предел функции.** Понятие предела функции. Единственность предела функции. Локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел. Сохранение функцией знака предела. Предельный переход в неравенствах. Теорема о трех функциях. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы о пределах суммы, произведения и частного; особые случаи пределов суммы, произведения и частного	6	2
5	**Непрерывность функции. Техника вычисления пределов.** Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции непрерывных функций. Точки разрыва, их классификация. Односторонняя непрерывность. Непрерывность монотонной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы. Техника вычисления пределов. Показательно-степенная функция и ее предел. Теоремы Больцано – Коши. Теоремы Вейерштрасса. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора	8	8

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
	Дифференциальное исчисление	**20**	**22**
1	**Производная и дифференциал функции одной переменной.** Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной, ее геометрический и механический смысл. Касательная и нормаль к графику функции. Односторонние производные. Понятие дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Понятие дифференциала функции, его геометрический и механический смысл	8	10
	Производная и дифференциал суммы, произведения и частного. Производные некоторых основных элементарных функций. Производная композиции функций (сложной функции). Дифференциал композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциал и приближенные вычисления. Производная обратной функции. Логарифмическая производная. Производная показательно-степенной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Механический смысл второй производной. Формула Лейбница. Параметрически заданные функции и их дифференцирование. Векторнозначные функции действительной переменной и их дифференцирование. Касательная к кривой		
2	**Основные теоремы дифференциального исчисления.** Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши	2	
3	**Приложения дифференциального исчисления.** Правила Лопиталя (раскрытие неопределенностей при нахождении пределов). Формула Тейлора. Возрастание и убывание функции в точке. Критерий строгой монотонности функции на промежутке. Понятие максимума и минимума функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия максимума и минимума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклые функции. Достаточное условие выпуклости функции на интервале. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия перегиба. Вертикальная, горизонтальная и наклонная асимптоты. Критерий горизонтальных и наклонных асимптот. Исследование функции и построение ее графика (с применением дифференциального исчисления)	10	12

Предмет математического анализа. Вводные понятия

Математический анализ изучает функции и их обобщения (функционалы, операторы и т.д.) с помощью операции предельного перехода.

В математический анализ в широком смысле включаются дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, теория функций действительного переменного, комплексный анализ (теория функций комплексного переменного), теория приближений, дифференциальные уравнения (как обыкновенные, так и с частными производными), теория интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, дифференциальная геометрия, вариационное исчисление, функциональный анализ. Многие другие математические дисциплины применяют и развивают методы математического анализа. К ним можно отнести топологию, методы математической физики, теорию вероятностей и математическую статистику, теорию чисел и т.д. Базу же математического анализа составляют теория действительных чисел, теория пределов, теория рядов, дифференциальное и интегральное исчисление.

В математике, наряду с обычными знаками арифметических операций, часто используются следующие символы:

$\forall$ – «для любого», «для всякого», «для всех»;

$\exists$ – «существует».

Символы $\forall$ и $\exists$ называются кванторами общности и существования соответственно. Иногда для сокращения применяется обозначение $\exists\,!$, читаемое как «существует и единственный».

В основе любой математической теории лежат первичные понятия (то есть понятия, неопределяемые и интуитивно ясные) и аксиомы (то есть утверждения, считающиеся истинными и не требующими доказательства). Пользуясь первичными понятиями и аксиомами с помощью строгих логических рассуждений получают основные факты данной математической теории. Эти факты обычно формулируют в виде математических утверждений, называемых теоремами, леммами, предложениями и т.п.

Теоремы обычно можно схематично представить в виде так называемой импликации $A \Rightarrow B$, где A – условия теоремы, а B – вывод (заключение) теоремы. Если поменять местами условия и заключение теоремы, то получим обратную теорему $B \Rightarrow A$; при этом теорему $A \Rightarrow B$ называют прямой. Например, теорему Пифагора можно представить в виде импликации $A \Rightarrow B$, в которой A содержит условия теоремы: «треугольник является прямоугольным», а B – вывод теоремы: «катеты a и b и гипотенуза c треугольника связаны равенством $a^2 + b^2 = c^2$». Обратное к теореме Пифагора утверждение $B \Rightarrow A$ имеет вид: «если стороны a, b и c треугольника связаны равенством $a^2+b^2 = c^2$, то треугольник является прямоугольным».

Следует учитывать, что истинность прямой теоремы $A \Rightarrow B$ еще не означает истинности обратной теоремы $B \Rightarrow A$. Например, утверждение «если натуральное число делится без остатка на 10, то оно четное» истинно, но обратное к нему утверждение не верно, так как не всякое четное число делится без остатка на 10.

Если истинными являются и прямая и обратная теоремы, то обе они могут быть объединены в одно утверждение типа равносильности $A \Leftrightarrow B$. Такие утверждения обычно формулируются в виде «Для того, чтобы выполнялось A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось B», или в виде «A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B» и т.п. При этом A называют **необходимым**, а B – **достаточным** условиями теоремы. Например, истинным является утверждение «для того, чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы его стороны a, b и c были связаны равенством $a^2+b^2 = c^2$».

В теоремах типа $A \Rightarrow B$ требуется доказывать одно утверждение: из A следует B; в теоремах же типа $A \Leftrightarrow B$ требуется доказывать два утверждения: *необходимость* – $A \Rightarrow B$ и *достаточность* – $B \Rightarrow A$.

Символами ◀ и ▶ будем обозначать соответственно начало и конец доказательства теоремы, следствия, решения примера, задачи и т.п.

ЛЕКЦИЯ 1
Множества. Действительные числа

1.1 Множества и операции над ними

Понятие *множества* в математике является первичным, неопределяемым. Его синонимы – слова «класс», «семейство», «совокупность», «набор» и т.д. Создатель теории множеств Георг Кантор[1] говорил, что «множество есть многое, мыслимое как единое целое». Объекты любой природы (числа, люди, города и т.д.), составляющие множества, называются его элементами. Множества обозначаются большими, а их элементы – малыми буквами обычно латинского алфавита. Так, в школьном курсе математики буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных и действительных (вещественных) чисел. Запись $a \in A$ или $A \ni a$ означает, что элемент a принадлежит множеству A ($\in$ – знак принадлежности). Запись $a \notin A$ или $a \mathrel{\overline{\in}} A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Множество B, любой элемент которого принадлежит и множеству A, называется ***подмножеством*** множества A (обозначают $B \subset A$ ($\subset$ – знак включения)). Если же найдется элемент $b \in B$ такой, что $b \notin A$, то B не является подмножеством множества A (пишут: $B \not\subset A$). Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они называются равными, что записывается так: $A = B$ ($A \subset B$ и $B \subset A$).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют **пустым** и обозначают $\varnothing$. Математики условились считать, что пустое множество есть подмножество любого множества. Множества A и $\varnothing$ называют **несобственными подмножествами** множества A, а все другие подмножества – **собственными**.

Определение 1.1. ***Пересечением множеств***A *и* B *называется множество* C*, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих множествам и* A*, и* B*, и только их.*

Пересечение множеств A и B обозначается так: $C = A \cap B$ $\;(C = \{x : \; x \in A \text{ и } x \in B\})$.

С помощью кругов Эйлера[2] – Венна[3] пересечение множеств A и B показано на рисунке 1.1.

---

[1]Георг Кантор (1845–1918) – немецкий математик.
[2]Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский математик, механик, физик.
[3]Джон Венн (1834–1923) – английский логик.

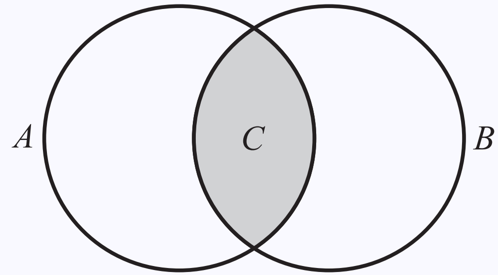


Рисунок 1.1 – Пересечение множеств

Пример. Если $A = \{x : \ -2 < x \leqslant 1\}$, $B = \{x : \ x \in \mathbb{Z}\}$, то $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$.

Определение 1.2. ***Объединением множеств*** *A и B называется множество K, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B, и только им.*

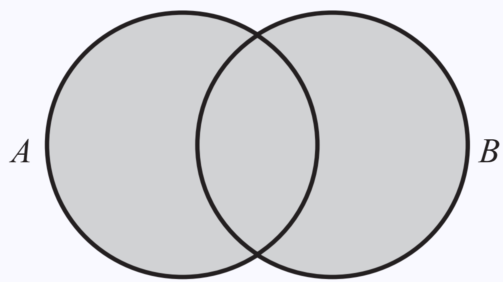


Рисунок 1.2 – Объединение множеств

Объединение множеств A и B обозначается так: $K = A \cup B$ $\ (K = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\})$.
Пример. $\{0, -1, -2, \ldots\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$.
С помощью кругов Эйлера – Венна объединение множеств показано на рисунке 1.2.

Определение 1.3. ***Разностью множеств*** *A и B называется множество D, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, и только их.*

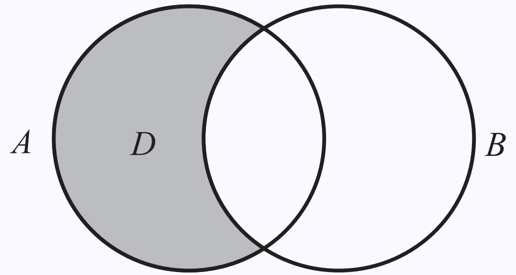


Рисунок 1.3 – Разность множеств

Разность множеств обозначается так:

$$D = A\backslash B \text{ или } D = A - B \quad (D = \{x: \ x \in A \text{ и } x \notin B\}).$$

С помощью кругов Эйлера – Венна разность множеств показана на рисунке 1.3.

Определение 1.4. *Разность между множеством A и любым его подмножеством B называется* ***дополнением*** *множества B к множеству A. Оно обозначается через CB или C_AB.*

Определение 1.5. ***Симметричной разностью*** *двух множеств A и B называется разность объединения этих множеств и их пересечения.*

Симметричную разность множеств A и B будем обозначать символом $A\Delta B$. Тогда определение 1.5 примет вид: $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

На рисунке 1.4 симметричная разность показана с помощью кругов Эйлера – Венна.

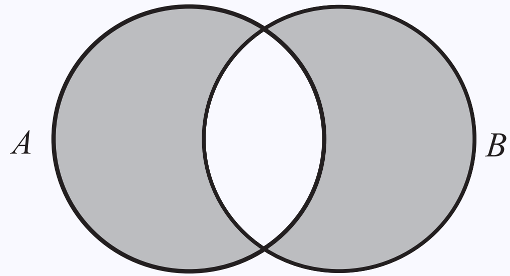


Рисунок 1.4 – Симметричная разность множеств

Определение 1.6. ***Прямым***, *или* ***декартовым***, ***произведением*** *множеств X и Y (обозначается через $X \times Y$) называется множество всех таких пар (x, y), что $x \in X$ и $y \in Y$.*

Если $X = Y$, то $X \times X = X^2$ называется *декартовым квадратом* множества X. Например, декартовым квадратом числовой прямой $\mathbb{R}$ будет числовая плоскость $\mathbb{R}^2$. В упорядоченной паре $z = (x, y)$ (элемент декартового произведения $Z = X \times Y$ множеств X, Y) элемент x называется первой координатой пары z, а элемент y – второй координатой пары z.

1.2 Рациональные числа

Определение 1.7. ***Рациональным числом*** *называется любая упорядоченная пара целых чисел m и n, где $n \neq 0$, записанная в форме частного (m – числитель, n – знаменатель).*

Примеры: $\frac{3}{7}$; $\frac{-2}{-6}$; $\frac{-15}{4}$; $\frac{0}{1}$; $\frac{5}{1}$.

Замечание 1.1. Будем считать одним и тем же рациональным числом числа вида $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$, если $m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Далее в качестве рациональных чисел будем рассматривать только несократимые дроби вида $\frac{m}{n}$, где m – целое, а n – натуральное.

Определение 1.8. *Рациональное число вида* $\frac{m}{10^n}$, *где* m *– целое число, а* $n \in \mathbb{N}$, *называется* ***конечной десятичной дробью****, причем, если* $|m| < 10^n$, *то дробь называется правильной.*

Пусть $\frac{m}{10^n}$ – правильная положительная десятичная дробь. Тогда справедливо представление:

$$\frac{m}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

где a_i $(i = \overline{1,n})$ могут принимать значения от 0 до 9 включительно. Эту дробь принято записывать следующим образом: $0, a_1a_2 \ldots a_n$.

Если в десятичной дроби $\frac{m}{10^n}$ будет $|m| \geqslant 10^n$, то дробь называется *неправильной*. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо представление: $\frac{m}{10^n} = a_0 + \frac{k}{10^n}$, где дробь $\frac{k}{10^n}$ – правильная. В этом случае неправильная десятичная дробь записывается так:

$$\frac{m}{10^n} = a_0, a_1a_2 \ldots a_n, \qquad (1.1)$$

где a_0 – целая часть. Например: $\frac{285}{10^2} = 2,85$. Можно рассматривать и отрицательные десятичные дроби, например: $-45,203$.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. *Для того чтобы несократимое рациональное число* $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, *было конечной десятичной дробью, необходимо и достаточно, чтобы разложение знаменателя* n *на простые множители содержало только числа* 2 *и* 5.

◀ Пусть $n = 2^k \cdot 5^l$, $k, l \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и пусть $k \geqslant l$. Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^k \cdot 5^l} = \frac{m \cdot 5^{k-l}}{2^k \cdot 5^l \cdot 5^{k-l}} = \frac{m \cdot 5^{k-l}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{m \cdot 5^{k-l}}{10^k} = \frac{s}{10^k}, \ s \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, рациональное число $\frac{s}{10^k}$ – десятичная дробь.

Обратное утверждение очевидно.▶

Если в разложении знаменателя на простые множители несократимого рационального числа $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) нет других множителей, кроме 2 и 5, то это число $\frac{m}{n}$ можно обратить в десятичную дробь путем деления m на n. Если же в указанном разложении есть еще другие множители из простых чисел, кроме 2 и 5, то этот процесс деления окажется бесконечным. В таких случаях говорят, что рациональное число $\frac{m}{n}$ представимо бесконечной десятичной дробью:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots . \tag{1.2}$$

Определение 1.9. *Бесконечная десятичная дробь вида* (1.2) *называется* ***периодической****, если существуют такие натуральные числа p и i, что для любых натуральных чисел $s > p$ будет справедливо равенство:*

$$a_s = a_{s+i}. \tag{1.3}$$

Пример. У бесконечной десятичной периодической дроби

$$3,\underbrace{7542}_{p=4}\overbrace{48}^{i=2}4848\ldots$$

будет $p = 4$, $i = 2$, $s > 4$ (если $s = 7$, то $4 = a_7 = a_{7+2} = a_9 = 4$).

Число, составленное из десятичных знаков (число их равно i), которые, начиная с некоторого десятичного знака (a_p), все время будут повторяться, называется *периодом дроби* (в нашем примере период дроби есть число 48). Причем если повторение начинается с первого десятичного знака, то такая дробь называется *чистой периодической дробью*, в противном случае – *смешанной периодической дробью* (в нашем примере – смешанная периодическая дробь). Читается, например, наша дробь так: три целых семь тысяч пятьсот сорок два до периода и сорок восемь в периоде, а запись этой дроби будет: $3,7542484848\ldots = 3,7542(48)$ (наличие скобок и указывает, что дробь периодическая).

Теорема 1.2. *Бесконечная десятичная дробь будет периодической тогда и только тогда, когда эта дробь есть рациональное число.*

◀**Достаточность.** Известно, что $r = \frac{m}{n}$ – рациональное число. Необходимо доказать, что r представимо бесконечной десятичной периодической дробью.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ (случай $m \in \mathbb{Z}$ рассматривается аналогично). Вначале делим числитель m на знаменатель n и выделяем целую часть a_0 (если дробь $\frac{m}{n}$ – неправильная). Здесь возможны случаи:

1. После выделения целой части a_0 остаток при делении m на n будет равен нулю. В этом случае рациональное число есть натуральное число a_0 и его можно записать так: $a_0,(0)$ – в периоде 0.

2. Указанный остаток не равен нулю. Деление продолжаем дальше. Так как при этом делении различные остатки могут быть только следующими числами: $0, 1, 2, \ldots, n-1$, то, если остаток равен нулю, получим представление рационального числа r в виде конечной десятичной дроби, которую можно считать бесконечной с периодом 0, в противном случае не более чем через $(n-1)$ шаг-деление остаток повторится, а значит, будут повторяться и десятичные знаки в частном – получим представление рационального числа r бесконечной десятичной периодической дробью.

Необходимость. Известно, что $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{p-1}(a_p a_{p+1} \ldots a_{p+i-1})$ – бесконечная десятичная периодическая дробь. Необходимо доказать, что $\alpha = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Возьмем число $10^{p-1}\alpha = a_0 a_1 \ldots a_{p-1}, (a_p a_{p+1} \ldots a_{p+i-1})$ – чистая периодическая дробь. Тогда разность $10^{p-1}\alpha - \alpha = (10^{p-1} - 1)\alpha$ будет равна конечной десятичной дроби, то есть рациональному числу (обозначим его через r_1). Но и $\alpha = \frac{r_1}{10^{p-1}-1}$ – число рациональное.▶

Доказав теорему 1.2, сформулируем новое определение рационального числа, равносильное определению 1.7.

Определение 1.10. ***Рациональным числом*** *называется любая бесконечная десятичная периодическая дробь.*

Можно показать, что есть и непериодические бесконечные десятичные дроби. Предварительно рассмотрим следующее определение.

Определение 1.11. *Бесконечная десятичная дробь вида (1.2) называется* ***непериодической****, если для любых натуральных чисел p и i существует такое натуральное число s, $s \geqslant p$, что выполняется неравенство:*

$$a_s \neq a_{s+i}. \tag{1.4}$$

Задача. Докажите, что бесконечная десятичная дробь

$$\alpha = 5,01011011101111\ldots$$

является непериодической.

◀ Возьмем любые натуральные числа p и i и зафиксируем их. Тогда существует такое натуральное число s, $s \geqslant p$, что $a_s = 0$, но после десятичного знака a_s расположено в α не менее чем i десятичных знаков, равных 1. Будем иметь $a_{s+i} = 1$, поэтому $a_s \neq a_{s+i}$.▶

1.3 Понятие действительного (вещественного) числа

В предыдущем параграфе было показано, что существуют бесконечные десятичные дроби, не являющиеся периодическими, то есть рациональными числами. Введем в рассмотрение так называемую числовую прямую.

Определение 1.12. ***Числовой прямой*** *(**числовой осью**) называется геометрическая прямая, на которой указана точка O, соответствующая рациональному числу ноль (начало отсчета), взят масштаб (указан отрезок OA, длину которого считаем равной единице, то есть точке A соответствует рациональное число 1) и выбрано положительное направление, определяемое вектором $\overrightarrow{OA}$.*

Из курса геометрии средней школы известно, что любой отрезок можно разделить на n ($n \in \mathbb{N}$), равных частей. Поэтому любому рациональному числу $r = \frac{m}{n}$ соответствует на числовой прямой определенная точка, и это число r называется координатой указанной точки.

Кроме того, известно, что если длина стороны квадрата равна единице, то длина его диагонали $x = \sqrt{2}$. Покажем, что $x = \sqrt{2}$ не является числом рациональным. Допустим противное, то есть, что $x = \sqrt{2}$ – число рациональное. Значит, существуют натуральные взаимно простые числа m и n, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Возведем последнее равенство в квадрат, получим: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, $m^2 = 2n^2$. Тогда m^2 делится на 2 во множестве целых чисел (обозначают это так: $m^2 \vdots 2$), поэтому и $m \vdots 2$ (если m не делится на 2, то $m = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, но тогда $m^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$ не делится на 2 – противоречие), то есть $m = 2k$. Подставляем это в равенство $m^2 = 2n^2$, получим: $4k^2 = 2n^2$, $n^2 = 2k^2$. Значит, и $n^2 \vdots 2$, поэтому $n \vdots 2$. Возникло противоречие: с одной стороны – числа m и n взаимно простые, но с другой – и $m \vdots 2$, и $n \vdots 2$. Поэтому предположение о том, что $\sqrt{2}$ – число рациональное, неверно.

Можно показать, что нерациональное число $\sqrt{2}$ есть бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Справедлива следующая теорема (см. [4]).

Теорема 1.3. *При выбранном масштабе длина любого отрезка выражается бесконечной десятичной дробью (периодической или непериодической).*

Таким образом, каждой точке числовой прямой соответствует единственная бесконечная десятичная дробь. Справедливо и обратное, а именно: каждой бесконечной десятичной дроби соответствует единственная точка на числовой прямой. В дальнейшем мы будем часто бесконечные десятичные дроби называть точками числовой прямой и наоборот.

Определение 1.13. ***Действительным числом*** *называется любая бесконечная десятичная дробь, причем если это дробь периодическая, то она называется рациональным числом, а если непериодическая – иррациональным числом.*

Множество действительных чисел обозначается так: $\mathbb{R}$, а множество иррациональных – $\mathbb{J}$. Очевидно, что $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$.

Примеры иррациональных чисел: $5,010110111\ldots$; $\sqrt{2}$; π (отношение длины окружности к диаметру; $\pi \approx 3,14$ – приближение иррационального числа π числом рациональным $3,14$ с точностью до 10^{-2}).

Пусть даны два действительных числа:

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots \text{ и } b = b_0, b_1 b_2 \ldots$$

Определение 1.14. *Действительные числа a и b называются* ***равными****, если для любых неотрицательных целых чисел $n \in \mathbb{Z}_0$ будет $a_n = b_n$ (бесконечные десятичные дроби вида $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n(0)$ и $b = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} C(9)$, где $C = a_n - 1$, считаем равными, то есть одним и тем же действительным числом).*

Определение 1.15. ***Модулем действительного числа*** *(****абсолютной величиной действительного числа****) a (обозначается $|a|$) называется само это число, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, то есть $(-a)$, если a отрицательно.*

Определение 1.16. *Положительное число a называется большим положительного числа b, если: $a_0 > b_0$ или $a_0 = b_0$, но существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $k = \overline{1, n-1}$, будет $a_k = b_k$, но $a_n > b_n$ (как сказано выше, всегда будем считать, что конечная десятичная дробь есть бесконечная десятичная дробь, в периоде которой есть ноль, а не 9).*

Пример. $37,2517\ldots > 37,2493\ldots$, так как $37 = a_0 = b_0 = 37$; $2 = a_1 = b_1 = 2$, но $5 = a_2 > b_2 = 4$.

Определение 1.17. *Отрицательное действительное число a называется большим, чем отрицательное действительное число b, если $|a| < |b|$.*

Пример.

$$-2,72319\ldots > -2,72403\ldots,$$

так как

$$|-2,72319\ldots| = 2,72319\ldots < |-2,72403\ldots| = 2,72403\ldots$$

Определение 1.18. *Любое положительное действительное число называется большим, чем любое отрицательное действительное число, а также, чем число ноль, действительное число ноль называется большим, чем любое отрицательное действительное число.*

Приведенные определения дают правила сравнения действительных чисел, то есть для действительных чисел справедливо правило упорядочения (любые два действительных числа a и b связаны одним и только одним из трех знаков $>$, $<$ или $=$, причем если $a > b$, то $b < a$). Также справедлива следующая теорема (свойства транзитивности для правила упорядочения).

Теорема 1.4. *Если для действительных чисел выполняются неравенства $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности знака $>$); также если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (свойство транзитивности знака $=$).*

◄Рассмотрим только свойство транзитивности для знака $>$. Пусть $c \geqslant 0$, тогда на основании правила упорядочения $b > 0$ (в противном случае было бы $c > b$ или $c = 0$), аналогично и $a > 0$. Запишем действительные числа a, b и c в виде бесконечных десятичных дробей: $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$; $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$ и $c = c_0, c_1 c_2 \ldots$. Из неравенства $a > b$ следует, что существует такое целое неотрицательное число n, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n > b_n$, а из неравенства $b > c$ следует, что существует такое целое неотрицательное число k, что $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1, \ldots, b_{k-1} = c_{k-1}$, но $b_k > c_k$. Пусть $m = \min\{n, k\}$. В силу записанных выше соотношений, свойств транзитивности знаков $>$ и $=$ для целых чисел и правил сравнения действительных чисел следует, что: $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2, \ldots, a_{m-1} = c_{m-1}$, но $a_m > c_m$, поэтому $a > c$. Утверждение доказано. Дальше легко доказать указанные свойства, если 1) $c < 0$, $a \geqslant 0$; 2) $c < 0$ и $a < 0$. Справедливость свойства транзитивности для знака $=$ сразу следует из справедливости свойства транзитивности указанного знака для целых чисел.►

Замечание 1.2. Запись $a \leqslant b$ равнозначна записи $b \geqslant a$ и означает, что либо $a = b$, либо $a < b$. Например, можно записать $3 \leqslant 3$, $3 \leqslant 6$. Конечно, можно написать более точно: $3 = 3$, $3 < 6$, однако неравенства $3 \leqslant 3$, $3 \leqslant 6$ также верны, так как означают, что «три не больше трех» и что «три не больше шести».

Наличие сравнения «больше», «меньше» или «равно» для любой пары действительных чисел называется **свойством упорядоченности множества действительных чисел**.

Действительные числа обладают еще так называемым **свойством непрерывности** или **свойством полноты**: *каковы бы ни были непустые множества* $A \subset \mathbb{R}$ *и* $B \subset \mathbb{R}$, *у которых для любых двух элементов* $a \in \mathbb{R}$ *и* $b \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $a \leqslant b$, *существует такое число* α, *что для всех* $a \in A$ *и* $b \in B$ *имеет место соотношение* $a \leqslant \alpha \leqslant b$.

Свойство полноты действительных чисел связано с самым простейшим использованием математики на практике – с измерением величин. При измерении какой-либо физической величины часто получают с большей или меньшей точностью ее приближенные значения. Если в результате экспериментального измерения данной величины получается ряд чисел, дающих значение искомой величины с недостатком (они играют роль множества A в приведенной выше формулировке свойства непрерывности) и с избытком (множество B), то свойство непрерывности действительных чисел выражает объективную уверенность в том, что измеряемая величина имеет определенное значение, расположенное между ее приближенными значениями, вычисленными с недостатком и избытком.

1.4 Подмножества числовой прямой

Рассмотрим некоторые подмножества числовой прямой.

1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ – отрезок, причем если $a \neq b$, то отрезок называется невырожденным, в противном случае – вырожденным;

2) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ — интервал или открытый отрезок;

3) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leqslant b\}$ – полуинтервал, содержащий конец b;

4) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leqslant x < b\}$ – полуинтервал, содержащий конец a;

5) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < +\infty\}$ – открытый луч или бесконечный интервал;

6) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leqslant x < +\infty\}$ – луч или бесконечный полуинтервал, содержащий левый конец a;

7) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ -\infty < x < b\}$ – открытый луч или бесконечный интервал;

8) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ -\infty < x \leqslant b\}$ – луч или бесконечный полуинтервал, содержащий правый конец b;

9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ – числовая прямая.

Все числовые множества 1) – 9) называются числовыми промежутками, или просто промежутками.

Определение 1.19. *Объединение числовой прямой и множества, состоящего из символов $-\infty$ и $+\infty$, называется* ***расширенной числовой прямой*** *(обозначается $\overline{\mathbb{R}}$).*

Будем считать, что для любого действительного x

$$-\infty < x < +\infty \text{ и } x + \infty = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty.$$

Замечание 1.3. Если в рассматриваемых предложениях знак перед символом ∞ не играет роли, дополнительно вводится символ ∞.

Символы $-\infty$ и $+\infty$ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

Определение 1.20. *Интервал (a, b) для любой своей точки $x \in (a, b)$ называется* ***окрестностью*** *этой точки, в частности, если $(a, b) = (x - \delta, x + \delta)$, $\delta > 0$, то указанная окрестность называется δ-окрестностью точки x (окрестностью точки x радиуса $\delta > 0$).*

Окрестности будем обозначать U_x или $U(x, \delta)$, если в качестве окрестности точки x выбран интервал $(x - \delta, x + \delta)$. Если из окрестности U_x удалить саму точку x, то полученное множество будем называть **проколотой окрестностью** точки x и обозначать $\mathring{U}_x$ (или $\mathring{U}(x, \delta)$).

Замечание 1.4. Кроме окрестностей точек числовой прямой, вводятся также понятия окрестностей и для точек расширенной числовой прямой, то есть для символов $+\infty$, $-\infty$, ∞:

1. $U_{+\infty} = U(+\infty, \Delta) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > \Delta, \ \Delta > 0\}$;
2. $U_{-\infty} = U(-\infty, \Delta) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < -\Delta, \ \Delta > 0\}$;
3. $U_{\infty} = U(\infty, \Delta) = \{x \in \mathbb{R} : \quad (x > \Delta) \vee (x < -\Delta), \ \Delta > 0\}$.

Определение 1.21. *Точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется* ***предельной точкой*** *множества $M \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечно много точек множества M.*

Например, предельными точками множества $M = [a, b) \cup \{c\}$, где $c > b$, будут точки отрезка $[a, b]$.

Замечание 1.5. Очевидно, что предельные точки множества могут как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему (смотри предыдущий пример). Также очевидно, что определение 1.21 равносильно следующему определению: точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка, отличная от точки x_0 и принадлежащая множеству M. Пусть, например, $x_0 \in \mathbb{R}$, возьмем любую окрестность $U(x_0, \delta)$, тогда существует $x_1 \in \mathring{U}(x_0, \delta) \cap M$. Дальше возьмем любой радиус $\delta_1 > 0$ новой окрестности, но $0 < \delta_1 \leqslant \rho(x_0, x_1)$, где $\rho(x_0, x_1)$ – расстояние от точки x_0 до точки x_1. В проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ также существует точка $x_2 \neq x_1$ из множества M. Продолжая этот процесс и дальше, мы приходим к справедливости нашего утверждения.

Определение 1.22. *Точка $c \in M \subset \mathbb{R}$ называется **изолированной точкой** множества M, если существует окрестность U_c, где нет других точек множества M, кроме точки c.*

В рассматриваемом нами примере $M = [a, b) \cup \{c\}$, $c > b$, точка c – изолированная точка множества M (в качестве радиуса указанной в определении 1.22 окрестности U_c можно взять любое $\delta \in \mathbb{R}$, но такое, что $0 < \delta \leqslant \rho(b, c)$ – расстояние от точки b до точки c).

Определение 1.23. *Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется **открытым**, если любая точка множества G входит в него с некоторой окрестностью этой точки. Такие точки множества называются **внутренними**. Значит, по-другому: множество G называется открытым, если все его точки внутренние.*

Пример 1.1. Докажите, что любой интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ – открытое множество.

$$◀ \ \forall\, x \in (a, b) \ \ \exists U(x, \delta) \subset (a, b), \quad 0 < \delta \leqslant \min\{|a - x|, |b - x|\},$$

то есть x – внутренняя точка (a, b). ▶

Определение 1.24. *Множество $F \subset \mathbb{R}$ называются **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки, другими словами, если нет предельных точек множества F, ему не принадлежащих.*

Примером замкнутого множества является любой отрезок (невырожденный или вырожденный) числовой прямой. Вся числовая прямая $\mathbb{R}$ и пустое множество $\varnothing$ являются замкнутыми множествами, с другой стороны, $\mathbb{R}$ и $\varnothing$ будут и открытыми множествами.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение подмножества данного множества. Приведите примеры.
2. Сформулируйте определение пересечения (объединения, разности, дополнения, симметричной разности) множеств. Приведите примеры.
3. Дайте определение рационального числа.
4. Назовите промежутки числовой прямой и укажите их обозначения.
5. Какие числа имеют два различных представления в виде десятичной дроби?
6. Укажите два иррациональных числа, разность которых рациональна.
7. Укажите два иррациональных числа, произведение которых рационально.
8. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Действительные числа

Задание 1. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь $-25,3(12)$ в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

◀**Первый способ**. Пусть $\alpha = 25,3(12)$. Тогда

$$100\alpha = 2531,2(12),\ \ 100\alpha - \alpha = 99\alpha,\ \ 99\alpha = 2505,9.$$

Значит, $\alpha = \frac{25059}{990} = \frac{8353}{330}$. Окончательно получим: $-25,3(12) = -\frac{8353}{330}$.

Второй способ. Знаем, что для бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателями q, $|q| < 1$, $q \neq 0$ сумма S всех ее членов $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член этой прогрессии. В нашем случае

$$25,3(12) = 25,3 + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + \ldots = 25,3 + \frac{0,012}{1-0,01} =$$

$$= 25,3 + \frac{0,012}{0,99} = 25\frac{3}{10} + \frac{12}{990} = 25\frac{3}{10} + \frac{4}{330} = 25\frac{99+4}{330} = 25\frac{103}{330}.$$

Тогда $(-25,3(12)) = -\frac{8353}{330}$. ▶

Задание 2. Рациональную дробь $\frac{321}{400}$ представить в виде бесконечных десятичных периодических дробей в двух формах.

◀Умножив числитель и знаменатель дроби на 25, получим:

$$\frac{321}{400} = \frac{321\cdot 25}{400\cdot 25} = \frac{8025}{10000} = 0,8025(0) = 0,8024(9). ▶$$

Задание 3. Докажите, что бесконечная десятичная дробь $4,212112111211112\ldots$ (количество единиц между двойками увеличивается каждый раз на единицу) является числом иррациональным.

◀Возьмем любые натуральные числа m и k, зафиксируем их. А в качестве натурального числа n возьмем такое $n \geqslant m$, чтобы $a_n = 1$, $a_{n+1} = 1, \ldots, a_{n+k-1} = 1$, но $a_{n+k} = 2$, то есть $1 = a_n \neq a_{n+k} = 2$. Это возможно, так как для любого натурального числа $l \in \mathbb{N}$ существует десятичный знак $a_s = 2$, после которого подряд стоит l десятичных знаков, каждый из которых равен единице. Утверждение доказано.▶

Задание 4. Докажите, что не существует рационального числа, такого, что $r^2 = 3$.

◀Предположим, что существует рациональное число r, такое, что $r = \frac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые натуральные числа, и $r^2 = 3$, то есть $\frac{p^2}{q^2} = 3$ или $p^2 = 3q^2$, значит, $p \vdots 3$, то есть $p = 3p_1$, где $p_1 \in \mathbb{N}$, откуда $3p_1^2 = q^2$, то есть $q \vdots 3$, а значит, числа p и q не являются взаимно простыми. Наше предположение привело к противоречию.▶

Задание 5. Докажите, что число $\log_2 6$ иррационально.

◀Допустим, что $\log_2 6$ есть число рациональное, то есть $\log_2 6 = \frac{m}{n}$. Тогда $2^{\frac{m}{n}} = 6$, $2^m = 2^n \cdot 3^n$. Последнее равенство невозможно, так как число 3 входит в разложение правой части последнего равенства на простые множители, но не входит в такое же разложение левой части. А это противоречит единственности разложения целых чисел на простые множители. Значит, наше предложение о рациональности числа $\log_2 6$ неверно, а следовательно, число $\log_2 6$ иррационально.▶

Задание 6. Докажите, что уравнение $2r^3 - 3r + 2 = 0$ не имеет рациональных решений.

◀Если $r = m$ – целое решение уравнения, то $m(2m^2 - 3) = -2$. Значит, число (-2) делится на m во множестве целых чисел. Это возможно, если $m = \pm 1, \pm 2$. Но любое из указанных значений не удовлетворяют нашему уравнению.

Пусть несократимая рациональная дробь $\frac{m}{n}$ $(n \neq \pm 1)$ есть решение уравнения. Тогда $2\frac{m^3}{n^3} - 3\frac{m}{n} + 2 = 0$, $2m^3 = n(3mn - 2n^2)$ и $2m^3$ должно делиться на n во множестве целых чисел. Здесь возможны случаи:

1) $n = 2k$ – число четное, тогда $2m^3 = 2k(3mn - 2n^2)$, $m^3 = n(3mk - 2nk)$, то есть $m^3 \vdots n$;

2) $n = 2k-1$ – нечетное целое число, тогда из равенства $2m^3 = n(3mn-2n^2)$ следует, что $m^3 \vdots n$. В обоих рассматриваемых случаях целые числа m и n должны содержать общий множитель, отличный от (± 1). А это противоречит предложению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Значит, наши предположения о существовании рациональных решений уравнения неверны.►

Задание 7. Какие из чисел данного множества являются рациональными:

$$\left(\sqrt{0,125}\right)^{-3\log_4\sqrt{6}+1,41(6)} \cdot 3^{-0,125};\ \frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}};\ \sqrt{1+\sqrt{3}}.$$

◄1. Обозначим первое число через a. Вначале представим бесконечную десятичную периодическую дробь $\alpha = 1,41(6)$ в виде обыкновенной: $10\alpha = 14,16(6)$, $9\alpha = 12,75$; $\alpha = \frac{1275}{900} = \frac{17}{12}$. Тогда

$$a = \frac{\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{3}{4}\log_2 6+\frac{17}{12}}}{3^{\frac{1}{8}}} = \frac{2^{-\frac{17}{8}} \cdot \left(2^{\log_2 6}\right)^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} = \frac{2^{-\frac{17}{8}} \cdot 2^{\frac{9}{8}} \cdot 3^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} = \frac{3}{2}.$$

Значит, a – число рациональное.

2. Обозначим второе число через b. Тогда

$$b = \frac{3+2\sqrt{2}}{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)} + \sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2} = 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2} = 6.$$

Значит, b – число рациональное.

3. Обозначим третье число через c. Тогда предположив, что число c – рациональное, получим:

$$c = \sqrt{1+\sqrt{3}} = \frac{m}{n},\ m,n \in \mathbb{N};\ c^2 = 1+\sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2};\ \sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2} - 1.$$

Но $\frac{m^2}{n^2} - 1$ – число рациональное, а $\sqrt{3}$ – иррациональное (смотрите доказательство выше). Противоречие. Значит, c – число иррациональное.►

Задание 8. Укажите рациональное и иррациональное числа, лежащие между числами

$$a = 0,312000102\ldots \text{ и } b = 0,311999016\ldots.$$

◀В качестве искомого рационального числа можно взять $r = 0,312000022(0)$. Очевидно, что $r > b$ (обозначим $r = r_0, r_1r_2r_3\ldots$; $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$), так как $r_k = b_k$, $k = 0,1,2$, но $r_3 = 2 > 1 = b_3$ и $r > 0,312$ (другими словами, b не есть периодическая дробь с периодом 9, который начинается с b_4). Также $r < a$, так как (обозначим $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$) $a_k = r_k$, $k = 0,1,\ldots,6$, но $r_7 = 0 < 1 = a_7$, и также r не есть периодическая дробь с периодом 9, который начинается с r_8 ($r_8 = 2$).

В качестве искомого иррационального число можно взять число

$$\alpha = 0,3120000424424442\ldots$$

(доказательство иррациональности чисел вида α смотрите выше при решении задания 3). Очевидно, что $b < \alpha < a$ (доказательство аналогично приведенному выше для $r \in \mathbb{Q}$). ▶

Задание 9. Доказать, что между двумя любыми различными действительными числами содержатся как рациональные, так и иррациональные числа.

◀Рассмотрим два действительных положительных числа

$$\alpha = A, a_1a_2\ldots a_n\ldots \text{ и } \beta = B, b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

Предположим, что $\alpha < \beta$. Обозначим через α_n и β_n десятичные приближения чисел α и β по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$. Так как $\alpha < \beta$, то $\alpha_n \leqslant \beta_n$. При этом найдется такое N, что $\beta_N - \alpha_N \geqslant 2 \cdot 10^{-N}$. Но тогда рациональное число $\alpha_N + 10^{-N}$ больше, чем α, но меньше, чем β_N, и тем более меньше, чем β, то есть

$$\alpha < \alpha_N + 10^{-N} < \beta_N < \beta.$$

Значит, между α и β лежит хотя бы одно рациональное число.

Можно показать, что иррациональное число

$$\alpha_N + 10^{-N} \cdot 0,101001000100001\ldots$$

также лежит между α и β.

Случаи, когда α и β отрицательны или имеют разные знаки, рассматриваются аналогично.▶

Замечание 1.6. Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений, зависящих от натуральной переменной. Доказательство истинности предложения для всех значений натуральной переменной часто удается провести так называемым методом математической индукции, который основан на следующем свойстве натуральных чисел: *в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел существует наименьшее число*.

Суть метода математической индукции состоит в следующем. Пусть нужно проверить, верно ли утверждение $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) проверяем справедливость утверждения при $n = m$ (в частности, при $m = 1$);

2) доказываем, что из утверждения $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$, следует справедливость утверждения $A(k+1)$.

3) делаем вывод о справедливости утверждения $A(n)$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$ (для любых $n \in \mathbb{N}$, если $m = 1$).

Задание 10. Докажите так называемую формулу бинома Ньютона[4]:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k, \tag{1.5}$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$ (принимается по определению).

◀Применим для доказательства метод математической индукции.

[4]Исаак Ньютон (1643–1727) – английский физик, математик.

1. При $n = 1$ формула (1.5) верна: $1 + x = 1 + x$, так как

$$C_1^0 = C_1^1 = 1.$$

2. Предположим, что формула бинома Ньютона (1.5) справедлива при $n = t$, $t \in \mathbb{N}$. Докажем, что формула (1.5) верна и при $n = t + 1$.
Сначала докажем, что при $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ $(k \in \mathbb{N})$ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Действительно,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = C_{n+1}^{k+1}.$$

Далее имеем:

$$(1+x)^{t+1} = (1+x)^t(1+x) =$$
$$= C_t^0 + C_t^1 x + \ldots + C_t^t x^t + C_t^0 x + \ldots + C_t^{t-1} x^t + C_t^t x^{t+1} =$$
$$= C_{t+1}^0 + C_{t+1}^1 x + \ldots + C_{t+1}^t x^t + C_{t+1}^t x^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} C_{t+1}^k x^k. \blacktriangleright$$

Замечание 1.7. Если в (1.5) положить $x = \frac{b}{a}$, а затем умножить обе части полученного равенства на a^n, то (1.5) примет вид

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{1.6}$$

Задание 11. Докажите, что при $x \geqslant -1$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (*неравенство Бернулли*[5]):

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx. \tag{1.7}$$

[5] Яков Бернулли (1654–1705) – швейцарский математик.

◀Применим для доказательства неравенства (1.7) метод математической индукции. Покажем, что неравенство (1.7) верно при $n = 1$. Действительно, $1 + x \geqslant 1 + x$.

Предположим, что неравенство (1.7) справедливо для $n = k \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^k \geqslant 1 + kx.$$

Докажем, что неравенство (1.7) верно при $n = k + 1$.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + x^2 \geqslant 1 + (k+1)x. \;\blacktriangleright$$

Замечание 1.8. Очевидно, что при $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ $n \geqslant 2$ неравенство Бернулли имеет вид

$$(1+x)^n > 1 + nx. \tag{1.8}$$

Задание 12. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \tag{1.9}$$

◀Применим формулу бинома Ньютона (1.5):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + \ldots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \ldots C_n^n\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots =$$

$$= \Big[\text{применим формулу суммы всех членов бесконечно убывающей}$$

$$\text{геометрической прогрессии}\Big] = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Представить бесконечные десятичные периодические дроби $2,5(45)$; $30,12(439)$ в виде обыкновенных дробей $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Рациональную дробь $\frac{703}{80}$ представить в виде бесконечных десятичных периодических дробей в двух формах.
3. Докажите, что действительные числа

$$-5,2324252627\ldots;\ \sqrt[4]{20};\ \lg 3;\ \sqrt[4]{3} - 2\sqrt{2}$$

являются числами иррациональными.
4. Докажите, что не существует рационального числа r, такого, что а) $r^2 = 5$; б) $r^3 = 7$; в) $r^2 + 3r + 1 = 0$; г) $r^3 - 7r + 1 = 0$.
5. Докажите, что число $0,12112111211112\ldots$ иррациональное.
6. Какие из чисел данного множества являются числами рациональными:

$$6.1\ \sqrt[3]{128\sqrt{8}} \cdot 3^{\log_9 \sqrt[3]{2}};\ 6.2\ \sqrt[3]{15\sqrt{3} + 26} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - 25^{-\frac{3}{2}};\ 6.3\ \sqrt{4 + \sqrt{32}};\ 6.4\ \sin 10^\circ.$$

7. Найдите два иррациональных числа α_1 и α_2 и два рациональных числа r_1 и r_2, лежащих между числами $-5,203100(9)$ и $-5,2030(9)$, и таких, что

$$\alpha_1 < r_1 < r_2 < \alpha_2.$$

8. Вычислите с точностью до 10^{-4} сумму, разность, произведение и частное чисел $\alpha = 5,742774277742\ldots$ и $\beta = 2,1(68)$.
9. Докажите, что если r – рациональное число, а α – иррациональное, то $r+\alpha$ – иррациональное число.
10. Пусть α и β – иррациональные числа, а $\alpha+\beta$ рациональное число. Докажите, что числа $\alpha-\beta$ и $\alpha+2\beta$ иррациональные.
11. Докажите с помощью метода математической индукции, что

11.1 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

11.2 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

11.3 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

11.4 $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

ЛЕКЦИЯ 2
Модуль действительного числа. Ограниченные и неограниченные множества

2.1 Модуль действительного числа

Выше дано определение модуля действительного числа $a \in \mathbb{R}$ (абсолютной величины числа a):

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases}$$

по-другому, $|a| = \max\{a, -a\}$.

Рассмотрим некоторые свойства модуля.

1. $\forall\ a \in \mathbb{R}\ |a| \geqslant 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $|a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

◀Справедливость свойства следует из определения модуля.▶

2. $\forall\ a \in \mathbb{R}$

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|. \tag{2.1}$$

◀Если $a < 0$, то неравенство (2.1) выполняется, так как

$$a = -(-a) = -|a| = a < |a| = -a > 0.$$

При $a = 0$, $0 = -|a| = a = 0 = |a|$.

Если $a > 0$, то $-a = -|a| < a = |a|$. ▶

3. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{2.2}$$

◀Справедливы неравенства: $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$ и $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$. Сложив неравенства, получим двойное неравенство:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant (|a| + |b|). \tag{2.3}$$

С другой стороны, неравенство (2.2) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} a+b\geqslant 0, \\ a+b\leqslant |a|+|b|, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+b<0, \\ a+b\geqslant -(|a|+|b|). \end{cases} \tag{2.4}$$

Но если для любых $a,b\in\mathbb{R}$ выполняется двойное неравенство (2.3), то выполняются и системы (2.4), а значит, и неравенство (2.2).▶

Следствие 2.1. $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$

$$|a-b|\geqslant ||a|-|b||. \tag{2.5}$$

◀ $|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$. Тогда $|a-b|\geqslant |a|-|b|$. Аналогично

$$|b|=|(b-a)+a|\leqslant |b-a|+|a|, \quad |b-a|\geqslant |b|-|a|.$$

Но одна из разностей $(|a|-|b|)$ или $(|b|-|a|)$ есть число неотрицательное. Неравенство (2.5) доказано.▶

4. $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$ $|ab|=|a|\cdot|b|$.

◀Рассмотрим случай, когда $ab\geqslant 0$. Тогда $|ab|=ab$ и

$$|a|\cdot|b|=\left[\begin{array}{l} ab,\ \text{если } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0, \\ (-a)\cdot(-b),\ \text{если } a<0,\ b<0 \end{array}\right. =ab=|ab|.$$

Если $ab<0$, то $|ab|=-ab$ и

$$|a|\cdot|b|=\left[\begin{array}{l} a\cdot(-b)=-ab,\ \text{если } a>0,\ b<0, \\ -a\cdot b=-ab,\ \text{если } a<0,\ b>0 \end{array}\right. =-ab=|ab|.\ ▶$$

5. $\forall\ a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0$ $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

◀Проведем равносильные преобразования доказываемого неравенства:

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\Leftrightarrow |b|\cdot\left|\frac{a}{b}\right|=|a|\Leftrightarrow \left|b\cdot\frac{a}{b}\right|=|a|\Leftrightarrow |a|=|a|.\ ▶$$

При решении неравенств с модулями удобно использовать следующие две равносильности:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases} \tag{2.6}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right. \tag{2.7}$$

◀Докажем, например, равносильность (2.6). Возьмем любое решение $x = x_0$ неравенства $|f(x)| < g(x)$, то есть числовое неравенство $|f(x_0)| < g(x_0)$ – верное. Возможны случаи: 1) $f(x_0) \geqslant 0$; 2) $f(x_0) < 0$.

В первом случае $|f(x_0)| < g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) < g(x_0)$, откуда следует, что первое неравенство системы

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases} \tag{2.8}$$

при $x = x_0$ выполняется и $g(x_0) > 0$ $(f(x_0) \geqslant 0)$, поэтому выполняется и второе неравенство указанной системы, так как $(-g(x_0)) < 0$.

Если $f(x_0) < 0$, то

$$|f(x_0)| < g(x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) < g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) > -g(x_0),$$

то есть при $x = x_0$ выполняется второе неравенство рассматриваемой системы и $g(x_0) > 0$. Но тогда выполняется и первое неравенство системы, то есть $f(x_0) < g(x_0)$. Значит, система (2.8) есть следствие неравенства $|f(x)| < g(x)$.

Обратно, пусть $x = x_0$ – любое решение системы (2.8), то есть оба числовых неравенства $f(x_0) < g(x_0)$, $f(x_0) > -g(x_0)$ верны; но последнее неравенство равносильно неравенству $-f(x_0) < g(x_0)$. Но одно из двух чисел $f(x_0)$ или $(-f(x_0))$ – неотрицательное число, а поэтому равно своему модулю, то есть числовое неравенство $|f(x_0)| < g(x_0)$ есть верное неравенство. Значит, неравенство $|f(x)| < g(x)$ есть следствие системы (2.8). Равносильность (2.6) доказана.

Аналогично доказывается и равносильность (2.7).▶

Замечание 2.1. Равносильности типа (2.6) и (2.7) справедливы и для решения нестрогих неравенств.

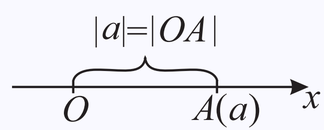
Пример 2.1. Решите неравенство $2x + |4-3x| - 3 \leqslant |x+1|$.

$$\blacktriangleleft\ |4-3x| \leqslant 3 - 2x + |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \leqslant 3-2x+|x+1|, \\ 4-3x \geqslant -3+2x-|x+1|, \end{cases} \Leftrightarrow$$

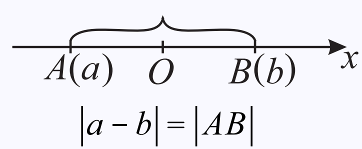
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| \geqslant 1-x, \\ |x+1| \geqslant 5x-7, \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+1 \geqslant 1-x, \\ x+1 \leqslant x-1, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x+1 \geqslant 5x-7, \\ x+1 \leqslant -5x+7, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2x \geqslant 0, \\ 1 \leqslant -1, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} 4x \leqslant 8, \\ 6x \leqslant 6, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant 2, \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2.\ \blacktriangleright$$

2.1.1 Геометрическая иллюстрация модуля

1. Для любого $a \in \mathbb{R}$ $|a|$ есть расстояние между точкой с координатой a на координатной прямой и началом координат.



2. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ $|a-b|$ есть расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой.



Пример 2.2. Решить уравнение $|2x+3| = 5$.

◀ $|2x+3| = 5 \Leftrightarrow |2x-(-3)| = 5$. Рассмотрим на числовой прямой точки $A\,(2x)$ и $B\,(-3)$. Расстояние между ними $AB = 5$. Возьмем на числовой прямой точку $B\,(-3)$ и от нее вправо и влево откладываем точки $A_1\,(2x)$ и $A_2\,(2x)$, расположенные от точки $B\,(-3)$ на расстоянии, равном пяти масштабным единицам.

Значит, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $2x = 2$ или $2x = -8$; $x_1 = 1$ или $x_2 = -4$ – искомые корни уравнения.▶

2.2 Ограниченные и неограниченные множества

Будем далее рассматривать множества, которые являются подмножествами множества действительных чисел.

Определение 2.1. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется* ***ограниченным сверху*** *(****снизу****), если существует такое действительное число α, что для любых $x \in X$ будет выполняться неравенство $x \leqslant \alpha$ $(x \geqslant \alpha)$. Указанное выше число α называется* ***верхней*** *(****нижней****)* ***гранью*** *множества X.*

Например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ ограничено снизу. В качестве нижней грани можно взять натуральное число $n = 1$ или любое действительное число, меньшее $n = 1$.

Определение 2.2. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется* ***ограниченным****, если оно ограничено и сверху, и снизу.*

Другими словами, множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если существует $\alpha > 0$, что для любых действительных чисел $x \in X$ будет выполняться неравенство $|x| \leqslant \alpha$; или множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если существует отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, такой, что множество X является подмножеством этого отрезка.

Замечание 2.2. Согласно определению 2.1 множество $X \subset \mathbb{R}$ будет неограниченным сверху (снизу), если для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такое действительное число $x' \in X$, что выполняется неравенство $x' > \alpha$ $(x' < \alpha)$.

Пример 2.3. Докажите, что множество $X = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, является неограниченным сверху.

◀Возьмем любое действительное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, что если $\alpha \leqslant 0$, то в качестве указанного в замечании 2.2 числа $x' \in X$ можно взять значение выражения $\frac{n^2}{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\alpha > 0$, зафиксируем его. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n^2}{n+1} \geqslant \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{n}{2} > \alpha$. В качестве n' возьмем натуральное число $[2\alpha] + 1$, где $[2\alpha]$ – целая часть действительного положительного числа 2α (наибольшее целое число, не превосходящее число 2α). При таком выборе n' получим $x' = \frac{n'^2}{n'+1}$.▶

Определение 2.3. ***Точной верхней гранью*** *ограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$ называется наименьшая из верхних граней этого множества.*

Определение 2.4. ***Точной нижней гранью*** *ограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$ называется наибольшая из нижних граней этого множества.*

Определения точных верхних и нижних граней можно сформулировать с помощью следующих двух определений, эквивалентных определениям 2.3 – 2.4, называемых характеристическими свойствами точных граней.

Определение 2.5. *Число $\overline{x}$ называется* ***точной верхней гранью*** *множества X, если*
1) $\forall x \in X \;\; x \leqslant \overline{x}$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x' \in X \quad x' > \overline{x} - \varepsilon$ (*рисунок* 2.1).

Определение 2.6. *Число* $\underline{x}$ *называется* ***точной нижней гранью*** *множества* X, *если*
1) $\forall x \in X\ x \geqslant \underline{x}$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x'' \in X\quad x'' < \underline{x} + \varepsilon$ (*рисунок* 2.2).

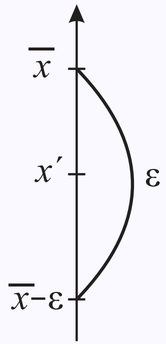


Рисунок 2.1

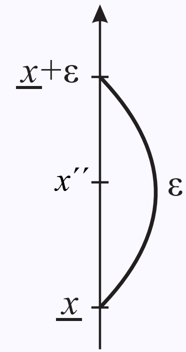


Рисунок 2.2

Точная верхняя и нижняя грани обозначаются соответственно символами:
1) $\sup X$ (sup – взято из латинского слова supremum («супремум») – в переводе означает «наивысшее»);
2) $\inf X$ (inf – взято из латинского слова infimum («инфимум») – в переводе означает «наинизшее»).
Точные грани множества *не обязаны принадлежать множеству.*

Пример 2.4. Исследуйте на ограниченность сверху и снизу множество $X = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$; в случае ограниченности найдите соответствующие точные грани.

◀Очевидно, что множество значений выражения $\frac{n}{n+1}$ ограничено как снизу (в качестве нижней грани можно взять любое неположительное число); так и сверху (верхней гранью будет любое действительное число, не меньшее единицы).

Докажем, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=1$. Для любых натуральных чисел n будет $\frac{n}{n+1}<1$:

$$\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1.$$

Зададимся любым сколь угодно малым положительным числом $\varepsilon>0$. Потребуем, чтобы

$$1-\frac{1}{n+1}>1-\varepsilon.$$

Тогда

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon\Leftrightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Взяв в качестве $n_0=\max\left\{1,\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]\right\}$, получим, что для любого $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$ $\frac{n}{n+1}>1-\varepsilon$. Значит, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=1$, причем указанная точная верхняя грань не достигается, то есть не существует натурального числа n, для которого $\frac{n}{n+1}=1$.

Из равенства $\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ видно, что значение выражения $\frac{n}{n+1}$ будет наименьшим, когда значение выражения $\frac{1}{n+1}$ наибольшее, а это будет, если $n=1$. Тогда $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=\frac{1}{2}$, причем эта грань достигается при $n=1$.▶

Справедлива следующая теорема [4, с. 69–70].

Теорема 2.1. *Если непустое множество действительных чисел ограничено сверху (снизу), то существует действительное число $\overline{x}$ (число $\underline{x}$), которое является точной верхней (точной нижней) гранью этого множества.*

◀Пусть X – ограниченное сверху непустое числовое множество. Обозначим через Y множество всех чисел, ограничивающих сверху множество X. Множество X ограничено сверху, поэтому множество Y не пусто. Каждый элемент $y\in Y$ ограничивает сверху множество X, то есть для любых $x\in X$ $x\leqslant y$.

Элементы x и y являются произвольными элементами соответственно множеств X и Y, поэтому, в силу свойства упорядоченности действительных чисел (смотри замечание **??**), существует такое число β, что для любых $x \in X$ и для любых $y \in Y$ имеет место неравенство $x \leqslant \beta \leqslant y$.

Выполнение неравенства $x \leqslant \beta$ для всех $x \in X$ означает, что число β ограничивает сверху множество X, а выполнение неравенства $\beta \leqslant y$ для всех $y \in Y$, то есть для всех чисел, ограничивающих сверху множество X, означает, что число β является наименьшим среди всех таких чисел, то есть верхней гранью множества X: $\beta = \sup X$.

Аналогично доказывается существование точной нижней грани у ограниченного снизу непустого множества.►

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение модуля действительного числа.
2. Сформулируйте свойства модуля действительного числа и равносильности, используемые при решении неравенств с модулями.
3. Дайте определения ограниченного сверху (снизу) множества, а также ограниченного множества. Приведите примеры.
4. Дайте понятия точных верхней и нижней граней ограниченного множества. Приведите примеры.
5. Приведите пример числового множества M, для которого $\inf M = 0$, $\sup M = 1$, но которое не совпадает с отрезком $[0, 1]$.
6. Для каких числовых множеств $\inf M = \sup M$?
7. Ответьте на вопросы теста.

Модуль действительного числа

Задание 1. Решите уравнение $|2x-7|=3$.

$$◀\ |2x-7|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-7=3, \\ 2x-7=-3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=2. \end{array}\right. \ ▶$$

Задание 2. Решите уравнение $|x^2-x-8|=-x$.

$$◀\ |x^2-x-8|=-x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-x-8=-x, \\ x^2-x-8=x; \end{array}\right. \\ -x \geqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-8=0, \\ x^2-2x-8=0; \end{array}\right. \\ x \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Решая уравнения, получим корни: $x=\pm 2\sqrt{2}$; $x=4$; $x=-2$. В ответ запишем корни, удовлетворяющие условию $x \leqslant 0$: -2; $-2\sqrt{2}$. ▶

Задание 3. Решите уравнение $|3x-4|=4x^2+3x-2$.

$$◀\ |3x-4|=4x^2+3x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3x-4 \geqslant 0, \\ 3x-4=4x^2+3x-2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3x-4<0, \\ 3x-4=-4x^2-3x+2; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant \frac{4}{3}, \\ 2x^2+1=0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<\frac{4}{3}, \\ 2x^2+3x-3=0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Уравнение из первой системы совокупности корней не имеет. Решая второе уравнение, находим, что $x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$. Очевидно, что оба полученных значения удовлетворяют условию $x<\frac{4}{3}$. ▶

Задание 4. Решите уравнение $|3x^2+5x-9| = |6x+15|$.

◀Так как обе части уравнения неотрицательны, то, возведя их в квадрат, получим уравнение, равносильное данному.

$$(3x^2+5x-9)^2 = (6x+15)^2 \Leftrightarrow (3x^2+5x-9)^2 - (6x+15)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+5x-9-6x-15)(3x^2+5x-9+6x+15) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x^2-x-24)(3x^2+11x+6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-x-24=0, \\ 3x^2+11x+6=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3,\ x=-\frac{8}{3}, \\ x=-3,\ x=-\frac{2}{3}. \end{array}\right. \blacktriangleright$$

Задание 5. Решите уравнение $(x-1)^2 + |x-1| = 2$.

◀Так как $(x-1)^2 = |x-1|^2$, то исходное уравнение примет вид:

$$|x-1|^2 + |x-1| - 2 = 0.$$

Сделаем замену: $|x-1| = t$; $t \geqslant 0$. Тогда $t^2+t-2=0$; $t=-2$; $t=1$. Но $t=-2$ не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$. Получим уравнение $|x-1| = 1$. Откуда

$$\left[\begin{array}{l} x-1=1, \\ x-1=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0. \end{array}\right. \blacktriangleright$$

Задание 6. Решите уравнение

$$|x^2-5x-6| + |2x^2-5x+3| = |3x^2-10x-3|. \tag{2.9}$$

◀Заметим, что уравнение (2.9) имеет вид $|a|+|b| = |a+b|$. Из свойств модуля следует, что это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $ab \geqslant 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно неравенству

$$(x^2-5x-6)(2x^2-5x+3) \geqslant 0.$$

Решая неравенство методом интервалов, получим:

$$x \in (-\infty, -1] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right] \cup [6, +\infty). \blacktriangleright$$

Задание 7. Решите уравнение $|32 - 4x - x^2| + |x^2 + 12x + 32| = 8x + 64$.

◀Заметим, что уравнение имеет вид $|a| + |b| = a + b$, а это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0. \end{cases}$ Значит, исходное уравнение равносильно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} 32 - 4x - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 + 12x + 32 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 32 \leqslant 0, \\ x^2 + 12x + 32 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-8\} \cup [-4, 4]. \blacktriangleright$$

Задание 8. Решите уравнение $|x - 3| + |2x + 1| + 2 - 3x = 0$.

◀Найдем корни подмодульных выражений: $x = 3$; $x = -\frac{1}{2}$. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых выражения $x - 3$ и $2x + 1$ сохраняют постоянный знак.

	$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$	$x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right]$	$x \in (3, +\infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$2x + 1$	$-$	$+$	$+$

Рассмотрим решение уравнения в каждом из трех промежутков:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ -x + 3 - 2x - 1 + 2 - 3x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leqslant 3, \\ -x + 3 + 2x + 1 + 2 - 3x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x - 3 + 2x + 1 + 2 - 3x = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ 6x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leqslant 3, \\ 2x = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ 0 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{2}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leqslant 3, \\ x = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = 3, \\ x > 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [3, +\infty). \blacktriangleright$$

Задание 9. Решите уравнение: $||-x-4|+x+2| = x+7$.

$$\blacktriangleleft\ ||x+4|+x+2| = x+7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -4, \\ |2x+6| = x+7; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -4, \\ 2 = x+7. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение второй системы последней совокупности $x = -5$. Первая система равносильна системе

$$\begin{cases} x \geqslant -4; \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ 2x+6 = x+7; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ -2x-6 = x+7; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \leqslant x < -3, \\ x = -\frac{13}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Таким образом, корнями уравнения будут числа -5 и 1. $\blacktriangleright$

Задание 10. Решите неравенство $|x^3-3x+1|\leqslant|x^3+x^2-1|$.

$$◄\ \left|x^3-3x+1\right|\leqslant\left|x^3+x^2-1\right|\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+1\leqslant\left|x^3+x^2-1\right|,\\ x^3-3x+1\geqslant-\left|x^3+x^2-1\right|;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^3+x^2-1\geqslant x^3-3x+1,\\ x^3+x^2-1\leqslant-x^3+3x-1;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x^3+x^2-1\geqslant-x^3+3x-1,\\ x^3+x^2-1\leqslant x^3-3x+1;\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+3x-2\geqslant0,\\ 2x^3+x^2-3x\leqslant0;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}2x^3+x^2-3x\geqslant0,\\ x^2+3x-2\leqslant0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Решая неравенства методом интервалов, а затем решив совокупности и систему неравенств, получаем ответ: $x\in\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2},-1,5\right]\cup\left[0,\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]\cup[1,+\infty)$. ►

Задание 11. Решите неравенство $\big||2x+1|-5\big|\leqslant4$.

$$◄\ \big||2x+1|-5\big|\leqslant4\Leftrightarrow\begin{cases}|2x+1|-5\leqslant4,\\ |2x+1|-5\geqslant-4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|2x+1|\leqslant9,\\ |2x+1|\geqslant1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\leqslant9,\\ 2x+1\geqslant-9;\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}2x+1\geqslant1,\\ 2x+1\leqslant-1;\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant4,\\ x\geqslant-5;\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}x\geqslant0,\\ x\leqslant-1,\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in[-5,-1]\cup[0,4].\ ►$$

Задание 12. Решите неравенство $|x-1|+|2-x|>x+3$.

◄Корни подмодульных выражений разбивают числовую прямую на промежутки, в каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют свой знак.

	$x\in(-\infty,1]$	$x\in(1,2]$	$x\in(2,+\infty)$
$2-x$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$+$	$+$

Полученное неравенство равносильно совокупности трех систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<1, \\ 1-x-x+2>x+3; \end{cases}\\ \begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ x-1-x+2>x+3; \end{cases}\\ \begin{cases} x>2, \\ x-1+x-2>x+3; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x\in\varnothing, \\ x>6, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty). \blacktriangleright$$

Задание 13. Решите уравнение $\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|=\frac{x^2}{|x-1|}$.

◀Поскольку

$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{x+x^2-x}{x-1}=\frac{x+x(x-1)}{x-1}=\frac{x}{x-1}+x;$$

$$\frac{x^2}{|x-1|}=\frac{|x^2|}{|x-1|}=\left|\frac{x^2}{x-1}\right|,$$

исходное уравнение можно представить в виде:

$$\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|=\left|\frac{x}{x-1}+x\right|.$$

Это уравнение вида $|a|+|b|=|a+b|$. Данное равенство справедливо тогда и только тогда, когда $ab\geqslant 0$. Поэтому последнее уравнение равносильно неравенству $\frac{x}{x-1}x\geqslant 0$, то есть $\frac{x^2}{x-1}\geqslant 0$. Решая это неравенство, получаем: $x\in\{0\}\cup(1,+\infty)$. ▶

Задание 14. Найдите все действительные значения параметра k, при которых уравнение

$$|x+2k|+|x+4|=4-2k$$

имеет не более девяти целых решений.

◀ Заменим уравнение равносильным $|x-(-2k)|+|x-(-4)|=4-2k$.

Последнее уравнение можно геометрически интерпретировать следующим образом: сумма расстояний между точкой $A(x)$ и точками $B(-4)$ и $C(-2k)$ равна $4-2k$ $(4-2k \geqslant 0,\ k \leqslant 2)$. Расстояние же между точками $A(-4)$ и $C(-2k)$:

$$|AC|=|-2k-(-4)|=|4-2k|=4-2k.$$

Значит, точка $x \in [-4;-2k]$, то есть множество решений уравнения есть отрезок. Этому отрезку принадлежит не более девяти целых чисел, если $-2k \leqslant 4$, $k \geqslant -2$.

Таким образом, $-2 \leqslant k \leqslant 2$. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Решите уравнения:

1.1 $|x^2-x-5|=1$;

1.2 $|3x-1|=\frac{1}{4x-1}$;

1.3 $|x-3|=-x^2+4x-3$;

1.4 $|x^2-8x+12|=-x^2+8x-12$;

1.5 $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$;

1.6 $(x+2)^2=2|x+2|+3$;

1.7 $|x^2+x|=|3x+3|$;

1.8 $|x^2-4x+3|+|x^2-4x-5|=8$;

1.9 $|x^2-5x+4|+|x^2-5x+6|=2$;

1.10 $|x^2-4|-|x^2-9|=5$;

1.11 $|x+1|+|3-x|=2-2x$;

1.12 $\big|x+1+|-x-3|\big|=x+6$;

1.13 $\big||x+1|-|x-3|\big|=|x|$;

1.14 $\big|3-|x-2|\big|=4$;

1.15 $|x+1|+|2x-4|-|x-3|=2x-6$;

1.16 $|x^2+3x|=|x^2+2x+5|+|x-5|$;

1.17 $|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-|x^2+2|$;

1.18 $|5x-3-2x^2|-|x-1|=|3x-2|$.

2. Решите неравенства:

2.1 $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right| < 1;$

2.2 $\left|\frac{x^2-2x+1}{x-3}\right| > 1;$

2.3 $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3;$

2.4 $\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1};$

2.5 $|x^2 + 6x + 8| \leqslant -x^2 - 6x - 8;$

2.6 $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3;$

2.7 $|x - 4| + |x + 4| \leqslant 10;$

2.8 $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| \leqslant 4;$

2.9 $\frac{3}{|x+1|+1} > |x - 1| - |x + 1|;$

2.10 $\frac{5}{|x+2|+2} > |x + 2| - 2.$

2.11 $|24x^2 - 39x - 8| \leqslant |18x^2 - 25x + 32|;$

3. Сколько существует целых значений параметра a, при которых уравнение $\left|x^2 - 5|x| + 6\right| = a^2 - a - 2$ имеет четыре корня?

4. Сколько существует целых значений параметра a, при которых уравнение $\left|3x^2 - 8|x| - 3\right| = a^2 - 2a$ имеет шесть корней?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Ограниченные множества

Задание 1. Докажите, что множество чисел вида $\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\}$, где n пробегает все натуральные значения, ограничено. Найдите точную нижнюю и верхнюю грани этого множества.

◀Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{5} < \frac{n^2}{n^2+4} < 1$, то множество чисел $\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\}$ ограничено. Покажем, что число 1 является точной верхней гранью этого множества, то есть $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\} = 1$. Для этого надо показать, что, во-первых, для любых $n \in \mathbb{N}$ $\frac{n^2}{n^2+4} \leqslant 1$ и, во-вторых, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{n^2}{n^2+4} > 1-\varepsilon$.

Выполнение первого условия вытекает из того, что $\frac{n^2}{n^2+4} < 1$. Покажем, что второе условие также выполняется. Решим неравенство $\frac{n^2}{n^2+4} > 1-\varepsilon$. При $0 < \varepsilon < 1$ получаем $n > \sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}}$. Итак, наше неравенство имеет решения, а поэтому $1-\varepsilon$ не является верхней гранью для $\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\}$, и, значит, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\} = 1$.

Аналогично доказывается, что $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\} = \frac{1}{5}$. ▶

Задание 2. Подмножества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$ ограничены. Докажите, что

$$\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}\,; \ \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}\,.$$

◀Введем обозначения: $\beta_x = \inf\{x\}$, $\beta_y = \inf\{y\}$. Из характеристических свойств точных нижних граней следует справедливость неравенств:

$$\left(\beta_x \leqslant x^* < \beta_x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ и } \left(\beta_y \leqslant y^* < \beta_y + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

для некоторых $x^* \in X$ и $y^* \in Y$, а также любого сколь угодно малого действительного $\varepsilon > 0$. Складывая неравенства одинакового смысла, получим:

$$\beta_x + \beta_y \leqslant x^* + y^* < \beta_x + \beta_y + \varepsilon.$$

Тогда $\inf\{x+y\} = \beta_x + \beta_y = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

Аналогично доказывается, что $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$. ►

Задание 3. Подмножества $X=\{x\}$ и $Y=\{y\}$ множества неотрицательных действительных чисел ограничены. Докажите, что

$$\inf\{x \cdot y\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}; \ \sup\{x \cdot y\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}.$$

◄Введем обозначения: $\beta_x = \inf\{x\}$, $\beta_y = \inf\{y\}$. Из характеристических свойств точных нижних граней следует справедливость неравенств: $(0 \leqslant \beta_x \leqslant x^* < \beta_x + b)$ и $(0 \leqslant \beta_y \leqslant y^* < \beta_y + b)$ для некоторых $x^* \in X$ и $y^* \in Y$, а также любого $b > 0$. Выберем $b > 0$ так, чтобы для сколь угодно малого действительного $\varepsilon > 0$ выполнялось равенство

$$b^2 + (\beta_x + \beta_y)\, b - \varepsilon = 0, \ b = \frac{-(\beta_x + \beta_y) + \sqrt{(\beta_x + \beta_y)^2 + 4\varepsilon}}{2}.$$

Перемножая неравенства одинакового смысла для неотрицательных чисел, получим:

$$0 \le \beta_x \cdot \beta_y \leqslant x^* \cdot y^* < \beta_x \cdot \beta_y + b^2 + (\beta_x + \beta_y)\, b = \beta_x \cdot \beta_y + \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует, что $\inf\{x \cdot y\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$.

Аналогично доказывается, что $\sup\{x \cdot y\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$. ►

Задание 4. Докажите, что множество

$$A = \left\{ \frac{n}{n+3}(2 + (-1)^n), \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

ограничено. Найдите точные грани множества. Достигаются или не достигаются эти грани?

◀Введем обозначения:

$$X = \left\{ \frac{n}{n+3}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \; Y = \{(2 + (-1)^n), \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, что каждое из этих множеств ограничено, так как

$$\left| \frac{n}{n+3} \right| = \frac{n}{n+3} < 1; \quad |2 + (-1)^n| = 2 + (-1)^n \leqslant 3.$$

Очевидно, что если $\frac{a}{b} < 1$ $(a > 0, \; b > 0)$, то для любого $c > 0$ $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$. Значит, наименьшим элементом множества X будет $\left.\frac{n}{n+3}\right|_{n=1} = \frac{1}{4}$ $\left(\frac{n}{n+3} < \frac{n+n_0}{n+3+n_0}\right.$ для любого $n_0 \in \mathbb{N}$), то есть $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{n}{n+3}\right\} = \frac{1}{4}$ и эта грань достигается при $n = 1$.

Очевидно, что $\inf Y = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \{2 + (-1)^n\} = 1$ и она достигается при всех $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, в том числе и при $n = 1$.

Значит, $\inf A = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ и эта грань достигается.

Покажем, что точной верхней гранью множества X будет число 1. Очевидно, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $\frac{n}{n+1} < 1$ (первое характеристическое свойство точной верхней грани выполняется). Возьмем любое сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Если $\varepsilon \geqslant 1$, то неравенство $\frac{n}{n+3} > 1 - \varepsilon$ справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Потребуем, чтобы $\frac{n}{n+3} > 1 - \varepsilon$. Заменяем последнее неравенство ему равносильными:

$$n > n(1-\varepsilon) + 3(1-\varepsilon); \;\; n\varepsilon > 3(1-\varepsilon); \;\; n > \frac{3(1-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Очевидно, что $n_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее последнему неравенству, существует. Значит, $\sup X = 1$ и эта грань не достигается.

Очевидно, что $\sup Y = 3$ и эта грань достигается при всех $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, в том числе и при $n = 2$.

Значит, $\sup A = 1 \cdot 3 = 3$ и эта грань не достигается.▶

Задание 5. Докажите, что множество $A = \left\{\frac{mn}{4m^2+n^2},\quad m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$ ограничено. Найдите точные грани множества A. Установите, достигаются или не достигаются эти точные грани.

◀ Докажем неравенство

$$\left|\frac{mn}{4m^2+n^2}\right| \leqslant \frac{1}{4}. \tag{2.10}$$

Неравенство (2.10) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{mn}{4m^2+n^2} \leqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{mn}{4m^2+n^2} \geqslant -\frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2+n^2 \geqslant 4mn, \\ -4mn \leqslant 4m^2+n^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-n)^2 \geqslant 0, \\ (2m+n)^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Последняя система, а значит, и неравенство (2.10) со всеми предыдущими системами выполняется для всех значений m и n, указанных в условии задачи.

Из неравенства (2.10) заключаем, что множество A ограничено, а значит, ограничено и сверху, и снизу. Покажем, что $\sup A = \frac{1}{4}$, а $\inf A = -\frac{1}{4}$ и эти грани достигаются. Если $m = 1$, $n = 2$, то

$$\left.\frac{mn}{4m^2+n^2}\right|_{m=1,\ n=2} = \frac{2}{4+4} = \frac{1}{4},$$

то есть $\sup A = \frac{1}{4}$ и точная верхняя грань достигается. Также если $m = -1$, $n = 2$, то

$$\left.\frac{mn}{4m^2+n^2}\right|_{m=-1,\ n=2} = \frac{-1 \cdot 2}{4+4} = -\frac{1}{4},$$

то есть $\inf A = -\frac{1}{4}$ и точная нижняя грань достигается.▶

Задание 6. Пусть $A \subset (0, +\infty)$ и для любых $n \in \mathbb{N}$ существует такое $a_n \in A$, что $a_n \leqslant \frac{1}{n}$. Доказать, что $\inf A = 0$.

◀ Покажем, что для $\beta = 0$ справедливы характеристические свойства точной нижней грани относительно множества A. Во-первых, для любых $a \in A$ будет $a < 0$. Во-вторых, задавшись любым $\varepsilon > 0$, найдем $a' \in A$, что $a' < 0 + \varepsilon$. Воспользуемся тем, что для любых $n \in \mathbb{N}$ существует такое $a_n \in A$, что $a_n \leqslant \frac{1}{n}$. Потребуем, чтобы $\frac{1}{n} > \varepsilon$. Тогда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Возьмем $n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – целая часть действительного числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда в качестве a' возьмем $a_n \leqslant \frac{1}{n}$, где $n > n_0$. При таком выборе второе характеристическое свойство также будет выполняться в рассматриваемом случае. Значит, $\sup A = 0$. ▶

Задание 7. Пусть X и Y – ограниченные подмножества $\mathbb{R}$ и $X \neq \varnothing$. Докажите, что $\sup X \leqslant \sup Y$, если для любого $x \in X$ существует такое $y \in Y$, что $x \leqslant y$.

◀Предположим, что $\sup X > \sup Y$. Введем обозначения: $\alpha = \sup X$, $\beta = \sup Y$. Тогда по второму характеристическому свойству точных верхних граней для любого $\varepsilon > 0$, в частности $\varepsilon = \alpha - \beta$, существует такое $x' \in X$, что $x' > \alpha - \varepsilon = \beta$. Но из условия задачи для x' существует такое $y' \in Y$, что $x' \leqslant y'$. Значит, $y' > \beta$. Получили, что β не есть $\sup Y$ – противоречие. Поэтому наше предположение о том, что $\sup X > \sup Y$, будет неверным, то есть справедливо неравенство $\sup X \leqslant \sup Y$. ▶

Задание 8. Докажите, что если непустые подмножества X и Y множества действительных чисел ограничены сверху, то их объединение $X \cup Y = A$ также ограниченное сверху множество и

$$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}.$$

◀ Введем обозначения: $\alpha = \sup X$, $\beta = \sup Y$. Пусть для определенности $\alpha > \beta$.

1. Для любого $x \in X$ $x \leqslant \alpha$, также и для любого $y \in Y$ $y \leqslant \beta < \alpha$. Но любой элемент $a \in A$ есть элемент или множества X, или множества Y, поэтому для любого $a \in A$ $a \leqslant \alpha$, то есть множество A ограничено сверху, а значит (свойство полноты множества действительных чисел) существует $\sup A$. Причем выполняется первое характеристическое свойство точной верхней грани: $\sup A = \alpha$.

2. Взяв любое $\varepsilon > 0$, можно найти элемент $a' \in A$, что $a' > \alpha - \varepsilon$, причем если $\varepsilon \leqslant \alpha - \beta$, то $a' = x' \in X$ (такой элемент $x' \in X$ существует, так как $\alpha = \sup X$ и правее β нет элементов множества Y, поэтому

$x' = a' \in A$). Значит, выполняется и второе характеристическое свойство для точной верхней грани: $\sup A = \alpha$.

Аналогично будет, если $\beta > \alpha$. Если же $\beta = \alpha$, то утверждение задачи очевидно.▶

Задание 9. Докажите, что если непустое множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, то множество

$$(-X) = \{x \in \mathbb{R} : \ (-x) \in X\}$$

ограничено сверху и справедливо равенство $\sup(-X) = -\inf X$.

◀Так как множество X ограничено снизу, то существует $\inf X = (-\alpha)$. По первому характеристическому свойству для точной нижней грани: для любых $(-x) \in X$ $-x \geqslant -\alpha$, $x \leqslant \alpha$, то есть для любых $x \in (-X)$ $x \leqslant \alpha$. Значит, множество $(-X)$ ограничено сверху. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует $(-x') \in X$ $(-x') > -\alpha + \varepsilon$, $x' < \alpha - \varepsilon$, $x' \in (-X)$. Доказано, что $\sup(-X) = \alpha = -(-\alpha) = -\inf X$. ▶

Задание 10. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ и X непустое ограниченное сверху множество, а

$$Y = \{ax : \ x \in X\},$$

где $a \in \mathbb{R}$, то при $a > 0$ множество Y ограничено сверху и $\sup Y = a \sup Y$; при $a < 0$ множество Y ограничено снизу и $\inf Y = a \sup X$; при $a = 0$ множество Y ограничено и $\inf Y = \sup Y = 0$.

◀Обозначим $\alpha = \sup X$. Рассмотрим сначала случай, когда $a > 0$. Запишем характеристические свойства точной верхней грани множества X и выводы из них.

1. $\forall x \in X$ $(\forall ax \in Y)$ $x \leqslant \alpha \Leftrightarrow ax \leqslant a\alpha$.

Значит, множество Y ограничено сверху.

2. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x' \in X$ $(\exists ax' \in Y)$ $x' > \alpha - \frac{\varepsilon}{\alpha} \Leftrightarrow ax' > a\alpha - \varepsilon$.

Из сказанного выше следует, что существует $\sup Y = a\alpha = a \sup X$. Утверждение задачи в случае $a > 0$ доказано.

Если $a < 0$, то:

1. $\forall x \in X$ $x \leqslant \alpha \Leftrightarrow ax \geqslant a\alpha$.

Значит, множество Y – ограничено снизу.

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X\ x' > \alpha - \frac{\varepsilon}{-a} \Leftrightarrow ax' < a\alpha + \varepsilon$.

Из сказанного выше следует, что существует $\inf Y = a\alpha = a \sup X$. Утверждение задачи доказано и для $a < 0$.

Если же $a = 0$, то все элементы множества Y также нулевые, а значит, множество Y ограничено и $\sup Y = \inf Y = 0$. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Выясните, какие из нижеследующих числовых множеств ограничены сверху, какие ограничены снизу, какие не ограничены. Найдите точные верхние и нижние грани для ограниченных множеств:

   1.1 множество чисел вида $\left\{\frac{n^3}{2n^3+1}\right\}$, где n пробегает множество натуральных чисел;

   1.2 множество чисел вида $\left\{\frac{n^3}{n^4+1}\right\}$, где n пробегает множество целых чисел;

   1.3 множество, состоящее из чисел вида $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ и чисел вида $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$, где n пробегает множество натуральных чисел;

   1.4 множество, состоящее из чисел вида $[(-1)^n+1]n^2+\frac{(-1)^n-1}{n}$, где n пробегает множество натуральных чисел;

   1.5 множество, состоящее из чисел вида $[1+(-1)^n]n+\frac{1-(-1)^n}{n}$, где n пробегает множество натуральных чисел.
2. Докажите, что множество $B = \left\{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{3}{2+(-1)^{n+1}}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено как сверху, так и снизу. Найдите точные грани множества и укажите, какие из них достигаются.
3. Докажите, что множество $A = \left\{\frac{6ab}{9a^2+b^2},\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0\right\}$ ограничено. Найдите точные грани множества A. Установите, достигаются или не достигаются эти точные грани.
4. Пусть X и Y – ограниченные снизу подмножества $\mathbb{R}$ и $X \neq \varnothing$. Докажите, что $\inf X \geqslant \inf Y$, если для любого $x \in X$ существует такое $y \in Y$, что $x \geqslant y$.

ЛЕКЦИЯ 3
Функции

3.1 Понятие функции, область определения, множество значений и график функции

Пусть даны два множества X и Y с элементами любой природы (числа, люди, дни недели и т.д.).

Определение 3.1. *Если каждому элементу множества $x \in X$ соответствует по некоторому закону (правилу) f единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана* ***функция*** *f со значениями $y = f(x)$ из множества Y.*

Множество X в этом случае называется **областью определения функции** и обозначается $D(f)$.

Множество же всех таких элементов $y \in Y$, каждый из которых при этом поставлен в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, называется **множеством значений функции** (областью изменения или областью значений функции) и обозначается $E(f)$.

Синонимом понятия «*функция*» является понятие «*отображение*». В рассматриваемом случае говорят об отображении множества X во множество Y.

Функцию (отображение) обозначают следующим образом: $f : X \to Y$, или $X \xrightarrow{f} Y$, или $y = f(x)$, $x \in X$, понимая при этом, что X – область определения функции f, а множество значений функции $E(f) \subset Y$. Иногда функцию задают с помощью «поточечного» правила: $x \mapsto f(x)$, $x \in X$.

Область значений функции $f : X \to Y$ иногда называют **образом** множества X при отображении f и обозначают $E(f) = f(X)$.

Если область определения и множество значений функции f есть подмножества множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, то f называют **действительной функцией действительного аргумента** $x \in X$.

Определение 3.2. *Множество всех точек (x, y) координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – декартовый квадрат $\mathbb{R}$), координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$, называется* ***графиком функции*** *f и обозначается Γ_f.*

3.2 Способы задания функции

Будем дальше рассматривать только действительные функции действительного аргумента. Задавая функцию $f : X \to \mathbb{R}$, будем понимать, что $X \subset \mathbb{R}$.

3.2.1 Аналитическое задание функции

Аналитический способ задания функции – это задание с помощью формулы. Формула – это алгоритм (программа) вычисления значений данной функции. При этом всегда под функцией, заданной некоторой формулой, понимается функция, определенная на множестве всех тех действительных чисел, для которых, во-первых, указанная формула имеет смысл и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только действительные числа, причем окончательный результат вычислений для данного числа x из области определения рассматриваемой функции является ее значением в точке x. Например, функция $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ имеет область определения, совпадающую со множеством решений неравенства $2x - x^2 \geqslant 0$, то есть равна отрезку $[0, 2]$.

Если функция задается только формулой $y = f(x)$, то под областью ее определения понимают множество $X \subset \mathbb{R}$, для всех элементов которого эта формула имеет смысл. В этом случае уместной является задача о нахождении допустимого множества $X \subset \mathbb{R}$, являющегося областью определения функции.

Отметим, что при таком определении действительные функции $f(x) = x$ и $f(x) = (\sqrt{x})^2$ имеют разные области определения: первая определена на множестве всех действительных чисел, а вторая – только на множестве всех неотрицательных действительных чисел.

Но, например, в физических и геометрических задачах область определения функции может и не совпадать с областью определения ее (функции) аналитического выражения. Так, площадь сферы находится по формуле $S = 4\pi r^2$ (r – радиус сферы). Область определения аналитического выражения есть вся числовая прямая $\mathbb{R}$, но $D(S) = \mathbb{R}_+$ (радиус сферы может принимать только положительные значения).

Замечание 3.1. В школьном курсе математики изучались так называемые **основные элементарные функции**, которые задаются аналитически следующим образом:

1. $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$ – степенная функция с натуральным показателем;
2. $y = x^m$ $(m \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ – степенная функция с целым показателем;
3. $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0)$ – степенная функция с действительным показателем;
4. $y = a^x$ $(0 < a \neq 1,\ x \in \mathbb{R})$ – показательная функция;
5. $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1,\ x > 0)$ – логарифмическая функция;
6. $y = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ – тригонометрическая функция синус;
7. $y = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ – тригонометрическая функция косинус;
8. $y = \operatorname{tg} x$ $\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}\right)$ – тригонометрическая функция тангенс;
9. $y = \operatorname{ctg} x$ $\left(x \in \left(\pi n, \pi + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}\right)$ – тригонометрическая функция котангенс;
10. $y = \arcsin x$ $(x \in [-1, 1])$ – обратная тригонометрическая функция арксинус;
11. $y = \arccos x$ $(x \in [-1, 1])$ – обратная тригонометрическая функция арккосинус;
12. $y = \operatorname{arctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$ – обратная тригонометрическая функция арктангенс;
13. $y = \operatorname{arcctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$ – обратная тригонометрическая функция арккотангенс.

Функция может быть задана и с помощью нескольких различных аналитических выражений (на разных подмножествах области определения – различные формулы). Например, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3; \ x \geqslant 0, \\ x + 3; \ x < 0. \end{cases}$

Еще примерами задания функции различными формулами на разных подмножествах области определения являются следующие функции:

1. $f(x) = [x]$ – целая часть x, $x \in \mathbb{R}$. Целой частью любого действительного числа называется самое большее целое число, не превосходящее данное число.

Например, $[-3,2] = -4$; $[3,2] = 3$.

Функция $f(x) = [x]$ определена на всей числовой прямой и на каждом из полуинтервалов $[k, k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}$, будет иметь вид $f(x) = k$. Ее график показан на рисунке 3.1.

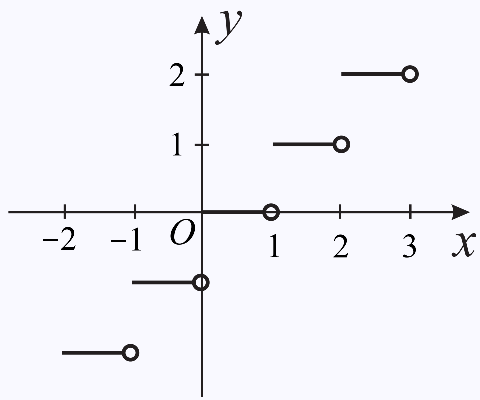


Рисунок 3.1 – График функции $y = [x]$

2. Функция $f(x) = x - [x]$, или $f(x) = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, называется дробной частью x.

Например, $\{-3,2\} = -3,2 - (-4) = 0,8$; $\{3,2\} = 0,2$.

На каждом из полуинтервалов $[k, k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}$, функция имеет вид $f(x) = x - k$. Ее график показан на рисунке 3.2.

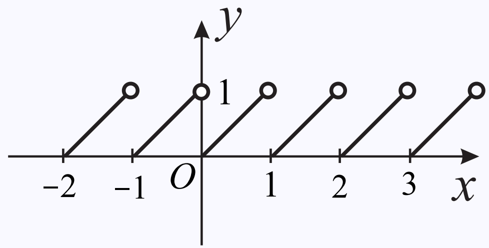


Рисунок 3.2 – График функции $y = \{x\}$

Пример 3.1. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = 2\left(\sqrt{\log_{|3-\frac{4}{x}|} 5 + 1}\right)^{-1}.$$

◀Область определения функции совпадает со множеством решения неравенства $\log_{|3-\frac{4}{x}|} 5 + 1 > 0$.

$$\log_{|3-\frac{4}{x}|} 5 > -1 \Leftrightarrow \log_{|3-\frac{4}{x}|} 5 > \log_{|3-\frac{4}{x}|} \frac{1}{|3-\frac{4}{x}|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |3-\frac{4}{x}| > 1, \\ 5 > \frac{1}{|3-\frac{4}{x}|}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < |3-\frac{4}{x}| < 1, \\ 5 < \frac{1}{|3-\frac{4}{x}|}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3-\frac{4}{x}| > 1, \\ \begin{cases} |3-\frac{4}{x}| < \frac{1}{5}, \\ 3-\frac{4}{x} \neq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-\frac{4}{x} > 1, \\ 3-\frac{4}{x} < -1, \\ \begin{cases} 3-\frac{4}{x} < \frac{1}{5}, \\ 3-\frac{4}{x} > -\frac{1}{5}, \\ x \neq \frac{4}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x-4}{x} > 0, \\ \frac{4x-4}{x} < 0, \\ \begin{cases} \frac{14x-20}{5x} < 0, \\ \frac{16x-20}{5x} > 0, \\ x \neq \frac{4}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{7}\right) \cup (2, +\infty)$. ►

Замечание 3.2. Аналитическое задание функции позволяет находить значения функции для соответствующих значений аргумента x, а также и все множество значений функции.

Пример 3.2. Найдите множество значений функции $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Множество значений $E(f)$ функции совпадает с множеством значений параметра a, при которых уравнение

$$\frac{2x-4}{x^2+2x+2} = a \tag{3.1}$$

имеет решения. Заменяем уравнение (3.1) равносильными ему уравнениями

$$a(x^2+2x+2) = 2x-4;\ ax^2+2(a-1)x+2a+4=0.$$

Если $a = 0$, то $x = 2$ – решение уравнения (3.1). При $a \neq 0$ последнее уравнение будет квадратным. Находим $\frac{D}{4} = -a^2 - 6a + 1$. Если $\frac{D}{4} \geqslant 0$, то последнее уравнение имеет решения. Получим неравенство $-a^2 - 6a + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + 6a - 1 \leqslant 0$. $\frac{D}{4} = 10$, $a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}$.

$E(f) = \left[-3-\sqrt{10}, -3+\sqrt{10}\right]$. ▶

3.2.2 Табличный способ задания функции

Задается таблица выбранного конечного числа значений независимой переменной (аргумента) и соответствующих им значений функции. Примером такой таблицы может, например, служить обычный календарь на определенный месяц определенного года. Здесь в качестве значений независимой переменной будут числа указанного месяца, а значения зависимой переменной (функции) – соответствующие числам месяца дни недели (понедельник, ..., воскресенье). Табличными заданиями функции являются всевозможные графики дежурств, графики расписания движений поездов (в качестве значений аргумента указываются определенные моменты времени, а значений функции – местоположение поезда в указанные моменты времени) и т.д. Функция-таблица позволяет приближенно вычислять и другие значения функции (не содержащиеся в таблице), при этом часто применяется метод интерполяции (линейной – между соседними табличными значениями наша функция заменяется некоторой линейной функцией, квадратичной – замена квадратичной функцией). Табличный способ задания функции широко используется в математической статистике.

Примыкающим к табличному способу задания функций является использование при различных социологических исследованиях (показа их результатов) диаграмм (прямоугольных, секторных и т.д.).

3.2.3 Графический способ задания функции

Такой способ часто используется при физических исследованиях (показывается график какой-то функциональной зависимости с помощью осциллографа). На практике используются приборы, которые автоматически записывают на бумаге в форме графика изменения исследуемых величин с течением времени (термографы, барографы и т.д.). Конечно, такие задания функций носят приблизительный характер (линии графика функции имеют определенную толщину), но на практике реально мы оперируем приближенными значениями величин. Графики функций позволяют (с учетом некоторых дополнительных данных) наглядно определять некоторые свойства функций.

Часто эффективно используются графические методы при решении уравнений, неравенств, систем, особенно с параметрами.

Пример 3.3. Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение

$$|3 - x - a| + 1 = |x - 3| \tag{3.2}$$

не имеет решений.

◄В системе координат xOy строим графики функций

$$y = |x - 3| \text{ и } y = |x - (3 - a)| + 1.$$

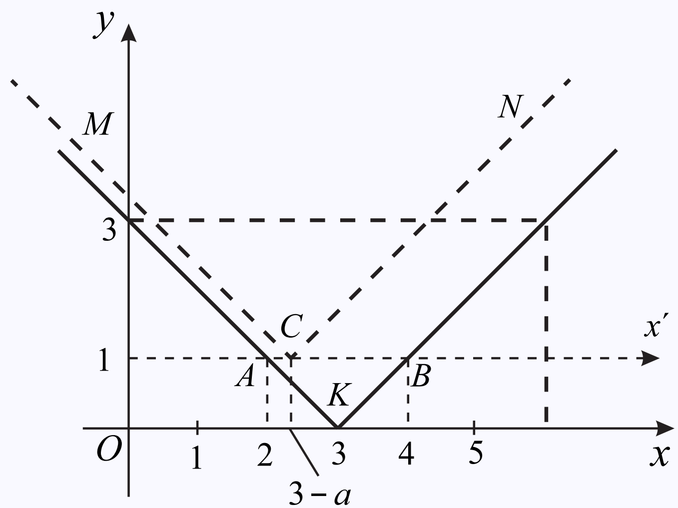


Рисунок 3.3

Объединение лучей KA и KB есть график первой функции; график второй функции – фигура переменная, одно из ее положений показано на рисунке 3.3 (объединение лучей CM и CN).

Из рисунка видно, что уравнение (3.2) не имеет решений, если точка C находится между точками $A(2,1)$ и $B(4,1)$, то есть множество искомых значений параметра совпадает со множеством решений неравенства $2 < 3 - a < 4$. Таким образом, $a \in (-1, 1)$. ▶

3.3 Сложная функция

Определение 3.3. *Пусть $y = f(u)$, $u \in U$, в свою очередь $u = \varphi(x)$, $x \in X$, причем $E(\varphi) \subset U$. Тогда говорят, что на множестве X задана* ***сложная функция*** *$y = f(\varphi(x))$, или, иначе,* ***композиция*** *$(f \circ \varphi)(x)$ функций φ и f.*

Например, функция $y = \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$, будет сложной. Ее (согласно сказанному выше) можно задать следующим образом: $y = \sin u$, $U = \mathbb{R}$; $u = x^2$, $X = \mathbb{R}$; $E(x^2) = [0, +\infty) \subset U = \mathbb{R}$.

Но если взять функцию $y = \ln \cos x$, то

$$y = \ln u,\ U = (0, +\infty);\quad u = \cos x,\ X = \mathbb{R};\quad E(\cos x) = [-1, 1] \not\subset U = (0, +\infty).$$

Значит, функция $y = \ln \cos x$ не является сложной на $X = \mathbb{R}$, а будет таковой на любом таком подмножестве $X_1 \subset X$, что для любых $x \in X_1$ $E(\cos x) \subset U = (0, +\infty)$.

Рассмотрим тогда так называемое сужение функции $u = \cos x$, $D(\cos x) = \mathbb{R}$, для которого

$$\cos x > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

то есть

$$X_1 \subset \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Сложную функцию $y = f(\varphi(x))$, $x \in X$, (функцию f от функции φ) называют также суперпозицией двух функций, причем функцию f называют **внешней**, а φ – **внутренней**.

Можно рассматривать композицию любого конечного числа функций:

$$y = (f \circ \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \ldots \varphi_1)(x),\ \forall \varphi_i\ (i = \overline{1, n-1})\ \ E(\varphi_i) \subset D(\varphi_{i+1}),\ E(\varphi_n) \subset D(f).$$

3.4 Монотонные функции

Определение 3.4. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***возрастающей*** (***убывающей, неубывающей, невозрастающей***) *на некотором промежутке $I \subset X$, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2),\ f(x_1) \leqslant f(x_2),\ f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Если функция возрастает (убывает) на промежутке I, то ее называют ***строго монотонной*** *на промежутке I.*

Пример 3.4. Пользуясь определением, исследуйте на монотонность функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

◀Возьмем любые $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, и оценим

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 2a(x_1 - x_2)\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{b}{2a}\right).$$

Если $a > 0$ и $-\frac{b}{2a} < x_1 < x_2$, то $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Значит, на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ функция возрастает, а на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ – убывает. Для $a < 0$ рассуждения аналогичные.▶

Замечание 3.3. Исследование основных элементарных функций (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции) на монотонность подробно рассмотрено в [3].

3.5 Ограниченные и неограниченные функции

Определение 3.5. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***ограниченной****, если множество ее значений $E(f)$ ограничено.*

Если $E(f)$ ограничено сверху (снизу), то и f называется ***ограниченной сверху*** *(****снизу****).*

В явном виде ограниченность функции означает, что

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} \;\; (m \leqslant M) \forall x \in X \;\; m \leqslant f(x) \leqslant M$$

или

$$\exists\, C \geqslant 0 \;\; \forall x \in X \;\; |f(x)| \leqslant C.$$

При этом числа M и m называются соответственно **верхней** и **нижней гранями** функции f на X (далее – гранями функции), а наименьшая (наибольшая) из всех верхних граней (нижних граней) называется **точной верхней** (**нижней**) **гранью** и обозначается: $\sup\limits_{x \in X}\{f(x)\}$ $\left(\inf\limits_{x \in X}\{f(x)\}\right)$.

Замечание 3.4. Аналогично (как и для ограниченных множеств) можно рассмотреть отрицания определений ограниченности функции сверху, снизу и просто ограниченности, а также два характеристических свойства для точных граней.

Пример 3.5. Функцию $f(x) = \log_2(2x^2 - x)$ исследуйте на ограниченность сверху и снизу на промежутке $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$. В случае ограниченности сверху (снизу) найти точную верхнюю (нижнюю) грань.

◄Находим допустимое множество, являющееся областью определения функции f:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right); \;\; \left(\frac{1}{2}, 2\right] \subset D(f).$$

На промежутке $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$ функция $u = g(x) = 2x^2 - x$ возрастает, и $E(g) = (0, 6]$. Функция $\varphi(u) = \log_2 u$ также возрастает на $(0, 6]$, значит, и композиция этих функций $f(x) = \varphi(g(x)) = \log_2(2x^2 - x)$ тоже возрастает на промежутке $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$ и будет ограничена сверху: $\sup\limits_{x\in\left(\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = \log_2 6$.

Покажем, что функция f на указанном промежутке будет неограниченной снизу ($\forall\, m \in \mathbb{R}\ \exists\, x' \in \left(\frac{1}{2}, 2\right]$ $f(x') < m \Leftrightarrow -f(x') > -m$).

Возьмем любое действительное число m. Если $m \geqslant 0$, то для $x' \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ неравенство $f(x') < m$ выполняется ($f(x') < 0$). Пусть m – любое отрицательное действительное число. Оценим $(-f(x))$ снизу:

$$-\log_2(2x^2 - x) = -\log_2\left(x \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = -\log_2 x - \log_2 2 - \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Возьмем промежуток $\left(\frac{1}{2}, 1\right] \subset \left(\frac{1}{2}, 2\right]$, тогда

$$-\log_2(2x^2 - x) \geqslant -\log_2 1 - 1 - \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -1 - \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Потребуем, чтобы

$$-1 - \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) > -m \Leftrightarrow -\log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1 - m \Leftrightarrow$$

$$\log_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^{-1} > \log_2 2^{1-m} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-1} > 2^{1-m} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} < 2^{m-1} \Leftrightarrow \quad x < 0,5 + 2^{m-1} < 1.$$

Искомое число $x' \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2^{m-1}\right)$. ►

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятия функции, ее области определения, множества значений и графика функции.
2. Приведите различные примеры способов задания функции.
3. Дайте определение целой части числа и постройте график функции $y = [x]$.
4. Дайте определение дробной части числа и постройте график функции $y = \{x\}$.
5. Дайте понятие сложной функции (композиции функций).
6. Сформулируйте определение возрастающей (убывающей, невозрастающей, неубывающей) функции. Приведите примеры.
7. Сформулируйте определения ограниченных сверху, ограниченных снизу, ограниченных функций. Приведите примеры.
8. Дайте понятия точных верхних граней функции. Приведите примеры.
9. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Функции

Задание 1. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \sqrt{\cos\left|\frac{1}{x}\right|}.$$

◀Область определения функции f совпадает со множеством решений неравенства

$$\cos\left|\frac{1}{x}\right| \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

При $n = 0$ получим:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |x| \geqslant \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{2}{\pi}, \\ x \leqslant -\frac{2}{\pi}. \end{array}\right.$$

Если же $n \in \mathbb{N}$, то неравенство (3.3) равносильно системам:

$$\left\{\begin{array}{l} |x| \leqslant \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \\ |x| \geqslant \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \\ x \leqslant -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \\ x \geqslant \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \\ x \leqslant -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$D(f) = \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{2}{\pi}, \\ x \leqslant -\frac{2}{\pi}; \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \\ -\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}; \end{array}\right. , \text{ где } n \in \mathbb{N}. \; ▶$$

Задание 2. Найдите множество значений функции

$$f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3, \ x \in \mathbb{R}.$$

◀Множество значений функции f совпадает со множеством значений параметра a, при которых уравнение $4^x - 2^{x+2} + 3 = a$ имеет решения. Для указанного уравнения вводим подстановку $y = 2^x$, получим:

$$y^2 - 4y + 3 - a = 0. \tag{3.4}$$

Для уравнения (3.4) будем искать множество действительных значений параметра a, при которых уравнение (3.4) имеет хотя бы одно положительное решение. Воспользуемся графическим методом. Левая часть уравнения (3.4) есть квадратичная функция $z = y^2 - 4y + 3 - a$, график которой – парабола (в общем случае $z = a_1 y^2 + a_2 y + c$).

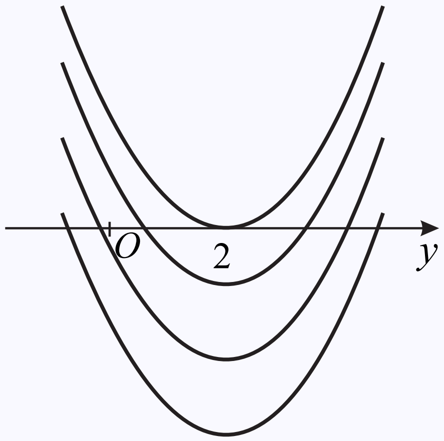


Рисунок 3.4

Так как в нашем случае абсцисса вершины параболы

$$-\frac{a_2}{2a_1} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2 > 0,$$

то уравнение (3.4) имеет хотя бы один положительный корень при расположениях графика рассматриваемой функции относительно оси абсцисс, показанных на рисунке 3.4.

Из рисунка 3.4 видно, что множество искомых значений параметра a, то есть множество значений функции f, совпадает со множеством решений неравенства $\frac{D}{4} = 4 - 3 + a \geqslant 0$, $a \geqslant -1$. Таким образом, $E(f) = [-1, +\infty)$. ▶

Задание 3. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \cos 2x - \sin x + 2,\;\; x \in \mathbb{R}.$$

◀Множество значений функции f совпадает со множеством значений параметра a, при которых уравнение

$$\cos 2x - \sin x + 2 = a \tag{3.5}$$

имеет решения. Преобразуем уравнение (3.5):

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x + 2 = a;\;\; 2\sin^2 x + \sin x + a - 3 = 0.$$

Введем подстановку $\sin x = t$, получим:

$$\begin{cases} 2t^2 + t + a - 3 = 0, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Для нахождения множества значений параметра a, при которых система (3.6) имеет решения, воспользуемся графическим методом (рисунок 3.5). Учтем, что абсцисса вершины параболы $g(t) = 2t^2 + t + a - 3$

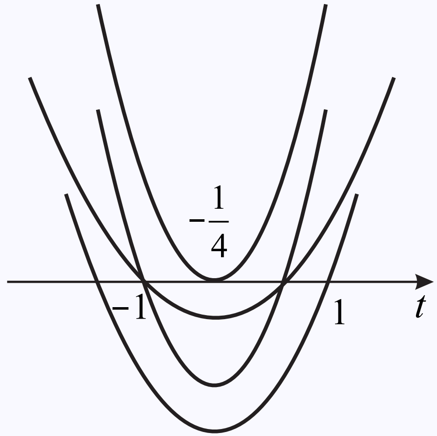


Рисунок 3.5

будет равна $\left(-\frac{1}{4}\right)$. Если $D = 25 - 8a = 0$, то $a = \frac{25}{8}$ – одно из искомых значений параметра. Множество остальных искомых значений параметра a совпадает с разностью двух множеств – множества решений неравенства $25 - 8a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{25}{8}$, и множества решений системы

$$\begin{cases} 25 - 8a > 0, \\ g(1) < 0, \\ g(-1) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{25}{8}, \\ a < 0, \\ a - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a < 0.$$

Таким образом, $E(f) = \left[0; \frac{25}{8}\right]$. ▶

Замечание 3.5. Свойства основных элементарных функций (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции) подробно исследованы в [3].

Как уже отмечалось на лекции (смотри замечание 3.3), исследование монотонности основных элементарных функций подробно рассмотрено в [3]. Но при исследовании функций на возрастание и убывание полезно иметь в виду следующие утверждения, которые легко доказываются с использованием определений возрастающей или убывающей функций.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток числовой прямой, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$.

1. Если функции f и g возрастают (убывают) на I, то и функция $f + g$ возрастает (убывает) на I.

2. Если функции f и g возрастают на I и принимают на I положительные значения, то и функция $f \cdot g$ также возрастает на I.

3. Если функция f возрастает на I, то функция $-f$ убывает на I.

4. Если функция f возрастает на I и для любых $x \in I$ $f(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{f}$ убывает на I.

5. Если функция $x = f(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, возрастает на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $y = F(x)$, $x \in [f(\alpha), f(\beta)]$, возрастает на отрезке $[f(\alpha), f(\beta)]$, то сложная функция $y = F(f(t))$ возрастает на отрезке $[\alpha, \beta]$.

6. Если функция $x = f(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, убывает на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $y = F(x)$, $x \in [f(\alpha), f(\beta)]$, убывает на отрезке$[f(\alpha), f(\beta)]$, то сложная функция $y = F(f(t))$ возрастает на отрезке $[\alpha, \beta]$.

7. Если функция $x = f(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, возрастает на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $y = F(x)$, $x \in [f(\alpha), f(\beta)]$, убывает на отрезке $[f(\alpha), f(\beta)]$, то сложная функция $y = F(f(t))$ убывает на отрезке $[\alpha, \beta]$.

8. Если функция $x = f(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, убывает на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $y = F(x)$, $x \in [f(\alpha), f(\beta)]$, возрастает на отрезке $[f(\alpha), f(\beta)]$, то сложная функция $y = F(f(t))$ убывает на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Задание 4. Исследуйте на монотонность функцию $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ $y = \operatorname{arctg} z$ – возрастающая функция на $\mathbb{R}$, а функция $z = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ возрастает при $x > 1$ и убывает при $x < 1$, то функция $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x + 3)$ возрастает при $x > 1$ и убывает при $x < 1$. ▶

Задание 5. Исследуйте на монотонность функцию $f(x) = (x^2 + 4x + 6)\ln(x^2 + 4x + 6)$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Функция $y = z \ln z$ при $z > 1$ является произведением двух возрастающих положительных функций и поэтому возрастает. Функция $z = x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$ возрастает при $x > -2$ и убывает при $x < -2$, а ее значения больше, чем 1. Поэтому функция $f(x) = (x^2 + 4x + 6)\ln(x^2 + 4x + 6)$ возрастает при $x > -2$ и убывает при $x < -2$. ▶

Задание 6. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$, ограничена на $\mathbb{R}$.

◀Очевидно, что для любых $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$, то есть функция ограничена снизу. Покажем теперь, что функция f ограничена и сверху. Из неравенства $(1 - x^2)^2 \geqslant 0$ следует, что $1 + x^4 \geqslant 2x^2$ или $\frac{x^2}{1+x^4} \geqslant \frac{1}{2}$. Так как $1 + x^4 \geqslant 1$, то

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{x^2}{1+x^4} + 1 \leqslant \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Итак, $0 < \frac{1+x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{3}{2}$. ▶

Задание 7. Докажите, что функция $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [0, +\infty)$, ограничена на промежутке $[0, +\infty)$ и найдите точные нижнюю и верхнюю грани.

◀Очевидно, что при $x \geqslant 0$ значения функции f удовлетворяют неравенству $0 \leqslant f(x) < 1$, то есть функция ограничена. Так как $f(0) = 0$, то $\inf\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x) = 0$.

Покажем, что $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x) = 1$. Во-первых,

$$\forall x \geqslant 0 \ f(x) = 1 - \frac{1}{1+x} < 1.$$

Во-вторых, для любого $0 < \varepsilon < 1$ среди значений $x \geqslant 0$ найдутся такие, при которых $1 - \frac{1}{1+x} > 1 - \varepsilon$, а именно значения $x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Следовательно, при значениях x, удовлетворяющих последнему неравенству $f(x) > 1 - \varepsilon$ (с учетом того, что для $x \in [0, +\infty)$ $f(x) \geqslant 0$ выполнение второго характеристического свойства точной верхней грани в случае $\varepsilon \geqslant 1$ очевидно).

Значит, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x) = 1$, причем эта грань не принадлежит множеству значений функции, то есть функция не достигает точной верхней грани.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции $f : X \to \mathbb{R}$, если:

1.1 $f(x) = \frac{3x-1}{2x^2-3x-1}$;

1.2 $f(x) = \lg(2 - x - x^2)$;

1.3 $f(x) = \frac{\lg(2-x-x^2)}{x-4}$;

1.4 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;

1.5 $f(x) = \arccos \frac{2x}{x^2+3}$;

1.6 $f(x) = \arccos(2 \sin x)$;

1.7 $f(x) = \arccos \frac{2-x}{1+x^2} + \lg\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$;

1.8 $f(x) = \arccos(3 + 2^{-x})$.

2. Найдите множество значений функции: $f(x) = 9^{x-1} - 4 \cdot 3^x + 11$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Исследуйте функции на монотонность:

3.1 $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$;

3.2 $f(x) = x^3 + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$;

3.3 $f(x) = \lg^3 x + x^5$, $x \in (0, +\infty)$;

3.4 $f(x) = x^5 \lg^7 x$, $x \geqslant 1$;

3.5 $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$, $x \in \mathbb{R}$;

3.6 $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbb{R}$;

3.7 $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 4x + 8)$, $x \in \mathbb{R}$;

3.8 $f(x) = \lg(x^2 - 6x + 10)$, $x \in \mathbb{R}$;

3.9 $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$;

3.10 $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Выясните, какие из нижеследующих функций ограничены, а какие не ограничены на указанных промежутках. Для ограниченных сверху (снизу) функций найдите точную верхнюю (нижнюю) грань:

4.1 $f(x) = x^2 + 2$, $x \in [-1, 3]$;

4.2 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in (-\infty, \infty)$;

4.3 $f(x) = \lg(x^2 - 4x + 3)$, $x \in (3, +\infty)$;

4.4 $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $x \in (-2, 2)$;

4.5 $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

4.6 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$;

4.7 $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ЛЕКЦИЯ 4
Специальные классы функций

4.1 Четные и нечетные функции

Определение 4.1. *Функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *называется* ***четной*** (***нечетной***), *если:*
1) $\forall x \in X$ $(-x) \in X)$ (*область определения симметрична относительно начала координат*);
2) $\forall x \in X$ $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Если не выполняется хотя бы одно из условий 1 или 2 определения 4.1, то говорят, что функция не является четной и не является нечетной.

Примеры четных функций: $y = x^{2n}$ $(n \in \mathbb{Z})$; $y = \cos x$; $y = |x|$; $y = const$.

Примеры нечетных функций: $y = x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$; $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$.

Функция $y = 0$ является одновременно четной и нечетной.

Справедливы следующие теоремы (доказательства следуют из определения четной (нечетной) функции).

Теорема 4.1. *Сумма двух четных (нечетных) функций является четной (нечетной) функцией.*

Теорема 4.2. *Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.*

Теорема 4.3. *Произведение четной функции на нечетную является нечетной функцией.*

Теорема 4.4. *Если* $f : U \to \mathbb{R}$, *а функция* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *четная, причем* $E(\varphi) \subset U$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *также будет четной.*

Теорема 4.5. *Если функция* $f : U \to \mathbb{R}$ *четная (нечетная), а функция* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *нечетная, причем* $E(\varphi) \subset U$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *также будет четной (нечетной).*

◀Так как функция φ нечетная, то область определения функции φ, а также совпадающая с ней область определения сложной функции будут симметричны относительно начала координат. Кроме того, для любых $x \in X$ $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. А тогда, если функция f четная (нечетная), то $f(-\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ $(f(-\varphi(x)) = -f(\varphi(x))$. ▶

Теорема 4.6. *Любая функция, область определения которой симметрична относительно начала координат, представима, и причем единственным способом, в виде суммы четной и нечетной функций, имеющих ту же область определения, что и сама исходная функция.*

◀Пусть область определения функции $f : X \to \mathbb{R}$ симметрична относительно начала координат $(\forall x \in X \ (-x) \in X)$. Справедливо представление

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \varphi(x) + \psi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ и $\psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Очевидно, что $D(\varphi) = D(\psi) = D(f) = X$ – симметричны относительно начала координат. Кроме того, для любых $x \in D(\varphi) = D(\psi)$

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \varphi(x),$$

$$\psi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\psi(x).$$

Значит, функция φ – четная, а функция ψ – нечетная.▶

Теорема 4.7. *Функция будет четной (нечетной) тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно оси ординат (начала координат).*

◀Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ четная (нечетная). Возьмем любое $x \in X$. Тогда

$$f(-x) = f(x) \ (f(-x) = -f(x)).$$

Но точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(x))$ ($(x, f(x))$ и $(-x, -f(x))$) графика Γ_f функции f симметричны относительно оси Oy (начала координат). Значит, график Γ_f симметричен относительно оси Oy (начала координат). Необходимое условие критерия доказано.

Если график Γ_f симметричен относительно оси Oy (начала координат), то область определения X функции f симметрична относительно начала координат. Кроме того $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$), так как точка $(x, f(x))$ симметрична относительно оси Oy точке $(-x, f(x)) = (-x, f(-x))$ (точка $(x, f(x))$ симметрична относительно начала координат точке $(-x, -f(x)) = (-x, f(-x))$).▶

4.2 Периодические функции

Определение 4.2. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***периодической****, если существует такое действительное число $T \neq 0$, что:*

1) $\forall x \in X \ \ x \pm T \in X$;
2) $\forall x \in X \ \ f(x + T) = f(x)$.

Число T, указанное в определении, называется **периодом** функции.

Определение 4.3. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***непериодической****, если для любого действительного числа $T \neq 0$:*

или $\exists\, x' \in X \ \ x' + T \notin X$,
или $\exists\, x'' \in X \ \ x'' - T \notin X$,
или $\exists\, x_1 \in X \ \ f(x_1 + T) \neq f(x_1)$.

Определение 4.4. *Наименьший из положительных периодов функции (если он существует) называется* ***основным*** *(****главным****)* ***периодом*** *этой функции.*

Пример 4.1. Доказать, что функция $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, является периодической, а ее основной период есть 2π.

◀Возьмем любое действительное число $T \neq 0$, зафиксируем его. Если T – период функции f, то (определение 4.2) для любых $x \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство $f(x+T) = f(x)$, тогда это равенство будет выполняться и для $x = 0$. В нашем случае $\cos 0 = \cos T$, $\cos T = 1$, $T = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Значит, если функция периодическая, то любой из ее периодов может быть только элементом множества $A = \{2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Среди элементов множества A самым малым положительным числом будет $T = 2\pi$. Очевидно, что $T = 2\pi$ и будет основным периодом. Это следует из определения $\cos x$ или $\cos(x+2\pi)$ как абсциссы образа точки $(1, 0)$ при повороте последней на угол в x или в $x + 2\pi$ радиан соответственно, вокруг начала координат. Точки $(\cos x, \sin x)$ и $P(\cos(x+2\pi), \sin(x+2\pi))$ единичной окружности совпадают, поэтому их абсциссы (косинусы) равны. Дополнительно можно показать (аналогичные рассуждения), что множество всех периодов функции $f(x) = \cos x$ совпадает со множеством A. ▶

Аналогично доказываются следующие утверждения:

1. Функция $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, имеет основной период 2π и множество всех периодов $A = \{2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

2. Функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x,\ \ x \in X_1 = \left\{x \in \mathbb{R}:\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}\right\},\quad f(x) = \operatorname{ctg} x,\ \ x \in X_2 = \{x \in \mathbb{R}:\ \ x \neq \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}\},$$

имеют основной период π и множество всех периодов $A = \{\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

3. Функция $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$, где C – любая действительная константа, является периодической. Периодом функции будет любое действительное число не равное нулю. Основного периода функция не имеет.

Замечание 4.1. Функция $f(x) = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, периодическая. Основной период ее $T = 1$, так как дробные части действительных чисел, отличающихся на единицу, равны между собой и на каждом из полуинтервалов $[k; k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = x - k$ – линейная возрастающая функция, а поэтому не существует такого $T \in (0, 1)$, чтобы $f(x) = f(x+T)$. Множество всех периодов функции $f(x) = \{x\}$ есть множество целых чисел, отличных от нуля.

Теорема 4.8. *Если функции $f : X_1 \to \mathbb{R}$ и $g : X_2 \to \mathbb{R}$ имеют один и тот же период $T \neq 0$ и $D = X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то сумма, разность, произведение и частное функций есть функции периодические с периодом T (для частного $g(x) \neq 0$ на D).*

◀Для любых $x \in D$ $x \pm T \in D$ (следует из периодичности функций f и g). Кроме того, для любых $x \in D$ будет

$$\mu(x) = f(x) \pm g(x) = f(x+T) \pm g(x+T) = \mu(x+T).$$

Утверждение доказано для суммы и разности. Аналогично доказываются утверждения для произведения и частного.▶

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ и $E(\varphi) \subset U$.

Теорема 4.9. *Если функция φ периодическая функция с периодом $T \neq 0$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$, $x \in X$, также периодическая с периодом T.*

◀ Для любых $x \in X$ $x \pm T \in X$ (следует из периодичности функции φ). Кроме того, для любых $x \in X$ $f(\varphi(x+T)) = f(\varphi(x))$. ▶

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $\varphi = ax + b$, $x \in X$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $E(\varphi) \subset U$.

Теорема 4.10. *Если функция f – периодическая с периодом $T \neq 0$, то функция $y = f(ax+b)$ периодическая с периодом $\frac{T}{|a|}$.*

◀Доказательство теоремы следует из определения 4.2.▶

Теорема 4.11. *Если функции $f : X_1 \to \mathbb{R}$ и $g : X_2 \to \mathbb{R}$ периодические с периодами соответственно $T_f > 0$ и $T_g > 0$, периоды их соизмеримы (существуют такие n_f, $n_g \in \mathbb{N}$, что $n_f \cdot T_f = n_g \cdot T_g = T$), а $X_1 \cap X_2 = D \neq \varnothing$, то функция $\mu(x) = f(x) \pm g(x)$, $x \in D$, периодическая с периодом $T \neq 0$.*

◀Пусть T – наименьшее общее кратное чисел T_f и T_g, тогда для любых $x \in D$

$$\mu(x) = f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T) = \mu(x+T).$$

Кроме того, для любых $x \in D$ $x \pm T \in D = D(\mu)$. ▶

Пример 4.2. Исследуйте функцию $y = \sin x + \sqrt{5 - 2\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, на периодичность.

◀Функция будет периодической, и ее период $T = 2\pi$, так как функция $\mu(x) = \sqrt{5 - 2\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, есть сложная функция вида $f(\varphi(x)) = \sqrt{\varphi(x)}$ где $\varphi(x) = 5 - 2\cos x$ – периодическая функция с периодом $T_\varphi = 2\pi$ (период функции $y = \cos x$ – $T_{\cos x} = 2\pi$, период функции $y = 2$ – $T_2 = 2\pi$, поэтому период их произведения $T_{2 \cdot \cos x} = 2\pi$; период функции $y = 5$ – $T_5 = 2\pi$, поэтому период разности функций $T_{5-2\cos x} = 2\pi = T_\varphi$), поэтому сложная функция – периодическая и ее период $T_\mu = 2\pi$, а функция $y = \sin x + \mu(x)$ как сумма двух периодических функций (период каждого слагаемого 2π) будет функцией периодической с периодом 2π. ▶

Пример 4.3. Докажите, что если функция $\mu(x) = \{x\} + \cos \pi b x$, $x \in \mathbb{R}$, периодическая, то b – число рациональное.

◀ $f(x) = \{x\}$ – функция периодическая с множеством периодов $A_f = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$; $g(x) = \cos \pi b x$ – функция периодическая с периодом $T_g = \frac{2\pi}{\pi b} = \frac{2}{b}$. Считаем, что $b > 0$, в противном случае (из-за четности функции g) можно в качестве b взять $(-b)$. Основной период функции f $T_f = 1 > 0$, а основной период функции g $T_g = \frac{2}{b}$. Тогда множество периодов функции f есть $A_f = \{1 \cdot n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$; а функции g $A_g = \{\frac{2}{b} \cdot m\}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.

Если функция μ – периодическая, то существуют такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что $n = \frac{2}{b} m \Leftrightarrow b = \frac{2m}{n} \in \mathbb{Q}$. ▶

Пример 4.4. Докажите, что функция $f(x) = \cos \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, непериодическая.

◀Возьмем любое $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, зафиксируем его. В качестве x', указанного в определении 4.2, возьмем $x' = -T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Однако $x' + T = (-T) + T = 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Значит, функция f – непериодическая.▶

Пример 4.5. Докажите, что функция $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, непериодическая.

◀Возьмем любое $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Предположим, что функция f – периодическая. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x+T) = f(x)$, то есть

$$\sin\sqrt{|x+T|} = \sin\sqrt{|x|}.$$

Возьмем $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi^2$. Получим систему:

$$\begin{cases} \sin\sqrt{|T|} = 0, \\ \sin\sqrt{|\pi^2+T|} = \sin\sqrt{\pi^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{|T|} = \pi k, \ k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{|\pi^2+T|} = \pi n, \ n \in \mathbb{N}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |T| = \pi^2 k^2, \\ |\pi^2+T| = \pi^2 n^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = \pm\pi^2 k^2, \\ |\pi^2 \pm \pi^2 k^2| = \pi^2 n^2. \end{cases}$$

Тогда $|1 \pm k^2| = n^2$, $k^2 \pm 1 = n^2$.

Уравнение $k^2 + 1 = n^2$ для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ решений не имеет, а уравнение $k^2 - 1 = n^2$ имеет единственное решение $n = 0$ и $k = 1$. Поэтому из уравнения $|\pi^2+T| = \pi^2 n^2$ получим, что $|\pi^2+T| = 0$, $T = -\pi^2$. Значит, $T = -\pi^2$ – единственно возможный период. Дальше возьмем $x_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

$$\sin\sqrt{\left|\frac{\pi^2}{4} - \pi^2\right|} = \sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}; \quad \sin\sqrt{\frac{3}{4}\pi^2} = 1; \quad \frac{\sqrt{3}\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi l; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + 2l; \quad \sqrt{3} \neq 1 + 4l,$$

так как $\sqrt{3}$ – число иррациональное, $1 + 4l \in \mathbb{Z}$.

Получили противоречие. Значит, функция f непериодическая.▶

Теорема 4.12. *Любая периодическая функция каждое свое значение принимает на бесконечном множестве точек.*

◀Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ периодическая с периодом $T \neq 0$. Очевидно, что любой элемент множества $A = \{nT\}$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, есть период функции f. Тогда для любого $x \in X$ значение $f(x)$ функции f принимается на бесконечном множестве точек $\{x + nT\}$, $n \in \mathbb{Z}$. ▶

Определение 4.5. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***кусочно строго монотонной*** *на X, если X представима в виде объединения конечного числа невырожденных промежутков, на каждом из которых функция будет строго монотонной.*

Следствие 4.1. *Все кусочно строго монотонные функции в своей области определения будут непериодическими.*

◀Если $f : X \to \mathbb{R}$ и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$, где I_i – невырожденные промежутки, и на любом промежутке I_i функция f строго монотонна, то функция f каждое свое значение будет принимать не более чем в n точках области определения (n – конечное число). По теореме 4.12 такие функции будут непериодическими.▶

Следствие 4.2. *Если для функции $f : X \to \mathbb{R}$ существует такое действительное число $a \in \mathbb{R}$, что уравнение $f(x) = a$ имеет конечное число решений x_i, $i = \overline{1, n}$, то функция f – непериодическая.*

◀Указанное в следствии число a будет значением функции f. Это значение принимается на конечном множестве точек x_i, $i = \overline{1, n}$, области определения, поэтому функция f будет непериодической.▶

Пример 4.6. Докажите, что функция $f(x) = 3\cos\sqrt{2}x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, непериодическая.

◀Решим уравнение $3\cos\sqrt{2}x + \cos x = 4$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\sqrt{2}x = 1, \\ \cos x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, что $x = 0$ – решение уравнения, при этом $k = n = 0$. Если $k \neq 0$, $n \neq 0$, то $\sqrt{2}k = 2n$, но $\sqrt{2} \neq \frac{k}{n}$, так как $\sqrt{2}$ – число иррациональное, а $\frac{k}{n}$ – рациональное. Значит, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, поэтому (следствие 4.2) функция f непериодическая.▶

Следствие 4.3. *Если область определения функции $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена или сверху, или снизу, то функция непериодическая.*

◀Если предположить, что функция f периодическая, то ее область определения будет неограниченной как сверху, так и снизу. Покажем это. Пусть взята любая точка $x \in X$, а число $T \neq 0$ – период функции f. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ $x + Tn \in X$. Предположим, что $T > 0$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $x + Tn > \alpha$, $n > \frac{\alpha - x}{T}$, то есть неограниченность сверху доказана. Аналогично доказывается неограниченность снизу.▶

Пример 4.7. Исследовать функцию $y = \log_a x$, $x > 0$, $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$ на периодичность.

◀Функция непериодическая, так как ее область определения есть интервал $(0, +\infty)$ – ограниченное снизу множество.▶

Теорема 4.13. *Если периодическая функция ограничена на некотором отрезке из области ее определения, и длина этого отрезка равна модулю периода функции, то функция ограничена и во всей своей области определения.*

◀На любом отрезке из области определения функции f, длина которого равна модулю периода функции, функция принимает все свои значения. Поэтому, если на некотором отрезке $[\alpha, \alpha + T] \subset D(f)$ для всех $x \in [\alpha, \alpha + T]$ $|f(x)| \leqslant M < \infty$ для некоторого неотрицательного действительного числа M, то это же неравенство будет выполняться и для всех $x \in D(f)$. ▶

Следствие 4.4. *Если для любого действительного числа $T \neq 0$ функция $f : X \to \mathbb{R}$ будет ограниченной на некотором отрезке $[\alpha, \alpha + T] \subset X$, а на всей области определения функция f не ограничена, то f – непериодическая.*

Пример 4.8. Докажите, что функция $f(x) = x\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, непериодическая.

◀Возьмем любое действительное число $T \neq 0$. Тогда на отрезке $[0; |T|] \subset \mathbb{R}$ функция f будет ограниченной:

$$|x\cos x| = |x| \cdot |\cos x| \leqslant T < \infty.$$

Покажем, что на $\mathbb{R}$ функция не ограничена, например, сверху. Возьмем множество $A = \{2\pi n\} \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такое $x = 2\pi n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, что

$$|x\cos x| = 2\pi n \cdot \cos 2\pi n = 2\pi n > \alpha, \quad n > \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Значит (следствие 4.4), функция f непериодическая.▶

4.3 Преобразование графиков функций

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Рассмотрим способы построения графиков некоторых функций путем преобразования графика функции f.

1) $y = f(x) + A$, $A \in \mathbb{R}$.

Строим вспомогательную ось $O'x'$, уравнение которой $y = A$. В новой системе координат $x'O'y$ строим график функции $y' = f(x)$, где $y' = y + A$.

2) $y = f(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Строим вспомогательную ось $O'y'$, уравнение которой $x + a = 0$. В новой системе координат $xO'y'$ строим график функции $y = f(x')$, где $x' = x + a$.

3) $y = -f(x)$.

График функции симметричен графику функции f относительно оси Ox.

4) $y = f(-x)$.

График функции симметричен графику функции f относительно оси Oy.

5) $y = \alpha f(x)$, $\alpha > 0$.

График функции получим с помощью сжатия (растяжения) графика функции f к оси Ox в $\frac{1}{\alpha}$ раз, если $0 < \alpha < 1$ (в α раз, если $\alpha > 1$).

6) $y = f(\beta x)$, $\beta > 0$.

График функции получим с помощью сжатия (растяжения) графика функции f к оси Oy в β раз, если $\beta > 1$ (в $\frac{1}{\beta}$ раз, если $0 < \beta < 1$).

7) $y = |f(x)|$.

Строим график функции f. Ту часть полученного графика, которая расположена ниже оси Ox, отображаем относительно оси абсцисс. Объединение образа указанного отображения и части графика функции f, не отображавшейся относительно оси Ox, и есть искомый график.

8) $y = f(|x|)$.

Строим график функции f для допустимых значений $x \geqslant 0$. Полученный график отображаем относительно оси Oy. Объединение полученных графиков и есть искомый график.

Замечание 4.2. Построение графика функции $y = f(kx+b)$ $(k \neq 0)$ сводится к использованию равенства $f(kx+b) = f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)$ и способов 2 (с $a = \frac{b}{k}$) и 6 (с $\beta = k$)).

Пример 4.9. Постройте график функции $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}x\right) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Преобразуем аналитическое выражение функции:

$$y = -2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + 1.$$

Строим вспомогательные оси – абсцисс: $y = 1$, и ординат: $x = \frac{\pi}{3}$ (вспомогательная система координат $x'O'y'$, смотри рисунок 4.1).

В системе координат $x'O'y'$ строим график функции $y' = -2\sin\frac{1}{2}x'$. Основной период функции $T = 4\pi$. Откладываем от точки $x = \frac{\pi}{3}$ на оси Ox вправо отрезок, длина которого 4π. Делим этот отрезок на четыре равные части. Для точек деления находим соответствующие точки графика функции, учитывая способы 3) и 5) построения графиков функций.

Дальше продолжаем построение графика функции с учетом ее периодичности.▶

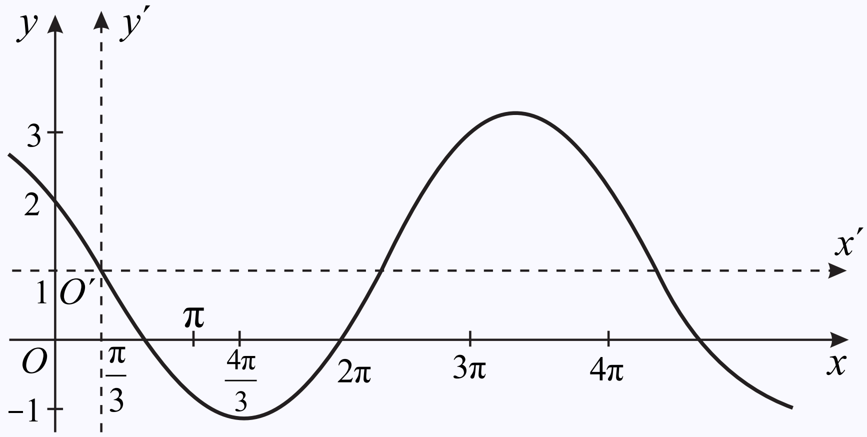


Рисунок 4.1 – График функции $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}x\right) + 1$

Замечание 4.3. Построить график функции из примера 4.9 можно, используя другой алгоритм:
– в системе координат xOy строим график функции $y = \sin x$;
– используя способ 6, строим график функции $y = \sin\frac{x}{2}$;
– используя способ 5, строим график функции $y = 2\sin\frac{x}{2}$;
– используя способ 3, строим график функции $y = -2\sin\frac{x}{2}$;
– выполняем параллельный перенос оси Ox на одну единицу вниз, а оси Oy – на $\frac{\pi}{3}$ единиц влево.

4.4 Обратные функции

Определение 4.6. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **обратимой**, если каждое свое значение она принимает в единственной точке области определения (для любого $y \in E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение $x \in X$).*

Например, функция $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, $E(f) = (0, +\infty))$ – обратимая функция, а функция $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $E(f) = [0, +\infty))$ – не является обратимой.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – обратимая функция.

Определение 4.7. *Функция $x = f^{-1}(y)$, $y \in E(f)$, ($y = f^{-1}(x)$, $x \in E(f)$) называется **обратной** функции f, если в любой точке $y \in E(f)$ функция $x = f^{-1}(y)$ принимает такое единственное значение $x \in X$, что будет справедливо равенство $y = f(x)$.*

Замечание 4.4. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$. Если $f : X \to Y$ – обратимая функция, то обратная к ней функция $f^{-1} = g : Y \to X$. Аналитически функцию f и обратную к ней g можно задать, соответственно, $y = f(x)$ и $x = g(y)$. Но следуя привычке обозначать аргумент буквой x, а значение функции буквой y, обратную функцию аналитически можно задавать $y = g(x)$.

Например, функция $x = \sqrt[3]{y}$ будет обратной для функции $y = x^3$.

Определение 4.8. *Обратимая и обратная для нее функция называются **взаимно обратными**.*

Теорема 4.14. *Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов).*

◀Любой точке $M(a, b)$ графика Γ_f функции f соответствует точка $M'(b, a)$ графика $\Gamma_{f^{-1}}$ функции f^{-1}, обратной к функции f.

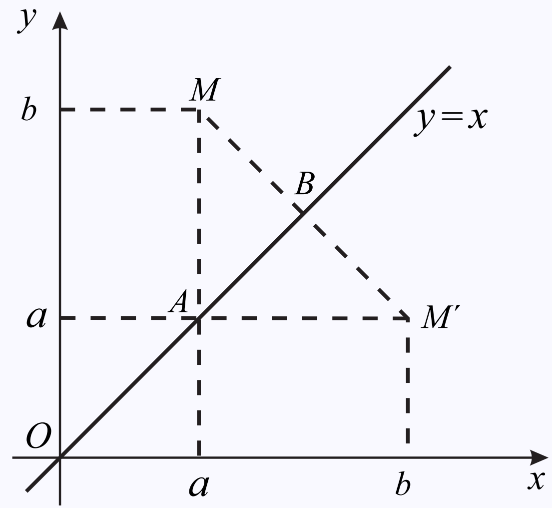


Рисунок 4.2

Покажем, что точки M и M' симметричны относительно прямой $y = x$. Треугольник $MM'A$ – равнобедренный (рисунок 4.2.), так как $AM = b - a = AM'$. Кроме того, AB – биссектриса $\Delta AMM'$ ($\angle MAB = \angle M'AB = 45°$), поэтому AB – медиана и высота. Значит, точки M и M' симметричны относительно прямой $y = x$, а поэтому и графики Γ_f и $\Gamma_{f^{-1}}$ также симметричны относительно указанной прямой. Теорема доказана.▶

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый промежуток числовой прямой.

Теорема 4.15 (о существовании и монотонности обратной функции). *Если функция $f : I \to \mathbb{R}$ возрастает (убывает) на промежутке I, то*

1) f – обратимая функция;

2) существует f^{-1} – обратная для f (с $D(f^{-1}) = E(f)$ и $E(f^{-1}) = D(f) = I$);

3) f^{-1} возрастает (убывает) на $D(f^{-1})$.

◀1. Пусть функция f возрастает на I, тогда любое свое значение она принимает в единственной точке (если предположить, что существует точка $y_0 \in E(f)$, для которой существуют $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$, и $f(x_1) = f(x_2) = y_0$, то, учитывая, что f – возрастает, получим $f(x_1) < f(x_2)$, что противоречит нашему предположению). Значит, f – обратимая функция.

2. Покажем, что обратное соответствие $x = f^{-1}(y)$ есть функция. Берем любое $y \in E(f) = D(f^{-1})$ и покажем, что ему соответствует единственное $x \in I$ такое, что будет справедливым равенство $y = f(x)$. Допустим обратное: существует $y_0 \in E(f)$ и существуют такие $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, что $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Но функция f – возрастает, поэтому $f(x_1) < f(x_2)$ – получили противоречие. Значит, доказано, что существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$ к функции $y = f(x)$ и $I = D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$.

3. Теперь докажем, что $x = f^{-1}(y)$ возрастает на $D(f^{-1}) = E(f)$. Берем любые $y_1, y_2 \in D(f^{-1}) = E(f)$, $y_1 < y_2$. Рассмотрим следующие предположения:

а) $x_1 = f^{-1}(y_1) = x_2 = f^{-1}(y_2)$, а значит: $y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2)$ – получили противоречие, поэтому $x_1 \neq x_2$;

б) $x_1 = f^{-1}(y_1) > x_2 = f^{-1}(y_2)$, а тогда $y_1 = f(x_1) > y_2 = f(x_2)$ – противоречие.

Таким образом, $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$. Значит, функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на $D(f^{-1}) = E(f)$ (аналогично доказывается, что f^{-1} убывает на $D(f^{-1}) = E(f)$, если f убывает на I).▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения четной и нечетной функций. Приведите примеры как четных, так и нечетных функций.
2. Сформулируйте утверждения об арифметических операциях над четными и нечетными функциями.
3. Сформулируйте утверждения о четности и нечетности сложной функции. Приведите примеры.
4. Каким свойством обладают графики четных и нечетных функций? Приведите примеры.
5. Дайте определение периодической функции. Приведите примеры периодических функций.
6. Дайте определение непериодической функции. Приведите примеры непериодических функций.
7. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над периодическими функциями. Приведите примеры.
8. Сформулируйте необходимые условия периодичности функций.
9. Опишите основные способы преобразования графиков функций.
10. Дайте понятия обратной и обратимой функций. Приведите примеры.
11. Сформулируйте и докажите теорему о монотонности обратных функций.
12. Сформулируйте теорему о симметричности графиков взаимно обратных функций. Покажите на примерах приложения теоремы при построении графиков обратных функций.
13. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Специальные классы функций

Задание 1. Функцию $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$, исследовать на четность-нечетность.
◀Область определения функции симметрична относительно начала координат.
Берем любое $x \in (-1, 1)$. Тогда

$$f(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1+x}{1-x} = -f(x).$$

Значит, функция f нечетная.▶

Задание 2. Исследовать на четность-нечетность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3+1, \text{ если } x<0, \\ 0, \text{ если } x=0, \\ -x^3+1, \text{ если } x>0. \end{cases}$$

◀Область определения функции f есть $\mathbb{R}$. Она симметрична относительно начала координат. Возьмем любое $x \in \mathbb{R}_+$ $(x > 0)$, тогда $(-x) \in \mathbb{R}_-$ $(-x < 0)$ и $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1 = f(x)$. А для любых $x \in \mathbb{R}_-$ $(-x) \in \mathbb{R}_+$ и $f(-x) = -(-x)^3 + 1 = x^3 + 1 = f(x)$. Кроме того, $f(-0) = f(0) = 0$. Значит, для любых $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$, то есть функция f четная.▶

Задание 3. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, на четность-нечетность.
◀ $D(f) = \mathbb{R}$ симметрична относительно начала координат. Но существует $x_0 = 1 \in D(f)$ такое, что $f(x_0) = f(1) = 0$, $f(-x_0) = f(-1) = -1$, то есть, $f(-x_0) \neq f(x_0)$ и $f(-x_0) \neq -f(x_0)$. Значит, функция f не является четной и не является нечетной.▶

Задание 4. Продолжить функцию $f(x) = x^3 + x^2 - 3\sin x$, $x \geqslant 0$, нечетным образом на всю действительную ось.

◀Пусть $x < 0$. Тогда $-x > 0$, и потому по условию

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 3\sin(-x) = -x^3 + x^2 + 3\sin x.$$

Так как мы хотим получить нечетную функцию, надо потребовать, чтобы при $x < 0$ имело место равенство

$$f(x) = -f(-x) = -(-x^3 + x^2 + 3\sin x) = x^3 - x^2 - 3\sin x.$$

Итак, искомая функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 3\sin x, & x \geqslant 0, \\ x^3 - x^2 - 3\sin x, & x < 0. \end{cases}$$ ▶

Задание 5. Докажите, что функция $y = \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$, не является периодической.

◀Предположим, что существует число $T > 0$ такое, что при всех значениях x выполняется равенство

$$\sin x^2 = \sin(x + T)^2. \tag{4.1}$$

Полагая, что $x = 0$, получим $0 = \sin T^2$. Но тогда $T^2 = \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, $T = \sqrt{\pi n}$. Подставляя это значение T в равенство (4.1), получаем:

$$\sin x^2 = \sin(x + \sqrt{\pi n})^2 = \sin(x^2 + 2x\sqrt{\pi n} + \pi n). \tag{4.2}$$

Выберем x так, чтобы оно было отлично от всех чисел вида $\frac{2\pi m - \pi n}{2\sqrt{\pi n}}$, где m – целое (очевидно, что такие значения x существуют). Тогда $2x\sqrt{\pi n} + \pi n \neq 2\pi m$, и потому $\sin x^2 \neq \sin(x^2 + 2x\sqrt{\pi n} + \pi n)$ вопреки равенству (4.2). Это противоречие и доказывает, что функция f непериодическая.▶

Задание 6. Докажите, что для функции Дирихле[1]

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

любое рациональное число T является периодом.

◀Очевидно, что область определения функции Дирихле есть вся числовая прямая $\mathbb{R}$. Значит, для любых $x \in \mathbb{R}$ и любого $T \in \mathbb{Q}$ будет $x \pm T \in \mathbb{R}$. Далее, так как сумма двух рациональных чисел есть число рациональное, а сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное, то

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально } (x+T - \text{ рациональное число}), \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально } \ (x+T - \text{ иррациональное число}). \end{cases}$$

Значит, D – периодическая функция.▶

Задание 7. Докажите, что функция $f(x) = \cos x + \cos ax$, $x \in \mathbb{R}$, периодическая тогда и только тогда, когда действительное число a является рациональным.

◀Предположим, что функция f периодическая и ее период $T \neq 0$. Тогда для любых $x \in D(f) = \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\cos(x+T) + \cos a(x+T) = \cos x + \cos ax. \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) справедливо и для $x = 0$:

$$\cos T + \cos aT = 2. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) относительно T равносильно системе

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos aT = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 2\pi k, \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ aT = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

[1] Иоганн Петер Густав Лежен-Дирихле (1805–1859) – немецкий математик.

Тогда $a2\pi k = 2\pi n \Leftrightarrow a = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$. Значит, число a – рациональное. Необходимое условие доказано.

Теперь предположим, что a – число рациональное. Считаем, что $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Если $a = 0$, то функция $f(x) = \cos x + 1$ периодическая. Если $a < 0$, то $(-a) > 0$, и с учетом того, что функция $\cos ax$ – четная, $f(x) = \cos x + \cos(-ax)$. Тогда: $T_1 = 2\pi$ – период функции $\cos x$; $T_2 = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi n}{m}$ – период функции $\cos ax$. Очевидно, что $T_1 \cdot n = T_2 \cdot m = 2\pi n = T$ – период функции f (теорема 4.11).►

Замечание 4.5. Если функция f определена на интервале $(0, b)$, $b > 0$, то ее можно продлить на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ (доопределить на всей числовой прямой) так, чтобы полученная функция была периодической с периодом $T = b$. Указанное продолжение выполняется следующим образом: на каждом из интервалов $(kb, b + kb)$, $k \in \mathbb{Z}$, положим $g(x) = f(x - bk)$, а для любых $x \in M = \{kb\}$ можно взять любое $c \in \mathbb{R}$ и считать, что в этих точках $g(x) = c$.

Задание 8. Функцию $f(x) = \begin{cases} \log_{\sin x} 0,5, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$, заданную на интервале $(0, \pi)$, продолжить периодически на всю числовую ось с периодом $T = \pi$.

◄На интервалах $\left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, продолжение g на $\mathbb{R}$ функции f будет иметь вид: $g(x) = f(x - \pi k) = \log_{\sin(x-\pi k)} 0,5$, то есть $g(x) = \log_{(-1)^k \sin x} 0,5$ или $g(x) = \frac{1}{\log_{0,5}(-1)^k \sin x}$.

В точках множества $M = \left\{\frac{\pi}{2}k\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, положим $g(x) = 0$. Тогда искомое продолжение будет иметь вид:

$$g(x) = \begin{cases} \log_{(-1)^k \sin x} 0,5; & \text{если } x \in \mathbb{R} \backslash M, \\ 0, & \text{если } x \in M = \left\{\frac{\pi k}{2}\right\}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad ►$$

Задание 9. Покажите, что функция $f(x) = x[x]$, $x \in [1, +\infty)$, $[x]$ – целая часть числа x, обратима. Найдите аналитическое выражение для обратной функции, ее область определения и множество значений.

◄Покажем, что функция f убывающая. Возьмем любые x_1, $x_2 \in [1, +\infty)$, $x_1 < x_2$. Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1[x_1] - x_2[x_2] \leqslant x_1[x_1] - x_2[x_1] = [x_1](x_1 - x_2) < 0,$$

а значит (теорема 4.15), функция f обратима.

Функция f может быть представлена в виде $y=kx$, где $k\leqslant x<k+1$, $k\in\mathbb{N}$, а $k^2\leqslant y<k(k+1)$. Найдем аналитическое выражение для обратной функции. Имеем: $x=\frac{y}{k}$ или (в обычных обозначениях) $y=\frac{x}{k}$. $D(f^{-1})$: $k^2\leqslant x<k(k+1)$; $E(f^{-1})$: $k\leqslant y<k+1$, $k\in\mathbb{N}$. ►

Задание 10. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, \text{ при } x\leqslant 1,\\ 2-x, \text{ при } x\geqslant 1;\end{cases}$ обратима. Найдите ее обратную функцию.

◄Функция $f_1(x)=2^{1-x}$ убывает на луче $(-\infty,1]$, так как функция f_1 есть композиция функций $u=1-x$, убывающей на луче $(-\infty,1]$, и $y=2^u$, возрастающей в своей области определения. Функция $f_2(x)=2-x$ также убывает на луче $[1,+\infty)$ (угловой коэффициент прямой равен (-1)) и $f_2(1)=1=f_1(1)$.

Значит, функция f убывает на $\mathbb{R}$, поэтому она обратима. Найдем аналитическое представление для обратной функции f^{-1}. Вначале решаем относительно x уравнение

$$y=2^{1-x}\Leftrightarrow \log_2 y=1-x;\ x=1-\log_2 y.$$

Меняя x и y местами, получим:

$$y=1-\log_2 x,\ \text{где } x\geqslant 1\ ([1,+\infty)=E(f_1)=D(f_1^{-1})).$$

Прямая $y=2-x$ перпендикулярна прямой $y=x$, поэтому $f_2^{-1}(x)=2-x$ с $D(f_2^{-1})=(-\infty,1]$. Таким образом,

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}2-x, \text{ если } x\leqslant 1,\\ 1-\log_{\frac{1}{2}} x, \text{ если } x\geqslant 1.\end{cases}\ ►$$

Задание 11. Постройте график функции $y=\frac{3x-2}{2x+1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

◄Представим функцию в виде

$$y=\frac{\frac{3}{2}(2x+1)-\frac{7}{2}}{2x+1}=\frac{3}{2}+\frac{-\frac{7}{4}}{x+\frac{1}{2}}.$$

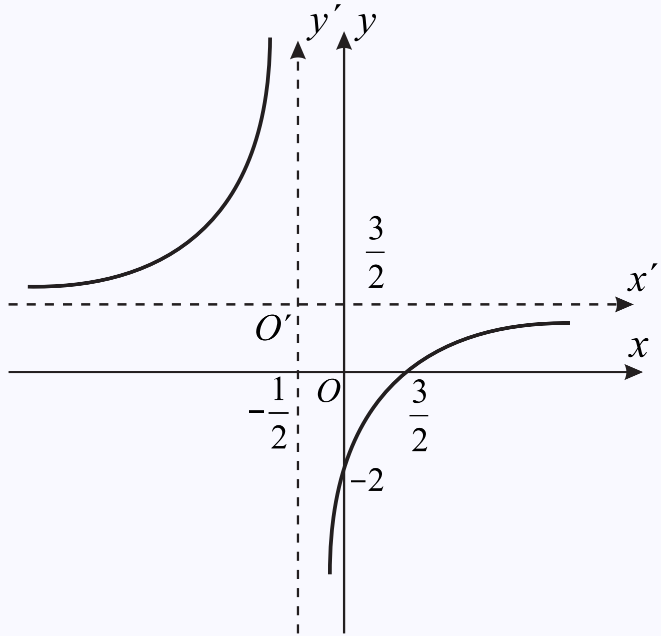


Рисунок 4.3

Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $y = -\frac{7}{4}f\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$. Строим вспомогательные оси – абсцисс: $y = \frac{3}{2}$, и ординат: $x = -\frac{1}{2}$ (вспомогательная система координат $x'O'y'$).

В системе координат $x'O'y'$ строим график функции $y_1' = \frac{1}{x'}$ (рисунок 4.3); увеличивая все ординаты в $\frac{7}{4}$ раз, получаем график функции $y_2' = \frac{7}{4}\frac{1}{x'}$; построенный график отображаем симметрично относительно оси $O'x'$ – получаем график функции $y_3' = -\frac{7}{4}\frac{1}{x'}$. В исходной системе координат построенный график есть график функции $y = \frac{3x-2}{2x+1}$ ►.

Задание 12. Постройте график функции $y = \arccos(-2x)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

◄Используя график функции $y = \arccos x$ строим сначала график функции $y = \arccos 2x$ (с помощью сжатия графика функции $y = \arccos x$ к оси Oy в 2 раза), затем, зеркально отразив его относительно оси Oy, получим график рассматриваемой функции (рисунок 4.4).►

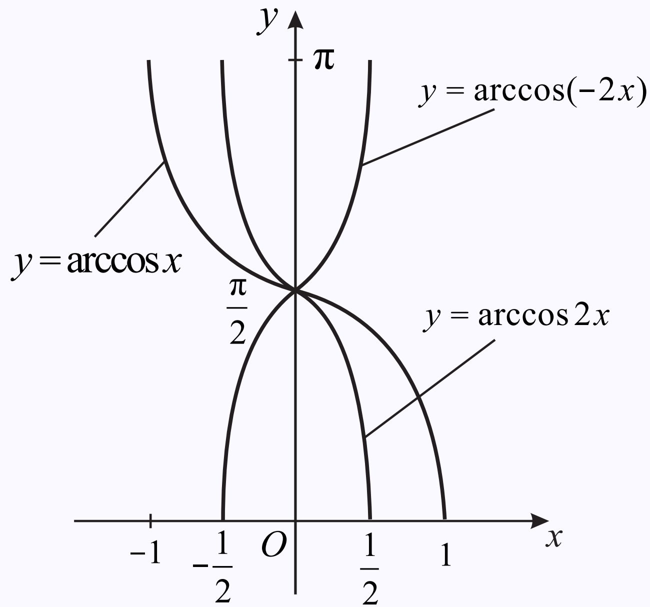


Рисунок 4.4

Задание 13. Постройте график функции $y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Преобразовав функцию, получим:

$$y = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

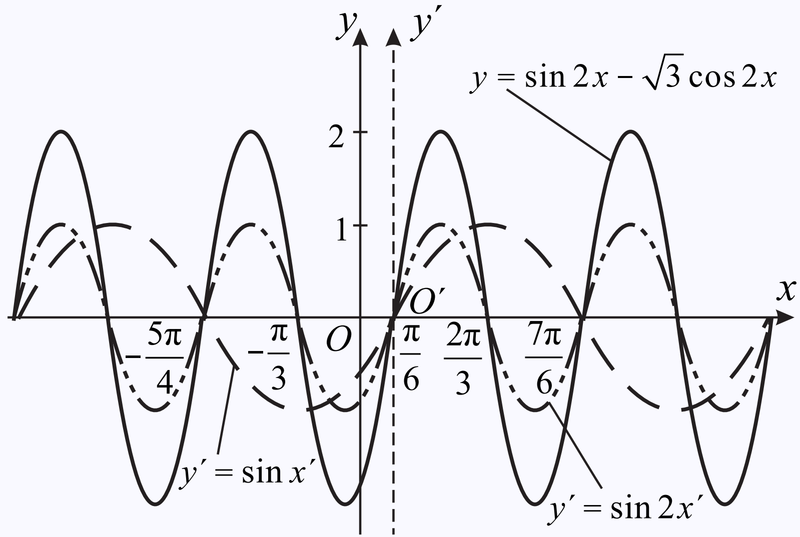


Рисунок 4.5

Строим вспомогательные оси – абсцисс: $y = 0$, и ординат: $x = \frac{\pi}{6}$ (вспомогательная система координат $x'O'y'$).

В системе координат $x'O'y'$ строим график функции $y' = \sin x'$, затем график функции $y' = \sin 2x'$, который получается из синусоиды сжатием ее вдоль оси $O'x'$ в два раза. Наконец, растягивая последний график в два раза вдоль оси $O'y'$, получим график рассматриваемой функции в системе координат xOy (смотри рисунок 4.5).►

Задание 14. Постройте график функции $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

◄Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$. Затем складываем ординаты этих графиков. В результате получим график функции f (рисунок 4.6).►

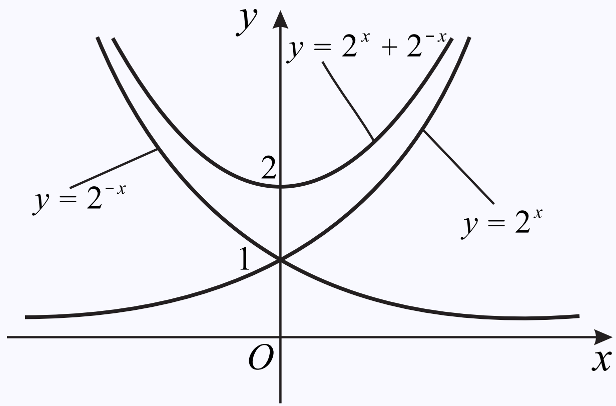


Рисунок 4.6

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

Задания для самостоятельного решения

1. Определите, какие из заданных ниже функций $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

   1.1 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

   1.2 $f(x) = \frac{x^2+x+-1}{x^3-5}$;

   1.3 $f(x) = \sin^2 x - \cos^3 x$;

   1.4 $f(x) = \frac{x^3+\sin x}{1+x^2}$;

   1.5 $f(x) = \begin{cases} x^2+4, & x \geqslant 0 \\ -x^2-4, & x < 0 \end{cases}$;

   1.6 $f(x) = \begin{cases} x^3+\sin x, & x > 0, \\ -x^3-\sin x, & x < 0. \end{cases}$

2. Продолжите четным образом функции:

   2.1 $y = \sin x + x \operatorname{tg} x, \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$;

   2.2 $y = \lg^3 x, \quad 0 < x < \infty$;

   2.3 $y = \begin{cases} x^4+3x^2+2^x, & 0 \leqslant x < 1, \\ x^3-x^2+\lg x, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

3. Продолжите нечетным образом функции:

   3.1 $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad 0 \leqslant x < \infty$;

   3.2 $y = \lg(x+\sqrt{x^2+1}), \quad 0 \leqslant x < \infty$;

   3.3 $y = \begin{cases} x^4+1, & 0 \leqslant x < 2, \\ x^3+6, & 2 \leqslant x < 3. \end{cases}$

4. Исследуйте на периодичность следующие функции $y : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ (определите, какие из них будут периодическими, и укажите их период):

4.1 $y = \cos\frac{x}{2}$;

4.2 $y = \sin 3x$;

4.3 $y = \operatorname{tg} 5x$;

4.4 $y = \sin\frac{2x+1}{2}$;

4.5 $y = \cos \pi x$;

4.6 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;

4.7 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + 3\right)$;

4.8 $y = 2^{\sin x}$;

4.9 $y = \sin\frac{1}{x}$;

4.10 $y = \cos x^2$;

4.11 $y = \{2x\}$;

4.12 $y = 2^{|\sin x|}$.

5. Продолжите периодически функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x < 0, \\ \sin x, & 0 \leqslant x < \pi; \end{cases}$ на всю ось (с периодом 2π).

6. Продолжите периодически функцию $f(x) = x^2 + x + 1$, $0 \leqslant x < 4$, на всю ось (с периодом 4).

7. Постройте графики функций $y : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$:

7.1 $y = \sqrt{x-2} + 1$;

7.2 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 2$;

7.3 $y = \arcsin\left(1 - \frac{x}{2}\right)$;

7.4 $y = 2\cos(2 - x)$;

7.5 $y = \sin\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$;

7.6 $y = -\operatorname{arctg}(2x - 4)$;

7.7 $y = \operatorname{tg} x + x$;

7.8 $y = \operatorname{arctg} 4x + 4$;

7.9 $y = \cos x - |\cos x|$;

7.10 $y = |x - 1| + |x + 1|$;

7.11 $y = |\sin x| + |\cos x|$;

7.12 $y = x \sin x$;

7.13 $y = e^{-x}\cos x$;

7.14 $y = x \operatorname{tg} x$;

7.15 $y = \log_2\left|\frac{2x+1}{x-1}\right|$.

ЛЕКЦИЯ 5
Предел последовательности

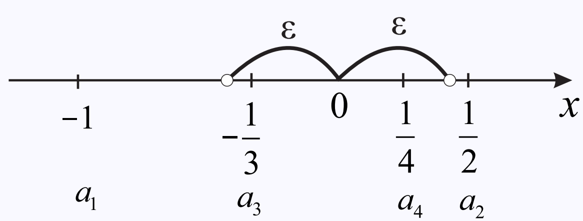
Определение 5.1. *Функция $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется* ***числовой последовательностью****.*

Значения $a(n)$ этой функции называются **элементами последовательности**. Чаще элементы последовательности обозначают a_n (называя выражение a_n **общим членом последовательности**), а саму последовательность – (a_n) или $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. В принципе нумерация элементов последовательности не обязана начинаться с единицы. Она может начинаться с любого натурального числа.

Примеры последовательностей, известных из школьного курса математики, – арифметическая и геометрическая прогрессии – общие члены определяются, соответственно, так называемыми рекуррентными формулами:

$$a_n = a_{n-1} + d,\ \ b_n = b_{n-1}q,\ \ n = 2, 3, 4, \ldots$$

Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Покажем значения некоторых членов последовательности на координатной прямой:



Видно, что с возрастанием аргумента n числа a_n (значения членов последовательности) все время приближаются к 0. И какое бы малое расстояние $\varepsilon > 0$ мы не отложили от 0 в правую или в левую сторону, все равно найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$ (номер члена последовательности), что все члены a_n с номерами большими, чем n_0, будут находиться от 0 на расстоянии, меньшем ε. В этом случае 0 будет являться пределом последовательности.

Определение 5.2. *Действительное число a называется* ***пределом последовательности*** (a_n), *если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $n > n_0$ будет выполняться неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Пишут это так:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a: \quad \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Если последовательность имеет предел, то она называется **сходящейся**, а если нет – **расходящейся**.

Замечание 5.1. Согласно определению 5.2 последовательность (a_n) будет расходящейся, если для любого действительного числа $a \in \mathbb{R}$ найдется число $\varepsilon > 0$, что для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ будет существовать $n' \in \mathbb{N}$, $n' > n_0$, такое, что $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$:

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \;\; \exists\,\varepsilon > 0 \;\; \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n' \in \mathbb{N}, \;\; n' > n_0 \;\; |a_n - a| \geqslant \varepsilon. \tag{5.1}$$

Пример 5.1. Докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

◀Возьмем любое (может быть сколь угодно малым) число $\varepsilon > 0$. Для нахождения номера $n_0 \in \mathbb{N}$ (о котором говорится в определении) оценим сверху $|a_n - a|$.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве $n_0 \in \mathbb{N}$ возьмем $n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$, (где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$). При таком выборе n_0 выполняется определение 5.2, если $a = 1$ и $a_n = \frac{n}{n+1}$. ▶

Пример 5.2. Докажите, что последовательность с общим членом

$$a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n+2}$$

расходится.

◄Возьмем любое $a \in \mathbb{R}$. Оценим снизу $|a_n - a| = \alpha$. Рассмотрим следующие случаи:
1. $a \leqslant \frac{1}{3}$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\alpha = \left|\frac{n+1}{n+2} - a\right| = \left|1 - \frac{1}{n+2} - a\right| \geqslant \frac{1}{3} = \varepsilon.$$

2. $a > \frac{1}{3}$, $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\alpha = \left|\frac{-n+1}{n+2} - a\right| = \left|-1 + \frac{3}{n+2} - a\right| \geqslant \frac{1}{3} = \varepsilon.$$

В соответствии с 5.1 последовательность a_n расходится.►

Определение 5.3. *Если*

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; |a_n| > E,$$

то последовательность (a_n) называется ***бесконечно большой****. В этом случае будем писать*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \infty.$$

Подчеркнем, что в этом случае предел не существует. Мы лишь договариваемся записывать так факт специальной расходимости последовательности.

Если (a_n) – бесконечно большая последовательность, элементы которой положительны, начиная с некоторого номера, то будем писать

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty :$$

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; a_n > E.$$

Если же (a_n) – бесконечно большая последовательность, элементы которой отрицательны, начиная с некоторого номера, то будем писать

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty :$$

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; a_n < -E.$$

Теорема 5.1. *Если последовательность имеет предел, то он единственный.*

◄Предположим, что существует $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и существует $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$ и $a \neq b$. По определению 5.2:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a : \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; n > n_1 \;\; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = b : \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_2 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; n > n_2 \;\; |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и любое $\varepsilon > 0$ оценим

$$0 \leqslant |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leqslant |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ $0 \leqslant |a - b| < \varepsilon$, что возможно только тогда, когда $a = b$.►

5.1 Предел монотонной последовательности

Определение 5.4. *Последовательность* (a_n) *называется возрастающей* (***убывающей, невозрастающей, неубывающей***), *если для любых* $n \in \mathbb{N}$

$$a_n < a_{n+1} \ (a_n > a_{n+1}, \ a_n \geqslant a_{n+1}, \ a_n \leqslant a_{n+1}).$$

Указанные в определении последовательности называются **монотонными**.

Например, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ – убывающая, последовательность $a_n = n + \frac{1}{n}$ – возрастающая, то есть указанные последовательности являются монотонными; последовательность $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ не является монотонной.

Определение 5.5. *Последовательность называется ограниченной (сверху, снизу), если множество ее элементов ограничено (сверху, снизу).*

Другими словами, последовательность (a_n) ограничена, если

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} \ (m \leqslant M) \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ m \leqslant a_n \leqslant M$$

или если

$$\exists\, C > 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ |a_n| \leqslant C.$$

Определения точных граней последовательности можно сформулировать (как и для точных граней ограниченных функций) с помощью двух характеристических свойств.

Определение 5.6. *Число* $\overline{x}$ ($\underline{x}$) *называется* ***точной верхней*** (***нижней***) ***гранью*** *последовательности* (a_n), *если:*

1. $\forall\, n \in \mathbb{N} \ a_n \leqslant \overline{x} \ (a_n \geqslant \underline{x})$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n' \in \mathbb{N} \ a_{n'} > \overline{x} - \varepsilon \ (a_{n'} < \underline{x} + \varepsilon)$.

Теорема 5.2. *Если последовательность (a_n) ограничена сверху (снизу) и не убывает (не возрастает), то она имеет предел, который совпадает с точной верхней (нижней) гранью.*

◀Пусть последовательность (a_n) неубывающая и $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = a$. Запишем характеристические свойства точной верхней грани:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant a < a + \varepsilon$, где ε – любое положительное число.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n' \in \mathbb{N}\ a_{n'} > a - \varepsilon$.

Последовательность (a_n) неубывающая, значит, для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n'$ $a_n \geqslant a_{n'} > a - \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 = \max\{1, n'\}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Значит, существует $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Для указанного случая теорема доказана (аналогично проводятся доказательства и для других случаев).▶

Пример 5.3. Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, где $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1}$.

◀ $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2+1}$. Значит, последовательность возрастающая. Докажем, что она ограничена сверху.

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Значит, (x_n) – возрастающая и ограниченная сверху последовательность, поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. ▶

5.2 Число e

Теорема 5.3. *Последовательность* $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *сходится.*

◀Докажем, что последовательность (x_n) монотонно возрастает.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} >$$

$$> \left[\text{применим неравенство Бернулли (1.8)}\right] > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n} = 1.$$

Таким образом, для всех $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$. Значит, последовательность (x_n) монотонно возрастает.

Из неравенства (1.9) задания 12 практического занятия 1 следует, что для любых $n \in \mathbb{N}$ $x_n < 3$. Значит, последовательность (x_n) ограничена сверху.

Таким образом, по теореме 5.2, последовательность (x_n) сходится.▶

По определению $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Замечание 5.2. Впервые число e (не используя этого символа) как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ввел Д. Бернулли[1] в одном из писем к Х. Гольдбаху[2]. Само обозначение e ввел Эйлер, обобщив рассуждения Бернулли и вычислив значение e с 24 верными знаками ($\approx 2,718281828459045\ldots$). Число e – иррациональное и трансцендентное (действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами, в противном случае число называется трансцендентным). Число e служит основанием натурального логарифма ($\log_e x = \ln x$).

[1]Даниил Бернулли (1700–1782) – швейцарский физик и математик.
[2]Христиан Гольдбах (1690–1764) – немецкий математик.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение числовой последовательности. Укажите способы задания последовательностей с приведением примеров.
2. Сформулируйте определение предела последовательности.
3. Какая последовательность называется а) сходящейся, б) расходящейся? Приведите примеры.
4. Дайте определение возрастающей (убывающей, не убывающей, не возрастающей) последовательности. Приведите примеры.
5. Дайте определение ограниченной сверху (ограниченной снизу, ограниченной, неограниченной сверху, неограниченной снизу, неограниченной) последовательности. Приведите примеры.
6. Сформулируйте теорему о пределе монотонной последовательности.
7. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 6
Теорема Больцано – Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности

6.1 Принцип вложенных отрезков

Пусть (a_n), (b_n) – последовательности, при этом для любых $n \in \mathbb{N}$ $a_n < b_n$. Рассмотрим последовательность отрезков $([a_n, b_n])$.

Определение 6.1. *Последовательность отрезков* $([a_n, b_n])$ *называется* **последовательностью вложенных отрезков**, *если для любого натурального* n *выполняется включение* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

Определение 6.2. *Последовательность отрезков* $([a_n, b_n])$, *где* $a_n < b_n$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, *называется* ***стягивающейся***, *если* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Теорема 6.1. *Для любой стягивающейся последовательности вложенных отрезков* $([a_n, b_n])$ *существует единственная точка* $c \in \mathbb{R}$, *которая принадлежит всем отрезкам последовательности.*

◄Последовательность (a_n) левых концов отрезков $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, является неубывающей, так как $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ для любых $n \in \mathbb{N}$, а поэтому и $a_n \leqslant a_{n+1}$. Кроме того, указанная последовательность ограничена сверху. В качестве верхней грани можно взять правый конец любого отрезка $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, например, b_1 (для любых $n \in \mathbb{N}$ $a_n < b_1$). Тогда (теорема 5.2) существует

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} = \alpha \leqslant b_n$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Аналогично

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{b_n\} = \beta \geqslant a_n$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Справедливо неравенство $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant b_n - a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; b_n - a_n < \varepsilon.$$

Поэтому $0 \leqslant \beta - \alpha < \varepsilon$. Последнее неравенство возможно для любого $\varepsilon > 0$ только тогда, когда $\beta - \alpha = 0$, $\beta = \alpha$.

Существование указанного в теореме числа c доказано ($c = \beta = \alpha$). Докажем единственность этого числа. Пусть есть еще и второе такое число $c' \neq c$. Но тогда для $n > n_0$ $0 \leqslant |c - c'| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$. Поэтому (рассуждения аналогичные приведенным выше) $|c - c'| = 0$ тогда и только тогда, когда $c = c'$. ▶

6.2 Теорема Больцано[1] – Вейерштрасса[2]

Определение 6.3. *Если (a_n) – некоторая последовательность, а (n_k) – любая возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность (a_{n_k}) называется* ***подпоследовательностью последовательности*** *(a_n).*

Например, (n) – последовательность $(n \in \mathbb{N})$; $(2k)$ и $(2k - 1)$ – ее подпоследовательности, но последовательность $1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, \ldots$ не будет подпоследовательностью последовательности (n).

Замечание 6.1. Из определений последовательности и ее подпоследовательности следует, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности будет сходящейся, причем последовательность и любая подпоследовательность в этом случае сходятся к одному и тому же числу.

Если же для некоторой последовательности можно указать две подпоследовательности, которые сходятся к разным значениям, то это говорит о том, что последовательность расходится. Например, последовательности с общими членами $\alpha_n = 1$ и $\beta_n = -1$ являются сходящимися подпоследовательностями $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = -1\right)$, но последовательность с общим членом $(-1)^n$ будет расходящейся.

[1]Бернард Больцано (1781–1848) – чешский математик, философ, теолог.
[2]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик.

Теорема 6.2 (Больцано – Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

◀1. Вначале рассмотрим последовательность (a_n), множество значений членов которой есть конечное множество (например: $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$). Тогда обязательно существует хотя бы одно такое значение (например c), которое принимается бесконечным множеством членов последовательности. Запишем в порядке возрастания номеров эти члены последовательности. Получим последовательность-константу $a_{n_k} = c$, которая сходится ($\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ k > k_0\ |a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = c$). Теорема в рассматриваемом случае доказана.

2. Пусть множество членов последовательности (a_n) с различными значениями, взятыми по одному, есть бесконечное множество. Обозначим его через A. Так как последовательность (a_n) ограничена, то и множество A – ограничено, а значит, существует отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, что $A \subset [a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $x = \frac{a+b}{2}$ – серединой отрезка. Тогда обязательно хотя бы в один из отрезков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ включено бесконечное множество элементов из A. Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$, а бесконечное множество элементов A, входящее в $[a_1, b_1]$, – через A_1. Дальше снова делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот частичный отрезок после указанного деления, который содержит бесконечное множество элементов множества A_1. Продолжим этот процесс и дальше. Получим стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $([a_n, b_n])$. По теореме 6.1, существует единственная точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем отрезкам последовательности $([a_n, b_n])$.

Дальше берем любую окрестность точки c радиуса $\delta > 0$: $U(c, \delta) = (c - \delta, c + \delta)$. В эту окрестность входит бесконечно много элементов из A:

$$\forall\, \delta > 0\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ [a_n, b_n] \subset U(c, \delta).$$

Возьмем $\delta = 1$ и выбираем из $U(c, 1)$ любой элемент, принадлежащий A. Обозначим этот элемент через a_{n_1}. Из окрестности $U\left(c, \frac{1}{2}\right)$ выбираем любой элемент $a_{n_2} \in A$, но такой, что $n_2 > n_1$. И так проводим выбор элементов A из окрестностей $U\left(c, \frac{1}{k}\right)$ $(k = 3, 4, \ldots)$. Получим подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n). Докажем, что подпоследовательность (a_{n_k}) сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = c$. Зададимся любым

$\varepsilon > 0$. Оценим сверху $|a_{n_k} - c| < \frac{1}{k}$. Потребуем, чтобы $\frac{1}{k} < \varepsilon$, $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Берем $k_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$. Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ k > k_0 \ \ |a_{n_k} - c| < \varepsilon, \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c. \ \blacktriangleright$$

6.3 Критерий Коши[3] сходимости последовательности

Использование определение предела последовательности для проверки сходимости этой последовательности не всегда удобно. Если мы хотим доказать с его помощью сходимость, то нам необходимо заранее знать чему равен предполагаемый предел. Если же мы хотим доказать расходимость, то нам надо доказывать, что любое число не является пределом. поэтому возникает необходимость в получении условий, позволяющих судить о сходимости, основываясь только на информации о поведении элементов последовательности.

Определение 6.4. *Последовательность (a_n) называется* ***фундаментальной*** (***последовательностью Коши***), *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \textit{и}\ m > n_0 \ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Теорема 6.3. *Последовательность (a_n) сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

$\blacktriangleleft$**Необходимость.** Пусть последовательность (a_n) – сходится к $a \in \mathbb{R}$. Докажем, что она фундаментальна. Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \text{ и } m > n_0 \ \ \begin{cases} |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Но тогда

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[3]Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик.

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m \in \mathbb{N} \;\; n \text{ и } m > n_0 \;\; |a_n - a_m| < \varepsilon,$$

то есть последовательность будет фундаментальной.

Достаточность. Пусть последовательность (a_n) фундаментальна. Покажем вначале, что последовательность ограничена. В определении 6.4 фундаментальности последовательности возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $|a_n - a_m| < 1$, $a_m - 1 < a_n < a_m + 1$. Зафиксируем m при $m > n_0$. При этом все члены последовательности a_n за исключением, может быть, n_0 первых членов, будут принадлежать отрезку $[a_m - 1, a_m + 1]$. Если и все члены $a_1, \ldots, a_{n_0}$ последовательности принадлежат указанному отрезку, то последовательность (a_n) будет ограниченной. Если все члены или часть этих членов не принадлежат отрезку $[a_m - 1, a_m + 1]$, то обязательно среди не принадлежащих указанному отрезку членов найдется член, наиболее удаленный от точки a_m (например, на расстояние $d > 0$). Тогда все члены последовательности (a_n) принадлежат отрезку $[a_m - d, a_m + d]$. Ограниченность последовательности доказана.

Если последовательность ограничена, то из нее (теорема 6.2) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (a_{n_k}). Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$. Покажем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|a_n - a| = |a_n - a + a_{n_k} - a_{n_k}| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|.$$

Первый модуль, то есть $|a_n - a_{n_k}|$, будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ для всех n и n_k, больших некоторого $n_0' \in \mathbb{N}$, за счет фундаментальности последовательности (a_n). Второй же модуль, то есть $|a_{n_k} - a|$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, больших некоторого $n_0'' \in \mathbb{N}$. Взяв за $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; |a_n - a| < \varepsilon, \;\; \lim_{n\to\infty} a_n = a. \blacktriangleright$$

Пример 6.1. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость последовательности $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

◀Покажем, что последовательность является фундаментальной. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в определении 6.4 номера $n_0 \in \mathbb{N}$ оценим сверху $|a_m - a_n|$, считая $m \geqslant n$

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Дальше потребуем, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и в качестве n_0 возьмем $\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right], 1\right\}$. При таком выборе n_0 будет выполняться определение фундаментальной последовательности, то есть последовательность (a_n) будет фундаментальной, а тогда (по критерию Коши) она сходится.▶

Пример 6.2. Докажите, что последовательность $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ расходится.

◀Считая $m \geqslant n$ и $n, m > n_0$, оценим снизу $|a_m - a_n|$.

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m} > \frac{m-n}{n+m-n}. \tag{6.1}$$

В (6.1) возьмем $m - n = n$. Тогда $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$. Значит, существует $\varepsilon = \frac{1}{2}$, что для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ существуют $n, m = 2n$, большие за n_0, и такие, что

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m-n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}n = \frac{1}{2},$$

то есть $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$. Таким образом, последовательность (a_n) не является последовательностью Коши, а значит, по теореме 6.3, расходится.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение:

   а) последовательности вложенных отрезков;

   б) стягивающейся последовательности отрезков.
2. Дайте определение подпоследовательности данной последовательности. Приведите примеры.
3. Сформулируйте принцип вложенных отрезков.
4. Сформулируйте теорему Больцано – Вейерштрасса об ограниченной последовательности.
5. Дайте определение фундаментальной последовательности. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Предел числовой последовательности

Задание 1. Подберите одну из формул общего члена последовательности, заданной значениями ее первых четырех членов:

$$\frac{1}{2}; -\frac{1\cdot 5}{24}; \frac{1\cdot 5\cdot 9}{720}; -\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{40320}; \dots$$

◀Чередование знака перед членами последовательности определяется множителем $(-1)^{n+1}$. Числитель дробей (членов последовательности) есть произведение, сомножители которого образуют арифметическую прогрессию с разностью прогрессии $d = 4$ и $a_1 = 1$. Значит, общий член этой прогрессии $a_n = 1 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 3$. Общий член последовательности знаменателей есть $b_n = (2n)!$.

Тогда формула общего члена последовательности имеет вид

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{(2n)!}. \blacktriangleright$$

Задание 2. Найдите формулу общего члена последовательности

$$1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1, \dots$$

◀ $a_n = (-1)^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}$, где $[x]$ – целая часть числа . ▶

Задание 3. Найдите формулу общего члена последовательности

$$1; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{4}; 5; \frac{1}{6}; 7; \frac{1}{8}, \ldots$$

◀Рассмотрим подпоследовательности данной последовательности:
а) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \ldots$ – значения членов последовательности с четными номерами;
б) $1, 3, 5, 7, \ldots$ – значения членов последовательности с нечетными номерами.
Тогда

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ n, & \text{если } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases} = \frac{1}{2n}(1 + (-1)^n) + \frac{n}{2}(1 - (-1)^n). \blacktriangleright$$

Задание 4. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентной формулой

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}\ (n \in \mathbb{N}).$$

◀Находя значения членов последовательности, получим:

$$\frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{10}{11}; \frac{22}{23}; \frac{46}{47}; \frac{94}{95}; \ldots \tag{6.2}$$

Рассмотрим последовательность числителей членов последовательности (6.2):
$k = 1$: $a_1 = 1 = 1$;
$k = 2$: $a_2 = 4 = 1 + 3$;
$k = 3$: $a_3 = 10 = 1 + 3 + 6$;
$k = 4$: $a_4 = 22 = 1 + 3 + 6 + 12$;
$k = 5$: $a_5 = 46 = 1 + 3 + 6 + 12 + 24$;
. . . .
$k = n$: $a_n = 1 + 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \ldots = 1 + \frac{3(1-2^{n-1})}{1-2} = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

Аналогично для знаменателя:
$k=1$: $b_1=2$;
$k=2$: $b_2=5=2+3$;
$k=3$: $b_3=11=2+3+6$;
$k=4$: $b_4=23=2+3+6+12$;
....
$k=n$: $b_n=2+3+6+12+24+\ldots=2+\frac{3(1-2^{n-1})}{1-2}=3\cdot 2^{n-1}-1$.
Тогда $x_n=\frac{a_n}{b_n}=1-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$. ▶

Задание 5. Докажите, что для любых действительных чисел a_k и b_k $(k=\overline{1,n})$ справедливо равенство (преобразование Абеля[4])

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\,S_k + a_n S_n,\ \ S_k=\sum_{i=1}^{k} b_i. \tag{6.3}$$

$$◀ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\,(S_k-S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=1}^{n} a_k S_{k-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{для второй суммы выполняем}\\ \text{замену } k-1=l,\ \text{полагая } S_0=0\end{array}\right] = a_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k S_k - \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1} S_l =$$

$$= a_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k S_k - a_1 S_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} S_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\,S_k + a_n S_n. ▶$$

[4]Нильс Хенрик Абель (1802–1829) – норвежский математик.

Задание 6. Выведите формулу для вычисления $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

◀Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(k^2 - (k+1)^2\right) \sum_{i=1}^{k} 1 + n^2 \sum_{k=1}^{n} 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-2k-1)\, k + n^3 = -2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k + n^3 = -2\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2n^2 - \sum_{k=1}^{n} k + n + n^3,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 2n^2 + n - \frac{1+n}{2} n\right) = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}. \ ▶$$

Задание 7. Исследовать на монотонность последовательность

$$x_n = \frac{1 + 4 + 9 + \ldots + n^2}{2n^3 + 3n^2 + n + 1}.$$

◀Используя результат предыдущего задания, получим:

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\left(n^2 + n\right)(2n+1) = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right).$$

Тогда

$$x_n = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2n^3 + 3n^2 + n}\right) + 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2\,(n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + (n+1)}\right) + 1.$$

А тогда, очевидно, $x_{n+1} > x_n$ для любых $n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность (x_n) возрастает.▶

Задание 8. Докажите, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-2n}{5n+1} = -\frac{2}{5}$.

◀Возьмем любое положительное (может быть сколь угодно малым) число $\varepsilon > 0$. Для указанного в определении предела последовательности номера $n_0 \in \mathbb{N}$ оценим сверху

$$|a_n - a| = \left|\frac{3-2n}{5n+1} + \frac{2}{5}\right| = \frac{17}{5\,(5n+1)} < \frac{17}{n}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{17}{n} < \varepsilon$. Из последнего неравенства получим $n > \frac{17}{\varepsilon}$. В качестве n_0 возьмем

$$n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{17}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

При таком выборе n_0 выполнятся определение предела последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \left(n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{17}{\varepsilon}\right]\right\}\right)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\quad \left|\frac{3-2n}{5n+1} + \frac{2}{5}\right| < \varepsilon. ▶$$

Задание 9. Докажите, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0$.

◀Покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ |x_n - 0| < \varepsilon,$$

где $x_n = \frac{1}{n^3+n+5}$.

$|x_n| = \frac{1}{n^3+n+5} < \frac{1}{n^3} < \varepsilon$ (потребуем). Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего неравенству $\frac{1}{n^3} < \varepsilon$, то есть для $n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$, будет справедливо и неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Следовательно, в качестве n_0 можно взять

$$\max\left\{1, \left[\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right]\right\}. ▶$$

Задание 10. Пусть q – число, удовлетворяющее условию $|q| > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

◀Так как $|q| > 1$, то, положив $|q| = 1 + h$ $(h > 0)$, используя формулу бинома Ньютона (1.5), получим:

$$|q^n| = |q|^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3 + \ldots$$

Так как все слагаемые в последней сумме неотрицательны, то $|q^n| > nh > E > 0$ (потребуем). Решая последнее неравенство, получим: $n > \frac{E}{h}$. Значит, если взять $n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{E}{h}\right]\right\}$, то

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; |q^n| > E, \quad \lim_{n\to\infty} q^n = \infty. \blacktriangleright$$

Задание 11. Докажите, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

◀Предположим, что последовательность x_n имеет предел, равный $a \in \mathbb{R}$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ и в частности, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ $|x_n - a| < \frac{1}{2}$. Так как $x_n = \pm 1$, то должны выполняться неравенства $|1-a| < \frac{1}{2}$ и $|-1-a| < \frac{1}{2}$, из которых будет следовать:

$$2 = |(1-a) + (a+1)| \leqslant |1-a| + |a+1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

то есть $2 < 1$. Полученное противоречие и доказывает, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.▶

Задание 12. Докажите существование предела последовательности с общим членом

$$a_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \ldots + \frac{n}{4^{n-1}}.$$

◀Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n+1}{4^{n-1}} > a_n.$$

Поэтому последовательность (a_n) монотонно возрастает. Далее для $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $n < 2^n$ (неравенство легко доказать с помощью метода математической индукции), а поэтому

$$a_n = 1 + \frac{2 \cdot 2}{2^2 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2}{2^3 \cdot 2^2} + \frac{4 \cdot 2}{2^4 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{2n}{2^n \cdot 2^{n-1}} <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant 3.$$

Итак, последовательность (a_n) монотонно возрастает и ограничена сверху. Поэтому (по теореме о пределе монотонной последовательности) существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите формулу общего члена последовательности:

$$-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{13}{7}, \frac{29}{14}, -\frac{61}{24}, \frac{125}{37}, \ldots$$

2. Исследуйте на монотонность последовательность $a_n = \frac{n!}{n^n}$.
3. Докажите, что последовательность $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.
4. Вычислите с помощью формулы преобразования Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.
5. Докажите, что последовательность $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3 \cdot 2^n + 1}$ не имеет предела.
6. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$.
7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n+5} = \frac{1}{2}$.
8. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$.

9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+6}{n+1} = 5$. Начиная с какого $n \in \mathbb{N}$ модуль $\left|\frac{5n+6}{n+1} - 5\right|$ не превосходит $0,01$?

10. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. Найдите такое $n_0 \in \mathbb{N}$, чтобы было $\frac{n^2}{2^n} < 0,0001$ при $n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$.

11. Пользуясь теоремой о пределе монотонной последовательности, докажите, что существуют пределы последовательностей:

    11.1 $x_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$;

    11.2 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

    11.3 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

    11.4 $x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;

    11.5 $x_n = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$;

    11.6 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$;

    11.7 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

12. Докажите, что для последовательности с общим членом

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{будет} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

13. Докажите, что для последовательности с общим членом

$$x_n = 1 + \lg\frac{2}{1} + \lg\frac{3}{2} + \ldots + \lg\frac{n+1}{n} \quad \text{будет} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

14. Докажите, что если последовательность имеет предел, то в ней есть или наибольший член, или наименьший член, или и тот, и другой. Приведите примеры всех трех случаев.

15. Исследуйте на сходимость последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{1^2+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2+1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right).$$

ЛЕКЦИЯ 7
Предел функции

7.1 Понятие предела функции

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и a – предельная точка X. Рассмотрим функцию $f : X \to \mathbb{R}$ (будем считать, что график функции f изображен на рисунке 7.1). Из рисунка 7.1 видно, что для любого, даже сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, можно указать такие значения $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$a - \delta_1 < x < a + \delta_2, \ \ x \neq a, \tag{7.1}$$

соответствующие значения функции $f(x)$ находятся на расстоянии меньшем чем ε от числа $A \in \mathbb{R}$ ($|f(x) - A| < \varepsilon$). В таком случае говорят, что число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции f в предельной точке $a \in \mathbb{R}$ области определения функции X и записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Замечание 7.1. Если взять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то неравенства (7.1) можно заменить двойным неравенством $0 < |x - a| < \delta$.

Теперь сформулируем определение предела функции.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и является предельной точкой множества X.

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $f : X \to \mathbb{R}$ при $x \to a$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

С использованием кванторов указанное определение можно записать короче.

Определение 7.1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A :$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \ 0 < |x - a| < \delta \ \ \ |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{7.2}$$

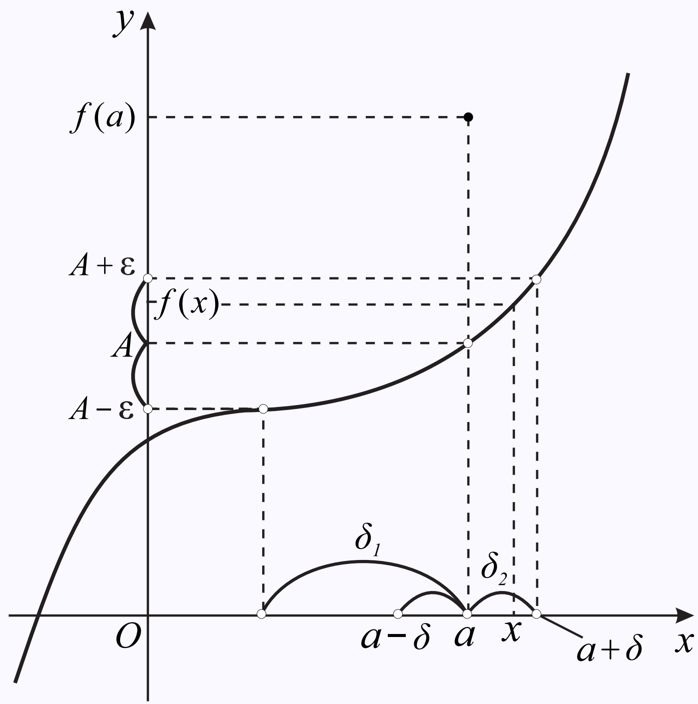


Рисунок 7.1

Определение 7.1 называют определением «на языке $\varepsilon-\delta$». Оно предложено французским математиком Огюстеном Коши и используется с начала XIX века по настоящее время, поскольку обладает необходимой математической строгостью и точностью.

В определении 7.1 функция f не обязана быть определенной в самой точке a, так как значение $f(a)$ не используется в определении. Но точка a должна быть предельной для области определения функции f.

Пример 7.1. Докажите, используя определение предела функции по Коши («на языке $\varepsilon - \delta$»), что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4}{2+x} = -\frac{1}{3}$.

◀Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Оценим сверху $|f(x) - A|$:

$$\left|\frac{3x^2-4}{2+x}+\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{|9x^2+x-10|}{|2+x|} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\,|x-1|\cdot\left|x+\frac{10}{9}\right|}{|2+x|}.$$

Введем ограничения: считаем, что $|x-1| < 1$ (в качестве правой части неравенства-ограничения можно брать число, не большее половины расстояния от $x = 1$ до ближайшего нуля для модулей $|2+x|$ и $\left|x+\frac{10}{9}\right|$). С учетом этих ограничений оценим снизу $|2+x|$ и сверху $\left|x+\frac{10}{9}\right|$.

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 2 < 2+x < 4 \Leftrightarrow 2 < |2+x| < 4.$$

Получили: $|2+x| > 2$.

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{10}{9} < x+\frac{10}{9} < \frac{28}{9} \Rightarrow \frac{10}{9} < \left|x+\frac{10}{9}\right| < \frac{28}{9}.$$

Получили: $\left|x+\frac{10}{9}\right| < \frac{28}{9}$. Тогда

$$|f(x) - A| = 3\frac{|x-1|\cdot\left|x+\frac{10}{9}\right|}{|x+2|} < 3\frac{|x-1|\cdot\frac{28}{9}}{2} = \frac{14}{3}\,|x-1|\,.$$

Потребуем, чтобы $\frac{14}{3}\,|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{3\varepsilon}{14}$. Возьмем в качестве $\delta = \min\{1, \frac{3\varepsilon}{14}\}$. При таком выборе δ будет выполняться определение предела в нашем случае.▶

Теперь рассмотрим определение предела функции в точке на «языке последовательностей» (по Гейне[1]), которое будет эквивалентным определению 7.1.

Пусть по-прежнему $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества X.

Определение 7.2. *Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $f : X \to \mathbb{R}$ в точке a, если для любой последовательности $(x_n) \subset X$, $x_n \neq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))$ сходится к A.*

Докажем, что определения 7.1 и 7.2 эквивалентны.

◀Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; \text{и} \;\; 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{7.3}$$

Рассмотрим любую последовательность точек $(x_n) \subset X$, такую, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq a$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Тогда

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \quad |x_n - a| < \delta.$$

Но из условия $0 < |x_n - a| < \delta$ согласно (7.3) следует неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \quad |f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

то есть, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $(x_n) \subset X$, такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq a$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Предположим противное, то есть, предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ что для любого $\delta > 0$ найдется такое $x \in X$, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

---

[1] Хайне Генрих Эдуард Гейне (1821–1881) – немецкий математик.

Взяв $\delta = \frac{1}{n}$, найдем такое $x_n \in X$, что из неравенства $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ будет следовать $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит условию $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.▶

Замечание 7.2. Определение 7.2 можно использовать для доказательства того, что функция в указанной точке предела не имеет. Для этого нужно найти две последовательности (x'_n) и (x''_n) такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$.

Пример 7.2. Докажите, что не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$.

◀В качестве указанных в замечании 7.2 последовательностей возьмем $x'_n = \pi n$ и $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = +\infty$, но

$$\lim_{n\to+\infty} \sin \pi n = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1. \blacktriangleright$$

Замечание 7.3. С учетом понятия окрестности точки можно сформулировать еще одно определение предела функции **«на языке окрестностей»**, которое также будет эквивалентно определениям 7.1 и 7.2.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 7.3. *Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $f : X \to \mathbb{R}$ в точке a, если*

$$\forall U_A \;\; \exists \mathring{U}_a \;\; \forall x \in X \cap \mathring{U}_a \quad f(x) \in U_A.$$

Эквивалентность определения 7.3 определению 7.1 становится очевидной, если в качестве радиуса окрестности U_A взять $\varepsilon > 0$, а в качестве радиуса окрестности U_a взять $\delta > 0$.

7.2 Единственность предела функции

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 7.1. *Если существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, *то этот предел единственный.*

◀Предположим, что существуют два предела функции f при $x \to a$, A и B.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_1 > 0 \ \ \forall x \in X \ \ 0 < |x - a| < \delta_1 \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = B : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_2 > 0 \ \ \forall x \in X \ \ 0 < |x - a| < \delta_2 \quad |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любых $x \in X$ таких, что $0 < |x - a| < \delta$:

$$0 \leqslant |A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leqslant |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ будет $0 \leqslant |A - B| < \varepsilon$, что возможно только тогда, когда $A = B$. ▶

7.3 О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 7.2. *Если существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, *то существует такая проколотая окрестность* $\mathring{U}_a$, *что функция* f *ограничена на множестве* $X \cap \mathring{U}_a$.

◀ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ 0 < |x - a| < \delta \ \ |f(x) - A| < \varepsilon, \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Значит, число $A + \varepsilon$ будет верхней гранью, а $A - \varepsilon$ – нижней гранью функции f на множестве $X \cap \mathring{U}_a$. ▶

7.4 Сохранение функцией знака предела

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 7.3. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > P$ $(A < P)$, $P \in \mathbb{R}$, *то существует такая проколотая окрестность* $\mathring{U}_a$, *что для всех* $x \in X \cap \mathring{U}_a$ *будет* $f(x) > P$ $(f(x) < P)$.

◀ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; (\varepsilon = A - P > 0) \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; 0 < |x - a| < \delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$P = A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Аналогично рассматривается случай со знаком «$<$».▶

7.5 Предельный переход в неравенствах

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 7.4. *Если для всех* x *из некоторой проколотой окрестности* $\mathring{U}_a$ *выполняется неравенство* $f(x) < g(x)$, *а* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то* $A \leqslant B$.

◀Предположим, что $A > B$. Тогда существует такое действительное число α, что $B < \alpha < A$. Однако тогда из теоремы 7.3 следует, что существует такая проколотая окрестность точки $\mathring{U}'_a \subset \mathring{U}_a$, где $f(x) > \alpha$ и $g(x) < \alpha$, а значит, $g(x) < f(x)$ в указанной окрестности. Получили противоречие. Поэтому $A \leqslant B$. Аналогично рассматривается и второй случай.▶

Замечание 7.4. То, что неравенство в общем случае нестрогое, показывает следующий пример. Возьмем $f(x) = 1$, $g(x) = 1 + x^2$ и $a = 0$. Пользуясь определением предела функции, легко показать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, то есть $A = B$. При этом существует $\mathring{U}_0$, в которой $f(x) < g(x)$.

7.6 Теорема о трех функциях

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 7.5. *Если для всех x из некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_a$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, а $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.*

◀ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$:

$$\forall U_A \;\; \exists \mathring{U}'_a \;\; \forall x \in \mathring{U}'_a \subset \mathring{U}_a \cap X \quad f(x), g(x) \in U_A.$$

Но для любых $x \in \mathring{U}_a$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, то есть, для любых $x \in \mathring{U}'_a$ будет $h(x) \in U_A$. Значит, существует $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$. ▶

Пример 7.3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

◀Возьмем любое действительное число $a > 1$. Его можно представить в виде $a = 1+\lambda$, где $\lambda = a-1 > 0$. По формуле бинома Ньютона (1.5):

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

При $n > 2$, $n - 1 > \frac{n}{2}$ и, следовательно, $a^n = (1+\lambda)^n > \frac{n^2}{4}\lambda^2$. Положим $a = \sqrt[n]{n} > 1$. Тогда $\lambda = \sqrt[n]{n} - 1$, и последнее неравенство перепишется в виде:

$$n > \frac{n^2}{4}\lambda^2, \quad \frac{4}{n} > (\sqrt[n]{n} - 1)^2 > 0.$$

Извлекая квадратный корень, получим: $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$. Пользуясь теперь теоремой о трех функциях $\left(\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0\right)$, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - 1) = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ▶

7.7 Односторонние пределы

Определение 7.4. ***Сужением функции*** *$f : X \to \mathbb{R}$ на множество $E \subset X$ называется функция (обозначается $f|_E$), определенная следующими условиями:*

1) $D(f|_E) = E$;
2) $\forall x \in E\ f|_E(x) = f(x)$.

Для множества $X \subset \mathbb{R}$ введем обозначения: $X^{a+} = X \cap (a, +\infty)$, $X^{a-} = X \cap (-\infty, a)$.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение 7.5. *Если точка a является предельной для X^{a+} (X^{a-}), то* ***правосторонним*** *(****левосторонним****)* ***пределом*** *функции f в точке a называется предел сужения $f|_{X^{a+}}$ (соответственно $f|_{X^{a-}}$).*

Левосторонний и правосторонний пределы называют **односторонними пределами**.

Обозначения для односторонних пределов:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(x+a)$ – правосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(x-a)$ – левосторонний предел.

Приведенные выше определения односторонних пределов можно сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$»:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \in \mathbb{R} :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \text{ и } a < x < a + \delta \quad |f(x) - b| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b \in \mathbb{R} :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \text{ и } a - \delta < x < a \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Из приведенных определений односторонних пределов функции и рассмотренного выше определения предела функции, а также с учетом того, что $X \setminus a = X^{a-} \cup X^{a+}$, следует справедливость следующей теоремы.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка области определения функции $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 7.6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0) = b.$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение предела функции «на языке $\varepsilon - \delta$» (по Коши), «на языке окрестностей», «на языке последовательностей» (по Гейне).
2. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела функции.
3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.
4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака предела.
5. Сформулируйте и докажите теорему о трех функциях.
6. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах. Приведите примеры, когда:

   – знак строгого неравенства сохраняется при предельном переходе;

   – знак строгого неравенства заменяется знаком равенства при предельном переходе.
7. Дайте определения односторонних пределов функции «на языке $\varepsilon - \delta$».

ЛЕКЦИЯ 8
Пределы на бесконечности. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

8.1 Пределы на бесконечности

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, причем множество X не является ограниченным сверху.

Определение 8.1. *Число A называется* ***пределом функции*** f ***на*** $+\infty$*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Delta > 0 \; \forall x \in X \;\; x > \Delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

В таком случае будем писать $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Пусть теперь множество X не является ограниченным снизу.

Определение 8.2. *Число A называется* ***пределом функции*** f ***на*** $-\infty$*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Delta > 0 \; \forall x \in X \;\; x < -\Delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

В таком случае будем писать $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Если же множество X не ограничено как сверху, так и снизу, то запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Delta > 0 \; \forall x \in X \;\; |x| > \Delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

На такие типы пределов легко распространить все теоремы 7.1 – 7.5. При этом нужно помнить, что под «окрестностью бесконечности» мы понимаем интервалы вида $(a, +\infty)$ для $+\infty$, $(-\infty, a)$ для $-\infty$ и $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ для ∞.

Приведенные выше определения пределов функции на бесконечности записаны «на языке $\varepsilon - \delta$». Используя определения и обозначения «окрестности бесконечности», введенные в замечании 1.4, определения пределов на бесконечности можно записать «на языке окрестностей». Так, например, запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ означает, что

$$\forall U_A \,\exists U_\infty \,\forall x \in X \cap U_\infty \quad f(x) \in U_A.$$

Замечание 8.1. В дальнейшем, записывая для функции $f : X \to \mathbb{R}$ предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, и указывая, что $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой множества X, будем иметь ввиду один из двух типов пределов: либо обычный предел в точке $a \in \mathbb{R}$, либо предел на бесконечности.

В таком случае запись определения предела функции «на языке окрестностей» выглядит одинаково для всех указанных типов пределов:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \ \left(a \in \overline{\mathbb{R}}\right) : \quad \forall U_A \,\exists \mathring{U}_a \,\forall x \in X \cap U_a \quad f(x) \in U_A. \tag{8.1}$$

Учитывая эквивалентность определений пределов, записанных «на языке $\varepsilon - \delta$» и «на языке окрестностей», зачастую выгодно записывать определение предела функции, «совмещая» элементы указанных определений. Например, определение предела (8.1) можно записывать так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \ \left(a \in \overline{\mathbb{R}}\right) : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \mathring{U}_a \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}_a \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечание 8.2. При использовании «языка окрестностей» важно понимать, что одним и тем же символом U_a можно обозначать разные окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$. При этом нужно помнить, что если некоторое утверждение, зависящее от x (обозначим его $P_1(x)$) справедливо для всех x из некоторой окрестности U_a, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, а утверждение $P_2(x)$ справедливо для некоторой другой окрестности U_a, то найдется такая окрестность U_a, что для всех x, принадлежащих указанной окрестности утверждения $P_1(x)$ и $P_2(x)$ будут выполняться одновременно.

Например, пусть $a \in \mathbb{R}$ и существуют такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что утверждение $P_1(x)$ справедливо для всех $x \in U(a, \delta_1) = (a - \delta_1, a + \delta_1)$, а утверждение $P_2(x)$ справедливо для всех $x \in U(a, \delta_2) = (a - \delta_2, a + \delta_2)$.

Взяв $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ получим окрестность $U(a, \delta)$, для всех точек которой утверждения $P_1(x)$ и $P_2(x)$ справедливы одновременно.

Если же существуют такие $\Delta_1, \Delta_2 > 0$, что утверждение $P_1(x)$ справедливо для всех

$$x \in U(\infty, \Delta_1) = (-\infty, -\Delta_1) \cup (\Delta_1, +\infty),$$

а утверждение $P_2(x)$ справедливо для всех

$$x \in U(\infty, \Delta_2) = (-\infty, -\Delta_2) \cup (\Delta_2, +\infty),$$

то взяв $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$ получим окрестность $U(\infty, \Delta)$, для всех точек которой утверждения $P_1(x)$ и $P_2(x)$ справедливы одновременно.

8.2 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ – предельная точка множества X.

Определение 8.3. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой** (далее – б/б) в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если*

$$\forall E > 0 \ \ \exists \mathring{U}_a \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}_a \ \ |f(x)| > E. \tag{8.2}$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Подчеркнем, что предел функции в этом случае не существует (мы лишь договариваемся записывать так условие (8.2)).

Если последнее неравенство в (8.2) заменить на $f(x) > E$, то получим определение **бесконечно большой положительной**, или того, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Если же последнее неравенство в (8.2) заменить на $f(x) < -E$, то получим определение **бесконечно большой отрицательной**, или того, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ – предельная точка множества X.

Определение 8.4. *Функция $\alpha : X \to \mathbb{R}$, называется* ***бесконечно малой*** *(далее – б/м) в точке $x = a$ (при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.*

Следующий критерий устанавливает связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.

Теорема 8.1. *f – б/б при $x \to a \Leftrightarrow \frac{1}{f}$ – б/м при $x \to a$.*

◀**Необходимость.** Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как f – б/б при $x \to a$, то

$$\forall\, E > 0 \quad \left(E = \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \exists\, \mathring{U}_a \;\; \forall\, x \in \mathring{U}_a \;\; |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
Аналогично доказывается и достаточное условие.▶

8.3 Основные свойства бесконечно малых

Справедлива следующая теорема-критерий о связи функции, имеющей предел, и бесконечно малой. Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ – предельная точка множества X, $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 8.2. *$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.*

◀**Необходимость.**

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = A : \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \mathring{U}_a \;\; \forall\, x \in X \cap \mathring{U}_a \;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть $\alpha(x) = f(x) - A$. Очевидно, что $D(\alpha) = X$. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \mathring{U}_a \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}_a \ \ |\alpha(x)| < \varepsilon, \ \ \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Таким образом, $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Достаточность. $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \mathring{U}_a \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}_a \ \ |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Так как $\alpha(x) = f(x) - A$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \mathring{U}_a \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}_a \ \ |f(x) - A| < \varepsilon, \ \ \lim_{x \to a} f(x) = A. \ \blacktriangleright$$

Теорема 8.3. *Сумма конечного числа бесконечно малых в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ есть бесконечно малая в этой точке.*

◀Пусть $\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \alpha_k(x) = 0$ $(k = \overline{1, n}, \ n \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \mathring{U}_a \ \ \forall x \in D(\alpha_k) \cap \mathring{U}_a \ \ |\alpha_k(x)| < \frac{\varepsilon}{n} \ \ (k = \overline{1, n}).$$

Пусть $D = \bigcap\limits_{k=1}^{n} D(\alpha_k)$. Тогда для любых $x \in D \cap \mathring{U}_a$

$$|\alpha(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x)| < \frac{\varepsilon}{n} n = \varepsilon, \ \ \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0. \ \blacktriangleright$$

Теорема 8.4. *Произведение ограниченной в некоторой проколотой окрестности* $\mathring{U}_a$ $(a \in \overline{\mathbb{R}})$ *функции f на бесконечно малую в точке a функцию α есть бесконечно малая в этой точке.*

◀Функция f ограничена в $\mathring{U}_a$, значит,

$$\exists\, c > 0 \ \ \forall\, x \in \mathring{U}_a \ \ |f(x)| \leqslant c.$$

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0: \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \mathring{U}_a \ \ \forall\, x \in D(\alpha) \cap \mathring{U}_a \ \ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}_a$, для всех точек которой

$$|f(x)| \leqslant c \text{ и } |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

То есть,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \mathring{U}_a \ \ \forall\, x \in \mathring{U}_a \ \ |f(x)\alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \cdot \alpha(x)\big) = 0$. ▶

Следствие 8.1. *Произведение бесконечно малой в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ на постоянную величину есть бесконечно малая в точке a.*

Следствие 8.2. *Произведение конечного числа бесконечно малых в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ есть бесконечно малая в этой точке.*

Пример 8.1. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

◀Функция $y = \sin x$ ограничена в любой окрестности U_∞. В соответствии с теоремой 8.2 функция $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Значит, по теореме 8.4, функция $\alpha(x) = \frac{\sin x}{x}$ есть б/м в точке $a = \infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. ▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение бесконечно большой функции. Приведите примеры.
2. Сформулируйте критерий о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций. Промоделируйте этот критерий на примере.
3. Дайте определение бесконечно малой функции. Приведите примеры.
4. Сформулируйте критерий о связи функции, имеющей предел, и бесконечно малой.
5. Укажите свойства бесконечно малых, связанные с арифметическими операциями над ними. Приведите примеры.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7
Предел функции

Задание 1. Используя определение предела функции по Коши (на языке «$\varepsilon - \delta$»), докажите, что

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x+3} = -\frac{1}{2}.$$

◀Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, что как только $|x+1| < \delta$, то

$$\left|\frac{2x+1}{3+x}+\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{5x+5}{2(3+x)}\right| < \varepsilon, \text{ или } \left|\frac{x+1}{x+3}\right| < \frac{2}{5}\varepsilon.$$

Так как $|x+3| = |x+1+2| \geqslant 2 - |x+1| > 2-1 = 1$, то при $|x+1| < 1$ имеем: $\left|\frac{x+1}{x+3}\right| < |x+1|$. Чтобы выполнялось неравенство $\left|\frac{x+1}{x+3}\right| < \frac{2}{5}\varepsilon$, достаточно, чтобы $|x+1| < \frac{2}{5}\varepsilon$. Таким образом, в качестве δ можно выбрать меньшее из чисел 1 и $\frac{2}{5}\varepsilon$, то есть, $\delta = \min\left\{1, \frac{2}{5}\varepsilon\right\}$. ▶

Задание 2. Используя определение предела функции по Коши (на языке «$\varepsilon - \delta$»), докажите, что

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{x+4} = 3.$$

◀Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, что как только $|x-5| < \delta$, то

$$|\sqrt{x+4}-3| = \frac{|x-5|}{\sqrt{x+4}+3} < \varepsilon.$$

Так как $\sqrt{x+4}+3 \geqslant 3$ при всех значениях x из области определения функции $f(x) = \sqrt{x+4}$, то

$$|\sqrt{x+4}-3| < \frac{|x-5|}{3}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{|x-5|}{3} < \varepsilon$. Тогда при значениях x, для которых $|x-5| < 3\varepsilon$, будет выполняться и неравенство $|\sqrt{x+4}- \, -3| < \varepsilon$. Значит, в качестве искомого $\delta > 0$ можно взять $\delta = 3\varepsilon$. ▶

Задание 3. Используя определение предела функции по Коши (на языке «$\varepsilon - \delta$»), докажите, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}.$$

◀Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\Delta>0$, что для любых $x\neq-\frac{1}{2}$ и $|x|>\Delta$

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|2x+1|}<\varepsilon.$$

Откуда $|2x+1|>\frac{1}{2\varepsilon}$. Так как $|2x+1|>|2x|-1$, то достаточно решить неравенство $|2x|-1>\frac{1}{2\varepsilon}$. Решая это неравенство, получим $|x|>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\varepsilon}\right)$. Возьмем $\Delta=\frac{2\varepsilon+1}{\varepsilon}$. Из наших рассуждений следует, что при $|x|>\Delta$ выполняется неравенство $\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. ▶

Задание 4. Докажите, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty.$$

◀Покажем, что для любого $E>0$ существует такое $\delta>0$, что для любых x, таких, что $0<|x-2|<\delta$, $\left|\frac{1}{x-2}\right|>E$. Взяв любое $E>0$, потребуем, чтобы $\left|\frac{1}{x-2}\right|>E$, или $|x-2|<\frac{1}{E}$. Следовательно, положив $\delta=\frac{1}{E}$, получим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0<|x-2|<\delta$, $\left|\frac{1}{x-2}\right|>E$. ▶

Задание 5. Используя определение предела функции по Коши (на языке «$\varepsilon - \delta$»), докажите, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0\ (n\in\mathbb{N}).$$

◀Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\Delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>\Delta$, $\left|\frac{1}{x^n}-0\right|<\varepsilon$. Решая неравенство $\frac{1}{|x|^n}<\varepsilon$, получим, что $|x|>\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$. Таким образом, в качестве Δ можно взять $\Delta=\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$. ▶

Задание 6. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=0,$$

но функция $f(x)=\cos\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ не имеет предела в точке $x=\frac{\pi}{2}$ (используя отрицание предела функции в точке по Гейне).

◀Необходимо доказать, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\,x\in D(\varphi)\text{ и }0<|x-a|<\delta\ \ |\varphi(x)-0|<\varepsilon,$$

где $\varphi(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ и $a=\frac{\pi}{2}$.

Зададимся $\forall\,\varepsilon>0$. Для нахождения указанного в определении предела $\delta>0$ оценим сверху $|\varphi(x)-0|$.

$$|\varphi(x)-0|=\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right|\leq\left|x-\frac{\pi}{2}\right|.$$

Потребуем, чтобы $|\varphi(x)|\leqslant\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$. Тогда в качестве $\delta>0$ можно взять $\delta=\varepsilon$. При таком выборе δ будет выполняться определение предела по Коши в рассматриваемом случае.

Дальше докажем, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке $x=\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим две последовательности $x'_n=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}$ и $x''_n=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2\pi n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Используя определение предела последовательности, легко показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n}=0$. А тогда, по теореме 8.2, $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=\frac{\pi}{2}$. Но соответствующие последовательности функций имеют разные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2\pi n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$. Значит, функция $f(x)$ в точке $x=\frac{\pi}{2}$ предела не имеет.▶

Задание 7. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^5(4-3\cos^2 x)}$.

$$◀\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^5(4-3\cos^2 x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)\frac{1}{4-3\cos^2 x}.$$

Используя результат задания 5, делаем вывод, что функции $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ и $\frac{1}{x^5}$ – бесконечно малые при $x\to\infty$; функции $4\frac{1}{x^3}$ и $2\frac{1}{x^4}$ – бесконечно малые (произведение постоянной на бесконечно малую) при $x\to\infty$. Значит, функция $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}$ есть бесконечно малая при $x\to\infty$ как сумма конечного числа бесконечно малых.

Покажем, что функция $\frac{1}{4-3\cos^2 x}$ ограничена в любой окрестности точки ∞.

$$\forall\, x\in\mathbb{R}:\quad 0\leqslant\cos^2 x\leqslant 1,\quad -3\leqslant -3\cos^2 x\leqslant 0,\quad 1\leqslant 4-3\cos^2 x\leqslant 4,\quad \frac14\leqslant\frac{1}{4-3\cos^2 x}\leqslant 1.$$

Тогда функция $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)\frac{1}{4-3\cos^2 x}$ есть бесконечно малая при $x\to\infty$ как произведение бесконечно малой на ограниченную. Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^5(4-3\cos^2 x)}=0$. ▶

Задание 8. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & \text{если } x\in\mathbb{J},\\ 4, & \text{если } x\in\mathbb{Q},\end{cases}$ имеет предел в точках $x=-1$ и $x=3$, равный 4, но не имеет предела в остальных точках из $\mathbb{R}$.

◀Возьмем, например, точку $x=-1$.

$$\lim_{x\to-1}f(x)=4:\quad \forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\,x\in D(f)\ \text{и}\ 0<|x+1|<\delta\ \ |f(x)-4|<\varepsilon.$$

Возьмем любое $\varepsilon>0$. Для нахождения указанного в определении предела функции $\delta>0$ оценим сверху $|f(x)-4|$.

$$|f(x)-4|=\begin{cases}|(x-1)^2-4|=|x^2-2x-3|=|x+1||x-3|, & \text{если } x\in\mathbb{J},\\ |4-4|=0, & \text{если } x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Если $x \in \mathbb{Q}$ (рациональное число), то в качестве $\delta > 0$ можно взять любое положительное действительное число, так как $0 < \varepsilon$. Если же $x \in \mathbb{J}$ (иррациональное число), то берем ограничение $|x+1| < 1$. Тогда

$$|x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+1 < 1 \Leftrightarrow -5 < x-3 < -3 \Leftrightarrow 3 < |x-3| < 5.$$

Значит, при $x \in \mathbb{J}$ $|f(x)-4| = |x+1||x-3| < 5|x+1|$. Потребуем, чтобы $5|x+1| < \varepsilon$, $|x+1| < \frac{\varepsilon}{5}$. В качестве δ возьмем $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$. При таком выборе δ будет выполняться определение предела функции в рассматриваемом случае. Аналогично доказывается, что существует $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$.

Дальше покажем, что для любого $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 3\}$ не существует предела функции $f(x)$ в точке a.

Возьмем две последовательности, сходящиеся к a: (x_n') – последовательность иррациональных чисел; (x_n'') – последовательность рациональных чисел. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n'-1)^2 = (a-1)^2$ (докажите!), а $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$.

В соответствии с определением предела функции по Гейне для существования предела функции f при $x \to a$ необходимо, чтобы $(a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=-1. \end{array}\right.$ Значит, если $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 3\}$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует.▶

Задание 9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = 1.$

◀ $x_n = 2n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}$. Так как $n < \sqrt{n^2+1} < n+2$, то имеет место неравенство $\frac{n}{n+1} < x_n < 1$. Вследствие того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$=1 (докажите!) и $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, по теореме о трех функциях получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением предела функции по Коши (на языке «$\varepsilon-\delta$»), докажите, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$. По заданным значениям $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$, $\varepsilon_3=\frac{1}{100}$ подберите соответствующие δ_1, δ_2, δ_3.
2. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2)=10$. Как подобрать $\delta>0$, чтобы из неравенства $|x-2|<\delta$ следовало неравенство $|f(x)-10|<0,01$?
3. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{3}$.
4. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$. Как должно быть выбрано $\Delta>0$, чтобы из неравенства $x>\Delta$ следовало неравенство $|f(x)-0|<0,001$?
5. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty \quad (a>1)$.
6. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.
7. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x\to\pi}\left((x-\pi)\sin\frac{1}{x-\pi}\right)=0$, но функция $f(x)=\sin\frac{1}{x-\pi}$ не имеет предела в точке $x=\pi$ (используя отрицание предела функции в точке по Гейне).
8. Докажите, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in\mathbb{J},\\ 1, & \text{если } x\in\mathbb{Q},\end{cases}$ не имеет предела ни в одной точке из $\mathbb{R}$.
9. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\in\mathbb{J},\\ 1, & \text{если } x\in\mathbb{Q},\end{cases}$ имеет предел (какой?) в точках $x=1$ и $x=-1$, но не имеет предела в остальных точках из $\mathbb{R}$.
10. Вычислите следующие пределы функций:

$$11.1\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x^2+1}\sin\frac{x-1}{2x+1};\quad 11.2\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2};\quad 11.3\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^2-3}{x^5(8-5\sin^2 x)}.$$

ЛЕКЦИЯ 9
Предел и арифметические операции

9.1 Теоремы о пределах суммы, произведения и частного

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ – предельная точка множества X; $f, g : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 9.1. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то существуют*

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B, \tag{9.1}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B. \tag{9.2}$$

◀По критерию 8.2 (необходимое условие): $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где α, β – б/м при $x \to a$. Тогда

$$f(x) + g(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x), \quad f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x).$$

Из достаточного условия критерия 8.2 следуют (9.1) и (9.2).▶

Следствие 9.1. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $c \in \mathbb{R}$, *то существует*

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 9.2. *Пусть* $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_k \in \mathbb{R})$ *– многочлен степени* n. *Тогда для любого* $a \in \mathbb{R}$ *существует* $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.

Теорема 9.2. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ $(B \neq 0)$, *то существует*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

◀Используя критерий 8.2, получим:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} = \frac{A}{B} + \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{A}{B} + \frac{1}{B}\frac{1}{g(x)}(B\alpha - A\beta),$$

где α, β – б/м при $x \to a$, $\frac{1}{B}(B\alpha - A\beta)$ – б/м при $x \to a$ (теоремы 8.3, 8.2, следствие 8.1). Докажем, что функция $\frac{1}{g}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_a$, а затем используем теорему 8.4.

$$\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0: \ \forall\,\varepsilon > 0 \ \left(\varepsilon = \frac{|B|}{2}\right) \ \exists\,\mathring{U}_a \ \forall\,x \in D(g) \cap \mathring{U}_a \ \ |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Тогда

$$\frac{|B|}{2} > |g(x) - B| \geqslant |B| - |g(x)| \Leftrightarrow |g(x)| > \frac{|B|}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{2}{|B|}.$$

Значит, функция $\frac{1}{g}$ ограничена в $\mathring{U}_a$. ▶

Следствие 9.3. *Если* $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ – *многочлены степени* n *и* m *соответственно, то для любого* $a \in \mathbb{R}$, *такого, что* $Q_m(a) \neq 0$, *существует*

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

9.2 Особые случаи пределов суммы, произведения и частного

Рассмотрим ряд упражнений, в которых получим утверждения, часто используемые при нахождении пределов.

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ – предельная точка множества X; $f, g : X \to \mathbb{R}$.

Упражнение 9.1. Докажите, что если функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ или в этой точке существует предел указанной функции, а $\lim\limits_{x\to a} = \infty$ $(+\infty$ или $-\infty)$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty \ (+\infty \text{ или } -\infty \text{ соответственно}).$$

◀Рассмотрим случай, когда функция f ограничена в $\mathring{U}_a$ (так как в случае существования конечного предела указанной функции из теоремы 7.2 следует ограниченность функции в некоторой проколотой окрестности точки a):

$$\exists\, c > 0\ \forall\, x \in \mathring{U}_a \ \ |f(x)| \leqslant c.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$:

$$\forall\, E > 0\ \ \exists\, \mathring{U}_a\ \ \forall\, x \in D(g) \cap \mathring{U}_a\ \ |g(x)| > E + c.$$

Тогда для любого $E > 0$ найдется такая проколотая окрестность $\mathring{U}_a$, для всех точек которой

$$|f+g| = |f-(-g)| \geqslant |f| - |g| > E + c - c = E,$$

значит,

$$\forall\, E > 0\ \ \exists\, \mathring{U}_a\ \ \forall\, x \in \mathring{U}_a\ \ |f+g| > E, \quad \lim_{x\to a}(f+g) = \infty. \ ▶$$

Пример 9.1. Найдите $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3x+2}{7x-5}\right)$.

◀ $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x+2}{7x-5}=\frac{5}{2}$. Значит, $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3x+2}{7x-5}\right)=\infty$. ▶

Следующие упражнения предлагается выполнить читателю самостоятельно.

Упражнение 9.2. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty\ (-\infty)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty\ (-\infty)$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty\ (-\infty).$$

Упражнение 9.3. Докажите, что если существует $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\ (A\neq0)$ или существуют $C>0$ и $\mathring{U}_a$, что для любых $x\in\mathring{U}_a$ будет $|f(x)|<C$, а $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\infty$, причем

$$\operatorname{sign}(\lim_{x\to a}f(x)g(x))=\operatorname{sign}(\lim_{x\to a}f(x))\cdot\operatorname{sign}(\lim_{x\to a}g(x)),\ \text{где}\ \operatorname{sign}\mu=\begin{cases}1, & \mu>0,\\ -1, & \mu<0,\\ 0, & \mu=0.\end{cases}$$

Замечание 9.1. Из упражнения 9.3 следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}x^n=\infty\ (n\in\mathbb{N})$, причем:

$$\lim_{x\to\infty}x^{2k}=+\infty\quad(k\in\mathbb{N}),\tag{9.3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{2k-1}=+\infty\quad(k\in\mathbb{N}),\tag{9.4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^{2k-1}=-\infty\quad(k\in\mathbb{N}),\tag{9.5}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}P_n(x)=\infty$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n\in\mathbb{N}$, причем знак бесконечности определяется знаком коэффициента при старшем члене многочлена, а также с учетом (9.3) – (9.5) для степени старшего члена.

Например, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+10x^2-5)=+\infty$.

Упражнение 9.4. Докажите, что если функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_a$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Пример 9.2. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$.

◀Функция $y = \cos x$ ограничена в любой окрестности U_∞. Значит, в соответствии с упражнением 9.4, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. ▶

Упражнение 9.5. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, а функция g ограничена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_a$ или $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Пример 9.3. Найдите $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^2-4}}{\cos x}$.

◀Функция $y = \cos x$ ограничена в любой проколотой окрестности точки 2, а $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4} = \infty$. Значит $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^2-4}}{\cos x} = \infty$. ▶

Упражнение 9.6. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $A \neq 0$, или функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_a$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Пример 9.4. Найдите $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x^2-9}$.

◀ $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1) = 10$, а $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9) = 0$. Значит $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x^2-9} = \infty$. ▶

Упражнение 9.7. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \infty, & n > m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \end{cases}$ где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно $(n, m \in \mathbb{N})$, а a_n и b_m – коэффициенты старших членов указанных многочленов.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте и промоделируйте на примерах теоремы о пределе суммы, произведения и частного.
2. Сформулируйте утверждения об особых случаях в пределах суммы, произведения и частного. Приведите к каждому случаю примеры.
3. Вычислите устно пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x + 3}; \quad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 5}{3x^4 - 5x + 2}; \quad \text{в) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 7}{x^3 - 4x^2 + 1}.$$

ЛЕКЦИЯ 10
Непрерывность функции

10.1 Понятие о непрерывности функции в точке

Определение 10.1. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной в точке** $a \in X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \text{ и } |x - a| < \delta \;\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Приведенное определение непрерывности функции в точке является определением по Коши – «на языке $\varepsilon - \delta$». На «языке окрестностей» это определение выглядит следующим образом.

Определение 10.2. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной в точке** $a \in X$, если*

$$\forall U_{f(a)} \;\; \exists U_a \;\; \forall x \in X \cap U_a \;\; f(x) \in U_{f(a)}.$$

Очевидно, что определения 10.1 и 10.2 равносильны.

Замечание 10.1. Если a – изолированная точка X, то найдется такая окрестность U_a, в которой нет других точек области определения функции f, кроме a, поэтому $f(U_a) = f(a) \in U_a$. Таким образом, функция будет непрерывной в любой изолированной точке a области определения. Это вырожденный случай непрерывности функции f в точке a.

Если же $a \in X$ предельная точка множества X, то определение 10.1 можно сформулировать следующим образом.

Определение 10.3. *Пусть $a \in X$ – предельная точка множества X. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной в точке** a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Используя понятия приращения аргумента функции и приращения функции определение непрерывности функции в точке можно сформулировать на «языке приращений».

Пусть $a \in X$. Возьмем любое $\Delta x \neq 0$, но такое, чтобы $a + \Delta x \in X$. Разность $\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a)$ называют **приращением функции** f в точке a.

Определение 10.4. *Пусть $a \in X$ – предельная точка множества X. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной в точке** a, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0$ (бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции в точке a).*

Очевидно, что определения 10.3 и 10.4 также равносильны.

Определение 10.5. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в любой точке множества $E \subset X$, то она называется **непрерывной на множестве** E.*

Замечание 10.2. Из утверждений, доказанных выше (следствия 9.2, 9.3), следует, что любой многочлен есть непрерывная функция на $\mathbb{R}$, а дробно-рациональная функция непрерывна на своей области определения.

Пример 10.1. Пользуясь определением непрерывности функции в точке «на языке $\varepsilon - \delta$» (по Коши), докажите, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

◀Пусть x_0 – любая точка из $\mathbb{R}$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в определении $\delta > 0$ для x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, оценим сверху $f(x) - f(x_0)$.

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0|\,.$$

Потребуем, чтобы $|x - x_0| < \varepsilon$. Тогда в качестве δ можно взять $\delta = \min\left\{\frac{\pi}{2}, \delta\right\}$.

При таком выборе δ будет выполняться определение (по Коши) непрерывности функции $f(x) = \sin x$ в точке x_0. Но раз точка x_0 любая из $\mathbb{R}$, то функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. ▶

Замечание 10.3. Аналогично можно доказать (докажите самостоятельно), что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

10.2 Теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного функций

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$.

Теорема 10.1. *Если функции f и g непрерывны в точке a, то функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$ (при $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a.*

◀Доказательство теоремы сводится к соответствующим теоремам о пределах суммы, произведения и частного.▶

Замечание 10.4. Из теоремы 10.1, примера 10.1 и замечания 10.3 следует, что функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна для всех $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, а функция $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна для всех $x \neq \pi n$.

10.3 О непрерывности композиции функции

Пусть на множестве X определена сложная функция $y = f(\varphi(x))$, где функция $y = f(u)$ определена на множестве $U \subset \mathbb{R}$, а функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X и $E(\varphi) \subset U$; $b \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества U, $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества X.

Теорема 10.2. *Если существуют $\lim\limits_{u\to b} f(u) = B$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$, причем существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_a$, где $\varphi(x) \neq b$, то существует $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = B$.*

$$◀ \lim_{u\to b} f(u) = B : \quad \underline{\forall \varepsilon > 0} \ \exists \sigma > 0 \ \forall u \in U \ \ 0 < |u - b| < \sigma \ \ \underline{|f(u) - B| < \varepsilon}.$$

Согласно условиям теоремы, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$, и существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_a$, где $\varphi(x) \neq b$. Поэтому

$$\forall \sigma > 0 \ \ \underline{\exists \overset{\circ}{U}_a} \ \ \underline{\forall x \in \overset{\circ}{U}_a} \ \ \ 0 < |\varphi(x) - b| < \sigma.$$

Подчеркнутые выражения говорят о справедливости заключения теоремы. ▶

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
167
Приложение
Закрыть

Замечание 10.5. Теорема будет справедлива и при $B = \infty$, а также при $x \to \infty$ и $b = \infty$, причем (в двух последних случаях) без требования существования $\mathring{U}_a$, где $\varphi(x) \neq b$.

Теорема 10.3. *Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a \in X$, а функция $y = f(u)$ – в точке $u = b \in U$, где $b = \varphi(a)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x = a$.*

◀ Справедливость теоремы вытекает из теоремы 10.2.▶

Теорема 10.4 (теорема о предельном переходе под знаком непрерывной функции). *Если существует $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = b \in U$, тогда существует $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)\right)$.*

◀Справедливость теоремы вытекает из теоремы 10.2.▶

Пример 10.2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ непрерывна на $(2, +\infty)$.

◀На $(2, +\infty)$ функция $\varphi(x) = x - 2$ непрерывна как многочлен $u = x - 2$, а функция $t = \sqrt{u}$ непрерывна на $(0; +\infty)$ (смотри пример 10.1), значит, функция $g(x) = \sqrt{x-2}$ непрерывна на $(2, +\infty)$ (теорема 10.3), причем для любых $x \in (2, +\infty)$ будет $g(x) \neq 0$. По теореме 10.1 функция f будет непрерывной на $(2, +\infty)$. ▶

10.4 Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация

Определение 10.6. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***непрерывной справа*** (***слева***) *в точке $a \in X$, если $f(a+0) = f(a)$ $(f(a-0) = f(a))$.*

Из приведенного определения и теоремы 7.6 следует справедливость следующих утверждений.

Теорема 10.5. *Если $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$, то функция $f : X \to \mathbb{R}$ будет непрерывной в точке $a \in X$.*

Следствие 10.1. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ будет непрерывной в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке как слева, так и справа.*

Определение 10.7. *Точки области определения функции $f : X \to \mathbb{R}$ в которых она не является непрерывной, называются называется* ***точками разрыва функции***.

Выше было показано, что если $a \in X$ – изолированная точка области определения функции f, то в ней функция f будет непрерывной. Поэтому для классификации точек разрыва будем рассматривать функции, определенные в некоторой окрестности точки a.

Определение 10.8. *Точка a называется* ***точкой устранимого разрыва*** *функции $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$, если односторонние пределы функции в точке a существуют и равны, но не равны значению функции в точке:*

$$f(x-a) = f(x+a) \neq f(a).$$

Определение 10.9. *Точка a называется* ***точкой разрыва первого рода*** *или* ***скачком*** *функции $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$, если односторонние пределы функции в точке a существуют, но не равны друг другу:*

$$f(x-0) \neq f(x+0).$$

Определение 10.10. *Точка x называется **точкой разрыва второго рода** функции $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$, если по крайней мере один из односторонних пределов функции в точке не существует.*

Пример 10.3. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, \ x < 0, \\ \{2x\}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x + 2, \ x > 1 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, классифицируйте их, постройте график функции.

◀Очевидно, что функция $y_1 = \frac{1}{x^2}$ непрерывна на $(-\infty, 0)$ как дробно-рациональная.
Функция $y_2 = \{2x\}$ будет непрерывной на множестве $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
Функция $y_3 = x^2 - 2x + 2$ непрерывна на $(1, +\infty)$ как многочлен.
Таким образом, функция f будет непрерывной на множестве

$$(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

Подозрительными на разрыв будут точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 1$. Исследуем их.
$\underline{x_1 = 0}$:

$$f(-0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

$$f(+0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \{2x\} = 0;$$

$$f(0) = \{2 \cdot 0\} = \{0\} = 0.$$

Значит, $x = 0$ – точка разрыва второго рода, но в этой точке функция непрерывна справа.

$\underline{x_2 = 0,5}$:

$$f(0,5-0) = \lim_{\substack{x\to 0,5\\ x<0,5}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0,5\\ x<0,5}} \{2x\} = 1;$$

$$f(0,5+0) = \lim_{\substack{x\to 0,5\\ x>0,5}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0,5\\ x>0,5}} \{2x\} = 0;$$

$$f(0,5) = \{2\cdot 0,5\} = \{0\} = 0.$$

Значит, $x = 0,5$ – точка разрыва первого рода, но функция непрерывна справа в точке $x = 0,5$.

$\underline{x_3 = 1}$:

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \{2x\} = 1;$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2-2x+2) = 1;$$

$$f(1) = \{2\cdot 1\} = \{2\} = 0.$$

Значит, $x = 1$ – точка устранимого разрыва. График функции f изображен на рисунке 10.1.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определения непрерывности функции в точке (определение «на языке $\varepsilon-\delta$», «на языке окрестностей», «на языке приращений»).
2. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями. Промоделируйте указанные теоремы примерами.
3. Сформулируйте теоремы о непрерывности сложной функции, предельном переходе под знаком непрерывной функции. Промоделируйте указанные теоремы примерами.
4. Дайте определение точки разрыва функции.
5. Дайте определения точек разрыва первого рода (точки устранимого разрыва, точки разрыва первого рода со скачком) и второго рода. Приведите примеры.

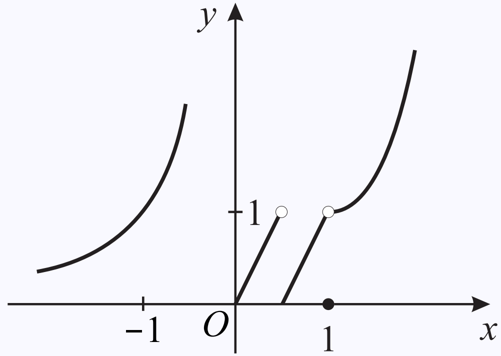


Рисунок 10.1

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

Непрерывность функции

Задание 1. Пользуясь определением непрерывности функции в точке «на языке $\varepsilon - \delta$» (по Коши), докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

◀Пусть x_0 – любая точка $\mathbb{R}_+$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Оценим сверху $|f(x) - f(x_0)|$.

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Теперь потребуем, чтобы $\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$, $|x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}$. В качестве δ возьмем любое число из промежутка $(0, \varepsilon\sqrt{x_0})$. При таком выборе δ будет выполняться определение 10.1 непрерывности функции в точке. А так как x_0 – произвольная точка $\mathbb{R}_+$, то функция будет непрерывной на $\mathbb{R}_+$. ▶

Задание 2. Пользуясь определением непрерывности функции в точке «на языке приращений», докажите, что функция $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

◀Возьмем любую точку $x \in \mathbb{R}$. Дадим ей приращение Δx и рассмотрим значение аргумента $x + \Delta x$. Тогда функция получит приращение Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{x + \Delta x}{1 + (x + \Delta x)^2} - \frac{x}{1 + x^2} =$$

$$= \frac{x + x^3 + \Delta x + x^2\Delta x - x - x^3 - 2x^2\Delta x - x(\Delta x)^2}{(1 + (x + \Delta x)^2)(1 + x^2)} = \frac{\Delta x - x^2\Delta x - x(\Delta x)^2}{(1 + (x + \Delta x)^2)(1 + x^2)}.$$

Очевидно, что при любом фиксированном x $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Значит, функция непрерывна на всей числовой оси.▶

Задание 3. Докажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{J}, \\ 1, & \text{если} x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

имеет разрыв в каждой точке своей области определения.

◀Возьмем любую точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Требуется доказать, что существует окрестность $U(f(x_0), \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ такая, что для любой окрестности $U(x_0, \delta)$ $(\delta > 0)$ существуют точки $x \in U(x_0, \delta)$, для которых

$$f(x) \notin U(f(x_0), \varepsilon).$$

Рассмотрим любую окрестность $U(x_0, \delta)$. В качестве $x \in U(x_0, \delta)$ возьмем рациональную точку из указанной окрестности, если x_0 иррациональное число, и x – иррациональную точку, если x_0 рациональное число. Тогда получим, что $|f(x) - f(x_0)| = 1$. Значит, в качестве $\varepsilon > 0$ можно взять любое действительное число из полуинтервала $(0, 1]$. Тогда $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$, то есть $f(x) \notin U(f(x_0), \varepsilon)$. ▶

В большинстве случаев непрерывность функций устанавливается на основании теорем о непрерывных функциях (теорем о сумме, разности, произведении и частном непрерывных функций, о непрерывности суперпозиции непрерывных функций).

Задание 4. Исследуйте на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - 3 + \cos x}{(x^3+1)\sin^3 x}.$$

◀Каждое слагаемое в числителе при всех значениях x есть непрерывная функция. Сумма непрерывных функций есть функция непрерывная. Знаменатель тоже функция непрерывная при всех значениях x как произведение непрерывных функций. Знаменатель обращается в 0 при $x = -1$ и $x = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Значит, рассматриваемая функция будет непрерывной при всех значениях x, кроме $x = -1$ и $x = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, где она не определена.▶

Задание 5. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{-2}, \text{ если } x < 1, \\ x^2 - 4x + 4, \text{ если } 1 \leqslant x < 3, \\ 5 - x, \text{ если } 3 \leqslant x < 6, \\ -1, \text{ если } x \geqslant 6 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, классифицируйте их, постройте график функции.

◀Очевидно, что функция $y_1 = \frac{1}{(x-1)^2}$ непрерывна на $(-\infty, 1)$ как дробно-рациональная в интервале своей области определения.

Функция $y_2 = x^2 - 4x + 4$ непрерывна на множестве $(1, 3)$ как многочлен.

Функция $y_3 = 5 - x$ непрерывна на $(3, 6)$ как многочлен.

Функция $y_4 = -1$ непрерывна на $(6, +\infty)$ как многочлен.

Таким образом, рассматриваемая функция f будет непрерывной на множестве

$$(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 6) \cup (6, +\infty).$$

Подозрительными на разрыв будут точки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$. Исследуем их.

$\underline{x_1 = 1}$:

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty;$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(x^2 - 4x + 4\right) = 1;$$

$$f(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 4 = 1.$$

Значит, $x = 1$ – точка разрыва второго рода, но в этой точке функция непрерывна справа.

$\underline{x_2 = 3}$:

$$f(3-0) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \left(x^2 - 4x + 4\right) = 1;$$

$$f(3+0) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (5 - x) = 2;$$

$$f(3) = 5 - 3 = 2.$$

Значит, $x = 3$ – точка разрыва первого рода, но функция непрерывна справа в точке $x = 3$.

$\underline{x_3 = 6}$:

$$f(6-0) = \lim_{\substack{x\to 6\\ x<6}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 6\\ x<6}} (5 - x) = -1;$$

$$f(6+0) = \lim_{\substack{x\to 6\\ x>6}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 6\\ x>6}} (-1) = -1;$$

$$f(6) = -1.$$

Так как $f(6-0) = f(6+0) = f(6)$, то в точке $x = 6$ функция непрерывна.
График функции f изображен на рисунке 10.2.▶

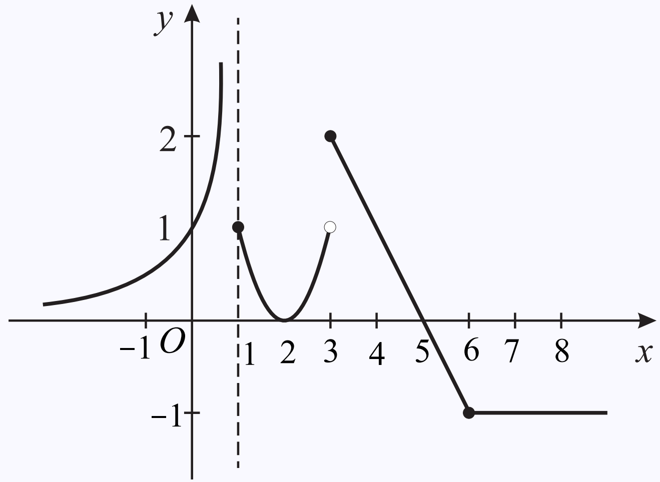


Рисунок 10.2

Задание 6. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x<0,\\ \operatorname{tg}2x, \text{ если } 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ [x]\,, \text{ если } \frac{\pi}{2}\leqslant x<3,\\ x-3, \text{ если } x\geqslant 3. \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, классифицируйте их, постройте график функции.

◀Очевидно, что функция $y_1=x$ непрерывна на $(-\infty,0)$ как многочлен.

Функция $y_2=\operatorname{tg}2x$ непрерывна на множестве $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ (следует из свойств функции $y_2=\operatorname{tg}2x$).

Функция $y_3=[x]$ непрерывна на $\left(\frac{\pi}{2},2\right)\cup(2,3)$ (следует из свойств функции $y_3=[x]$).

Функция $y_4=x-3$ непрерывна на $(3,+\infty)$ как многочлен.

Таким образом, рассматриваемая функция f будет непрерывной на множестве

$$(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\right) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

Подозрительными на разрыв будут точки $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Исследуем их.

$\underline{x_1 = 0}$:

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x = 0;$$

$$f(0+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{tg} 2x = 0;$$

$$f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Так как $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$, то в точке $x = 0$ функция непрерывна.

$\underline{x_2 = \frac{\pi}{2}}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} 2x = 0;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \left[\frac{\pi}{2}\right] = 1;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

Значит, $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва первого рода, но функция непрерывна справа в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

$\underline{x_3 = 2}$:

$$f(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} [x] = 1;$$

$$f(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} [x] = 2;$$

$$f(2) = [2] = 2.$$

Значит, $x = 2$ – точка разрыва первого рода, но функция непрерывна справа в точке $x = 2$.

$\underline{x_4 = 3}$:

$$f(3-0) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} [x] = 2;$$

$$f(3+0) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-3) = 0;$$

$$f(3) = 3 - 3 = 0.$$

Значит, $x = 3$ – точка разрыва первого рода, но функция непрерывна справа в точке $x = 3$.

График функции f изображен на рисунке 10.3.►

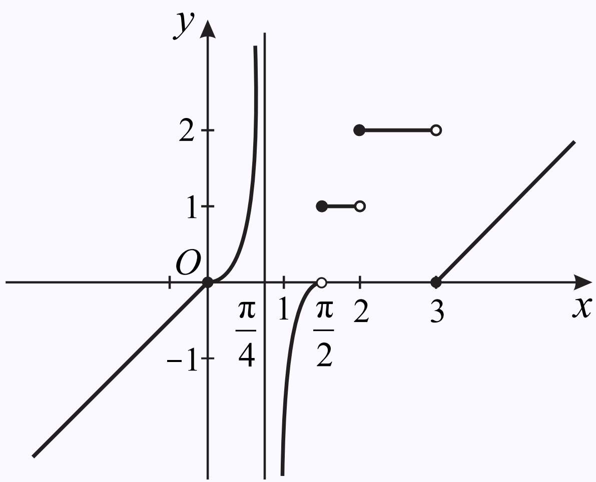


Рисунок 10.3

Задания для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением непрерывности функции в точке «на языке $\varepsilon - \delta$» (по Коши), докажите непрерывность функций $f : X \to \mathbb{R}$:

   1.1 $f(x) = \frac{x+3}{2-3x}$ в точке $x = \frac{1}{2}$;

   1.2 $f(x) = \operatorname{arctg} x \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   1.3 $f(x) = x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   1.4 $f(x) = \sqrt[3]{x} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Пользуясь определением непрерывности функции в точке «на языке приращений», докажите непрерывность функций:

   2.1 $f(x) = x^2 - 3x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   2.2 $f(x) = \arcsin x \ \forall x \in (-1, 1)$;

   2.3 $f(x) = 2^x \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   2.4 $f(x) = \sqrt[3]{x} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, разности, произведения, частного и суперпозиции функций, а также результатами, полученными при выполнении предыдущих заданий, докажите непрерывность следующих функций:

   3.1 $f(x) = \sin 3x \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   3.2 $f(x) = 2^{\frac{1}{1+x^2}} \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   3.3 $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\cos \frac{x}{2}\right) \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   3.4 $f(x) = \sin^3 2x + 2^{3x}(x^2 - x - 1) \ \forall x \in \mathbb{R}$;

4. Для функций, приведенных ниже, укажите множество точек, в которых они непрерывны, найдите точки разрыва, классифицируйте их, постройте графики функций:

   4.1. $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$;

4.2. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, \text{ при } x\neq 1, \\ 4, \text{ при } x=1; \end{cases}$

4.3. $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \text{ при } x\neq 0, \\ a, \text{ при } x=0; \end{cases}$

4.4. $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$;

4.5. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ при } x\leqslant 0, \\ 1-x, \text{ при } 0<x\leqslant 1, \\ \frac{1}{1-x}, \text{ при } x>1; \end{cases}$

4.6. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ при } x\leqslant 0, \\ 1, \text{ при } x=0, \\ \operatorname{tg}x+1, \text{ при } x>0; \end{cases}$

4.7. $f(x)=\begin{cases} -3\sqrt{1-2x}+2, \text{ если } |x+2|<2, \\ -(x+2)^2-3, \text{ если } x\leqslant -4, \\ [1+2x]\,, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg}\left(x-\frac{1}{2}\right), \text{ если } x>\frac{1}{2}. \end{cases}$

4.8. $f(x)=\begin{cases} |x|, \text{ если } |x|>2, \\ 0,5(\{-x\}+4), \text{ если } 1\leqslant |x|\leqslant 2, \\ (x+1)^{-2}+2, \text{ если } -1<x<1. \end{cases}$

5. Доопределите функцию $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ в точке $x=0$ так, чтобы новая функция стала непрерывной в точке $x=0$.

6. Исследуйте на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\in\mathbb{Q}, \\ -x^2, & \text{если } x\in\mathbb{J}. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

Техника вычисления пределов

Задание 1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^4-2x^2+1}{10x^5-x^4+3}$.

◀С учетом того, что $x=0$ не является нулем знаменателя и следствия 9.3, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^4-2x^2+1}{10x^5-x^4+3}=\frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

Во многих случаях отыскание предела функции, заданной аналитически, при стремлении аргумента к некоторой точке (конечному числу или к одной из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$), выполняемое формальной подстановкой соответствующего значения вместо аргумента в формулу, задающую рассматриваемую функцию, приводит к выражениям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (0^0), (∞^0), (1^∞) и другим. Они называются **неопределенностями**, так как по ним нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о нахождении его значения (если он существует). В этом случае вычисление предела называется раскрытием неопределенности.

Задание 2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3-8}$.

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x+x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2-4)+(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+4}=\frac{3}{4}. \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$.

$$◀ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}=\frac{1}{2}. ▶$$

Задание 4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

$$◀ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}. ▶$$

Задание 5. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}\right)\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}{x\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}=-\frac{2}{3}. ▶$$

Задание 6. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}$.

$$◀ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} + \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)(x+2)}(\sqrt{x}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}. ▶$$

Задание 7. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

$$◀ \lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{Введем замену } x = z^{15},\\ z\to -1 \text{ при } x\to -1\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{1+z^5}{1+z^3} = \lim_{z\to -1}\frac{(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{z^4-z^3+z^2-z+1}{z^2-z+1} = \frac{5}{3}. ▶$$

Задание 8. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}$.

$$◀ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{Введем замену } x = z+1,\\ z\to 0 \text{ при } x\to 1\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^2-3(z+1)^{11}+2}{(z+1)^{50}+2(z+1)^{30}-3} = \left[\text{используем формулу бинома Ньютона (1.6)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z^2+2z+1-3\sum\limits_{k=0}^{11} C_{11}^k z^{11-k}+2}{\sum\limits_{k=0}^{50} C_{50}^k z^{50-k} + 2\sum\limits_{k=0}^{30} C_{30}^k z^{30-k} - 3} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z^2+2z+3-3\left(\sum\limits_{k=0}^{9} C_{11}^k z^{11-k} + C_{11}^{10} z + C_{11}^{11}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{48} C_{50}^k z^{50-k} + C_{50}^{49} z + C_{50}^{50} + 2\left(\sum\limits_{k=0}^{28} C_{30}^k z^{30-k} + C_{30}^{29} z + C_{30}^{30}\right) - 3} =$$

$$= \left[\forall\, n \in \mathbb{N}\ C_n^n = 1,\ C_n^{n-1} = n\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+2z-3\sum\limits_{k=0}^{9} C_{11}^k z^{11-k} - 3\cdot 11z}{\sum\limits_{k=0}^{48} C_{50}^k z^{50-k} + 50z + 2\sum\limits_{k=0}^{28} C_{30}^k z^{30-k} + 2\cdot 30z} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z\left(z+2-3\sum\limits_{k=0}^{9} C_{11}^k z^{10-k} - 33\right)}{z\left(\sum\limits_{k=0}^{48} C_{50}^k z^{49-k} + 50 + 2\sum\limits_{k=0}^{28} C_{30}^k z^{29-k} + 60\right)} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z+2-3\sum\limits_{k=0}^{9} C_{11}^k z^{10-k} - 33}{\sum\limits_{k=0}^{48} C_{50}^k z^{49-k} + 50 + 2\sum\limits_{k=0}^{28} C_{30}^k z^{29-k} + 60} = \frac{2-33}{50+60} = -\frac{31}{110}. \blacktriangleright$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть

Задание 9. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$.

◀Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(\sin x+1)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)}{2(\sin x-1)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}+1}{\sin\frac{\pi}{6}-1}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3.\ ▶$$

Задание 10. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$.

$$◀\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{l}\cos x+1=2\cos^2\frac{x}{2},\\ \cos x-1=-2\sin^2\frac{x}{2},\\ \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.\ ▶$$

Задание 11. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{20}-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{20}}{x^{20}}$.

$$◀\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{20}-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{20}}{x^{20}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{20}\left(\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^{20}-\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^{20}\right)}{x^{20}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^{20}-\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^{20}\right) = (1-1)^{20}-(1+1)^{20} = -2^{20}. \blacktriangleright$$

Задание 12. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-1}}$.

◀Разделим числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$. Получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{\sqrt[6]{x}}+\frac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \blacktriangleright$$

Задание 13. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

◀Приводим дробь к общему знаменателю и используем следствие 9.7:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1} = \frac{1}{4}. \blacktriangleright$$

Задание 14. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0. \blacktriangleright$$

Задание 15. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^5+x^3+1)}$.

$$◀\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^5+x^3+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^5\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{5\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}\right)}{\ln x\left(5+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}{\ln x}\right)}=\frac{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}\right)}{5+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}{\ln x}\right)}=\frac{2}{5}.\ ▶$$

Задание 16. Докажите, что последовательность $x_{n+1}=\frac{4}{3}x_n-x_n^2$, $x_1=\frac{7}{6}$, имеет предел и найдите его.
◀Докажем, что последовательность возрастает, начиная с $n=2$.

$$x_{n+1}-x_n=\frac{4}{3}x_n-x_n^2-x_n=x_n\left(\frac{1}{3}-x_n\right). \qquad (10.1)$$

Покажем, что $0<x_n<\frac{1}{3}$ для $n\geqslant 2$.
Для доказательства будем использовать метод математической индукции.
1. При $n=2$ имеем $x_2=\frac{7}{36}<\frac{1}{3}$.
2. Предположим, что $0<x_k<\frac{1}{3}$. Докажем, что тогда $0<x_{k+1}<\frac{1}{3}$. В самом деле,

$$-\frac{1}{3}<-x_k<0\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{2}{3}-x_k<\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{1}{9}<\left(\frac{2}{3}-x_k\right)^2<\frac{4}{9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{4}{9}<-\left(\frac{2}{3}-x_k\right)^2<-\frac{1}{9}\Rightarrow 0<\frac{4}{9}-\left(\frac{2}{3}-x_k\right)^2<\frac{1}{3},$$

т. е., $0<x_{k+1}<\frac{1}{3}$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $n \geqslant 2$ будет $0 < x_n < \frac{1}{3}$.

С учетом доказанного неравенства $0 < x_n < \frac{1}{3}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и равенства (10.1) заключаем, что последовательность (x_n) возрастает при $n \geqslant 2$. Также видно, что последовательность ограничена сверху при $n \geqslant 2$. На основании теоремы о пределе монотонной последовательности заключаем, что последовательность сходится и ее предел равен точной верхней грани.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Перейдя к пределу в рекуррентном соотношении

$$x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2,$$

получим: $a = \frac{4}{3}a - a^2$, $a = 0$ или $a = \frac{1}{3}$. Так как число 0, очевидно, не является точной верхней гранью последовательности (x_n), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$. ►

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите пределы функций:

1.1 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+3x^2-1}$;

1.2 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x-1}{x^3+1}$;

1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$;

1.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2-3x}{2x^2-9x}$;

1.5 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^5-3x^4+7x-1}{3x^5+2x^3-3}$;

1.6 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3-2x+10}{5x^2+3x-1}$;

1.7 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3-3x^2+5}{3x^4-7x+1}$;

1.8 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

1.9 $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{9x^2-x+3}}$;

1.10 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

1.11 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

1.12 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

1.13 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

1.14 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+2\operatorname{ctg} x}{(\pi-x)\sin\frac{x}{2}}$;

1.15 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

1.16 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

1.17 $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

1.18 $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

1.19 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+1)^5-(1-3x^2)^6}{3x^2-x^3}$;

1.20 $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, $n\in\mathbb{N}$;

1.21 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in\mathbb{N}$;

1.22 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3}{2x}+\frac{7}{3-\sqrt[3]{x}}+1\right)$;

1.23 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x}-3}+\frac{2x-1}{4x^2-1}\right)$;

1.24 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln(3+e^{2x})}$.

2. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 11

Непрерывность монотонной функции. Непрерывность элементарных функций

11.1 Предел монотонной функции

Определение 11.1. *Точка a ($a \in \mathbb{R}$ или $a = +\infty$) называется* ***левосторонней предельной точкой*** *области определения функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для любого $\delta > 0$ на множестве $\mathring{U}^-(a, \delta) = (a - \delta, a)$ есть бесконечно много точек множества X.*

Определение 11.2. *Точка a ($a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$) называется* ***правосторонней предельной точкой*** *области определения функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для любого $\delta > 0$ на множестве $\mathring{U}^+(a, \delta) = (a, a + \delta)$ есть бесконечно много точек множества X.*

Замечание 11.1. Множества $\mathring{U}^-(a, \delta)$ и $\mathring{U}^+(a, \delta)$ соответственно называются *левосторонними* и *правосторонними проколотыми окрестностями* точки a радиуса $\delta > 0$.

Теорема 11.1. *Если a – левосторонняя предельная точка области определения функции $f : X \to \mathbb{R}$ и f – неубывающая (невозрастающая) функция на множестве $A = X \cap (-\infty, a)$, то*

$$\exists \lim_{x \to a-0} f(x) = \sup_A \{f(x)\} \tag{11.1}$$

$$\left(\exists \lim_{x \to a-0} f(x) = \inf_A \{f(x)\}\right). \tag{11.2}$$

◀Рассмотрим случай, когда функция f неубывающая и ограничена сверху на множестве A, $a \in \mathbb{R}$. Из свойства непрерывности множества действительных чисел следует, что существует $\sup\limits_{x \in A}\{f(x)\} = \alpha \in \mathbb{R}$. А тогда (2-е характеристическое свойство точной верхней грани)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x' \in A \ \ f(x') > \alpha - \varepsilon.$$

В качестве δ возьмем $\delta = a - x'$. Раз функция неубывающая на A, то она будет неубывающей и на $X \cap [a-\delta, a) = X \cap [x', a) \subset A$, и для любых $x \in (a-\delta, a) \cap X$ $f(x) \geqslant f(x') > \alpha - \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \cap \mathring{U}^{-}(a, \delta) \;\; f(x) > \alpha - \varepsilon, \;\; f(x) - \alpha > -\varepsilon,$$

а с учетом первого характеристического свойства точной верхней грани,

$$\forall x \in A \;\; f(x) \leqslant \alpha < \alpha + \varepsilon, \;\; f(x) - \alpha < \varepsilon,$$

то есть $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Равенство (11.1) доказано для рассматриваемого случая. Аналогично доказывается и (11.2).►

Аналогично можно доказать следующую теорему, равнозначную теореме 11.1.

Теорема 11.2. *Если a – правосторонняя предельная точка области определения функции $f : X \to \mathbb{R}$ и f – неубывающая (невозрастающая) функция на множестве $B = X \cap (a, +\infty)$, то*

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = \inf_{B} \{f(x)\}$$

$$\left(\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = \sup_{B} \{f(x)\} \right).$$

11.2 Точки разрыва монотонной функции

Теорема 11.3. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ монотонна на X, то она может иметь только точки разрыва первого рода.*

◄Предположим, что на X функция является неубывающей. И пусть $x = a$ точка разрыва функции f (она может быть только предельной точкой X, потому что любая изолированная точка области определения есть точка непрерывности). Рассмотрим сначала случай, когда $x = a$ является как правосторонней, так и левосторонней предельной точкой X. Введем обозначения: $X_a^{-} = \{x \in X : \; x < a\}$

и $X_a^+ = \{x \in X : x > a\}$. Очевидно, что на X_a^- для функции f выполняются условия теоремы 11.1, а на X_a^+ – теоремы 11.2. Значит, существуют $f(a-0)$ и $f(a+0)$, потому что

$$f(a-0) = \sup_{X_a^+}\{f(x)\} \leqslant f(x'),$$

где x' – любая точка из X_a^+ (точная верхняя грань не больше любой верхней грани), аналогично и для $f(a+0) = \inf_{X_a^+}\{f(x)\} \geqslant f(x'')$, где x'' – любая точка из X_a^-.

Значит, $x = a$ – точка разрыва первого рода. Если же $x = a$ – односторонняя предельная точка, то обязательно $a \in X$, так как при $a \notin X$ $x = a$ – не точка разрыва.

Теперь предположим, что $x = a$ – левосторонняя предельная точка, тогда на X_a^- для функции f выполняются условия теоремы 11.1, значит, существует $f(a-0) \leqslant f(a)$ (где $f(a-0)$ – точная верхняя грань множества значений f на X_a^-, а $f(a)$ – верхняя грань – функция на $X_a^- \cup \{a\}$ является неубывающей), таким образом, $f(a-0) \in \mathbb{R}$.

Итак, $x = a$ – точка разрыва первого рода (точка устранимого разрыва).►

Следствие 11.1. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ является неубывающей (невозрастающей) на X, то для любой ее предельной с двух сторон точки $a \in X$ будет справедливо неравенство $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0)$.*

11.3 Условия непрерывности монотонной функции

Определение 11.3. ***Точкой прикосновения множества*** *E называют предельную или изолированную точку множества E.*

Определение 11.4. ***Дыркой в числовом множестве*** *E называется всякий интервал (a, b), точки которого не принадлежат E, а концы $x = a$ и $x = b$ – точки прикосновения для E.*

Теорема 11.4. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ монотонна в своей области определения X, а множество ее значений $E(f)$ есть промежуток, то f – непрерывна на X.*

◀Предположим, что f – неубывает на X. Возьмем любую точку $x = a$ – точку прикосновения X и $a \in X$. Если a – изолированная точка области определения, то $x = a$ – точка непрерывности функции f. Предположим, что $x = a$ – предельная точка (с двух сторон) X. Согласно следствию 11.1, если $a \in X$, то $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0)$.

Если $x = a$ – точка разрыва, то $f(a-0) < f(a)$ или $f(a) < f(a+0)$. А тогда $(f(x_0-0), f(x_0))$ или $(f(x_0), f(x_0+0))$ будет дыркой для $E(f)$ – противоречие, так как $E(f)$ – промежуток.

Если $x = a$ – односторонняя предельная точка, например левосторонняя, то $x = a$ тоже будет точкой непрерывности функции f, так как в противном случае было бы $f(a-0) < f(a)$. Тогда снова интервал $(f(a-0), f(a))$ был бы дыркой для $E(f)$.

Аналогично выглядит доказательство и для случая правосторонней предельной точки.▶

11.4 Непрерывность обратной функции

Здесь через $< a, b >$ будем обозначать любой промежуток числовой прямой (возможны случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$). В случае, когда функция $f :< a, b > \to \mathbb{R}$ не задана на концах промежутка, условимся понимать $f(a)$ как $f(a+0)$, а $f(b)$ – как $f(b-0)$.

Если функция $f :< a, b > \to \mathbb{R}$ возрастает на промежутке $< a, b >$, то множество ее значений $E(f)$ есть промежуток $< f(a), f(b) >$; если же f убывает на промежутке $< a, b >$, то $E(f) =< f(b), f(a) >$.

Теорема 11.5. *Если функция $f :< a, b > \to \mathbb{R}$ непрерывна и возрастает (убывает) на промежутке $< a, b >$, то:*

1) *на $E(f)$ существует обратная функция f^{-1};*

2) *f^{-1} – возрастает (убывает) на $E(f)$;*

3) *f^{-1} – непрерывна на $E(f)$.*

◀Первых два утверждения доказаны в теореме 4.15. Докажем последнее утверждение. Функция f^{-1} монотонная на $E(f) = D(f^{-1})$; $E(f^{-1}) = D(f) =< a, b >$ – промежуток, тогда (теорема 11.4) функция f^{-1} непрерывна на $E(f) = D(f^{-1})$. ▶

11.5 Непрерывность элементарных функций

На предыдущей лекции было показано, что любой многочлен непрерывен в каждой точке числовой оси $\mathbb{R}$; всякая рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ и $Q(x)$ многочлены) непрерывна во всех точках числовой оси $\mathbb{R}$, в которых ее знаменатель $Q(x)$ не обращается в нуль; функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на всей числовой оси $\mathbb{R}$; функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны при всех x, при которых $\cos x$ (соответственно $\sin x$) не обращаются в нуль.

Из теоремы 11.5 и из непрерывности и строгой монотонности функций $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$, $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$ следует, что каждая из обратных тригонометрических функций непрерывна в области своего определения: $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ – на отрезке $[-1, 1]$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ – на $\mathbb{R}$.

Теперь докажем непрерывность показательной функции $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$.

Теорема 11.6. *Показательная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.*

◀Возьмем любое $x_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим случай, когда $a > 1$ (случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично). Покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ |x - x_0| < \delta \ \ |a^x - a^{x_0}| < \varepsilon,$$

или, что то же самое, $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon a^{-x_0} = \varepsilon_1$. Заметим, что можно ограничиться случаем $\varepsilon_1 < 1$.

Возьмем любое число $0 < \varepsilon_1 < 1$ и рассмотрим точки x, удовлетворяющие неравенству $|x - x_0| < \delta$, где $\delta = \frac{\varepsilon_1}{a+1}$. Решая неравенство $|x - x_0| < \delta$, получим $-\delta < x - x_0 < \delta$. Так как $a > 1$, то функция $f(x) = a^x$ возрастает на $\mathbb{R}$, а тогда

$$a^{-\delta} < a^{x-x_0} < a^{\delta}, \ \ a^{-\delta} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta} - 1.$$

Сначала докажем, что $a^{\delta}-1<\varepsilon_1$. Положим

$$k=\left[\frac{1}{\delta}\right]=\left[\frac{a+1}{\varepsilon_1}\right]\geqslant\left[\frac{a+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right]=\left[\frac{a}{\varepsilon_1}\right]+1>\frac{a}{\varepsilon_1}. \tag{11.3}$$

Тогда $\frac{1}{\delta_1}\geqslant k$, то есть $\delta_1\leqslant\frac{1}{k}$.

Применяя неравенство Бернулли (1.8) и неравенство (11.3), получим:

$$(1+\varepsilon_1)^k>1+\varepsilon_1 k>1+\varepsilon_1\frac{a}{\varepsilon_1}>a.$$

А тогда $1+\varepsilon_1>a^{\frac{1}{k}}\geqslant a^{\delta}$.

Отсюда следует, что $a^{\delta}-1<\varepsilon_1$,

$$a^{-\delta}>\frac{1}{1+\varepsilon_1}=1-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}>1-\varepsilon_1.$$

Окончательно имеем:

$$-\varepsilon_1<a^{-\delta}-1<a^{x-x_0}-1<a^{\delta}-1<\varepsilon_1,$$

следовательно, $|a^{x-x_0}-1|<\varepsilon_1$.

Таким образом, по определению 10.1, функция $y=a^x$ $(a>1)$ непрерывна в точке $x_0\in\mathbb{R}$, а так как x_0 – произвольная точка числовой оси $\mathbb{R}$, то показательная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. ▶

Следствие 11.2. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$ *непрерывна на* $(0,+\infty)$.

◀Из теоремы 11.5 и из непрерывности и строгой монотонности функции $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ следует непрерывность логарифмической функции $y=\log_a x$ на области ее определения, то есть на

$$D(\log_a x)=(0,+\infty).\ ▶$$

Следствие 11.3. *Степенная функция $y = x^\alpha$ непрерывна на $(0, +\infty)$.*

◀Из определения логарифма следует, что $x = e^{\ln x}$, а поэтому $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, то есть x^α есть композиция показательной функции e^u и логарифмической функции, умноженной на постоянную: $u = \alpha \ln x$. Показательная функция непрерывна на $\mathbb{R}$, а логарифмическая функция непрерывна на $(0, +\infty)$, поэтому, в силу теоремы 10.3 о непрерывности композиции непрерывных функций, функция x^α также непрерывна на $(0, +\infty)$. ▶

Замечание 11.2. При рассмотрении функции $y = x^\alpha$ предполагалось, что $x > 0$, так как при $x \leqslant 0$ выражение x^α имеет смысл не для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Однако, если α рационально и x^α имеет смысл при $x < 0$ (например, x^2, $\frac{1}{x^3}$, $\sqrt[5]{x}$), то функция $y = x^\alpha$ будет при $\alpha > 0$ непрерывна на всей действительной оси, а при $\alpha < 0$ – на всей действительной оси, кроме точки $x = 0$. При $x \neq 0$ это непосредственно следует из следствия 11.3, так как функция $y = x^\alpha$, если она определена, и для всех $x < 0$, будет всегда четной или нечетной, а если четная или нечетная функция непрерывна при $x > 0$, то она непрерывна и при $x < 0$ (почему?). Если же в точке $x = 0$ четная или нечетная функция непрерывна справа и равна нулю, то она просто непрерывна в этой точке (почему?). Этот случай имеет место при $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha = 0 = 0^\alpha$, так как $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$, поэтому в этом случае функция x^α непрерывна и при $x = 0$.

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и композиций основных элементарных функций, называется **элементарной функцией**.

Из непрерывности основных элементарных функций на множествах их определения, из свойств пределов функций, связанных с арифметическими действиями над функциями (теоремы 9.1–9.2), и непрерывности композиции непрерывных функций (теорема 10.3) следует непрерывность любой элементарной функции на множестве ее определения.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о пределе монотонной функции.
2. Сформулируйте теорему о точках разрыва монотонной функции.
3. Сформулируйте условия непрерывности монотонной функции.
4. Сформулируйте теорему о непрерывности обратной функции.
5. Докажите непрерывность всех основных элементарных функций на областях их определения.

ЛЕКЦИЯ 12

Эквивалентные бесконечно малые. Раскрытие неопределенностей

12.1 Сравнение бесконечно малых

Обозначим через O_a класс тех б/м при $x \to a$, для каждой из которых существует проколотая окрестность точки a, где эта б/м определена и отлична от нуля.

Определение 12.1. *Пусть $\alpha, \beta \in O_a$. Говорят, что α является б/м более высокого порядка, чем β, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ (обозначают: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$).*

Если же $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, то говорят, что α и β б/м одного и того же порядка, причем, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α и β называются эквивалентными б/м (обозначают: $\alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \beta(x)$).

Используя определение 12.1, легко показать, что отношение эквивалентности бесконечно малых в точке a обладает свойствами:

1) $\alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$ (рефлексивность);
2) $\alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \beta(x) \Rightarrow \beta(x) \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$ (симметричность);
3) $\alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \beta(x)$, $\beta(x) \overset{x\to a}{\sim} \delta(x) \Rightarrow \alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \delta(x)$ (транзитивность).

Теорема 12.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

◀Имеем дело с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.
Докажем, что для любого $x\in \mathring{U}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. Используем рисунок 12.1.
Для $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$S_{\Delta OBP_0}<S_{\text{сект.}OBmP_0}<S_{\Delta ODP_0},$$

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}\cdot x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

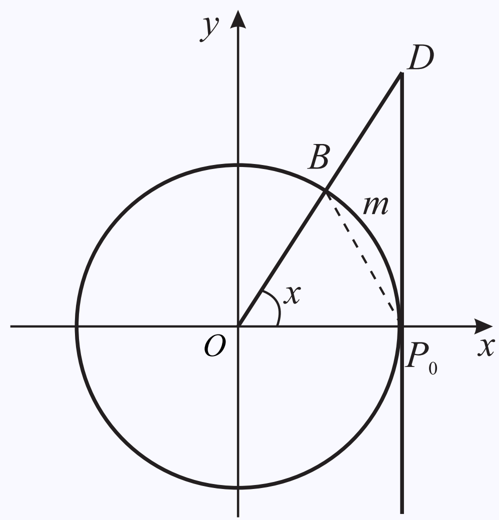


Рисунок 12.1

Если же $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, то $(-x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Значит, для всех $x \in \mathring{U}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.
Так как функция $y = \cos x$ непрерывна на $\mathbb{R}$, получим, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.
Далее, используя теорему 7.5, получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ▶

Замечание 12.1. Из теорем 12.1 и 10.2 следует, что если $\alpha \in O_a$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Пример 12.1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$.

$$◀ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{3x}{2x \cdot \cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2\cos 3x} = \frac{3}{2}. ▶$$

12.3 Второй замечательный предел

Выше было показано, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Теперь покажем справедливость равенства

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

которое называется вторым замечательным пределом.

◀Сначала докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{12.1}$$

Пусть $x>1$, тогда для $n=[x]$, $n\leqslant x<n+1$ получим:

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Пусть $x\to+\infty$, тогда $n=[x]\to+\infty$. Используя теорему 7.5, доказываем справедливость (12.1).

Теперь докажем, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{12.2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left[\begin{array}{l} y=-x,\\ y\to+\infty \text{ при } x\to-\infty\end{array}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{-x}\right)^{-x}}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)^y}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}}\right)^y=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.$$

Равенство (12.2) доказано. Из (12.1) и (12.2) следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \blacktriangleright \tag{12.3}$$

Замечание 12.2. Используя теорему 10.2, второй замечательный предел (12.3) и равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, получим:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{12.4}$$

Причем, если $\alpha\in O_a$, то

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e,$$

а если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e.$$

12.4 Три замечательных предела

Теорема 12.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{12.5}$$

◀В силу непрерывности логарифмической функции (следствие 11.2), теоремы о предельном переходе под знаком непрерывной функции 10.4 и равенства (12.4) получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.\ ▶$$

Замечание 12.3. Используя теоремы 10.2 и 12.2, получим, что если $\alpha\in O_a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\alpha(x)\right)}{\alpha(x)}=1.$$

Теорема 12.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \ 0<a\neq 1. \tag{12.6}$$

◀Пусть $f(u)=\frac{\log_a(1+u)}{u}$. В соответствии с (12.5), $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=\frac{1}{\ln a}$. Пусть $u=\varphi(x)==a^x-1$. В силу непрерывности показательной функции, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$. А в соответствии с теоремой 10.2, $\lim\limits_{x\to 0}f(\varphi(x))=1$. Но $f(\varphi(x))=\frac{x}{a^x-1}$. Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{a^x-1}=\frac{1}{\ln a}$. С использованием теоремы 9.2, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{a^x-1}}=\ln a.\ ▶$$

Замечание 12.4. Используя теоремы 10.2 и 12.3, получим, что если $\alpha\in O_a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a,\ \ 0<a\neq 1.$$

Теорема 12.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\beta-1}{x}=\beta. \tag{12.7}$$

◀Пусть $f(u)=\frac{e^u-1}{u}$. В соответствии с (12.5), $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=1$. Пусть

$$u=\varphi(x)=\ln(1+x)^\beta,\quad \beta\neq 0.$$

В силу непрерывности логарифмической функции (теорема 11.2) $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$. А в соответствии с теоремой 10.2, $\lim\limits_{x\to 0}f(\varphi(x))=1$. Но

$$f(\varphi(x))=\frac{e^{\ln(1+x)^\beta}-1}{\ln(1+x)^\beta}=\frac{(1+x)^\beta-1}{\beta\ln(1+x)}.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\beta-1}{\beta\ln(1+x)}=1$. Тогда $(1+x)^\beta-1\overset{x\to 0}{\sim}\beta\ln(1+x)$. Из равенства (12.5) следует, что

$$\beta\ln(1+x)\overset{x\to 0}{\sim}\beta x.$$

В силу свойства транзитивности отношения эквивалентности бесконечно малых получаем, что

$$(1+x)^\beta-1\overset{x\to 0}{\sim}\beta x.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\beta-1}{\beta x}=1$, откуда и следует равенство (12.7).▶

Замечание 12.5. Используя теоремы 10.2 и 12.4, получим, что если $\alpha\in O_a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{(1+\alpha(x))^\beta-1}{\alpha(x)}=\beta.$$

12.5 Принцип замены бесконечно малых

Теорема 12.5. *Если* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in O_a$ $(a \in \overline{\mathbb{R}})$, *причем* $\alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \gamma(x)$, $\beta(x) \overset{x\to a}{\sim} \delta(x)$, *и существует* $\lim\limits_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, *то существует* $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)} = A$.

$$◀ \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)} \cdot \frac{\delta(x)}{\gamma(x)} \right) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\delta(x)}{\beta(x)} = 1 \cdot A \cdot 1. ▶$$

12.6 Принцип отбрасывания бесконечно малых

Теорема 12.6. *Если* $\alpha_i \in O_a$ $(i = \overline{0,n},\ n \in \mathbb{N})$, $\alpha = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i$, $\alpha_i(x) = o(\alpha_0(x))$ $(i = \overline{1,n})$, *то* $\alpha \in O_a$ *и* $\alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \alpha_0(x)$.

◀ α – б/м в точке $x = a$, как сумма конечного числа б/м в точке $x = a$.

$\alpha_i \in O_a$, значит, существует $\mathring{U}_a$, для всех точек которой $\alpha_i(x) \neq 0$ $(i = \overline{0,n})$. Кроме того, $\alpha_i(x) = o(\alpha_0(x))$ $(i = \overline{1,n})$, а значит, для любого $\varepsilon > 0$ $\left(\text{например, } \varepsilon = \frac{1}{n}\right)$

$$\exists\, U_a \ \ \forall\, x \in \mathring{U}_a \quad \left| \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_0(x)} \right| < \frac{1}{n}, \quad |\alpha_i(x)| < \frac{1}{n} |\alpha_0(x)| \quad (i = \overline{1,n}).$$

Таким образом, для всех $x \in \mathring{U}_a$

$$|\alpha(x)| = \left| \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x) \right| \geqslant |\alpha_0(x)| - \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \right| \geqslant |\alpha_0(x)| - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i(x)| > |\alpha_0(x)| - n \cdot \frac{1}{n} |\alpha_0(x)| = 0.$$

Таким образом, $\alpha(x) \neq 0$ в $\mathring{U}_a$. Значит, $\alpha \in O_a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} = \lim_{x\to a} \left(1 + \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)} + \ldots + \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_0(x)} \right) = 1 \Rightarrow \alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \alpha_0(x). ▶$$

Замечание 12.6. При вычислении пределов полезными будут следующие эквивалентности (следуют из рассмотренных выше замечательных пределов и следствий из них):

1) $\sin(\alpha(x)) \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$, где α – б/м при $x \to a$;
2) $\arcsin(\alpha(x)) \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$, где α – б/м при $x \to a$;
3) $\mathrm{tg}(\alpha(x)) \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$, где α – б/м при $x \to a$;
4) $\mathrm{arctg}(\alpha(x)) \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$, где α – б/м при $x \to a$;
5) $1 - \cos(\alpha(x)) \overset{x\to a}{\sim} \frac{\alpha^2(x)}{2}$, где α – б/м при $x \to a$;
6) $\ln(1 + \alpha(x)) \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$, где α – б/м при $x \to a$;
7) $\ln(u(x)) \overset{x\to a}{\sim} u(x) - 1$, где $u(x) \to 1$ при $x \to a$;
8) $a^{\alpha(x)} - 1 \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)\ln a$, где $0 < a \neq 1$, α – б/м при $x \to a$;
9) $(1 + \alpha(x))^{\beta} - 1 \overset{x\to a}{\sim} \beta\alpha(x)$, где α – б/м при $x \to a$;
10) $e^{\alpha(x)} - 1 \overset{x\to a}{\sim} \alpha(x)$, где α – б/м при $x \to a$.

Пример 12.2. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right) x$.

$$◀ \lim_{x\to\infty} \left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right) x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} 3^{\frac{1}{x}} - 1 \overset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}\ln 3 \\ \frac{1}{x} \overset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x} \end{array} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}\ln 3}{\frac{1}{x}} = \ln 3. ▶$$

Пример 12.3. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$.

$$◀ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\sin x^2}-1} + \lim_{x\to 0}\cos x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\left(\sqrt{1+\sin x^2}-1\right)\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sin^2\frac{x}{2} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4} \\ \sqrt{1+\sin x^2}-1 = (1+\sin x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \overset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sin x^2 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}\sin x^2} + 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x^2}-1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{\frac{1}{2}\sin x^2} \cdot \frac{1}{2} = \left[\begin{array}{c} \sin^2 x \overset{x\to 0}{\sim} x^2 \\ \sin x^2 \overset{x\to\infty}{\sim} x^2 \end{array} \right] = 3. \blacktriangleright$$

12.7 Показательно-степенная функция и ее предел

Определение 12.2. *Пусть $u : X \to \mathbb{R}$ и $v : X \to \mathbb{R}$, причем $u(x) > 0$ на X. Тогда функция $y = u(x)^{v(x)}$, $x \in X$, называется* ***показательно-степенной*** *функцией.*

Пусть $(a \in \overline{\mathbb{R}})$ – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$.

Теорема 12.7. *Если для показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, $x \in X$, существуют*

$$\lim_{x\to a} u(x) = b > 0, \ \lim_{x\to a} v(x) = c \in \mathbb{R},$$

то существует

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = b^c.$$

Пример 12.4. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)^{\frac{\operatorname{tg} 3x}{\ln(1+x)}}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}(3x+2)=2;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\ln(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{c}\operatorname{tg} 3x \overset{x\to 0}{\sim} 3x\\ \ln(1+x) \overset{x\to 0}{\sim} x\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)^{\frac{\operatorname{tg} 3x}{\ln(1+x)}}=2^3=8.$ ▶

Особые случаи в пределах показательно-степенной функции

1) $\left.\begin{array}{l} u\to+\infty\\ v\to+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow u^v\to+\infty;$

2) $\left.\begin{array}{l} u\to+\infty\\ v\to-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow u^v\to 0;$

3) $\left.\begin{array}{l} u\to 0+0\\ v\to+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow u^v\to 0.$

Неопределенности для показательно-степенной функции

1) $(1^\infty):\quad \left.\begin{array}{l} u\to 1\\ v\to+\infty\end{array}\right\};$

2) $(\infty^0):\quad \left.\begin{array}{l} u\to+\infty\\ v\to 0\end{array}\right\};$

3) $(0^0):\quad \left.\begin{array}{l} u\to+0\\ v\to 0\end{array}\right\}.$

Замечание 12.7. Для раскрытия неопределенностей в случае показательно-степенной функции полезно использовать равенство

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} e^{\ln u^v} = e^{\lim\limits_{x\to a} v\ln u}.$$

Кроме этого для неопределенности (1^∞) дополнительно справедливы равенства:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} e^{\ln u^v} = e^{\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln u}{\frac{1}{v}}} = e^{\lim\limits_{x\to a} \frac{u-1}{\frac{1}{v}}} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)}. \tag{12.8}$$

Пример 12.5. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}$.

$$◀ \lim_{x\to 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\ln(e+x))}{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(e+x)-1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(e+x)-\ln e}{tgx}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{\operatorname{tg} x}} = \left[\begin{array}{c} \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{e} \\ \operatorname{tg} x \overset{x\to 0}{\sim} x \end{array}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{e}}{x}} = e^{\frac{1}{e}}. ▶$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Запишите замечательные пределы.
2. Сформулируйте теорему – принцип замены б/м. Проиллюстрируйте ее на примерах.
3. Укажите основные эквивалентности, используемые при нахождении пределов функций.
4. Сформулируйте теорему – принцип отбрасывания б/м. Проиллюстрируйте ее на примерах.
5. Сформулируйте теорему о пределе показательно-степенной функции. Проиллюстрируйте эту теорему на примере.
6. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

Техника вычисления пределов

Задание 1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{c}\sin 3x \overset{x\to 0}{\sim} 3x,\\ \operatorname{tg} 2x \overset{x\to 0}{\sim} 2x\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}. ▶$$

Задание 2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\left[\begin{array}{c}1-\cos x \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2},\\ \sin^2 x \overset{x\to 0}{\sim} x^2\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}. ▶$$

Задание 3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

$$◀ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=$$

$$=\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\overset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{2}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\frac{1}{2}. ▶$$

Задание 4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x-\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin 2x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin 2x}=$$

$$=\left[1-\cos x\overset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\sin 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\frac{\sin 2x}{x}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\right]=\frac{3}{2}\cdot\frac{0}{1-2}=0. ▶$$

Задание 5. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

$$◀ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{3}}-1}{-\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1+(\operatorname{tg} x-1))^{\frac{1}{3}}-1}{-\cos 2x}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1+(\operatorname{tg} x-1))^{\frac{1}{3}}-1\overset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim}\frac{1}{3}(\operatorname{tg} x-1),\\ -\cos 2x=\frac{\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+1}\end{array}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{3}(\operatorname{tg} x-1)}{\frac{(\operatorname{tg} x-1)(\operatorname{tg} x+1)}{1+\operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}. ▶$$

Задание 6. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

$$◀\ \lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\cos x}-1-(\sqrt[3]{\cos x}-1)}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}-\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to+0}\frac{(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{2}}-1}{\sin^2 x}-\lim_{x\to+0}\frac{(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{3}}-1}{\sin^2 x}=$$

$$=\begin{bmatrix} ((\cos x-1)+1)^{\frac{1}{2}}-1\overset{x\to+0}{\sim}\frac{1}{2}(\cos x-1),\\ ((\cos x-1)+1)^{\frac{1}{3}}-1\overset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{3}(\cos x-1),\\ \sin^2 x\overset{x\to 0}{\sim}x^2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-1}{x^2}-\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=-\frac{1}{6}\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[1-\cos x\overset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}\right]=-\frac{1}{6}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{12}.\ ▶$$

Задание 7. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

$$◀\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-1-\left(\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}=\begin{bmatrix} \left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\overset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3},\\ \left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-1\overset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{4},\\ \left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\overset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{9}}{\frac{x}{4}}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{16}}{\frac{x}{4}}=\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{7}{36}.\ ▶$$

Задание 8. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

$$◀ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1-\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\begin{array}{l}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\overset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x},\\ \left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\overset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}\end{array}\right]=1+1=2. ▶$$

Задание 9. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{l}\ln(1-\sin x)\overset{x\to 0}{\sim}-\sin x\overset{x\to 0}{\sim}-x,\\ 3^{\operatorname{tg}x}-1\overset{x\to 0}{\sim}\operatorname{tg}x\cdot\ln 3\overset{x\to 0}{\sim}x\ln 3\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\ln 3}=-\frac{1}{\ln 3}. ▶$$

Задание 10. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e}$.

$$◀ \lim_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=3\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=3\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=$$

$$=\left[\ln\frac{x}{e}\overset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{e}-1=\frac{x-e}{e}\right]=3\lim_{x\to e}\frac{x-e}{e(x-e)}=\frac{3}{e}. ▶$$

Задание 11. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$.

$$◀ \lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{Введем замену } x = z+2, \\ z \to 0 \text{ при } x \to 2 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2^{z+2} - (z+2)^2}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{4\cdot 2^z - z^2 - 4z - 4}{z} =$$

$$= 4\lim_{z\to 0} \frac{2^z - 1}{z} - \lim_{z\to 0} \frac{z^2 + 4z}{z} = 4\ln 2 - \lim_{z\to 0}(z+4) = 4\ln 2 - 4 = 4(\ln 2 - 1). ▶$$

Задание 12. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

$$◀ \lim_{x\to -1+0} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -1+0} \frac{\pi - \arccos x}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{\pi} + \sqrt{\arccos x})} =$$

$$= \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{\sqrt{\pi} + \sqrt{\arccos x}} \cdot \lim_{x\to -1+0} \frac{\pi - \arccos x}{\sqrt{x+1}} =$$

$$= \left[\pi - \arccos x \overset{x\to -1+0}{\sim} \sin(\pi - \arccos x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x\to -1+0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x\to -1+0} \sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. ▶$$

Задание 13. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x\cos 3x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\cos 2x(1-\cos 3x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}=\left[\begin{array}{l}1-\cos x\overset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2},\\ 1-\cos 2x\overset{x\to 0}{\sim}2x^2,\\ 1-\cos 3x\overset{x\to 0}{\sim}\frac{9x^2}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\frac12\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}+2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}+\frac92\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$=7\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1-\left(\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}-1\right)}=$$

$$=7\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}-1}{x^2}}=\frac{7}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}-1}{x^2}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sqrt{1+\sin^2 x}-1\overset{x\to 0}{\sim}\frac12\sin^2 x\overset{x\to 0}{\sim}\frac12 x^2,\\ \sqrt[3]{1-\frac13\operatorname{tg}^2 x}-1\overset{x\to 0}{\sim}-\frac19\operatorname{tg}^2 x\overset{x\to 0}{\sim}-\frac19 x^2\end{array}\right]=\frac{7}{\frac12+\frac19}=\frac{126}{11}.\ ▶$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Задание 14. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+(2^{x^2}-1)^2+(\cos x-1)^2}{3\arcsin^3 x+x^3\ln(1+x)}$.

◄ $(2^{x^2}-1)^2 \overset{x\to 0}{\sim} x^4\ln^2 2$, $(\cos x-1)^2 \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4} \Rightarrow (2^{x^2}-1)^2 = o(x^3)$ и $(\cos x-1)^2 = o(x^3)$.

$3\arcsin^3 x \overset{x\to 0}{\sim} 3x^3$, $x^3\ln(1+x) \overset{x\to 0}{\sim} x^4 \Rightarrow x^3\ln(1+x) = o\left(3\arcsin^3 x\right)$. Тогда, используя теорему 12.6 (принцип отбрасывания бесконечно малых), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+(2^{x^2}-1)^2+(\cos x-1)^2}{3\arcsin^3 x+x^3\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3\arcsin^3 x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left[\arcsin^3 x \overset{x\to 0}{\sim} x^3\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}. \text{►}$$

Задание 15. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}$.

◄Данный предел уже рассматривался на практическом занятии 8 (задание 8). Теперь вычислим предел с использованием принципа отбрасывания бесконечно малых.

Вводя замену $x = z+1$, используя формулу бинома Ньютона и теорему 12.6, получим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{2z+1-3(11z+1)+2}{(50z+1)+2(30z+1)-3} = \lim_{z\to 0}\frac{-31z}{110z} = -\frac{31}{110}. \text{►}$$

Задание 16. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$.

◄ Имеем дело с неопределенностью (1^∞), а поэтому можно воспользоваться формулой (12.8):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}} = e^1 = e. \text{►}$$

Задание 17. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)^{\operatorname{ctg} 2x}$.

$$◀ \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)^{\operatorname{ctg} 2x} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} 2x\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1\right)} =$$

$$= \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\frac{\pi}{4}}\right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\operatorname{tg} 2x}} = e^{\sqrt{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x}} =$$

$$= e^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x}} = \left[\begin{array}{l}\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x,\\ \operatorname{tg} 2x \overset{x\to 0}{\sim} 2x\end{array}\right] = e^{2\cdot\frac{1}{2}} = e. ▶$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите пределы функций:

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$;

1.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$;

1.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\sin x}$;

1.5 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1}$;

1.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg} 2x}$;

1.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

1.8 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$;

1.9 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x\sin x}$;

1.10 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

1.11 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2 x+1-\cos 2x}$;

1.12 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

1.13 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin 3x}$;

1.14 $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}+2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\right]$;

1.15 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x^2+3x)}{\arcsin 2x}$;

1.16 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}^3 x}$;

1.17 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$;

1.18 $\lim\limits_{x\to\infty}(x(\ln(x+a)-\ln x))$;

1.19 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$;

1.20 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

1.21 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$;

1.22 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$;

1.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^x$;

1.24 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}$;

1.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$;

1.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

1.27 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

ЛЕКЦИЯ 13
Теоремы Больцано – Коши и Вейерштрасса. Равномерно непрерывные функции

13.1 Теорема Больцано – Коши об обращении непрерывной функции в нуль

Напомним, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке множества X.

Класс функций $f : X \to \mathbb{R}$, непрерывных на множестве X, будем обозначать $C(X)$.

В том случае, когда $X = [a, b]$, определение непрерывности функции на отрезке следует понимать так: функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ будет непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b), в точке a функция непрерывна справа, а в точке b функция непрерывна слева.

Теорема 13.1. *Если $f \in C([a, b])$ и $f(a)f(b) < 0$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.*

◄Пусть $f(a) < 0$, тогда $f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой $\frac{a+b}{2}$ пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a+b}{2}$. Если же $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то для одного из двух частичных отрезков будут выполняться условия теоремы, обозначим его через $[a_1, b_1]$. Разделим $[a_1, b_1]$ также пополам точкой $\frac{a_1+b_1}{2}$. Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a_1+b_1}{2}$, если нет, то существует такой частичный отрезок (полученный после последнего деления), для которого выполняются условия теоремы. Продолжим указанное деление и дальше. Возможны два случая:

1) существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$, тогда $c = \frac{a_n+b_n}{2}$;

2) для всех $n \in \mathbb{N}$ $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \neq 0$, тогда получаем последовательность $([a_n, b_n])$, которая является стягивающейся последовательностью вложенных отрезков, значит (принцип вложенных отрезков) существует единственная точка c, которая принадлежит всем отрезкам указанной последовательности. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ и f непрерывна в точке c, то, сделав предельный переход в неравенствах $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$, получим, что $f(c) \leqslant 0$ и $f(c) \geqslant 0$. Поэтому $f(c) = 0$. ►

13.2 Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях функции

Теорема 13.2. *Если $f \in C([a,b])$ и $f(a) \neq f(b)$, то для любого $\mu \in (f(a), f(b))$ при $f(a) < f(b)$ (или любого $\mu \in (f(b), f(a))$, при $f(b) < f(a)$), существует такая точка $c \in (a,b)$, что $f(c) = \mu$.*

◀Пусть $f(a) < f(b)$, тогда $f(a) < \mu < f(b)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - \mu$, $x \in [a,b]$. Для φ выполняются условия теоремы 13.1 (покажите самостоятельно). Значит, существует такая точка $c \in (a,b)$, что $\varphi(c) = 0$ или $f(c) - \mu = 0$, $f(c) = \mu$. ▶

Теорема 13.3. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и ограничена, то уравнение $x = f(x)$ имеет хотя бы одно решение на $\mathbb{R}$.*

◀Из ограниченности функции на $\mathbb{R}$ следует, что существуют такие $A, B \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ $B \leqslant f(x) \leqslant A$. Возьмем такой отрезок $[a,b]$, чтобы $a - B < 0$ и $b - A > 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$\varphi(a) = a - f(a) \leqslant a - B < 0$, $\varphi(b) = b - f(x) \geqslant b - A > 0$; и $\varphi \in C([a,b])$. Тогда (теорема 13.1) существует $c \in (a,b)$, что $\varphi(c) = 0$, $c - f(c) = 0$, $f(c) = c$. ▶

13.3 Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции

Теорема 13.4. *Если $f \in C([a,b])$, то f ограничена на отрезке $[a,b]$.*

◀Допустим обратное: функция f не ограничена на отрезке $[a,b]$, например, сверху, то есть для любого $E > 0$ существует такое $x' \in [a,b]$, что $f(x') > E$. Выбираем $E = k \in \mathbb{N}$:

1. Для $k = 1$ существует $x_1 \in [a,b]$, $f(x_1) > 1$.
2. Для $k = 2$ существует $x_2 \in [a,b]$, $f(x_2) > 2$.

. . . .

3. Для $k = n$ существует $x_n \in [a,b]$, $f(x_n) > n$.

. . . .

Получим ограниченную последовательность $(x_n) \in [a,b]$. Из нее (Теорема Больцано – Вейерштрасса) выделяется сходящаяся подпоследовательность (x_{n_k}), причем $f(x_{n_k}) > n_k$. Пусть $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b]$ (отрезку принадлежат все его предельные точки). Тогда с одной стороны

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

(функция f – непрерывна в точке x_0); с другой стороны

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \geqslant \lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty,$$

значит, $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$. Получили противоречие. Отсюда вытекает, что функция ограничена сверху. Аналогично доказывается, что f ограничена и снизу, а значит, ограничена на отрезке $[a,b]$. ▶

13.4 Теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных граней

Теорема 13.5. *Если $f \in C([a,b])$, то она достигает на этом отрезке своих точных граней (существуют такие точки $x', x'' \in [a,b]$, что $f(x') = \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ и $f(x'') = \inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$).*

◀По теореме 13.4, функция f ограничена на $[a,b]$, а тогда (свойство полноты множества $\mathbb{R}$) существуют $m = \inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, причем $m \leqslant f(x) \leqslant M$ (первое свойство точных граней). Докажем, что указанные точные грани достигаются на отрезке. Допустим обратное, например, что для любых $x \in [a,b]$ $f(x) > m$, $f(x) - m > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)-m}$, $x \in [a,b]$. Функция φ непрерывна на $[a,b]$, значит (теорема 13.4), ограничена на $[a,b]$:

$$\exists\, \mu \in \mathbb{R}_+ \ \forall\, x \in [a,b] \ \ 0 < \varphi(x) \leqslant \mu, \quad \frac{1}{f(x)-m} \leqslant \mu, \quad f(x) \geqslant m + \frac{1}{\mu} > m.$$

Последнее неравенство говорит о том, что m не является точной нижней гранью. Получили противоречие. Поэтому существует $x'' \in [a,b]$, что $f(x'') = \inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$. Аналогично доказывается утверждение теоремы для точной верхней грани.▶

13.5 Равномерно непрерывные функции

Напомним, что непрерывность функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве X означает следующее:

$$\forall x \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x' \in X \ \ |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что в этом определении δ зависит как от ε, так и от вы- бора точки $x \in X$. Может случиться так, что при фиксированном ε одно δ «обслужить» все точки $x \in X$ не сможет (примером может служить функция $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$).

Указанную зависимость δ от $x \in X$ можно устранить, передвигая запись $\forall\, x \in X$ правее записи $\exists\, \delta > 0$. Тем самым мы придем к новому понятию.

Определение 13.1. *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется* ***равномерно непрерывной*** *на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in E \ \ |x_1 - x_2| < \delta \ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 13.6. *Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на множестве E, то она непрерывна на E.*

◄Берем любую точку $a \in E$. Тогда достаточно в определении равномерно непрерывной функции взять $x_1 = x$ (текущая точка) и $x_2 = a$. Получим определение непрерывной функции f в точке $a \in E$. Но $x = a$ – любая точка E, поэтому функция f непрерывна на E. ►

Замечание 13.1. В определении непрерывности функции на языке «$\varepsilon - \delta$» $\delta = \delta(\varepsilon, a)$, то есть δ зависит как от ε, так и от a. В определении же равномерной непрерывности $\delta = \delta(\varepsilon)$ (δ зависит только от ε).

Пример 13.1. Доказать, используя определение, что функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

◄Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и любые $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Для нахождения указанного в определении 13.1 $\delta > 0$ оценим сверху $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|$. Потребуем, чтобы $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Видно, что в качестве искомого δ можно взять любое действительное число из полуинтервала $(0, \varepsilon]$. При таком выборе δ будет выполняться определение 13.1 равномерной непрерывности функции $f(x) = x$ на множестве $E = \mathbb{R}$. ►

Замечание 13.2. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ не будет равномерно непрерывной на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x_1, x_2 \in E \;\; |x_1 - x_2| < \delta \;\; |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 13.2. Докажите, что функция $f(x) = \sin(1/x)$ не будет равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$.

◀Найдем точку $x_1 \in (0, 1)$, для которой $f(x_1) = 1$, а также точку $x_2 \in (0, 1)$, для которой $f(x_2) = -1$ (чтобы $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$):

$$\sin\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}), \;\; x_1 = \frac{2}{(4k+1)\pi} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin\frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}), \;\; x_2 = \frac{2}{(4k+3)\pi} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

В качестве $\varepsilon > 0$ возьмем любое действительное число из полуинтервала $(0, 2]$. Для любого $\delta > 0$ укажем такое натуральное число $k \in \mathbb{N}$, что $|x_1 - x_2| < \delta$. Для этого оценим сверху $|x_1 - x_2|$:

$$\left|\frac{2}{(4k+1)\pi} - \frac{2}{(4k+3)\pi}\right| < \frac{2}{(4k+1)\pi} < \frac{4}{4k} = \frac{1}{k}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{k} < \delta$, $k > \frac{1}{\delta}$. Очевидно, что для любого $\delta > 0$ такое натуральное число всегда есть, а, значит, в соответствии с замечанием 13.2, функция $f(x) = \sin(1/x)$ не будет равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$. ▶

Теорема 13.7 (теорема Кантора). *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, то она равномерно непрерывна на этом множестве.*

◀В качестве ограниченного замкнутого множества на числовой прямой рассмотрим отрезок $[a, b]$, $a < b$. Предположим, что функция $f \in C([a, b])$ не является равномерно непрерывной на указанном отрезке. Тогда

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, x_1, x_2 \in [a, b] \;\; |x_1 - x_2| < \delta \;\; |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Для $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, указанные точки x_1 и x_2 обозначим соответственно через x'_n и x''_n. Получим две ограниченные последовательности (x'_n) и $(x''_n) \subset [a, b]$. По теореме Больцано – Вейерштрасса из этих последовательностей можно выделить две сходящиеся подпоследовательности (x'_{n_k}) и (x''_{n_k}) соответственно.

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = c'$, $\lim\limits_{k\to\infty} x''_{n_k} = c''$.

Покажем, что $c' = c'' = c \in [a, b]$. Предположим, что $c' \neq c$:

$$0 < |c' - c''| = |c' - x'_{n_k} + x'_{n_k} - x''_{n_k} + x''_{n_k} - c''| \leqslant$$

$$\leqslant |c' - x'_{n_k}| + |c'' - x''_{n_k}| + |x''_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(так как из сходимости указанных подпоследовательностей следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \;\; k > k_0 \;\; |c' - x'_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |c'' - x''_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{3};$$

из построения выше указанных последовательностей (x'_n) и (x''_n) следует, что

$$|x''_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{k},$$

а тогда $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$ для $k > \frac{3}{\varepsilon}$.

Получили: $0 < |c' - c''| < \varepsilon$ – противоречие (нет положительного действительного числа, меньшего за сколь угодно малое положительное, действительное число $\varepsilon > 0$). Значит, $c' = c'' = c$.

В силу предположения о том, что функция f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеем: $|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geqslant \varepsilon$. В последнем неравенстве перейдем к пределу при $k \to \infty$ ($x''_{n_k} \to c$, $x'_{n_k} \to c$). С учетом непрерывности функции f в точке $c \in [a, b]$ (c – предельная точка замкнутого множества $[a, b]$, а поэтому ему и принадлежит) и непрерывности функции $y = |x|$, получим противоречие:

$$|f(c) - f(c)| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Значит, предположение о том, что функция f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$ неверно. Аналогично доказывается теорема и в общем случае.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему Больцано – Коши об обращении непрерывной функции в нуль.
2. Докажите теорему Больцано – Коши о промежуточных значениях функции.
3. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции, теорему Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных граней.
4. Дайте определение равномерно непрерывной на множестве функции. Приведите примеры равномерно непрерывных на множестве функций.
5. Какая существует связь между непрерывными и равномерно непрерывными функциями?
6. Сформулируйте теорему Кантора.
7. Докажите, что непрерывная на числовой прямой периодическая функция будет равномерно непрерывной на этой прямой.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

Свойства непрерывных функций

Задание 1. Функция $f \in C([a,b])$, $a < b$, принимает на отрезке $[a,b]$ рациональные значения. Докажите, что f есть константа на $[a,b]$.

◀Предположим, что существуют хотя бы две точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, что

$$f(x_1) = \frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2} = f(x_2) \quad (m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}).$$

Между любыми двумя рациональными числами $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ есть иррациональное число, обозначим его μ. Но для любого $\mu \in \left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}\right)$ существует точка $x_\mu \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(x_\mu) = \mu$ (теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях функции 13.2). Получим противоречие (функция в любой точке отрезка принимает рациональные значения).▶

Задание 2. Найдите корни уравнения $x^3 + x - 1 = 0$ с точностью до 10^{-2}.

◀Вначале отделим корни уравнения, то есть найдем такие частичные отрезки области определения функции $f(x) = x^3 + x - 1$, для которых одна из внутренних точек является корнем уравнения, а концы частичных отрезков не являются корнями уравнения. В нашем случае вначале воспользуемся графическим методом. Строим графики функций $y = x^3$ и $y = 1 - x$. Из рисунка 13.1 видно, что уравнение имеет единственный действительный корень $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Дальше воспользуемся теоремой Больцано – Коши об обращении непрерывной функции в нуль (теорема 13.1). В нашем случае $f(x) = x^3 + x - 1$. Находим

$$f(0,6) = 0,216 + 0,6 - 1 = -0,184 < 0; \quad f(0,7) = 0,343 + 0,7 - 1 = 0,043 > 0.$$

С помощью указанной теоремы Больцано – Коши заключаем, что $0,6 < x_0 < 0,7$. Из рисунка 13.1 видно, что $f(x) < 0$ для $x < x_0$, и $f(x) > 0$ для $x > x_0$. Далее находим

$$f(0,67) \approx 0,3007 + 0,67 - 1 < 0; \; f(0,68) \approx 0,314 + 0,68 - 1 < 0;$$

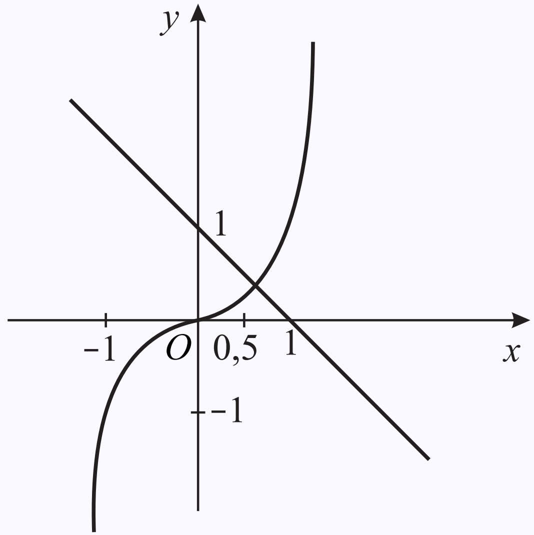


Рисунок 13.1

$$f(0,69) \approx 0,328 + 0,69 - 1 > 0.$$

В итоге получим, что $0,68 < x_0 < 0,69$. Каждое значение ($0,68$ или $0,69$) можно взять за приближенное значение корня с точностью до 10^{-2}. Более точное из этих чисел значение корня можно найти, если определить третий десятичный знак приближения с недостатком и с избытком (таким же методом). В итоге получим $0,682 < x < 0,683$, $x \approx 0,68$. ►

Задание 3. Будет ли функция

$$f(x) = 5^{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} + (x^2 - x + 2) \sin \sqrt{3 + x^2}$$

ограниченной на отрезке $[0, 100]$? Существуют ли такие значения, принадлежащие указанному отрезку, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения?

◄Данная функция непрерывна на отрезке $[0, 100]$, так как на этом отрезке непрерывны функции

$$y = 5^{x^2}, \ y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}, \ y = x^2 - x + 2, \ = \sin \sqrt{3 + x^2}.$$

Тогда, по теореме Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции (теорема 13.4), следует, что данная функция будет ограничена на отрезке $[0, 100]$. Так как функция непрерывна на отрезке, то по соответствующей теореме Вейерштрасса (теорема 13.5) существуют значения $x_1, x_2 \in [0, 100]$, при которых она принимает наибольшее и наименьшее значения.►

Задание 4. На отрезке $[-1, 1]$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & \text{при} \quad x = 0, \\ x^2 - 1, & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Принимает ли функция наибольшее и наименьшее значения на заданном отрезке?

◄Очевидно, $\sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = 1$; $\inf\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = -1$. Однако не существуют никакие значения x, при которых функция принимала бы значения, равные верхней и нижней граням функции.Это объясняется тем, что функция при $x = 0$ имеет разрыв (рисунок 13.2).►

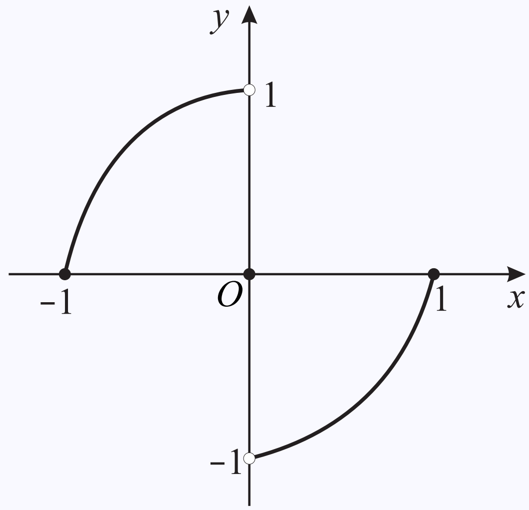


Рисунок 13.2

Необходимо отметить, что условие непрерывности функции на отрезке является достаточным, чтобы функция принимала наибольшее и наименьшее значения на отрезке. Однако условие непрерывности не является необходимым, чтобы функция принимала наибольшее и наименьшее значения на отрезке.

Другими словами, если функция, заданная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значения на отрезке, то она может быть как непрерывной, так и разрывной на этом отрезке.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x, & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

разрывна при $x = 0$, но она принимает наибольшее значение $f(0) = 1$ и наименьшее $f(1) = -1$ (рисунок 13.3).

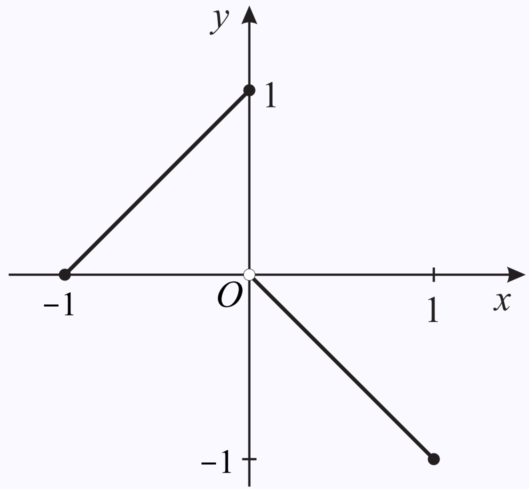


Рисунок 13.3

Задание 5. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывная в промежутке $(0,1)$, не является равномерно непрерывной в этом промежутке.

◀Зададим $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и возьмем числа $x_1 = \frac{1}{n}$ и $x_2 = \frac{1}{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$. Составим разности

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n(n+1)} \text{ и } |f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = |n - n - 1| = 1.$$

Какое бы $\delta > 0$ мы ни выбрали, число n можно выбрать настолько большим, что $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$. В то же время $|f(x_1) - f(x_2)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. А это и значит, что $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(0,1)$. ▶

Задание 6. Докажите, что функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

◀Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем два любых значения аргумента x_1 и x_2. Составим разность $\sin x_1 - \sin x_2 = 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}$ и для $|x| < \frac{\pi}{2}$ оценим ее по модулю:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \le 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right| = |x_1 - x_2|.$$

Из полученного неравенства видно, что если $\delta = \min\left\{\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right\}$, то из неравенства $|x_1 - x_2| < \delta$ следует неравенство $|\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon$. ▶

Задание 7. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

◀Зададим $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и возьмем $x_1 = \sqrt{n}$ и $x_2 = \sqrt{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_2^2 - x_1^2| = |n + 1 - n| = 1.$$

Следовательно, какое бы $\delta > 0$ мы ни выбрали, при достаточно большом n для точек $x_1 = \sqrt{n}$ и $x_2 = \sqrt{n+1}$ будет выполняться неравенство $|x_2 - x_1| < \delta$, а $|f(x_2) - -f(x_1)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Из этого следует, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. ▶

Задание 8. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \ln x$ на промежутке $(0, 1)$.

◀Эта функция не является равномерно непрерывной на промежутке $(0, 1)$. Зададим $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln 2$. Возьмем $x_1 = \frac{1}{n}$ и $x_2 = \frac{1}{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\ln\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{2n}\right| = |\ln 2|.$$

Какое бы $\delta > 0$ мы ни выбрали, n можно выбрать настолько большим, что будет $|x_1 - x_2| = \frac{1}{2n} < \delta$, а $|f(x_1) - f(x_2)| = |\ln 2| > \varepsilon = \frac{1}{2}\ln 2$. Из этого и следует, что функция $f(x) = \ln x$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$. ►

Задание 9. Исследуйте функцию

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

на равномерную непрерывность на множестве $X = (0, +\infty)$.

◄ $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$. Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, +\infty), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна на луче $[0, +\infty)$, поэтому она равномерно непрерывна на любом отрезке $[0, a]$, $a > 0$ (теорема Кантора 13.7). Пусть $a = 2$. Дальше докажем, что функция f равномерно непрерывна на луче $[2, +\infty)$. Берем любые x_1, $x_2 \in [2, +\infty)$. Для нахождения указанного в определении равномерной непрерывности числа $\delta > 0$ оценим сверху модуль $|f(x_1) - f(x_2)|$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| =$$

$$= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} + x_1 \sin \frac{1}{x_2} - x_1 \sin \frac{1}{x_2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant x_1 \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| + \sin \frac{1}{x_2} \cdot |x_1 - x_2| =$$

$$= 2x_1 \left| \sin \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} \right| + \sin \frac{1}{x_2} \cdot |x_1 - x_2| \leqslant$$

$$\leqslant 2x_1 \cdot \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| \cdot 1 + 1 \cdot |x_1 - x_2| = x_1 \cdot \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 \cdot x_2} + |x_1 - x_2| \leqslant \frac{3}{2}\,|x_1 - x_2|\,.$$

Потребуем, чтобы $\frac{3}{2}\,|x_1 - x_2| < \varepsilon$, $|x_1 - x_2| < \frac{3}{2}\varepsilon$. В качестве δ можно взять любое действительное число из полуинтервала $\left(0, \frac{3}{2}\varepsilon\right]$. При таком выборе δ будет выполняться определение равномерной непрерывности функции $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ на луче $[2, +\infty)$.

Таким образом, функция f равномерно непрерывна на полуинтервале $(0, 2]$ и на луче $[2, +\infty)$.

Возьмем отрытый луч $(0, +\infty)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ и удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Указанные выше соотношения будут, очевидно, справедливы, если $x_1, x_2 \in (0, 2]$ или $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ (это следует из равномерной непрерывности функции $f(x)$ и на интервале $(0, 2]$, и на луче $[2, +\infty)$. Если же, например, $x_1 \in (0, 2]$, а $x_2 \in [2, +\infty)$, то найдется такой отрезок $[c, d] \subset (0, +\infty)$, что $x_1, x_2 \in [c, d]$, а на отрезке $[c, d]$ функция f равномерно непрерывна, поэтому указанные выше соотношения из определения равномерной непрерывности функции будут также выполняются.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Будет ли функция $f(x) = x^5 - 3x + 1$ в какой-либо точке отрезка $[1, 2]$ иметь значение, равное нулю?
2. Имеет ли хотя бы один корень уравнение $\sin x - x + 1 = 0$?
3. Докажите, что следующие уравнения имеют решения на указанных отрезках:

   3.1 $x^3 - 3x + 1 = 0$, $x \in [-1, 0]$;

   3.2 $x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0$, $x \in [0, 2]$;

   3.3 $3\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   3.4 $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0$, $x \in [0, 2]$.
4. Исследуйте на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

   4.1 $y = x^2$, $x \in (-1, 1)$;

   4.2 $e = \sin x^2$, $x \in (-2, 3)$;

   4.3 $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

   4.4 $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, 1)$;

   4.5 $y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\arcsin^2 x + 2}$, $x \in [0, 1]$;

   4.6 $y = e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
5. Докажите, что функция $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ в отдельности, но не будет равномерно непрерывной на объединении этих промежутков.
6. Докажите, что произведение конечного числа равномерно непрерывных на промежутке (a, b) функций равномерно непрерывно на этом промежутке.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 1.
Вариант 2.
Вариант 3.
Вариант 4.
Вариант 5.
Вариант 6.
Вариант 7.
Вариант 8.
Вариант 9.
Вариант 10.
Вариант 11.
Вариант 12.

Итоговый тест по разделу «Введение в анализ»

Ответьте на вопросы теста.

Задания для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Введение в анализ»

1. Докажите, что число $\sqrt{7}$ не является рациональным.

2. Докажите, что число $\lg 3$ не является рациональным.

3. Исследуйте следующие множества на ограниченность сверху, снизу; в случае ограниченности найдите соответствующие точные грани:

   3.1 множество чисел вида $\left\{\frac{n^2}{3n^2+1}\right\}$, где n пробегает множество натуральных чисел;

   3.2 множество чисел вида $\left\{((-1)^n - 1)n^2 + \frac{(-1)^n+1}{n}\right\}$, где n пробегает множество натуральных чисел.

4. Определите нижнюю и верхнюю грани множества рациональных чисел r, удовлетворяющих неравенству $r^2 < 2$.

5. Решите уравнения:

   5.1 $|x^2 - 4| - |x^2 - 9| = 5$;

   5.2 $|3x^2 - 6x - 1| = 2|3 - x|$;

   5.3 $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$;

   5.4 $\big|x - |x - 2| + 3\big| = x$.

6. Решите неравенства:

   6.1 $|x + 2| + |x - 2| \leqslant 12$;

   6.2 $\big|x + 2 - |x|\big| > 1$;

   6.3 $\big||x + 1| - |x - 1|\big| < 1$;

   6.4 $\left|\frac{2-3|x|}{1+|x|}\right| > 1$.

7. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции $f : X \to \mathbb{R}$, если:

7.1 $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

7.2 $y = \sqrt{\cos x^2}$;

7.3 $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$;

7.4 $y = \lg(\cos(\lg x))$;

7.5 $y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

8. Найдите области значений следующих функций:

8.1 $y = \sqrt{2+x-x^2}$;

8.2 $y = \lg(1-2\cos x)$;

8.3 $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$;

8.4 $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$;

8.5 $y = (-1)^x$.

9. Докажите, что следующие функции являются монотонно возрастающими в указанных промежутках:

9.1 $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x < +\infty$;

9.2 $f(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

9.3 $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

9.4 $f(x) = 2x + \sin x$, $-\infty < x < \infty$.

10. Докажите, что следующие функции являются монотонно убывающими в указанных промежутках:

10.1 $f(x) = x^2$, $-\infty < x \leqslant 0$;

10.2 $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

10.3 $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$.

11. Постройте графики следующих функций:

11.1 $y = 3\ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$;

11.2 $y = \{1,5x - 1,5\}$;

11.3 $y = \left|\frac{\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}}\right|$;

11.4 $y = 3\cos\left(\frac{3}{2}x - 3\right) - 1$.

12. Исследуйте функцию $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ на четность (нечетность).

13. Исследуйте функцию $y = x\cos x$ на периодичность.

14. Используя определение, докажите, что функция $y = \sin 2x$ периодическая, найдите ее основной период.

15. Пользуясь определением, найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2x^2 + 4x$.

16. Используя определение предела последовательности, докажите, что:

16.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$;

16.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$;

16.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n-2} = 1$;

16.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+2} = +\infty$.

17. Пусть (x_n) – последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

18. Вычислите пределы:

18.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$;

18.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

18.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$;

18.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$;

18.5 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$;

18.6 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-20)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$;

18.7 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$;

18.8 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

18.9 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

18.10 $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

18.11 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2}$;

18.12 $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

18.13 $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

18.14 $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

18.15 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

18.16 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

18.17 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$;

18.18 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$;

18.19 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

18.20 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

18.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

18.22 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

18.23 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$;

18.24 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$;

18.25 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

18.26 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$;

18.27 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$;

18.28 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

19. Для функций, приведенных ниже, укажите множество точек, в которых они непрерывны, найдите точки разрыва, определите их род, постройте графики функций:

19.1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, \ x < 0, \\ \{2x\}, \ \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^{-1}, \ \text{при } x > 1; \end{cases}$

19.2. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, \ \text{при } |x| \leqslant 1, \\ |x-1|, \ \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

20. Исследуйте на равномерную непрерывность в заданных промежутках следующие функции:

20.1 $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, $x \in [-1, 1]$;

20.2 $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$;

20.3 $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

20.4 $f(x) = x \sin x$, $x \in [0, +\infty)$.

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Введение в анализ»

1. Множества и операции над ними. Множество рациональных чисел.
2. Множество действительных чисел. Основные подмножества множества действительных чисел.
3. Модуль действительного числа. Основные свойства модуля.
4. Ограниченные и неограниченные множества. Точные верхняя и нижняя грани ограниченного множества.
5. Понятие функции. Монотонные, сложные, ограниченные и неограниченные функции.
6. Понятие функции. Четные и нечетные функции. Периодические функции.
7. Понятие последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Предел последовательности.
8. Монотонные последовательности. Предел монотонной последовательности.
9. Число e.
10. Принцип вложенных отрезков.
11. Теорема Больцано – Вейерштрасса об ограниченной последовательности.
12. Понятие фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
13. Понятие предела функции. Единственность предела функции.
14. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.
15. Теорема о сохранении функцией знака предела.
16. Теорема о предельном переходе в неравенствах.
17. Теорема о трех функциях.
18. Понятие бесконечно малой функции. Связь бесконечно малой функции и функции, имеющей конечный предел.

19. Свойства бесконечно малых функций.
20. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.
21. Теоремы о пределах суммы и произведения функций.
22. Теорема о пределе частного двух функций.
23. Особые случаи в пределах суммы и произведения функций.
24. Особые случаи в пределах частного двух функций.
25. Непрерывность функции в точке. Теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного.
26. Предел сложной функции. Непрерывность сложной функции. Предельный переход под знаком непрерывной функции.
27. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация.
28. Непрерывность монотонной функции. Точки разрыва монотонной функции. Условия непрерывности монотонной функции.
29. Первый замечательный предел.
30. Второй замечательный предел.
31. Принцип замены бесконечно малых. Принцип отбрасывания бесконечно малых.
32. Показательно-степенная функция и ее предел.
33. Обратные функции. Теоремы об их существовании, монотонности и непрерывности.
34. Теорема Больцано – Коши об обращении непрерывной на отрезке функции в нуль.
35. Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции.
36. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции.
37. Теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных граней.
38. Равномерно непрерывные функции. Теорема Кантора.

ЛЕКЦИЯ 14
Производная и дифференциал функции

14.1 Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача Ньютона о скорости

Пусть функция $x = f(t)$, $x \in [0, +\infty)$, представляет собой закон движения (формула, по которой находится путь, пройденный телом от начала движения до момента времени t).

Нам необходимо решить две задачи:

1. Дать понятие скорости в момент времени $t = t_0 > 0$ (мгновенной скорости).

2. Найти способ вычисления этой скорости.

Рассмотрим промежуток времени длиной $\Delta t > 0$ от момента t_0 до $t = t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени телом пройден путь $\Delta f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Отношение $\frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}$ называется **средней скоростью** на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Определение 14.1. ***Мгновенной скоростью*** *тела в момент времени t_0 будем считать*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} = V(t_0). \tag{14.1}$$

2. Задача Лейбница[1] о касательной к кривой

Рассмотрим некоторую кривую Γ – график функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$, и на ней две точки: $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированную, $M(x, y)$ – движущуюся. Обозначим: $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Проведем через точки M_0 и M секущую M_0M, которая образует с осью Ox угол β (рисунок 14.1). Начнем приближать точку M по кривой Γ к точке M_0. Положение секущей будет меняться. **Касательной к кривой** Γ в точке M_0 будем называть (по Лейбницу) предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M к точке M_0. Найдем угловой коэффициент этой касательной. Угловой коэффициент секущей

[1] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) – немецкий философ, логик, математик, физик.

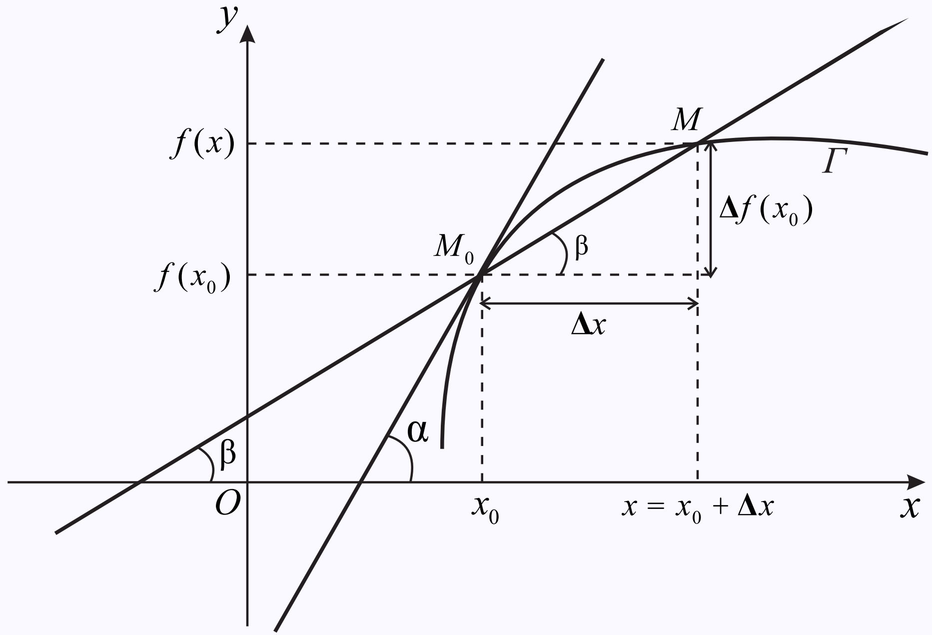


Рисунок 14.1 – Касательная к кривой

$$K_{MM_0} = \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f\,(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta.$$

Если $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$, то $M \to M_0$, а угловой коэффициент касательной будет:

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f\,(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{14.2}$$

Тогда уравнение указанной касательной примет вид:

$$y = f(x_0) + K(x - x_0). \tag{14.3}$$

Нами введено понятие касательной к кривой и найдено ее уравнение.

14.2 Понятие производной, ее геометрический и механический смысл. Касательная и нормаль к графику функции. Односторонние производные

Анализируя методы решения задач, приведенных выше, приходим к понятию производной функции в точке.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : U_{x_o} \to \mathbb{R}$.

Возьмем любое приращение $\Delta x \neq 0$ аргумента, но такое, чтобы $x = x_0 + \Delta x \in U_{x_0}$. Тогда получим приращение функции

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 14.2. ***Производной*** *функции* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{14.4}$$

Обозначения производной: $f'(x_0)$, $y'_{x=x_0}$ – по Лагранжу, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ – по Лейбницу, $\dot{f}(x_0)$ – по Ньютону, $Df(x_0)$ – по Коши.

Замечание 14.1. Из задачи Лейбница о касательной к кривой следует, что угловой коэффициент указанной касательной будет равен производной функции f в точке x_0, то есть $k = f'(x_0)$ (в этом заключается **геометрический смысл производной** функции в точке). Тогда уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{14.5}$$

будет уравнением касательной, а

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{14.6}$$

уравнением нормали.

Замечание 14.2. **Механический смысл производной** заключается в том, что если $x = f(t)$ – закон движения, то $x' = f'(t) = V(t)$ – скорость при указанном движении в момент времени t, а $V'(t) = a(t)$ – ускорение. Если же $y = f(x)$ – некоторая функция, то $y' = f'(x)$ – скорость изменения этой функции в точке x.

Определение 14.3. ***Правосторонней*** (***левосторонней***) ***производной*** *функции* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0 *называется правосторонний (левосторонний) предел разностного отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:*

$$f'(x_0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0 \\ (\Delta x \to +0)}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(f'(x_0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0 \\ (\Delta x \to -0)}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Правостороннюю и левостороннюю производные называют **односторонними производными**.

Замечание 14.3. Для определения левосторонней производной функции в точке x_0 достаточно, чтобы функция f была определена на левосторонней окрестности точки $U^-_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0]$ $(\delta > 0)$; для определения правосторонней производной функции в точке x_0 достаточно, чтобы функция f была определена на правосторонней окрестности точки $U^+_{x_0} = [x_0, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$.

Справедлива теорема (критерий существования производной в точке).

Теорема 14.1. *Функция* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *имеет в точке* x_0 *производную, равную числу* $a \in \mathbb{R}$, *тогда и только тогда, когда существуют односторонние производные функции* f *в точке* x_0 *и обе они равны числу* a.

Пример 14.1. Функция $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ имеет

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = f'(0-0).$$

Значит, функция f в точке $x_0 = 0$ производной не имеет.

Пример 14.2. Пользуясь определением 14.2, покажите, что функция $f(x) = \sin x$ имеет производную в любой точке числовой прямой. Найдите ее.

◀ Возьмем любую точку $x \in \mathbb{R}$, придадим ей любое приращение $\Delta x \neq 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

Значит, для всех $x \in \mathbb{R}$ $(\sin x)' = \cos x$. ▶

14.3 Понятие дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости

Определение 14.4. *Функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке x_0, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде:*

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{14.7}$$

где A – некоторое действительное число, которое не зависит от Δx, а может зависеть только от самой функции f и точки x_0, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Пример 14.3. Пользуясь определением 14.4, докажите, что функция $f(x) = |x^3|$ дифференцируема в точке $x = 0$.

◀ $\Delta f(0) = f(0+\Delta x) - f(0) = \left|(\Delta x)^3\right| - |0| = 0\cdot\Delta x + |\Delta x|\,\Delta x\cdot\Delta x$, что соответствует выражению 14.5, где $A = 0$ и $\alpha(\Delta x) = |\Delta x|\,\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. ▶

Теорема 14.2 (критерий дифференцируемости). *Функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную.*

◀Разделим левую и правую части (14.7) на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

Значит, существует $f'(x_0) = A$ (необходимое условие доказано). И наоборот, если существует

$$A = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

то

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

(пользуемся теоремой 8.2), а поэтому функция f дифференцируема в точке x_0. ▶

Замечание 14.4. Из теоремы 14.2 следует, что понятия дифференцируемости функции одной переменной в точке и существования производной в этой точке равносильны.

Теорема 14.3. *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

◀ В равенстве (14.7) переходим к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = 0$, значит (определение непрерывности функции на «языке приращений»), функция непрерывна в точке x_0. ▶

Замечание 14.5. Утверждение, обратное теореме 14.3, вообще говоря, неверно. Из примера 14.1 следует, что функция $f(x) = |x|$, непрерывная в точке $x_0 = 0$, не является дифференцируемой в этой точке.

Определение 14.5. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***дифференцируемой на множестве*** *X, если она дифференцируема в каждой точке множества X.*

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Что называется приращением функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0?
3. Дайте определение производной функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0.
4. Каков механический (физический) смысл производной функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0?
5. Каков геометрический смысл производной функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ в точке x_0? Дайте определение касательной и нормали к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ и напишите их уравнения.
6. Дайте определение дифференциала функции в точке. Проиллюстрируйте геометрический смысл и объясните физический смысл дифференциала.
7. Дайте определение односторонних производных функции в точке. Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке? Приведите примеры.
8. Сформулируйте определение и критерий дифференцируемости функции в точке.
9. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

Задачи, приводящие к понятию производных. Вычисление производных по определению. Дифференцируемость функции

Задание 1. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = 15\sin 3t$. Найти мгновенную скорость точки в момент времени t_0.

◀В момент времени t_0 координата точки равнялась $x_0 = 15\sin 3t_0$, а в момент $t_0+\Delta t$ она равнялась $x_0 + \Delta x = 15\sin 3\,(t_0+\Delta t)$. Поэтому путь, пройденный за промежуток времени $[t_0, t_0+\Delta t]$, равен

$$\Delta x = 15\sin 3\,(t_0+\Delta t) - 15\sin 3t_0 = 30\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\sin 3\frac{\Delta t}{2},$$

а средняя скорость точки за этот же промежуток времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 30\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}.$$

Следовательно, мгновенная скорость точки в момент времени t_0:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0} 30\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t} =$$

$$= 30\lim_{\Delta t\to 0}\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{3}{2}\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{3\frac{\Delta t}{2}} = 45\cos 3t_0.$$

Так как $v_{\text{мгн}} = x'_t$, то мы можем сказать, что производная функции $x = 15\sin 3t$ равна $45\cos 3t$. ▶

Задание 2. Количество радиоактивного вещества в момент времени t выражается формулой

$$m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

где T – так называемый период полураспада, а M – первоначальное количество вещества (количество вещества в момент времени $t = 0$). Найти мгновенную скорость распада вещества в момент времени t_0.

◀Найдем среднюю скорость распада вещества за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. В момент времени t_0 количество вещества было $m_0 = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ стало $m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}}$. Поэтому за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ количество вещества изменилось на

$$\Delta m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}} - M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$$

(отметим, что $\Delta m < 0$, так как количество радиоактивного вещества уменьшается). Средняя скорость распада за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = M\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0+\Delta t}{T}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}}{\Delta t} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}.$$

Поэтому мгновенная скорость распада выражается формулой

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}.$$

Так как $M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$ не зависит от Δt, то это выражение можно вынести за знак предела:

$$v_{\text{мгн}} = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}} \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{T\frac{\Delta t}{T}} = \left(\frac{0}{0}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{1}{T}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\frac{\Delta t}{T}} =$$

$$= M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}\frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{m_0 \ln 2}{T}.$$

Таким образом, скорость радиоактивного распада в момент времени t_0 пропорциональна количеству вещества в этот момент времени.▶

Задание 3. Пусть в электрической цепи течет постоянный ток. Под постоянным током мы будем понимать количество электричества, протекающее в цепи за единицу времени. Дать определение переменного тока в момент времени t и вычислить его, если количество электричества, протекшее в цепи за промежуток времени $[0, t]$, равно $Q(t)$.

◀Количество электричества, протекшее в цепи за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, выражается формулой $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$.

Отнеся это количество к единице времени, получим средний ток за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$:

$$I_{\text{ср}} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенным током в момент времени t называют предел среднего тока за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, когда $\Delta t \to 0$:

$$I_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} I_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Это означает, что $I_{\text{мгн}}$ – производная функции Q:

$$I_{\text{мгн}}(t) = Q'(t).$$ ▶

Задание 4. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sqrt[3]{x}$.
◀Найдем сначала приращение функции при изменении аргумента от x до $x+\Delta x$. Оно равно

$$\Delta y=\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$.

Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$.

Чтобы вычислить этот предел, умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы

$$\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}:$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Таким образом, $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ▶

Задание 5. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \arcsin x$.

◀ Найдем сначала приращение функции при изменении аргумента от x до $x + \Delta x$. Оно равно

$$\Delta y = \arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}.$$

Чтобы вычислить этот предел, заменим бесконечно малую функцию $\arcsin\left(x + \Delta x\right) - \arcsin x$ при $\Delta x \to 0$ на эквивалентную бесконечно малую функцию

$$\sin\left(\arcsin\left(x + \Delta x\right) - \arcsin x\right) = \left(x + \Delta x\right)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - \left(x + \Delta x\right)^2}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(x + \Delta x\right)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - \left(x + \Delta x\right)^2}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(x + \Delta x\right)^2\left(1 - x^2\right) - x^2\left[1 - \left(x + \Delta x\right)^2\right]}{\Delta x\left[\left(x + \Delta x\right)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - \left(x + \Delta x\right)^2}\right]} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x + \Delta x}{\left(x + \Delta x\right)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - \left(x + \Delta x\right)^2}} = \frac{2x}{2x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

Таким образом, $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ▶

Задание 6. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$ дифференцируема в точке $x = 0$.

◄Так как функция f задается различными аналитическими выражениями на лучах $(-\infty, 0)$, $[0, \infty)$, общим концом которых является точка $x = 0$, вычислим односторонние производные в точке $x = 0$. Сначала найдем $f'(0+0)$. Если $\Delta x > 0$, то $f(\Delta x) = \Delta x^2$, а поэтому

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Если же $\Delta x < 0$, то $f(\Delta x) = \Delta x^3$, а поэтому $f'(0-0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3 - 0}{\Delta x} = 0$.

Так как односторонние производные равны, то производная функции f в точке 0 существует (она равна нулю), а значит, функция f дифференцируема в точке 0.►

Задание 7. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ \sin x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ не имеет производной в точке $x = 0$.

$$◄\ f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ и } f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 0.$$

Так как односторонние производные различны, то функция не дифференцируема в точке $x = 0$. ►

Задача 8. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{3(x-1)}$ не дифференцируема в точке $x = 1$.

$$◄\ \Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = \sqrt[3]{3(1+\Delta x - 1)} = \sqrt[3]{3\Delta x} = A \cdot \Delta x + \frac{\sqrt[3]{3\Delta x} - A \cdot \Delta x}{\Delta x} \Delta x. \qquad (14.8)$$

С учетом (14.7) в (14.8) $\alpha(\Delta x) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - A \cdot \Delta x}{\Delta x}$.

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} - A \right) = +\infty$. Значит, функция f не дифференцируема в точке $x = 1$. ►

Задание 9. Показать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ не имеет производной в точке $x = 0$.

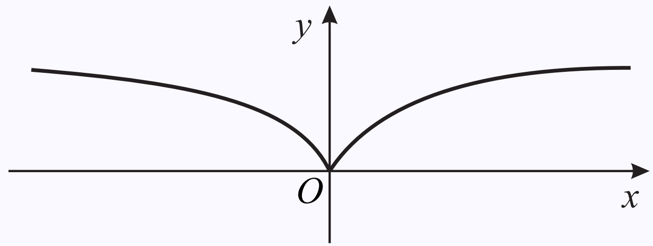


Рисунок 14.2 – График функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

◄ $\Delta y = \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} - \sqrt[3]{x^2}$, откуда значение Δy в точке $x = 0$ будет равно $\sqrt[3]{\Delta x^2}$; поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}};$$

следовательно,

$$y'_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty,$$

то есть производная функции не существует (рисунок 14.2).►

Задания для самостоятельного решения

1. Найти мгновенную скорость прямолинейно движущейся точки, если ее координата в момент времени t выражается формулой $x = t^4 + 4t^2 - 2t - 1$.
2. Найти мгновенную угловую скорость вращающегося тела, если в момент времени t угол поворота равен $\varphi = 2t^3 - 3t + 1$.
3. Твердое тело вращается около неподвижной оси, причем в момент времени t угол поворота равен $\varphi(t)$. Что следует понимать под: 1) средней угловой скоростью вращения за некоторый промежуток времени; 2) угловой скоростью вращения в данный момент t?
4. Точка движется по прямой (вообще говоря, неравномерно и неравномерно-ускоренно), причем известна ее скорость $v(t)$ как функция времени t. Дайте определение терминов: 1) среднее ускорение за данный промежуток времени; 2) ускорение в данный момент.
5. Твердое тело вращается около неподвижной оси, причем в момент времени t угловая скорость равна $\omega(t)$. Дайте определение терминов: 1) среднее угловое ускорение за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$; 2) угловое ускорение в момент времени t.
6. Медный стержень, длина которого при 0° равна l_0, имеет при температуре t° длину l. Дайте точное определение понятия «коэффициент линейного расширения меди при температуре t_0°».
7. Количество тепла, необходимое для того, чтобы повысить температуру 1 *г* вещества от 0° до t°, равно $Q(t^\circ)$. Дайте точное определение понятий: 1) средняя теплоемкость вещества в температурном промежутке: $[t_0^\circ, t_0^\circ + \Delta t^\circ]$; 2) теплоемкость вещества при температуре t_0°.
8. В процессе распада радиоактивного вещества A появляется радиоактивное вещество B, которое в свою очередь распадается. Обозначим через $m(t)$ количество вещества в момент времени t. Дайте точное определение понятия «скорость распада вещества B в момент времени t».
9. Тело движется по прямой линии под действием переменной силы, направленной по той же прямой. Работа, необходимая для перемещения тела из начала координат в точку B с координатой x, равна $A(x)$. Как связана функция $A(x)$ с силой, действующей на тело в точке B?

10. Работа, произведенная за единицу времени, называется мощностью. Дайте точное определение понятия мощности в данный момент времени и установите связь этого понятия с функцией $A(t)$ – работой, произведенной за промежуток времени $[0, t]$.
11. Материальный отрезок AB неоднороден. Задана функция $m(x)$ – масса части отрезка AM, где x – длина этой части. Что следует понимать под: 1) средней (линейной) плотностью отрезка на участке $[x, x + \Delta x]$; 2) плотностью (линейной) в точке x?
12. Обозначим через $p(h)$ давление воздуха на высоте h над уровнем моря. Как связана функция $p(h)$ с плотностью воздуха на высоте h?
13. Радиус круга равномерно увеличивается со скоростью v. С какой скоростью увеличивается площадь круга (начальное значение радиуса равно нулю)?
14. Радиус шара равномерно увеличивается со скоростью v. С какой скоростью увеличивается объем шара? С какой скоростью увеличивается его поверхность (начальное значение радиуса равно нулю)?
15. Пользуясь определением производной, найдите производные следующих функций:

$$y = \frac{1}{x^2 + 2}, y = \sqrt[n]{x}, y = \sqrt{x^2 - 3}, y = \operatorname{tg} ax, y = \operatorname{tg}^2 x, y = e^{kx}, y = \sin^2 x,$$

$$y = \cos^2 x, y = \arcsin^2 x, y = \arcsin\sqrt{x}, y = \operatorname{arctg} x, y = \ln\left(x^2 - 1\right).$$

16. Покажите, что функции $y = \sqrt[3]{x-1}$, $y = |x-1|$, $y = (x-1)^{\frac{2}{5}}$, $y = |\ln x|$ не имеют производной в точке $x = 1$; функция $y = \arccos(\sin x)$ – в точке $x = k\pi$; функции $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ – в точке $x = 0$; а функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ – в любой точке, отличной от нуля.

Кафедра МАДУП

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

ЛЕКЦИЯ 15
Основные свойства производной. Производные элементарных функций

15.1 Производная и дифференциал суммы, произведения и частного

Теорема 15.1. *Если функции $u : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ и $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0, то сумма, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x_0) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, причем справедливы формулы:*

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0); \tag{15.1}$$

$$(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0); \tag{15.2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}; \tag{15.3}$$

◀Приведем доказательство только для частного $W = \frac{u}{v}$.

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}(x_0) = \frac{\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x_0)+\Delta u}{v(x_0)+\Delta v} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{\Delta x(v(x_0)+\Delta v)v(x_0)} = \frac{v(x_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)(v(x_0)+\Delta v)} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)}$$

($\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$, так как функция v дифференцируема в точке x_0, а значит, непрерывна в этой точке).▶

Следствие 15.1. *Если функция $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и α – любое действительное число, то существует $(\alpha \cdot v)'(x_0) = \alpha v'(x_0)$ (постоянный множитель можно выносить за знак производной).*

Следствие 15.2 (свойство линейности). *Если функции* $f_i : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ *дифференцируемы в точке* x_0, *то любая линейная комбинация этих функций* $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, *дифференцируема в точке* x_0, *причем*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x_0). \tag{15.4}$$

◀Справедливость утверждения следует из теоремы 15.1 (производная суммы) и следствия 15.1. ▶

15.2 Производные основных элементарных функций

15.2.1 Производная степенной функции

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{15.5}$$

◀Для доказательства формулы (15.5) рассмотрим случаи:

а) $\alpha = n \in \mathbb{N}$ (показатель – натуральное число), $x \in \mathbb{R}$.

Используем метод математической индукции. При $n = 1$ формула (15.5) справедлива (доказывается по определению производной). Допустим, что (15.5) справедлива при $n = k$, где $k > 1$, это значит: $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$.

Докажем справедливость указанной формулы при $n = k + 1$ (используем формулу для производной произведения):

$$\left(x^{k+1}\right)' = \left(x^k \cdot x\right)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k = (k+1)\, x^k.$$

Значит, формула (16.4) справедлива для любого натурального $\alpha = n \in \mathbb{N}$;

б) если $\alpha = 0$, то $x^\alpha = 1$, $x \neq 0$ и $(x^\alpha)' = (1)' = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$.

Утверждение при $\alpha = 0$ доказано;

в) если $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, а $(-n) \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, то

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})'}{x^{-2n}} = \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}.$$

Формула (16.4) доказана для любого $\alpha \in \mathbb{Z}$;
г) допустим, что $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$,
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^\alpha\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right)}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}$. ►

15.2.2 Производная показательной функции

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \Big[\text{используем замечательный предел (12.6)}\Big] = a^x \ln a.$$

Следствие 15.3. $(e^x)' = e^x$.

15.2.3 Производная тригонометрических функций

Нами доказано (пример 14.2), что:

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{15.6}$$

Можно аналогично доказать, что

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{15.7}$$

Используя теорему о производной частного и формулы (15.6) и (15.7), получаем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

15.3 Производная обратной функции

Теорема 15.2. *Если функция $f: U_{x_0} \to \mathbb{R}$ является обратимой и существует производная $f'(x_0) \neq 0$, а обратная функция f^{-1} непрерывна в точке y_0, где $y_0 = f(x_0)$, то в точке y_0 существует производная обратной функции и справедлива формула*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{15.8}$$

◀Придадим точке $y_0 \in D\left(f^{-1}\right)$ любое приращение $\Delta y \neq 0$, но такое, чтобы $y_0 + \Delta y \in D\left(f^{-1}\right)$. Тогда $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \neq 0$ (разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции – $f^{-1}(y)$ является обратимой). Получаем:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/_{\Delta x}}.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\Delta y \to 0$, а так как функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0, то и $\Delta x \to 0$, когда $\Delta y \to 0$.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

значит, существует и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \left(f^{-1}\right)'(y_0)$, а также справедлива формула (15.8).▶

Замечание 15.1. Пользуясь теоремой 15.2, выведем формулы для производных функций

$$y = \log_a x,\ y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \quad \left((\ln x)' = \frac{1}{x}\right).$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

15.4 Производная композиции функций (сложной функции)

Пусть $f : U_{u_0} \to \mathbb{R}$, $\varphi : U_{x_0} \to \mathbb{R}$, причем $E(\varphi) \subset U_{u_0}$.

Теорема 15.3. *Если функция f дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, а функция φ дифференцируема в точке x_0, то сложная функция $f \circ \varphi$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула*

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0). \tag{15.9}$$

◀Возьмем любое приращение $\Delta x \neq 0$ аргумента x_0, но такое, чтобы $x_0 + \Delta x \in U_{x_0}$, тогда функция $u = \varphi(x)$ получит приращение $\Delta u = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$, а значит, и функция $y = f(u)$ получит приращение $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$. Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, то справедливо представление

$$\Delta y = f'(u_0)\,\Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u, \tag{15.10}$$

где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$.

Разделим левую и правую части (15.10) на $\Delta x \neq 0$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ в полученном после этого равенстве.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'\left(u_0\right)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\left(\Delta u\right)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=f'\left(u_0\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\left(\Delta u\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=f'\left(u_0\right)\cdot\varphi'\left(x_0\right)+0\cdot\varphi'\left(x_0\right)=f'\left(u_0\right)\cdot\varphi'\left(x_0\right).$$

Мы использовали при доказательстве тот факт, что $u=\varphi\left(x\right)$ непрерывна в точке x_0 (так как она дифференцируема в этой точке), поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, а значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\left(\Delta u\right)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha\left(\Delta u\right)=0$. ▶

Замечание 15.2. Теорема 15.3 и правила дифференцирования сложной функции переносятся на композицию трех и большего числа составляющих функций.

Пример 15.1. Пусть $y=\cos x^2$. Здесь $f\left(u\right)=\cos u$ и $u=x^2$. Условия теоремы 15.3 выполняются для всех $x\in\mathbb{R}$, значит, наша функция дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $\left(\cos x^2\right)'=-\sin x^2\cdot 2x=-2x\sin x^2$.

Замечание 15.3. Зная, что $(\sin x)'=\cos x$ и $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, найдем

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-\sin x.$$

15.4.1 Производные гиперболических функций

В приложениях математического анализа приходится иметь дело с так называемыми гиперболическими функциями:

$\operatorname{sh} t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический синус;
$\operatorname{ch} t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический косинус;
$\operatorname{th} t=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический тангенс;
$\operatorname{cth} t=\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}$, $t\in\mathbb{R}$, – гиперболический котангенс.

Пример 15.2. Доказать, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t;$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

$$◀ \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} =$$

$$= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \operatorname{ch} 2t.$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = 1. ▶$$

Используя основные свойства производной, а также формулы для производной показательной и сложной функции, выведем формулы для производных гиперболических функций.

$$(\operatorname{sh} t)' = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t;$$

$$(\operatorname{ch} t)' = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t;$$

$$(\operatorname{th} t)' = \left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} t)' \operatorname{ch} t - (\operatorname{ch} t)' \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t};$$

$$(\operatorname{cth} t)' = \left(\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} t)' \operatorname{sh} t - (\operatorname{sh} t)' \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}.$$

Замечание 15.4. Формулы производных основных элементарных и гиперболических функций составляют так называемую **таблицу производных**, которую можно увидеть, нажав на кнопку «Приложение» навигационной панели. Таблица производных вместе с правилами дифференцирования суммы, произведения и частного функций, а также правилом дифференцирования сложной функции составляют основу дифференциального исчисления.

15.5 Производная показательно-степенной функции. Логарифмическая производная

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке x_0 и для любых $x \in U_{x_0}$ $f(x) > 0$. Тогда для любых $x \in U_{x_0}$ существует $\ln y = \ln f(x)$.

Пользуясь теоремой о производной композиции функции (теорема 15.3), получим:

$$(\ln f)'(x_0) = \frac{y'(x_0)}{y(x_0)}. \tag{15.11}$$

Правая часть формулы (15.11) называется **логарифмической производной** функции f в точке x_0. Пользуясь понятием логарифмической производной, найдем производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, $x \in U_{x_0}$.

Теорема 15.4. *Если функции $u : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ и $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0 и для любых $x \in U_{x_0}$ $u(x) > 0$, то функция $y = u(x)^{v(x)}$, $x \in U_{x_0}$, имеет производную в точке x_0 и справедлива формула*

$$y'(x_0) = u(x_0)^{v(x_0)} \ln u(x_0) \cdot v'(x_0) + v(x_0) \cdot u(x_0)^{v(x_0)-1} u'(x_0). \tag{15.12}$$

◀Прологарифмировав равенство $y = u^v$, получаем: $\ln y = v \ln u$. Тогда

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u'. \tag{15.13}$$

Из (15.13) вытекает справедливость формулы (15.12).▶

Замечание 15.5. Правую часть формулы (15.12) можно объяснить как сумму, в которой первое слагаемое – производная функции u^v как показательной (считать $u = \text{const}$), а второе – степенной u^v с постоянным показателем v.

Пример 15.3. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y = (\sin x)^{x^2}$, $D(y) = (0, \pi)$.

◀Условия теоремы 15.4 выполняются для всех $x \in (0, \pi)$, поэтому на $(0, \pi)$ существует производная данной функции, и справедливо:

$$y' = (\sin x)^{x^2} \cdot \ln \sin x \cdot 2x + x^2 (\sin x)^{x^2 - 1} \cdot \cos x. \blacktriangleright$$

Замечание 15.6. Справедлива формула $y = u^v = e^{v \ln u}$, пользуясь которой можно находить производную данной функции как сложной.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Используя определение производной, выведите формулы для производных функций $y = x^{\alpha}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$.
2. Используя формулу производной частного, выведите формулы для производных функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
3. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
4. Используя основные свойства производной, выведите формулы для производных гиперболических функций.
5. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
6. Используя теорему о производной обратной функции, выведите формулу для производной обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.
7. Дайте определение логарифмической производной.
8. Сформулируйте теорему о производной показательно-степенной функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

Вычисление производных с использованием общих правил дифференцирования

Задание 1. Найти производную функции $y = 3 \cdot 2^{-5\,\mathrm{tg}^4 \frac{7}{\sqrt{x}}}$.

◄Воспользуемся теоремой о производной сложной функции. Для усвоения алгоритма нахождения производной сложной функции можно порекомендовать следующий способ.

а) предположим, что необходимо вычислить значение функции в некоторой точке x. Это можно сделать, выполняя следующие действия:

1) $x^{-\frac{1}{2}}$; 2) $7 \times \oplus$; 3) $\mathrm{tg}\,(\oplus)$; 4) $(\oplus)^4$; 5) $-5 \times \oplus$; 6) $2^{\oplus}$; 7) $3 \times \oplus$, где $\times$ – знак произведения, $\oplus$ – обозначается результат предыдущего действия;

б) нахождение производной будем проводить в обратном порядке (результаты действий нахождения производных умножаем):

7) выносим постоянный множитель 3 за знак производной;

6) находим производную показательной функции;

5) выносим постоянный множитель (-5) за знак производной;

4) находим производную степенной функции;

3) находим производную функции тангенс;

2) выносим постоянный множитель 7 за знак производной;

1) находим производную степенной функции;

в) непосредственное нахождение производной данной функции (упрощений не проводим):

$$y' = 3 \cdot \left(2^{-5\,\mathrm{tg}^4 \frac{7}{\sqrt{x}}} \cdot \ln 2\right) \cdot (-5) \cdot \left(4\,\mathrm{tg}^3 \frac{7}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{7}{\sqrt{x}}}\right) \cdot (7) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}.$$ ►

Задание 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные данных функций:

1) $y = \frac{1-x^3}{1-x^5}$.

$$◀\ y' = \frac{(1-x^3)'(1-x^5)-(1-x^5)'(1-x^3)}{(1-x^5)^2} = \frac{-3x^2(1-x^5)+5x^4(1-x^3)}{(1-x^5)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2+3x^7+5x^4-5x^7}{(1-x^5)^2} = \frac{-3x^2+5x^4-2x^7}{(1-x^5)^2}.\ ▶$$

2) $y = e^x(\sin x + \cos x)$.

$$◀\ y' = (e^x)'(\sin x+\cos x) + e^x(\sin x+\cos x)' = e^x(\sin x+\cos x)+$$

$$+e^x(\cos x - \sin x) = e^x\sin x + e^x\cos x + e^x\cos x - e^x\sin x = 2e^x\cos x.\ ▶$$

3) $y = \operatorname{arctg}^3(2x-1) + \arcsin^3\sqrt{x}$.

$$◀\ y' = 3\operatorname{arctg}^2(2x-1)\cdot\frac{1}{1+(2x-1)^2}\cdot 2 + \frac{3\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3\operatorname{arctg}^2(2x-1)}{2x^2-2x+1} + \frac{3\arcsin^2\sqrt{x}}{2\sqrt{(1-x)\,x}}.\ ▶$$

4) $y = \ln^2\cos^3(4x-1)$.

$$◀\ y' = 2\ln\cos^3(4x-1)\cdot\frac{1}{\cos^3(4x-1)}\cdot 3\cos^2(4x-1)\cdot(-\sin(4x-1))\cdot 4 =$$

$$= -24\operatorname{tg}(4x-1)\cdot\ln\cos^3(4x-1)\,.\ ▶$$

5) $y=\frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{e^{\arcsin^4 x}+5}$.

$$◀\ y'=\frac{(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))'\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)-(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)'}{\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)}{\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)^2}-$$

$$-\frac{(\cos(\ln x)-\sin(\ln x))\cdot e^{\arcsin^4 x}\cdot 4\arcsin^3 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(e^{\arcsin^4 x}+5\right)^2}.\ ▶$$

6) $y=\ln\sqrt[5]{\frac{x^3-x+1}{x^2+4x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)$.

$$◀\ y'=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^3-x+1}{x^2+4x+1}}}\cdot\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{x^3-x+1}{x^2+4x+1}\right)^4}}\times$$

$$\times\frac{(3x^2-1)(x^2+4x+1)-(2x+4)(x^3-x+1)}{(x^2+4x+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+\frac{(2x-3)^2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\frac{(2x+3)^2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{5}\frac{x^2+4x+1}{x^3-x+1}\times$$

$$\times\frac{3x^4+12x^3+3x^2-x^2-4x-1-2x^4+2x^2-2x-4x^3+4x-4}{(x^2+4x+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3+4x^2-12x+9}+\frac{3}{3+4x^2+12x+9}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{x^4+8x^3+4x^2-2x-5}{(x^3-x+1)(x^2+4x+1)}+\left(\frac{1}{4x^2-12x+12}+\frac{1}{4x^2+12x+12}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{x^4+8x^3+4x^2-2x-5}{(x^3-x+1)(x^2+4x+1)}+\frac{x^2+3}{2(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)}.$$

Найти производную проще, если в начале упростить выражение, а затем найти производную.▶

7) $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

◀**1-й способ**: $\ln y=\frac{1}{x}\ln\cos x$;

$$\frac{y'}{y}=\left(\frac{1}{x}\right)'\ln\cos x+\frac{1}{x}(\ln\cos x)'=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\cos x+\frac{1}{x}\frac{1}{\cos x}(-\sin x);$$

$$y'=(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\cos x+(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{(-\sin x)}{\cos x}=-(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln\cos x+x\operatorname{tg}x}{x^2}.$$

2-й способ: В условии дана показательно-степенная функция. Найдем производную функции как сумму показательной функции (считаем такой нашу функцию) и степенной (считаем такой нашу функцию). Покажем алгоритм нахождения производной. Упрощение вида полученного выражения проводить не будем.

$$\left(\left(a^{f(x)}\right)'=a^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)\ \middle|\ \left((f(x))^{\alpha}\right)'=\alpha(f(x))^{\alpha-1}\cdot f'(x)\right).$$

$$y'=\frac{1}{x}(\cos x)^{\frac{1}{x}-1}\cdot(\cos x)'+(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\cos x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot(\cos x)^{-1}\cdot(-\sin x)+(\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\cos x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-(\cos x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}+\frac{\ln\cos x}{x^2}\right)=-(\cos x)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln\cos x+x\operatorname{tg}x}{x^2}.\ ▶$$

8) $y = x^{x^x}$.

$$◀\ y' = x^x \cdot x^{x^x-1} \cdot (x)' + x^{x^x} \cdot \ln x \cdot (x^x)' = x^x \cdot x^{x^x-1} +$$

$$+ x^{x^x} \cdot \ln x \cdot \left(x \cdot x^{x-1} + x^x \cdot \ln x\right) = x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right). \ ▶$$

Задание 3. Найти производную функции $y = \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}}$.

◀**1-й способ.** $y' = \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} +$

$$+ \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} - 1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

2-й способ. $\left(y = (u(x))^{v(x)},\ \ln y = v \ln u,\ \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u'\right)$

$$\ln y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right);\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) +$$

$$+ \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \cdot \frac{1}{2\sin^3 \frac{1}{x}} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$y' = \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{3}{2-x^2}\ln\frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} +$$

$$+ \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \cdot \frac{1}{2\sin^3 \frac{1}{x}} \cdot 6 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

3-й способ.

$$\left(a^{\log_a f(x)} = f(x) \;\middle|\; u^v = \left(e^{\ln u}\right)^v = e^{v \ln u}\right)$$

$$y = e^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)};$$

$$y' = e^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\frac{3}{2-x^2} \ln \frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \cdot \frac{1}{2\sin^3 \frac{1}{x}} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2}} \cdot \ln\left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{3}{2-x^2} \ln \frac{1}{3}} \cdot \frac{6x}{(2-x^2)^2} +$$

$$+ \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} \left(2\sin^3 \frac{1}{x}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2-x^2} - 1} \cdot 6 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right). \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

1.1 $y = \frac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}$;

1.2 $y = \frac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}$;

1.3 $y = \sqrt[3]{x^2}\sin x \ln x$;

1.4 $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}$;

1.5 $y = x\left(\arccos x + \operatorname{arctg} x\right)$;

1.6 $y = \sin^5 x$;

1.7 $y = \ln^5 x$;

1.8 $y = \left(3x^2-1\right)^5$;

1.9 $y = \operatorname{arctg}\left(2x+1\right)^4$;

1.10 $y = \operatorname{arctg} e^{4x}$;

1.11 $y = \operatorname{arctg} x^2$;

1.12 $y = \operatorname{arctg}\left(\arcsin^4 x\right)$;

1.13 $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$;

1.14 $y = \sin^4 5x$;

1.15 $y = \ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]$;

1.16 $y = \sqrt{\sin 2x + \cos 3x}$;

1.17 $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

1.18 $y = e^x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

1.19 $y = \sin\left(\cos x\right) + \cos\left(\sin x\right)$;

1.20 $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} + e^{\sin x^2}$;

1.21 $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$;

1.22 $y = \frac{e^x\cos x}{\sin x^2}$;

1.23 $y = \frac{\operatorname{tg} x^2}{\sqrt{x^3+1}}$;

1.24 $y = \cos^3 x^3 - e^{x^2}\operatorname{tg} x$;

1.25 $y = e^{\operatorname{arctg}^3\sqrt{x+4}}$;

1.26 $y = \ln^2\arcsin^3\sqrt{x}$;

1.27 $y = \arcsin^3\left[\ln^2\left(e^{x^2}+1\right)\right]$;

1.28 $y = \ln\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$;

1.29 $y = \sqrt{1+x^2} - \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$;

1.30 $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$;

1.31 $y = \ln\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)(x+2)^2}{(x-2)e^{\operatorname{arctg} x}}}$;

1.32 $y = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$;

1.33 $y = \operatorname{sh}^3 4x + \operatorname{ch}^3\sqrt{x}$;

1.34 $y = \operatorname{th}^5\left(2e^{\sqrt{x}} - 1\right);$

1.35 $y = \operatorname{sh}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right];$

1.36 $y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arcctg} a^{-x};$

1.37 $y = \sqrt[12]{e^{\sin 4x (x^2-6)^5}};$

1.38 $y = \sqrt[3]{\frac{e^{\sin x + \cos x}}{(4x^3+2)^6}};$

1.39 $y = \arccos \frac{x^{3n}+1}{x^{2n}-1};$

1.40 $y = \frac{x^2 \ln^2 \operatorname{tg} x}{\ln \sin^2 2x};$

1.41 $y = e^{\arcsin \sqrt{x^2-1}};$

1.42 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} e^{x^3 - 2\operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{2}\ln x^3 - 1};$

1.43 $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \left(\sqrt[3]{4x^2} + 1\right)^2;$

1.44 $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1+x^2};$

1.45 $y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right);$

1.46 $y = \ln\left(x^4+4\right);$

1.47 $y = \left(x^2+1\right)^{2x};$

1.48 $y = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}};$

1.49 $y = \sqrt[x]{(2x\sin x + 1)^2};$

1.50 $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}};$

1.51 $y = x^{\sin x};$

1.52 $y = x^{x^2}.$

2. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 16
Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков

16.1 Понятие дифференциала функции, его геометрический и механический смысл

Определение 16.1. *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, то линейная однородная функция $f'(x_0)\,\Delta x$ (относительно Δx) называется* ***дифференциалом*** *функции f в точке x_0.*

Обозначения: $df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x$ или $dy = f'(x_0)\,\Delta x$.

Если $f'(x_0) = A \neq 0$, то дифференциал представляет собой главную линейную часть приращения функции в точке x_0 (смотри (14.7)), так как $\alpha(\Delta x)\,\Delta x$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $A\Delta x = f'(x_0)\,\Delta x$ при $\Delta x \to 0$. По определению считаем, что $dx = \Delta x$ (дифференциал независимой переменной). Тогда:

$$dy = f'(x)\ dx \tag{16.1}$$

для любой точки $x \in U_{x_0}$, в которой существует $f'(x)$ ((16.1) – формула для вычисления дифференциала).

Замечание 16.1. Из теоремы 15.1 и определения дифференциала функции следует, что если функции $u : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ и $v : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0, то

$$d(u+v)(x_0) = du(x_0) + dv(x_0); \tag{16.2}$$

$$d(uv)(x_0) = u(x_0)dv(x_0) + v(x_0)du(x_0); \tag{16.3}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = \frac{v(x_0)du(x_0) - u(x_0)dv(x_0)}{v^2(x_0)}; \tag{16.4}$$

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, тогда dy есть приращение ординаты касательной к графику Γ_f в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$. В этом заключается геометрический смысл дифференциала (рисунок 16.1). $\frac{KL}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$; $KL = f'(x_0)\Delta x$; $KL = dy$.

Дифференциал имеет и механический смысл. Если $S = S(t)$ – закон движения тела, то $dS = S'(t_0)\,dt$ – путь, пройденный телом при равномерном движении со скоростью $S'(t_0) = \mathrm{const}$ за время $dt = \Delta t$; или $dA = f'(t_0)\,dt$ – работа, совершенная при постоянной мощности $f'(t_0)$ за время dt.

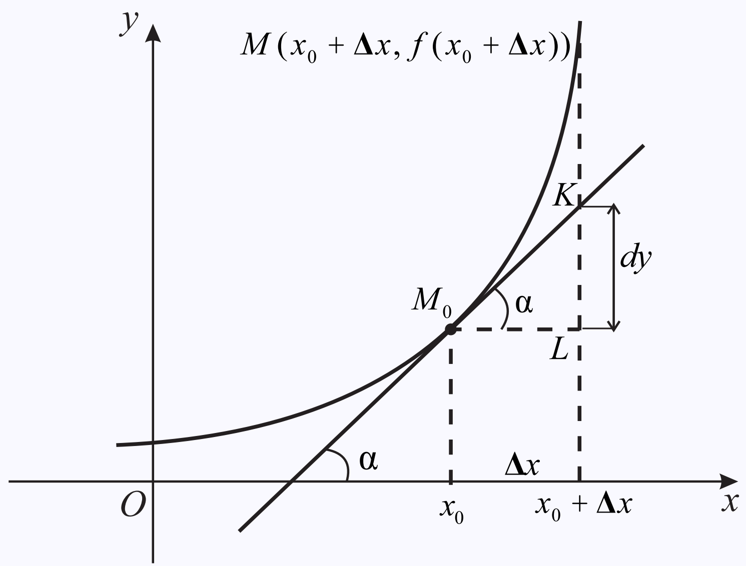


Рисунок 16.1 – Геометрический смысл дифференциала

16.2 Дифференциал и приближенные вычисления

Из равенства (14.7) следует, что

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0). \tag{16.5}$$

Пример 16.1. Пользуясь формулой (16.5), найти приближенное значение $\cos 61^\circ$.

◀Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$. Примем за $x_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ радиан. Тогда

$$\Delta x = 1^\circ = \pi/180^\circ \approx 0,01745. \quad f'(x) = -\sin x, \quad df = -\sin x \cdot \Delta x.$$

$$\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot 0,01745 = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,01745 \approx$$

$$\approx 0.5 - 0,86603 \cdot 0,01745 \approx 0,5 - 0,0151 = 0,4849. ▶$$

Замечание 16.2. Формула (16.5) может быть использована для вывода приближенных формул, например:

$$(1 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}, \tag{16.6}$$

$$\sin \Delta x \approx \Delta x, \tag{16.7}$$

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x, \tag{16.8}$$

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x. \tag{16.9}$$

16.3 Дифференциал композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала

Нами показано (определение 14.4), что если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ независимой переменной x дифференцируема в точке x_0, то дифференциал функции f в этой точке будет

$$df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\, dx. \tag{16.10}$$

Возникает вопрос: сохраняется ли форма (16.10) дифференциала, если x не является независимой переменной? Ответ положительный. Покажем это. Пусть выполняются условия теоремы 15.3. Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(u_0\right) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Умножим левую и правую части последнего равенства на dx:

$$dy = f'\left(u_0\right) du. \tag{16.11}$$

Из формул (16.1) и (16.11) следует, что форма дифференциала является неизменной как для независимого аргумента функции f, так и в том случае, когда аргумент сам есть некоторая дифференцируемая функция. Указанное свойство дифференциала функции называется инвариантностью его формы.

16.4 Производные и дифференциалы высших порядков. Механический смысл второй производной

16.4.1 Производные высших порядков. Механический смысл второй производной

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности U_{x_0}. Тогда для любого $x \in U_{x_0}$ существует единственное значение $f'(x)$, т.е. на U_{x_0} определена функция $y = f'(x)$. Если эта функция $y = f'(x)$ сама является дифференцируемой в точке x_0, то указанную производную $y'(x_0)$ называют второй производной (производной второго порядка) функции f в точке x_0 и обозначают

$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

По индукции вводят (если они существуют) производные следующих порядков: $f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)'$ и так далее. Если введено понятие $(n-1)$-й производной (она существует в некоторой окрестности U_{x_0}) и она дифференцируема в точке x_0, то $\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ называют производной n-го порядка функции f в точке x_0. Если функция f на множестве $X \subset \mathbb{R}$ имеет конечную производную порядка $n \in \mathbb{N}$ (или производную всех порядков), то она называется n-раз дифференцируемой на множестве X (или бесконечно дифференцируемой на множестве X).

Замечание 16.3. Для обозначения порядка производных используют и римские цифры, если он небольшой. Так, $f^{(\mathrm{V})}$ – производная пятого порядка функции f.

Для некоторых бесконечно дифференцируемых функций выводятся формулы для вычисления производных порядка n $(n \in \mathbb{N})$.

Пример 16.2. $f(x) = \sin x$. Найти формулу для $f^{(n)}(x)$.

$$◀ \ (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 1\right),$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$(\sin x)^{(IV)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

$$\ldots$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right) \ ▶ . \tag{16.12}$$

Аналогично:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right), \tag{16.13}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \tag{16.14}$$

$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \tag{16.15}$$

$$(\log_a |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}. \tag{16.16}$$

Если $x = x(t)$ – зависимость от времени координаты материальной точки, которая движется по числовой оси, то $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ – скорость, а $\frac{dx'}{dt}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) = x''(t)$ – ускорение указанной точки в момент t.

16.4.2 Формула Лейбница

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток числовой прямой, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$.

Теорема 16.1. *Если функции f и g n-раз дифференцируемы на промежутке I, то и функция $f \cdot g$ n-раз дифференцируема на промежутке I и для любой точки $x \in I$ справедлива формула:*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{16.17}$$

◀При $n = 1$ формула (16.17) справедлива: $(fg)' = f'g + fg'$. Допустим, что формула справедлива для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $n \geqslant 1$. Докажем ее справедливость для $n + 1$. Продифференцируем формулу для n, получим:

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)}g + \left(C_n^0 f^{(n)} g' + C_n^1 f^{(n)} g'\right) +$$

$$+ \left(C_n^1 f^{(n-1)} g^{(2)} + C_n^2 f^{(n-1)} g^{(2)}\right) + \left(C_n^2 f^{(n-2)} g^{(3)} + C_n^3 f^{(n-2)} g^{(3)}\right) + \ldots + f g^{(n+1)}.$$

Используя формулу $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (непосредственно проверяется), доказываем справедливость теоремы.▶

Пример 16.3. $u(x) = x^2 \sin x$. Найти $u^{(n)}(x)$.

◀ $(x^2 \sin x)^{(n)} = x^2 \cdot \sin^{(n)} x + C_n^1 \cdot 2x \sin^{(n-1)} x + C_n^2 \cdot 2 \sin^{(n-2)} x =$

$$= x^2 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(-n(n-1)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \left(x^2 - n(n-1)\right)\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 2nx \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \blacktriangleright$$

16.4.3 Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности U_{x_0}, тогда для точек указанной окрестности существует первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$, где x – независимая переменная. Если существует $f''(x_0)$, то функция $y = f(x)\,dx$ будет дифференцируемой в точке x_0 и ее дифференциал в этой точке будет

$$d\left(f'(x)\ dx\right)\big|_{x=x_0} = f''(x_0)\,(dx)^2\,. \tag{16.18}$$

Определение 16.2. *Значение дифференциала от первого дифференциала dy называется* ***вторым дифференциалом*** *функции $y = f(x)$ (в точке x_0) и обозначается d^2y.*

Из формулы (16.18) и определения 16.1 вытекает, что

$$d^2y = f''(x_0)\,(dx)^2 = f''(x_0)\ dx^2. \tag{16.19}$$

Аналогично вводятся дифференциалы более высоких порядков. Методом индукции для дифференциала n-го порядка выводится формула

$$d^ny = f^{(n)}(x_0)\ dx^n. \tag{16.20}$$

Замечание 16.4. Формула (16.20) имеет место, когда x – независимая переменная. Допустим, что $x = x(t)$ сама является функцией. Тогда, например:

$$d^2y = d\left(f'(x)\ dx\right) = d\left(f'(x)\right)\ dx + f'(x)\,d(dx) = f''(x)\ dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Значит, в данном случае форма дифференциала нарушается.

Замечание 16.5. Можно показать, что абсолютная ошибка при использовании формулы (16.5) не превышает

$$\overline{\Delta} = \frac{M}{2}\,(\Delta x)^2\,, \tag{16.21}$$

где M – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Пример 16.4. Оцените погрешность, допускаемую при применении формулы (16.5) для приближенного вычисления $\cos 61^\circ$ в примере 16.1.

◀Оценим погрешность на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{61^\circ\pi}{180^\circ}\right]$.

$$f''(x) = (f'(x))' = (-\sin x)' = -\cos x, |f''(x)| = |-\cos x| = \cos x \leqslant \frac{1}{2},$$

$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{61^0\pi}{180^0}\right]$. Тогда $\overline{\Delta} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}(0,01745)^2 < 0,0001$.

Вывод: $\cos 61^\circ \approx 0,4849$ с точностью 10^{-4}. ▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение дифференциала функции. В чем состоит геометрический смысл дифференциала.
2. Как можно использовать дифференциал для приближенного вычисления значения функции?
3. Докажите инвариантность формы первого дифференциала.
4. Дайте определение n-й производной функции.
5. Дайте определение дифференциала n-го порядка функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

Дифференциал функции и приближенные вычисления

Задание 1. Найдите приращение и дифференциал функции $y = x^3 + 2x$ в точке $x = 2$, при $\Delta x = 0,1$ и при $\Delta x = 0,01$. Найдите абсолютную и относительную погрешности, которые мы допускаем при замене приращения функции ее дифференциалом.

$$◄\ \Delta y = \left[(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)\right] - \left(x^3 + 2x\right) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 +$$

$$+\Delta x^3 + 2\Delta x = \left(3x^2+2\right)\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,\ dy = y'\Delta x = \left(3x^2+2\right)\Delta x.$$

При $x = 2$ и $\Delta x = 0,1$, получим:

$$\Delta y = (3\cdot 2^2 + 2)\cdot 0,1 + 3\cdot 2\cdot 0,1^2 + 0,1^3 = 1,461, dy = \left(3\cdot 2^2+2\right)\cdot 0,1 = 1,4.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 0,061$ (6,1%), а относительная погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0,061}{1,461}$, то есть будет уже около $4,17\%$.

При $x = 2$ и $\Delta x = 0,01$ имеем:

$$\Delta y = (3\cdot 2^2 + 2)\cdot 0,01 + 3\cdot 2\cdot 0,01^2 + 0,01^3 = 0,140601,$$

$$dy = \left(3\cdot 2^2+2\right)\cdot 0,01 = 0,14.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 0,000601$ (0,0601%), а относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0,000601}{0,140601},$$

то есть будет уже около $0,427\%$ ► .

Задание 2. Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислите приближенно изменение, претерпеваемое функцией $y = x^3 - 7x^2 + 80$ при изменении x от значения 5 к значению 5,01.

◀В данном случае будем считать $x = 5$, а $\Delta x = 0,01$. Изменение функции Δy приближенно равно дифференциалу dy:

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = \left(3x^2 - 14x\right)\Delta x = \left(3 \cdot 5^2 - 14 \cdot 5\right) \cdot 0,01 = 0,05. ▶$$

Задание 3. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенное значение функции $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ при $x = 0,15$.

◀При $x = 0$ значение функции находится легко (равно 1). Остается подсчитать, насколько изменится значение y при переходе x от значения 0 к значению 0,15. Произведем приближенный подсчет с помощью дифференциала.

$$y' = \frac{-4\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}}{5\left(4-x^2\right)} = -\frac{4y}{5\left(4-x^2\right)},$$

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = \frac{-4y\Delta x}{5\left(4-x^2\right)}.$$

Подставляя $x = 0$, $y = 1$ и $\Delta x = 0,15$, получим

$$\Delta y \approx -\frac{4 \cdot 0,15}{5 \cdot 4} = -0,03.$$

Следовательно, $y_{x=0,15} = y_{x=0} + \Delta y \approx 1 - 0,03 = 0,97$.

Если вычислить искомое значение с помощью калькулятора, то оно будет приблизительно равно 0,97039. Как видим, сделанное нами вычисление верно с точностью до трех десятичных знаков.▶

Задание 4. Площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi r^2$. При измерении радиус r оказался равным $5,2$ см, причем максимальная возможная при этом погрешность измерения Δr находится в пределах $\pm 0,05$ см. Определите абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при вычислении площади круга по указанной формуле.

◀Абсолютная погрешность $|\Delta S|\approx|dS|=|2\pi r\cdot dr|=2\pi\cdot 5,2\cdot 0,05=0,52\pi\approx 1,63$.

Найдем относительную погрешность: $\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\approx\left|\frac{dS}{S}\right|=\left|\frac{2\pi r dr}{\pi r^2}\right|=2\left|\frac{dr}{r}\right|$.

Оказалось, что относительная погрешность равна удвоенной относительной погрешности при измерении радиуса. Численно получим:

$$\left|\frac{dS}{S}\right|=2\left|\frac{dr}{r}\right|=2\cdot\frac{0,05}{5,2}=\frac{1}{52},$$

то есть относительная погрешность будет около 2%.▶

Задание 5. Найдите дифференциалы функций

1) $y=\sin x-x\cos x$; 2) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

◀1) $y'=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$, $dy=y'dx=x\sin x\,dx$;

2) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$,

$dy=y'\,dx=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)dx.$ ▶

Задание 6. Вычислить приближенно значение $y=\sin 29^\circ$.

◀ $\Delta y\approx dy$, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, $y=\sin(30^\circ-1^\circ)$. В нашем случае $x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=1^\circ=\frac{\pi}{180}=0,017$, $y=f(x)=\sin x$. $y'=\cos x$. $f'(30^\circ)==\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

$$\sin 29^\circ\approx\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,017\approx 0,5+0,014=0514.$$ ▶

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Задание 7. Цилиндр, диаметр которого 10 см, высота 20 см, при шлифовке поверхности потерял в весе 2 г. На сколько уменьшился его диаметр, если плотность вещества цилиндра равна $2,5$ г/см^3?

◀**1-й способ**: $m = \pi r^2 H \cdot \rho = \pi \cdot 25 \cdot 20 \cdot 2,5 = 1250\pi$ г, $\Delta m = 2$ г,

$$m - \Delta m = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 20 \cdot 2,5 \text{ г}, \; 1250\pi - 2 = 12,5\pi d^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{1250\pi - 2}{12,5\pi}} \approx 9,997453196 \text{ см}.$$

Найдем величину уменьшения диаметра:

$$\Delta d = 10 - 9,997453196 \approx 0,0025468 \text{ см}.$$

2-й способ: $m = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 20 \cdot 2,5 = 12,5\pi d^2$ г, $\Delta m \approx dm = 25\pi d \Delta d$, $\Delta m = 2$ г.

$$\Delta d = \frac{2}{25\pi d} = \frac{2}{25 \cdot 3,1415926 \cdot 10} \approx 0,0025464 \text{ см}.$$

Абсолютная погрешность между первым и вторым способом составляет

$$0,0025468 - 0,0025464 = 0,0000004 = 4 \cdot 10^{-7}. \;▶$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите дифференциалы функций:

1.1 $y = 2x^2 - 8x + 5;$

1.2 $y = \sqrt[4]{(x+1)^3};$

1.3 $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3;$

1.4 $y = \sin x - x \cos x;$

1.5 $y = \cos(\ln x);$

1.6 $y = \ln \operatorname{tg}(ax + b);$

1.7 $y = \arcsin \frac{x}{2}.$

2. Найдите приращение и дифференциал функции $y = 2x^2 - 3x$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0,1$ и $\Delta x = 0,01$. Найдите для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

3. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенно значения функций:

3.1 $f(x) = (x-3)^2 (x-2)^3 (x-4)$ при $x = 4,001$,

3.2 $f(x) = \sqrt[7]{3x^3 + 2x - 4}$ при $x = 1,001$,

3.3 $f(x) = x \ln(x-2)$ при $x = 3,001$.

4. Вычислите приближенно значение $\sqrt[3]{27,0081}$, $\sin 29^\circ$, $\cos 151^\circ$, $\operatorname{tg} 44^\circ 41'$, $\arcsin 0,5011$, $\operatorname{arctg} 1,002$. Полученные результаты сравните с другими способами вычисления.

5. Ток I определяется по тангенс-гальванометру по формуле $I = C \operatorname{tg} \varphi$. Пусть $d\varphi$ – ошибка, допущенная при отсчете угла φ. Найти абсолютную и относительную погрешности при определении I. При каком угле φ относительная погрешность будет минимальной?

6. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус R шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до одного процента?

7. Период качания маятника вычисляется по формуле $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести ($g = 981$ см/сек^2). Какое влияние на погрешность при вычислении периода T окажет погрешность в один процент при измерении: а) длины маятника l; б) ускорения g?
8. По данному расстоянию d светящейся точки от оптического центра двояковыпуклого стекла может быть вычислено расстояние ее изображения согласно формуле $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, где F – постоянная для данного стекла и данного сорта лучей. Как влияет погрешность в измерении d на погрешность в вычислении $f(x)$?
9. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

Геометрические и физические приложения производной

Задание 1. Через фокус параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$, проведена хорда, перпендикулярная оси координат. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Докажите, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

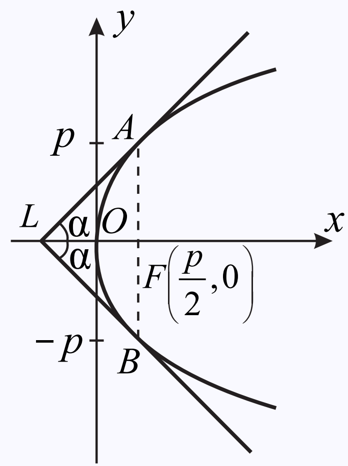


Рисунок 16.2

◀Найдем координаты точки A (рисунок 16.2). Абсцисса фокуса параболы $x = \frac{p}{2}$. Тогда

$$f\left(\frac{p}{2}\right) = \sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p = y,$$

то есть $A\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Используя геометрический смысл производной функции в точке, найдем угол α.

$$y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}; y'\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{\sqrt{2p\cdot\frac{p}{2}}} = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 1,\ \ \alpha = \frac{\pi}{4},\ \ 2\alpha = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 2. Составьте уравнение касательной, проходящей через точку $M\,(2,-5)$ к кривой

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

◀Проверим, принадлежит ли точка M данной кривой. $\left.(x^2 - 4x + 3)\right|_{x=2} = -1$. Точка M данной кривой не принадлежит. Уравнение касательной, проходящей через точку $A_0\,(x_0, y_0)$ графика функции f имеет вид:

$$y = f\,(x_0) + f'\,(x_0)\,(x - x_0)\,. \qquad (16.22)$$

Касательная (16.22) проходит через точку $M\,(2,-5)$, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению (16.22), то есть

$$-\,5 = f\,(x_0) + f'\,(x_0)\,(2 - x_0)\,. \qquad (16.23)$$

У нас

$$f\,(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3;\ \ f'\,(x) = 2x - 4;\ \ f'\,(x_0) = 2x_0 - 4.$$

Тогда (16.23) примет вид

$$-\,5 = x_0^2 - 4x_0 + 3 + (2x_0 - 4)\,(2 - x_0)\,. \qquad (16.24)$$

Решаем квадратное уравнение: (16.24) $x_0^2 - 4x_0 = 0$, $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$. Если $x_0 = 0$, то $f\,(x_0) = f\,(0) = 3$, $f'\,(0) = -4$. Получим уравнение касательной:

$$y = 3 - 4x.$$

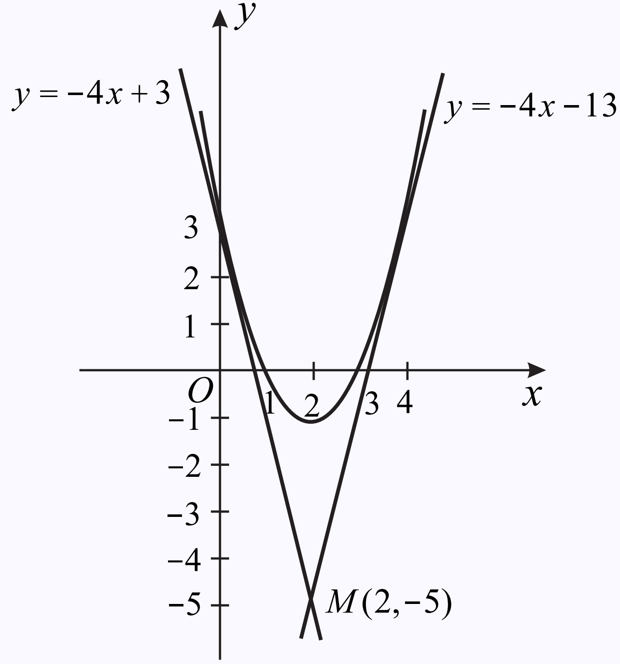


Рисунок 16.3 – касательные к кривой $y = x^2 - 4x + 3$

Если $x_0 = 4$, то $f\,(4) = 3$, $f'\,(4) = 4$. Уравнение второй касательной будет иметь вид:

$$y = 3 + 4\,(x - 4) = 4x - 13. \blacktriangleright$$

Задание 3. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан за 8 с. Найти угловую скорость через 64 с после начала движения.

◀В любой момент времени t вращения колеса угол поворота φ

$$\varphi = kt^2. \tag{16.25}$$

Из начальных условий $t_0 = 8$ с и $\varphi_0 = 2\pi$ находим коэффициент пропорциональности $2\pi = k \cdot 8^2$, $k = \frac{2\pi}{8^2} = \frac{\pi}{32}$. Тогда закон вращения будет определяться формулой

$$\varphi = \frac{\pi}{32}t^2. \tag{16.26}$$

Закон изменения угловой скорости будет

$$\omega = \varphi' = \frac{\pi}{32} \cdot 2t, \text{ то есть } \omega = \frac{\pi}{16}t. \tag{16.27}$$

Если $t = 64$ с, то $\omega\,(64) = \frac{\pi}{16} \cdot 64 = 4\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right) = 2 \left(\frac{\text{об}}{\text{с}}\right)$ ▶.

Задание 4. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью $5\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Какова скорость изменения объема шара в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

◀Считаем, не теряя общности, что в начальный момент времени радиус шара $R = 0$. Берем любой текущий момент времени t, когда радиус шара возрастает. В это время он станет равным $R = 5t$ см. Тогда объем шара будет $V\,(t) = \frac{4}{3}\pi\,(5t)^3$. Находим производную функции $V'\,(t) = 4\pi\,(5t)^2 \cdot 5 = 20\pi\,(5t)^2 = 500\pi t^2$ – это закон скорости изменения объема шара.

Дальше используем начальные условия $5t = 50$, $t = 10$. Тогда искомая скорость

$$V'\,(10) = 20\pi\,(5 \cdot 10)^2 = 5\pi \cdot 10^4 \left(\frac{\text{см}^3}{\text{с}}\right) = 0,05\pi \left(\frac{\text{м}^3}{\text{с}}\right). ▶$$

Задание 5. Напишите уравнения касательных к заданной кривой $y = x\sqrt[3]{1-x}$ в точках с абсциссами: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 9$.

◀Имеем $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y(9) = -18$, $y' = (1-x)^{\frac{1}{3}} - x \cdot \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(3-4x)$, $y'(0) = 1$, $y'(9) = -\frac{11}{4}$.

Следовательно, уравнения касательных в случаях а) и в) будут иметь вид, соответственно, $y = x$ и $y + 18 = -\frac{11}{4}(x-9)$; в случае б) формула для y' теряет смысл. В данном случае можно непосредственно вычислить, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{-\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\infty$.

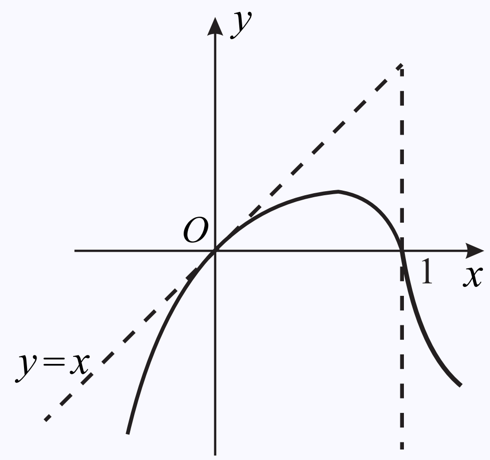


Рисунок 16.4

Заметим, что проще использовать утверждение: если f непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ (соответственно $+\infty$ или $-\infty$). Таким образом, в точке $(1, 0)$ непрерывная кривая $y = x\sqrt[3]{1-x}$ имеет вертикальную касательную $x = 1$ (рисунок 16.4).▶

Задание 6. Кривая задана уравнением: $y = x^2+5x+3$. Определить угол между касательными к кривой в точках с абсциссами $x = -2$ и $x = 0$.

◀Угловой коэффициент касательной равен производной y', вычисленной при значении x, равном абсциссе точки касания. Поэтому начинаем решение задачи с вычисления производной: $y' = 2x + 5$.

Обозначим через α угол наклона касательной в точке с абсциссой $x = -2$, а через β – в точке с абсциссой $x = 0$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = y'|_{x=-2} = 2\cdot(-2)+5 = 1, \operatorname{tg}\beta = y'|_{x=0} = 2\cdot 0+5 = 5.$$

Угол φ между касательными равен $\beta - \alpha$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{5-1}{1+5\cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Находим, что $\varphi = 0,588$ рад.▶

Задание 7. На кривой $y = 4x^2 - 6x + 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x$.

◀Пусть искомая точка касания есть (x_0, y_0). Тогда угловой коэффициент k касательной равен значению производной в точке касания, то есть

$$k = y'|_{x=x_0} = (8x-6)|_{x=x_0} = 8x_0 - 6 = 2\,(4x_0-3)\,.$$

Для того чтобы касательная была параллельна прямой $y = 2x$, их угловые коэффициенты должны совпадать, то есть $k = 2$ или $2\,(4x_0 - 3)\ = 2$. Решая последнее уравнение относительно x_0, получим:

$$4x_0 - 3 = 1,\ 4x_0 = 4,\ x_0 = 1.$$

Подставляя найденное значение абсциссы искомой точки в уравнение кривой, найдем значение ее ординаты y_0: $y_0 = 4\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 3 = 1$. Итак, искомой будет точка $(1,1)$. ▶

Задание 8. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ в точке с абсциссой 2.

◀По заданному значению $x_0 = 2$ находим $y_0 = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$. Значит, касательная проходит через точку $\left(2, \frac{1}{5}\right)$. Пишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку $\left(2, \frac{1}{5}\right)$: $y - \frac{1}{5} = k\,(x-2)$.

Находим угловой коэффициент касательной:

$$k = y'|_{x=2} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\Bigg|_{x=2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\Bigg|_{x=2} = -\frac{4}{25}.$$

Поскольку нормаль и касательная к кривой, проведенные в одной точке кривой, взаимно перпендикулярны, то для нормали угловой коэффициент $k = \frac{25}{4}$. Подставляя полученные значения k в уравнение пучка прямых, найдем искомые уравнения касательной и нормали: уравнение касательной: $y = \frac{-4x+13}{25}$, или $4x + 25y - 13 = 0$, уравнение нормали: $y = \frac{125x-246}{20}$, или $125x - 20y - 246 = 0$. ▶

Задание 9. Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 м. Нижний конец лестницы начинает отодвигаться от стены с постоянной скоростью 2 м/сек. С какой скоростью опускается в момент времени t верхний конец лестницы? Чему равно его ускорение в этот момент времени?

◀За t сек нижний конец лестницы пройдет расстояние в $2t$ м. По теореме Пифагора верхний конец находится в этот момент на высоте $h = \sqrt{25-4t^2}$. Чтобы найти скорость движения, вычислим производную функции $s = 5 - h$. Имеем:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\,(5-h)}{dt} = -\frac{dh}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}.$$

Так как ускорение является производной от скорости по времени, то

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{100}{(25-4t^2)\sqrt{25-4t^2}}. \text{ ▶}$$

Задание 10. Найдите формулу для суммы

$$s_n = 1^2 + 2^2x + \ldots + n^2x^{n-1}.$$

◀По формуле для суммы членов геометрической прогрессии имеем:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Почленно дифференцируя это равенство, получим:

$$1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Умножив обе части равенства на x и снова продифференцировав обе его части, получим:

$$1^2 + 2^2x + \ldots + n^2x^{n-1} = \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)\,x^{n+1} + (n+1)^2\,x^n - x - 1}{(x-1)^3}.$$ ▶

Задание 11. Тяжелая балка длинной l м опускается на землю так, что ее нижний конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот, который разматывается со скоростью v м/сек. При этом балка опускается и вагонетка откатывается. Определите ускорение, с которым откатывается вагонетка в тот момент, когда расстояние от нее до стены равно b м.

◀За tсек верхний конец балки пройдет путь vt. Тогда нижний конец балки, а таким образом и вагонетка переместятся на S м. Имеем в произвольный момент t (рисунок 16.5) $OA = S$, $KO = l - vt$, $KA = l$. Из теоремы Пифагора[1] (ΔAOK – прямоугольный) имеем

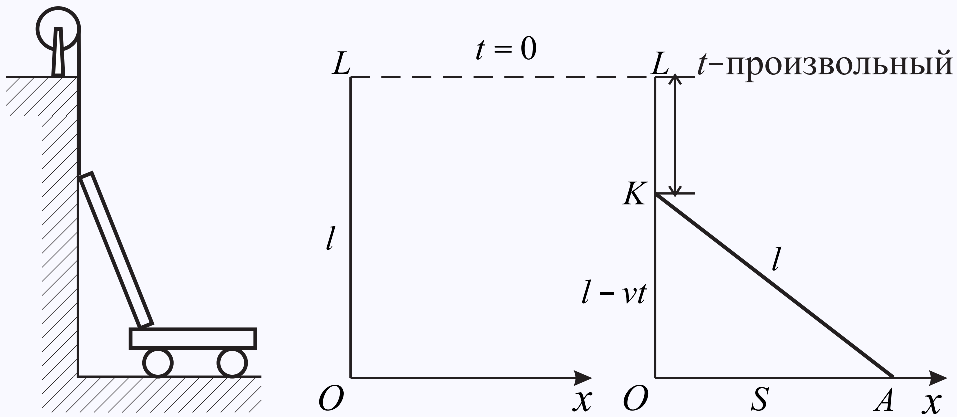


Рисунок 16.5

$$S(t) = \sqrt{l^2 - (l^2 - vt)^2} = \sqrt{2lvt - v^2t^2}.$$

С учетом механического смысла второй производной найдем ускорение, с которым движется вагонетка,

[1] Пифагор Самосский (570–490 гг. до н.э.) – древнегреческий философ, математик.

в любой момент времени t. Для этого вычислим первую и вторую производные функции S:

$$S'(t) = \frac{lv - v^2t}{\sqrt{2lvt - v^2t^2}};$$

$$S''(t) = \frac{-v^2\sqrt{2lvt - v^2t^2} - (lv - v^2t)\,\frac{lv - v^2t}{\sqrt{2lvt - v^2t^2}}}{2lvt - v^2t^2} = -\frac{l^2v^2}{(2lvt - v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Получили $a(t) = -\frac{l^2v^2}{(2lvt - v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Пусть в момент времени t_0 вагонетка находится на расстоянии b м от стены. Это значит, что

$$b = \sqrt{2lvt_0 - v^2t_0}.$$

Тогда ускорение вагонетки в момент времени t_0 равно

$$a(t_0) = -\frac{l^2v^2}{b^3}. \qquad (16.28)$$

Проверка размерности выражения (16.28) $\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\text{м}^3} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Знак «$-$» перед выражением (16.28) показывает, что скорость уменьшается.

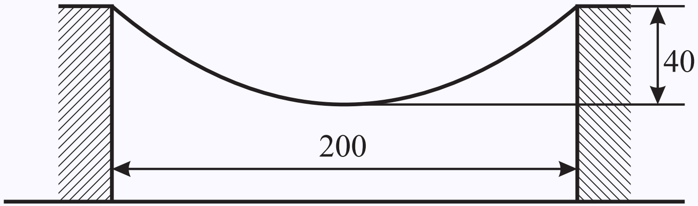
Таким образом, в момент, когда расстояние от вагонетки до стены равно b м, она имеет ускорение равное $-\frac{l^2v^2}{b^3}$ м/с^2. ►

Задания для самостоятельного решения

1. Под каким углом пересекается парабола $y = x^2$ с прямой $3x - y - 2 = 0$?
2. Под какими углами пересекаются параболы: $y = x^2$ и $y^2 = x$?
3. Под какими углами пересекается гипербола $y = \frac{1}{x}$ с параболой $y = \sqrt{x}$.
4. Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой 2.
5. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?
6. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$: 1) параллельна прямой $y = 4x - 5$; 2) перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$; 3) образует с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол в $45°$?
7. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?
8. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Доказать, что эти касательные пересекаются под прямым углом.
9. Написать уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$.
10. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.
11. Показать, что для гиперболы $xy = a$ площадь треугольника, образованного любой касательной и координатными осями, равна площади квадрата, построенного на действительной полуоси.
12. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^4 - 3$, проходящих через точку $(1, -2)$.
13. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 2x - 1$ в точке ее пересечения с параболой $y = 2x^2$.
14. Составить уравнение касательной к кривой $y = \ln x$. В какой точке эта касательная: а) параллельна прямой $y = x - 1$; б) перпендикулярна прямой $2x + 3y = 1$?
15. Составить уравнение нормали к $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

16. Точка движется по прямой $y = 3x - 4$ так, что ее абсцисса возрастает с постоянной скоростью $v = 7$. С какой скоростью изменяется ордината?

17. Канат висящего моста имеет вид параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точек подвеса. Найти угол между канатом и опорными колоннами.



Указание. Сначала, исходя из условия задачи, составьте уравнение параболы, то есть определите величину k в уравнении $y = kx^2$.

18. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 сек. Определите угловую скорость через 32 сек после начала движения.

19. Два самолета вылетают (не одновременно) из пункта A и летят: один со скоростью 850 км/ч в южном направлении, другой – со скоростью 900 км/ч в западном направлении. С какой скоростью возрастает расстояние между самолетами во время полета? Какова эта скорость в момент, когда расстояние первого самолета от пункта A равно 75 км, а второго – 180 км?

20. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол

$$\varphi = a + bt - ct^2,$$

где a, b и c – положительные постоянные. Определите угловую скорость и ускорение вращения.

21. Точка движется по параболе $y = 7 - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется с течением времени t по закону $x = t^3$. С какой скоростью изменяется ордината?

22. Имеется тонкий неоднородный стержень AB длиной 20 см. Известно, что для любой точки C стержня, отстоящей от A на расстоянии 1 см, масса куска стержня AC определяется по формуле: $M = 3l^2 + 5l$. Найдите линейную плотность стержня: а) в точке, отстоящей от точки A на $l = 5$ см; б) в самой точке A; в) в конце стержня.
23. Закон движения тела дан формулой: $S = a + bt + ct^2$. Покажите, что действующая сила постоянна.

    Указание. Иметь в виду, что ускорение пропорционально действующей силе.
24. Распад радия совершается по закону $R = R_0 e^{-kt}$, где R_0 – количество радия в начальный момент времени $t = 0$, а R – количество не распавшегося радия в момент времени t. Определите закон зависимости скорости распада радия от времени. Покажите, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия.
25. Постоянный ток определяется как количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в единицу времени. Дайте в соответствии с этим определение переменного тока. Определите ток в конце пятой секунды, если известно, что количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой: $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов).
26. Выведите формулы для следующих сумм:

    26.1 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + \ldots + n\,(n+1)\,x^{n-1}$;

    26.2 $1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)\,x^{2x-2}$;

    26.3 $1 - 5x^4 + 9x^8 + \ldots + (-1)^{n-1}\,(4n-3)\,x^{4n-4}$;

    26.4 $1^2 + 3^2x^2 + 5^2x^4 + \ldots + (2n-1)^2\,x^{2x-2}$.

ЛЕКЦИЯ 17
Производная функции, заданной параметрически

17.1 Параметрически заданные функции и их дифференцирование

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и одна из них, например $x = \varphi(t)$, непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности; тогда существует обратная φ функция $t = t(x)$ и в некоторой окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$ имеет смысл композиция $y = \psi(t(x))$. Эта функция y переменной x и называется **параметрически заданной функцией** системой уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Теорема 17.1. *Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в некоторой окрестности U_{t_0}, причем для любого $t \in U_{t_0}$ $\varphi'(t) \neq 0$, а функция φ – возрастает (убывает) в этой окрестности, то функция $y = f(x)$, заданная параметрически системой уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$, где $t \in U_{t_0}$, и ее производная*

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{17.1}$$

◀Выполняются все условия теоремы 15.2 о существовании производной для обратной функции φ^{-1} в точке $x = \varphi(t)$, значит:

$$\exists \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Далее, используя теорему о производной сложной функции, получим $(f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)))$:

$$\exists f'(x) = \left(\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)' = \psi'(t) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \ ▶$$

Замечание 17.1. Формулу (17.1) удобно записывать в виде

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}, \tag{17.2}$$

используя обозначения:

$$f'(x) = y'_x,\ \varphi'(t) = \varphi'_t,\ \psi'(t) = \psi'_t.$$

Формула (17.2) дает возможность находить производную y'_x функции $y = f(x)$, заданной параметрически, не находя выражение непосредственной зависимости y от x.

Производная y'_x функции, заданной параметрически, в свою очередь является функцией, заданной параметрически с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = g(t), \end{cases} \quad t \in U_{t_0}\ .$$

И если дополнительно к условиям теоремы 17.1 потребовать дифференцируемость функции g на окрестности U_{t_0}, то заданная параметрически функция $y = f(x)$ будет дважды дифференцируемой в точке $x = \varphi\,(t)$, где $t \in U_{t_0}$, и

$$f''(x) = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Последнюю формулу удобно записывать в виде

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t} \quad \text{или} \quad y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t}, \tag{17.3}$$

где $y''_{xx} = y''_{x^2} = f''(x)$, $(y'_x)'_t = g'(t)$.

Аналогично можно получить формулы производных высших порядков функции, заданной параметрически.

Пример 17.1. Пусть

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)\,. \tag{17.4}$$

◀Очевидно, что на промежутках $(0,\pi)$ и $(\pi, 2\pi)$ выполняются все условия теоремы 17.1 (функция $x = \varphi(t) = a\cos t$ убывает на промежутке $(0,\pi)$ и возрастает на промежутке $(\pi, 2\pi)$, также существуют $\varphi'(t) = -a\sin t \neq 0$ и $\psi'(t) = b\cos t$ в любой точке рассматриваемых множеств).

Пусть $X_1 = \varphi((0,\pi))$, $X_2 = \varphi((\pi, 2\pi))$ – образы указанных промежутков при отображении φ. Значит, на множествах X_1 и X_2 определена функция $y = f(x)$, заданная параметрически, и для любого $x \in X_1 \cup X_2$

$$\exists\, y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$ ▶

17.2 Примеры кривых, заданных параметрически

Параметрические уравнения прямой

Пусть прямая проходит через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1). Тогда ее уравнение принимает вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = t, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0)\,, \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0)\,, \end{cases} \tag{17.5}$$

где функции (17.5) определены на $I = \mathbb{R}$. Если $I = [0, 1]$, то системой (17.5) задается отрезок с концами в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Параметрические уравнения эллипса

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{17.6}$$

Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)\,. \tag{17.7}$$

Возьмем любую точку (x, y), которая принадлежит эллипсу (17.6). Тогда точка $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ принадлежит единичной окружности, а поэтому существует такое $t \in [0, 2\pi)$, что

$$\frac{x}{a} = \cos t,\ \frac{y}{b} = \sin t,\ y = b\sin t,\ x = a\cos t.$$

Таким образом, для координат точки эллипса получим представление (17.7). И наоборот, для любого $t \in [0, 2\pi)$ с помощью (17.7) получаем точки, координаты которых удовлетворяют уравнению эллипса (17.6):

$$\frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} = 1, \quad 1 = 1.$$

Замечание 17.2. Определим геометрический смысл параметра t. Возьмем любую точку $M\,(x, y)$ эллипса (17.6) и ей соответствующую точку $M'\left(x, \frac{a}{b}y\right) = M'\,(\alpha, \beta)$. Покажем, что M' принадлежит окружности $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$. Имеем $x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, так как M – точка эллипса (17.6).

Значением параметра t, соответствующим точке $M\,(x, y)$ эллипса (17.6) служит угол между действительной осью OX и радиус-вектором $\overrightarrow{OM'}$, $M'\left(x, \frac{a}{b}y\right)$ принадлежит окружности с центром в начале координат и радиуса a, отсчитываемый против часовой стрелки (рисунок 17.1).

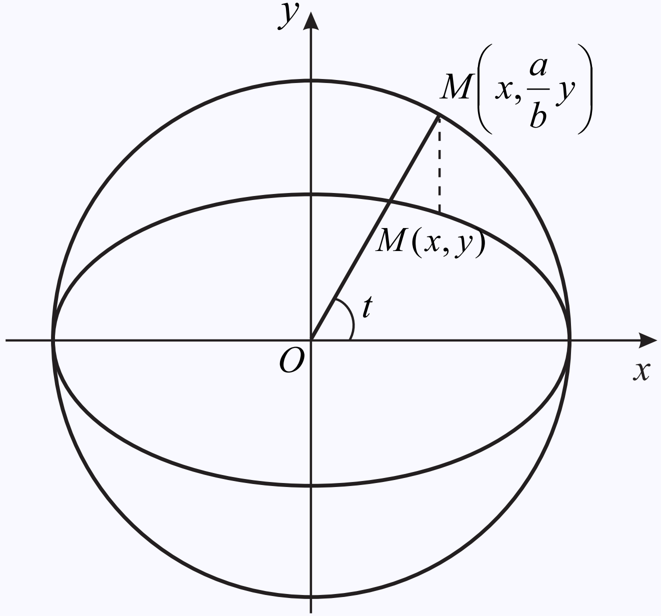


Рисунок 17.1 – Эллипс и окружность

Параметрические уравнения ветвей гиперболы

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

С использованием гиперболических функций можно показать, что параметрические уравнения правой ветви гиперболы имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad (x \geqslant a,\ t \in \mathbb{R});$$

а параметрические уравнения левой ветви гиперболы имеют вид

$$\begin{cases} x = -a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad (x \leqslant a,\ t \in \mathbb{R}).$$

Параметрические уравнения циклоиды

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t)\,, \\ y = a\,(1 - \cos t)\,, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(можно считать, что $-\infty < t < +\infty$).

Циклоида – это кривая, которая описывается фиксированной точкой окружности круга, который катится без трения и скольжения по прямой, например оси абсцисс (рисунок 17.2).

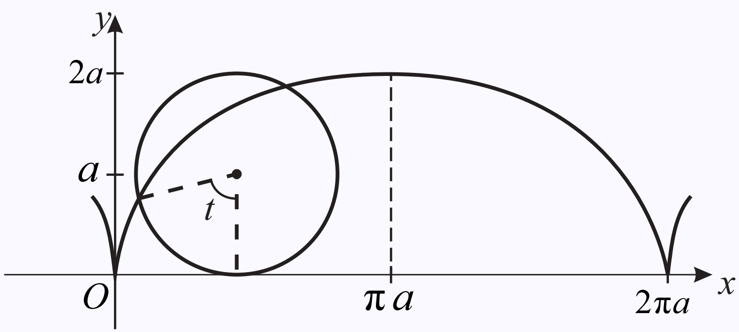


Рисунок 17.2 – Циклоида

Параметрические уравнения астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi),$$

Астроида – замкнутая кривая, которая описывается точкой (x, y) окружности радиуса $r = a/4$, которая

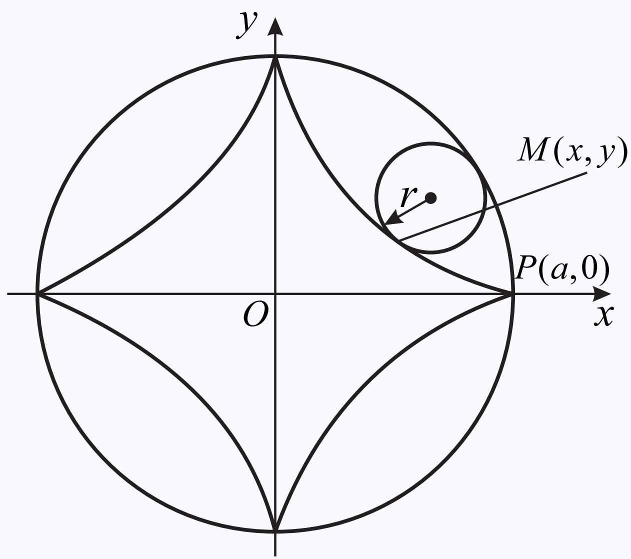


Рисунок 17.3 – Астроида

катится по внутренней стороне окружности $x^2 + y^2 = a^2$ (рисунок 17.3).

Параметрические уравнения декартового листа

$$\begin{cases} x = -\frac{3at}{1+t^3}; \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}; \ t = \frac{y}{x}.$$

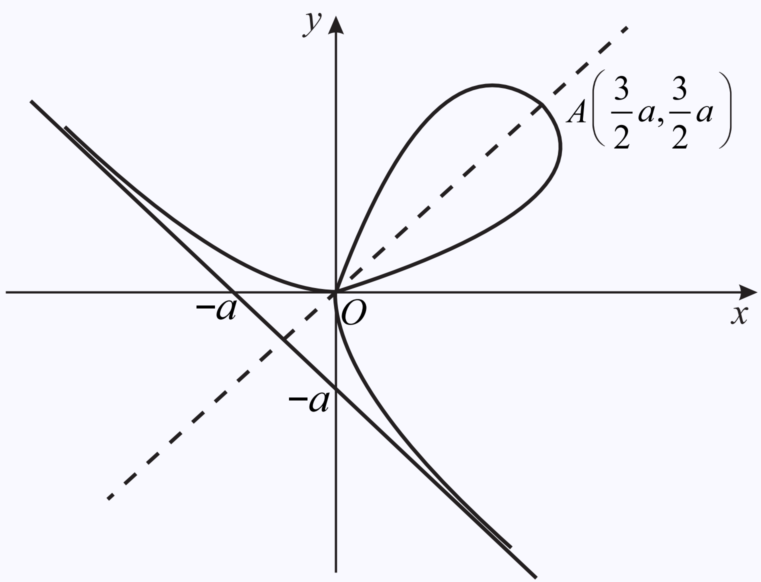


Рисунок 17.4 – Декартов лист

При $t \to \pm\infty$ обе координаты стремятся к 0 (начальная точка $(0,0)$ получается как при $t = 0$, так и при $t = \pm\infty$). При изменении t от $-\infty$ до (-1) точка (x, y) кривой, выходя из начала координат, удаляется по правой ветке в бесконечность. При возрастании t от 0 до $+\infty$ точка (x, y) описывает (против часовой стрелки) петлю. При изменении t от (-1) до 0 точка (x, y) из бесконечности по левой ветке возвращается в начало координат.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение функции, заданной параметрически.
2. Сформулируйте теорему о дифференцировании функции, заданной параметрически.
3. Приведите примеры параметрически заданных кривых (прямая, эллипс, гипербола, циклоида, астроида, декартов лист).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

Производные и дифференциалы высших порядков. Производная функции, заданной параметрически

Задание 1. Используя формулу Лейбница, найдите n-ю, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, производную функции

$$f(x) = \left(x^2 - 5\right)\cos 2x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

◀Используем формулу Лейбница (16.17). Пусть

$$g(x) = x^2 - 5,\ \ f(x) = \cos 2x.$$

$$\left(\left(x^2-5\right)\cos 2x\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x^2-5\right)^{(k)} (\cos 2x)^{(n-k)} =$$

$$= C_n^0\left(x^2-5\right)(\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 \cdot 2x\,(\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2 \cdot 2\,(\cos 2x)^{(n-2)} =$$

$$= \frac{n!}{0!\,(n-0)!}\left(x^2-5\right)\cdot 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}\cdot 2x \cdot 2^{n-1}\cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{2\cdot n!}{2!\,(n-2)!}\cdot 2^{n-2}\cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) = 2^n\left(x^2-5\right)\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 2^n n x \cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + 2^{n-2} n(n-1)\cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right).$$ ▶

Задание 2. Пусть
$$y = (4x+1)^7 \left(x^2+6x-3\right)^{10} (x+5)^{12}, \ x \in \mathbb{R}.$$
Найдите выражения для $y^{(39)}$ и для $y^{(40)}$.

◀Если раскрыть скобки в выражении выше, то получим многочлен со старшим членом 4^7x^{39}. Известно, что при $n > k$ (k и n – натуральные числа) $\left(x^k\right)^{(n)} = 0$, а $(x^n)^{(n)} = n!$ Поэтому 39-е производные всех слагаемых, кроме старшего, равны нулю, а 39-я производная старшего члена равна $4^7 \cdot 39!$ Итак,
$$y^{(39)} = 4^7 \cdot 39!.$$
Ясно, что $y^{(40)} = 0$. ▶

Задание 3. Найдите выражение для производной n-го порядка функции $y = e^{kx}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, $y''' = k^3e^{kx}$. Естественно предположить, что $y^{(n)} = k^ne^{kx}$. Докажем это равенство методом математической индукции. При $n = 1$ оно верно. Предположим, что уже доказано равенство
$$y^{(n)} = k^ne^{kx}.$$
Дифференцируя обе части этого равенства, получаем, что $y^{(n+1)} = k^{n+1}e^{kx}$. Это показывает, что из справедливости формулы для n вытекает ее справедливость для $n+1$. Значит, равенство верно при всех значениях $n \in \mathbb{N}$. ▶

Задание 4. Найдите выражение для n-й производной функции $y = \sin 4x \cdot \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Преобразуем заданную функцию по формуле
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$
Тогда $y = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)$. Так как $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$, то
$$y^{(n)} = \frac{6^n}{2}\sin\left(6x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right). ▶$$

Задание 5. Найдите выражение для n-й производной функции

$$y = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}, \ \ x \in (-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty).$$

◀Представим эту функцию в виде

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Чтобы найти коэффициенты A и B, приведем обе части полученного равенства к одному знаменателю и в стлу равенства двух дробей приравняем их числители:

$$2x+3 = A(x-3) + B(x-2) = (A+B)x + (-3A-3B).$$

Чтобы это равенство было верно при всех значениях x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3. \end{cases}$ Откуда находим $A=-7$, $B=9$, а потому

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{x-2} + \frac{9}{x-3}.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}},$$

то

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = \frac{7(-1)^{n+1} n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{9(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}.$$ ▶

Задание 6. Пользуясь формулой Лейбница (16.17), найдите пятую производную функции $y = x^5 e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Полагая $f = x^5$ и $g = e^{\frac{x}{2}}$, найдем:

$$f' = 5x^4,\ f'' = 20x^3,\ f''' = 60x^2,\ f^{(4)} = 120x,\ f^{(5)} = 120,$$

$$g' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\ g'' = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}},\ g''' = \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}},\ g^{(4)} = \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}},\ g^{(5)} = \frac{1}{32}e^{\frac{x}{2}}.$$

Подставляя в формулу Лейбница при $n = 5$, получим:

$$y^{(5)} = 120e^{\frac{x}{2}} + 5 \cdot 120x \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}60x^2 \cdot \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}20x^3 \cdot \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}} + 5 \cdot 5x^4 \cdot \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}} +$$
$$+ x^5 \frac{1}{32}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(120 + 300x + 150x^2 + 25x^3 + \frac{25}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^5\right).\ ▶$$

Задание 7. Найдите дифференциалы dy и d^2y функции $y = x^4 - 3x^2 + 2$ в случае, когда: 1) x – независимая переменная; 2) x – функция от другой независимой переменной.

◀Дифференциал первого порядка dy в силу свойства инвариантности его формы представляется в обоих случаях одинаково:

$$dy = y'\,dx = \left(4x^3 - 6x\right)\,dx = 2\left(2x^3 - 3x\right)\,dx.$$

В первом случае под dx понимается приращение независимой переменной Δx ($dx = \Delta x$), во втором случае – дифференциал от x как от функции ($dx \neq \Delta x$).

Что же касается дифференциалов высшего порядка, то для них, как известно, свойство инвариантности формы нарушается. Следовательно, при отыскании d^2y приходится решать задачу для каждого случая отдельно.

1. Пусть x – независимая переменная. В этом случае $dx = \Delta x$ не зависит от x и его можно выносить за знак дифференциала, получим:

$$d^2y = d\,(dy) = d\left[2\left(2x^3 - 3x\right)\,dx\right] = 2\,dx \cdot d\left(2x^3 - 3x\right) =$$

$$= 2\,dx \cdot \left(6x^2 - 3\right)\,dx = 6\left(2x^2 - 1\right)\,dx^2.$$

2. Пусть x является в свою очередь функцией от некоторой другой переменной. В этом случае dx уже зависит от этой переменной, и выносить его за знак дифференциала, как мы это делали в первом случае, нельзя. Нужно вычислить дифференциал как от произведения двух функций.

$$d^2y = d\,(dy) = d\left[2\left(2x^3 - 3x\right)\,dx\right] = 2d\left[\left(2x^3 - 3x\right)\,dx\right] =$$

$$= 2\left[d\left(2x^3 - 3x\right)\,dx + \left(2x^3 - 3x\right)d\,(dx)\right] =$$

$$= 2\left[3\left(2x^3 - 1\right)\,dx \cdot dx + \left(2x^3 - 3x\right)d^2x\right] = 6\left(2x^3 - 1\right)\,dx^2 + 2\left(2x^3 - 3x\right)d^2x. \ ►$$

Задание 8. Найдем y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} функции $y = y\,(x)$, заданной параметрически:

$$x = a\,(t - \sin t)\,,\ \ y = a\,(1 - \cos t)\,.$$

◄Так как $x'_t = a\,(1 - \cos t)$ положительна для $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а $y'_t = a\sin t$, то в соответствующих точках

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$y''_{x^2} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}};\quad y'''_{x^3} = \frac{\left(y''_{x^2}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin^5\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}. \ ►$$

Задания для самостоятельного решения

1. Докажите, что функция $y = e^x \cos x$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)} + 4y = 0$.
2. Найдите y'' для $y = x\sqrt{1+x^2}$, y''' для $y = e^{-x^2}$, y''' для $y = \sqrt[5]{x^3}$, $y^{(4)}$ для $y = x\sin^2 x$.
3. Докажите, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ удовлетворяет уравнению $y^3 y'' + 1 = 0$.
4. Найдите $y^{(n)}$ для следующих функций:

   4.1 $y = \ln\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$;

   4.2 $y = \frac{1}{x^2(x-1)}$;

   4.3 $y = \frac{x+1}{x(x-1)}$;

   4.4 $y = (3x^2 + 2x + 1)\ln(x+1)$;

   4.5 $y = (5x^2 - 1)\sin x$.

5. Пусть $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^3 \cdot (x-4)^6$. Найдите $f^{(12)}(x)$.
6. Пусть $f(x) = (4x^3 + 3x - 1)^{11} \cdot (x^4 + 4)^{12} \cdot (x^7 - 5)^6$. Найдите $f^{(123)}(x)$, $f^{(124)}(x)$.
7. Найдите $y^{(20)}$ для $y = x^2 e^{2x}$, $y^{(5)}$ для $y = x\ln x$, $y^{(4)}$ для $y = e^x \cos x$, $y^{(8)}$ для $y = \frac{x^2}{1-x}$, $y^{(6)}$ для $y = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$, $y^{(100)}$ для $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $y^{(50)}$ для $y = x^2 \sin 2x$.

   Указание. После первого дифференцирования результат представьте в виде суммы дробных степеней линейной функции, для которых можно получить общую форму n-й производной.
8. Найдите значения производных порядка n при $x = 0$ от следующих функций:

   8.1 $y = x^k e^{ax}$;

   8.2 $y = \arcsin x$;

   8.3 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

   8.4 $y = \arcsin^2 x$;

   8.5 $y = \sin(m \arcsin x)$;

   8.6 $y = e^{m \arcsin x}$;

   8.7 $y = (1+x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \operatorname{arctg} x)$;

   8.8 $y = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

9. Даны функции: а) $y = \sqrt[3]{x^2}$, б) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$. Найдите $d^2 y$, считая, что x – независимая переменная.

10. Дана функция: $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Найдите d^2y при условии, что

 10.1 x – независимая переменная;

 10.2 x – функция от другой переменной.

11. Покажите, что если тело движется по закону $s = ae^t + be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

12. Точка движется так, что скорость ее пропорциональна квадратному корню из пройденного пути (как это, например, имеет место при свободном падении). Покажите, что движение происходит под действием постоянной силы.

 Указание. Ускорение пропорционально действующей силе.

13. Тяжелая материальная точка $M(x;y)$ брошена в вертикальной плоскости Oxy под углом α к плоскости горизонта с начальной скоростью v_0. Составьте (пренебрегая сопротивлением воздуха) уравнения движения и определите величину скорости v и ускорения ω, а также траекторию движения. Чему равны наибольшая высота подъема точки и дальность полета?

14. Докажите, что ускорение гармонического колебания $x = A\sin(\omega t+\alpha)$ пропорционально отклонению x от положения равновесия.

15. Найдите производные первого и второго порядка функций $y = y(x)$, заданных параметрически:

 15.1 $x(t) = a\left(\cos t - \ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right),\ y(t) = a\sin t;$

 15.2 $x(t) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right),\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$

 15.3 $x(t) = t^3 + 3t,\ y(t) = t\operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{1+t^2};$

 15.4 $x(t) = e^t(\cos t + \sin t),\ y(t) = e^t(\cos t - \sin t);$

 15.5 $x(t) = a(1+\cos t)\cos t,\ y(t) = a(1-\cos t)\sin t;$

 15.6 $x(t) = a\cos t + (at+b)\sin t,\ y(t) = a\sin t - (at+b)\cos t;$

 15.7$x(t) = a\cos^5 t,\ y(t) = a\sin^5 t.$

ЛЕКЦИЯ 18
Основные теоремы дифференциального исчисления

18.1 Точки экстремума. Теорема Ферма[1]

Определение 18.1. *Пусть* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$. *Точка* x_0 *называется* ***точкой максимума*** (***минимума***) *функции* f, *а* $f(x_0)$ – ***максимумом*** (***минимумом***), *если существует такая окрестность* $U_{x_0} \subset X$, *что для любых* $x \in U_{x_0}$ $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$, *причем если для любых* $x \in \mathring{U}_{x_0}$ $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, *то* x_0 *называют* ***точкой строгого максимума*** (***строгого минимума***).

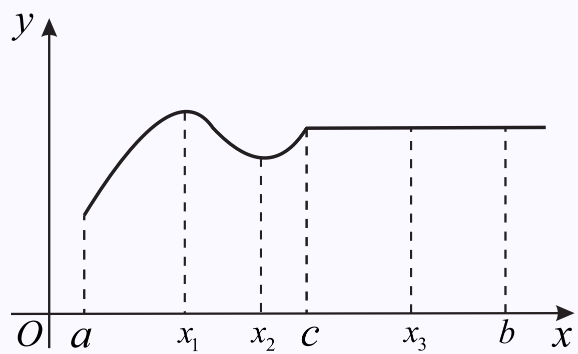


Рисунок 18.1 – Максимумы и минимумы функции

Замечание 18.1. Из рисунка 18.1 видно, что x_1 – точка строгого максимума функции, любая же точка промежутка $[c, b)$ – точка максимума (нестрогого), точка x_2 – строгого минимума функции, а точки интервала (c, b) – точки минимума (нестрогого).

[1]Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик.)

Подчеркнем, что неравенства в определениях экстремумов выполняются лишь в некоторой достаточно малой окрестности экстремума. Максимумы (минимумы) не обязательно являются наибольшими (наименьшими) значениями функции на рассматриваемом промежутке (рисунок 18.1).

Определение 18.2. *Точки максимума и минимума функции называются* ***точками экстремума****, а значения в них –* ***экстремумами****.*

Теорема 18.1 (Ферма). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке экстремума x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

◀Пусть x_0 – точка максимума функции. Тогда для любого $\Delta x \neq 0$ и такого, что $x_0 + \Delta x \in U_{x_0}$ будет

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0, \text{ если } \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0, \text{ если } \Delta x > 0.$$

А тогда, по теореме о предельном переходе в неравенствах и определению производной, получим, что $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. ▶

Следствие 18.1. *Если выполняются условия теоремы, то в точке x_0 функция f имеет касательную, параллельную оси Ox (геометрический смысл теоремы).*

18.2 Теорема Ролля[2]

Теорема 18.2. *Пусть функция $f \in C([a,b])$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

◀Выполняются условия теоремы Вейерштрасса, значит, существуют такие точки $c_1, c_2 \in [a,b]$, что $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$, где m – наименьшее значение функции f на $[a,b]$, а M – наибольшее. Имеют место два случая.

а) $m = M = f(x) = const$. Тогда для любого $x \in (a,b)$ $f'(x) = 0$ (в качестве c можно взять любую точку интервала (a,b));

б) $m < M$. Тогда хотя бы одна из точек c_1 или c_2 обязательно принадлежит интервалу (a,b) (в противном случае $f(c_1) = m = f(c_2) = M = f(a) = f(b)$).

Пусть $c_2 \in (a,b)$, $f(c_2) = M$. В этом случае выполняются все условия теоремы Ферма, значит, $f'(c_2) = 0$. Роль c играет c_2. ▶

Следствие 18.2. *Если функция $f \in C([a,b])$, дифференцируема на интервале (a,b), то между любыми двумя нулями a и b $(a < b)$ функции f существует нуль ее производной.*

Заметим, что все предпосылки теоремы Ролля существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два из трех условий теоремы, третье же не выполнялось бы, и у которых не существует точки c такой, что $f'(c) = 0$. (При этом, в силу третьего условия теоремы, в котором говорится о значениях функции в концевых точках промежутка, следует рассматривать лишь функции, определенные на отрезках.)

Функция $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы Ролля, но не удовлетворяет условию 1 (рисунок 18.2).

Функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$ удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2 (рисунок 18.3).

[2] Мишель Ролль (1652–1719) – французский математик.

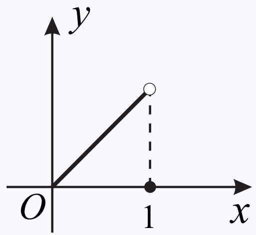


Рисунок 18.2

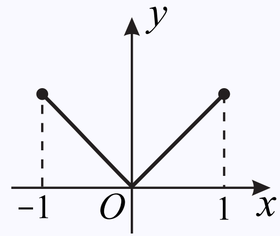


Рисунок 18.3

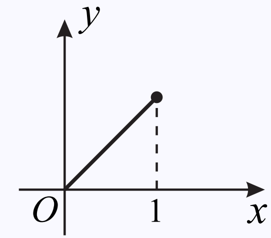


Рисунок 18.4

Наконец, функция $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3 (рисунок 18.4).

Для всех этих функций не существует точки, в которой их производная обращалась бы в нуль.

18.3 Теорема Лагранжа[3]

Теорема 18.3. *Если функция* $f \in C\left([a, b]\right)$, *дифференцируема на интервале* (a, b), *то существует такая точка* $c \in (a, b)$, *что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{18.1}$$

◀Введем вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$, где λ – некоторое действительное число. Для функции φ выполняются следующие условия теоремы Ролля: $\varphi \in C\left([a, b]\right)$, φ дифференцируема хотя бы на (a, b). Еще потребуем, чтобы и $\varphi(a) = \varphi(b)$, это значит $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Отсюда $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

А тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\varphi'(c) = f'(c) - \lambda = 0$, поэтому $\lambda = f'(c)$. ▶

[3]Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – французский математик.

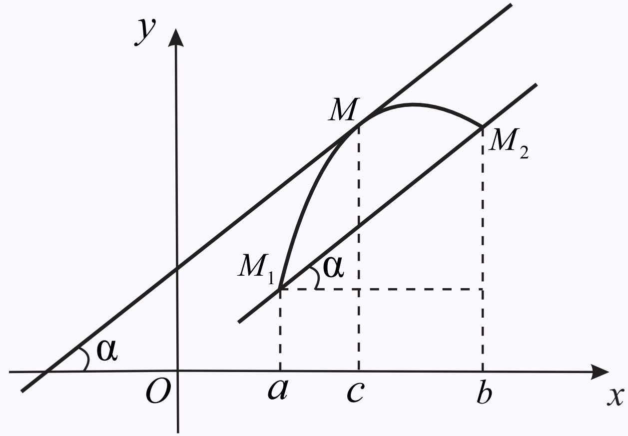


Рисунок 18.5 – Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Следствие 18.3 (геометрический смысл теоремы Лагранжа). *Если выполняются условия теоремы 18.3, то на графике функции f существует такая точка $M\left(c, f\left(c\right)\right)$, что касательная к кривой Γ_f в точке M параллельна секущей, проведенной через точки $M_1\left(a, f\left(a\right)\right)$ и $M_2\left(b, f\left(b\right)\right)$.*

Следствие 18.4 (другие формы записи формулы Лагранжа).

$$\text{а)}\ f\left(b\right) - f\left(a\right) = f'\left(c\right)\left(b - a\right), \tag{18.2}$$

$$\text{б)}\ f\left(b\right) - f\left(a\right) = f'\left(a + \theta\left(b - a\right)\right)\left(b - a\right), \tag{18.3}$$

где θ – некоторое действительное число из интервала $(0, 1)$:

$$\left(0 < \frac{c - a}{b - a} = \theta < 1;\ \ c = a + \theta\left(b - a\right)\right),$$

$$\text{в) } \Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x, \tag{18.4}$$

где приращения Δx и Δy могут быть конечными (по этой причине формула Лагранжа называется формулой конечных приращений).

Берем любую точку $x \in [a,b]$ и придаем ей любое приращение $\Delta x \neq 0$, но такое, что $x+\Delta x \in [a,b]$. Тогда на $[x, x+\Delta x]$ ($[x+\Delta x, x]$) выполняются условия теоремы Лагранжа. Отсюда вытекает справедливость формулы (18.4) (смотри (18.3)).

Следствие 18.5 (критерий постоянства функции на промежутке). *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ является постоянной на невырожденном промежутке X тогда и только тогда, когда функция непрерывна на промежутке X, дифференцируема во внутренних точках указанного промежутка, и для любых $x \in X$ $f'(x) = 0$.*

◀**Необходимость.** Справедливость необходимого условия вытекает из того, что $(\mathrm{const})' = 0$.

Достаточность. Берем любую точку $x_0 \in X$, фиксируем ее, а также берем переменную точку $x \in X$, $x \neq x_0$. На отрезке $[x_0, x]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, поэтому справедливо ее заключение: существует такая точка $c \in (x_0, x)$, что $f'(c) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$. Однако $f'(c) = 0$, тогда $f(x) = f(x_0)$. ▶

18.4 Теорема Коши

Теорема 18.4. *Если функции $f, g \in C([a,b])$, дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то существует такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{18.5}$$

◀Прежде всего заметим, что из условий теоремы следует, что $g(b) \neq g(a)$, потому что в противном случае для функции g на отрезке $[a,b]$ выполнялись бы условия теоремы Ролля, а это значит, существовала бы точка $c \in (a,b)$ такая, что $g'(c) = 0$ (на (a,b) $g'(x) \neq 0$).

Вводим дополнительную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x),$$

где λ – некоторое действительное число. Очевидно, что функция $\varphi \in C([a,b])$, дифференцируема хотя бы на интервале (a,b) – а это два условия теоремы Ролля для φ. Потребуем, чтобы и $\varphi(a) = \varphi(b)$ (третье условие теоремы Ролля):

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b).$$

Тогда $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. При таком выборе λ для функции φ выполняются все условия теоремы Ролля, а поэтому существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $\varphi'(c) = 0$, или $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$. Отсюда следует справедливость формулы (18.5).►

Замечание 18.2. Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши при $g(x) = x$.

18.5 Приложения основных теорем дифференциального исчисления

Пример 18.1. Пользуясь теоремой Лагранжа, докажите неравенство:

$$e^x > 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{18.6}$$

◄Возьмем любое $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Для отрезка $[0,x]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, если $f(x) = e^x - x - 1$ (покажите самостоятельно). Тогда

$$f(x) - f(0) = f'(\theta x) \cdot x, (f'(\theta x) = f'(c_x), c_x \in (0,x)), 0 < \theta < 1. \tag{18.7}$$

Для нашей функции равенство (18.7) примет вид

$$e^x - x - 1 = \left(e^{\theta x} - 1\right) x. \tag{18.8}$$

Так как в (18.8) $x > 0$, то и $e^{\theta x} - 1 > 0$, то есть $e^{\theta x} - x - 1 > 0$. Если же $x < 0$, то и $e^{\theta x} - 1 < 0$, значит, $e^x - x - 1 > 0$. Неравенство (18.6) доказано. ►

Пример 18.2. Докажите, что если функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ – дифференцируема и не ограничена на конечном интервале (a, b), то и ее производная также является неограниченной на этом интервале.

◀Так как функция f не ограничена на интервале (a, b), то

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \exists x' \in (a, b) \quad f(x') > \alpha.$$

Дальше допустим, что f' ограничена на (a, b), то есть

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall x \in (a, b) \quad |f'(x)| \leqslant \beta.$$

Берем любое $x_1 \in (a, b)$ и фиксируем, а также берем любое $x \in (a, b)$. На отрезке $[x_1, x]$ для функции f выполняются условия теоремы Лагранжа.

Тогда

$$|f(x)| - |f(x_1)| \leqslant |f(x) - f(x_1)| \leqslant |f'(c_x)| \cdot |x - x_1|,$$

$$|f(x)| \leqslant |f(x_1)| + |f'(c_x)| \cdot |x - x_1| \leqslant |f(x_1)| + \beta(b - a) = D \in \mathbb{R}_+.$$

Получили противоречие.▶

Пример 18.3. Покажите, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет только один вещественный корень.

◀Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Она непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет производную $f'(x) = 3(x^2 + 1)$.

Легко видеть, что $f'(x) \neq 0$ при любых действительных значениях x. Но тогда наше уравнение может иметь не более одного действительного корня, так как если бы оно имело, например, два корня c_1 и c_2, то $f(c_1) = f(c_2) = 0$, и, по теореме Ролля, между c_1 и c_2 нашлась бы такая точка c, что $f'(c) = 0$. Последнее невозможно. Существование же действительного корня следует из того, что f есть многочлен нечетной степени.▶

Пример 18.4. Докажите, что если x_1 является корнем многочлена f кратности k, то для производной f' он будет корнем кратности $k - 1$.

◀Пусть многочлен f имеет k-кратный корень x_1. Тогда, как известно из курса алгебры, этот многочлен можно представить в виде: $f(x) = (x - x_1)^k \varphi(x)$, где φ – многочлен, не делящийся на $x - x_1$. Найдем производную:

$$f'(x) = k(x - x_1)^{k-1}\varphi(x) + (x - x_1)^k \varphi'(x) = (x - x_1)^{k-1}\left[k\varphi(x) + (x - x_1)\varphi'(x)\right].$$

Так как $(x - x_1)\varphi'(x)$ делится на $(x - x_1)$, а $\varphi(x)$ не делится на $(x - x_1)$, то выражение в квадратных скобках не делится на $(x - x_1)$, откуда следует, что f' делится на $(x - x_1)^{k-1}$, но не делится на $(x - x_1)^k$, это означает, что $x = x_1$ – корень $k - 1$-й кратности для производной f'. ▶

Пример 18.5. Пусть $f(x) = (x - 4)^2(x + 2)^2$. Докажите, что функция $f''(x)$ имеет на промежутке $(-2, 4)$ два корня.

◀Так как f – многочлен четвертой степени, то f'' – квадратный многочлен, а потому имеет не более двух вещественных корней. Так как $f(-2) = f(4) = 0$, то, по теореме Ролля, на отрезке $[-2, 4]$ есть точка c такая, что $f'(c) = 0$. Но $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$ – корни второй кратности многочлена f. Поэтому $f'(-2) = f'(4) = 0$. Применим теорему Ролля к функции f' на отрезках $[-2, c]$ и $[c, 4]$. Получим, что существуют точки c_1 и c_2, $-2 < c_1 < c$, $c < c_2 < 4$, такие, что $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$. Значит, оба нуля функции f'' вещественны и лежат на интервале $(-2, 4)$. ▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа).

   В чем заключается их геометрический смысл?
2. Сформулируйте теорему Коши.
3. Докажите с помощью теоремы Ролля, что уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ не может иметь более двух вещественных корней, а с помощью теоремы Больцано – Коши установите, что два вещественных корня действительно существуют.
4. Докажите, что все корни производной многочлена $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ вещественны, и укажите границы, между которыми они заключены.

ЛЕКЦИЯ 19
Правила Лопиталя

19.1 Правила Лопиталя[1] (раскрытие неопределенностей при нахождении пределов)

Теорема 19.1 (первое правило Лопиталя). *Если функции $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ и $g : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в проколотой окрестности $\mathring{U}_a$, причем:*

1) *для любых $x \in \mathring{U}_a$ $g'(x) \neq 0$;*
2) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

◄Возьмем любую последовательность $(x_n) \subset \mathring{U}_a$, $x_n > a$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Пусть $f(a) = g(a) = 0$. На отрезке $[a, x_n]$ выполняются все условия теоремы Коши для функций f и g, поэтому существует $\xi_n \in (a, x_n)$, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ (принять во внимание, что $f(a) = g(a) = 0$). В последнем равенстве переходим к пределу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(мы использовали тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = a$ и условие 3 теоремы). А тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[1] Гийом Франсуа Лопиталь (1661–1704) – французский математик.

Аналогично доказывается теорема и для левостороннего предела. А так как существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.\ \blacktriangleright$$

Замечание 19.1. Если функции f' и g' непрерывны в точке a и $g'(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Замечание 19.2. Если функции f' и g' удовлетворяют тем же условиям, что и f, g, то правило Лопиталя можно применить повторно.

Пример 19.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

◀Условия теоремы 19.1 выполняются, поэтому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.\ \blacktriangleright$$

Теорема 19.2 (второе правило Лопиталя). *Если функции* $f:(c,+\infty)\to\mathbb{R}$ *и* $g:(c,+\infty)\to\mathbb{R}$ *дифференцируемы на интервале* $(c,+\infty)$, *причем:*

1) $\forall x\in(c,+\infty)\ g'(x)\neq 0$;
2) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;
3) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (A\in\overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

◀Вводим подстановку $x=\frac{1}{t}$, $t\in\left(0,\frac{1}{c}\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{G(t)},$$

где $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$.

Но $\lim\limits_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Для функций F и G выполняются условия теоремы 19.1, значит,

$$\exists\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)},$$

или

$$\exists\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ ▶$$

Замечание 19.3. Теоремы 19.1 и 19.2 позволяют раскрывать неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$. Теорему 19.2 аналогично можно рассмотреть и при $x\to-\infty$ или $x\to\infty$.

Кафедра МАДУП

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

Теорема 19.3 (третье правило Лопиталя). *Если функции $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ и $g : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в проколотой окрестности $\mathring{U}_a$, причем:*

1) $\forall\, x \in \mathring{U}_a \; g'(x) \neq 0$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ *(любого знака, можно и разного для каждой из функций)*;

3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \; (A \in \overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

◀Возьмем любую последовательность $(x_n) \subset \mathring{U}_a$, $x_n < a$. Возьмем натуральные числа n_1, n_2 ($n_1 < n_2$ и числа достаточно большие). На отрезке $[x_{n_1}, x_{n_2}]$ выполняются условия теоремы Коши, тогда существует точка $\xi_{n_1,n_2} \in (x_{n_1}, x_{n_2})$ такая, что

$$\frac{f(x_{n_2}) - f(x_{n_1})}{g(x_{n_2}) - g(x_{n_1})} = \frac{f(x_{n_2})}{g(x_{n_2})} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_{n_1})}{f(x_{n_2})}}{1 - \frac{g(x_{n_1})}{g(x_{n_2})}} = \frac{f'(\xi_{n_1,n_2})}{g'(\xi_{n_1,n_2})},$$

или

$$\frac{f(x_{n_2})}{g(x_{n_2})} = \frac{f'(\xi_{n_1,n_2})}{g'(\xi_{n_1,n_2})} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_{n_1})}{g(x_{n_2})}}{1 - \frac{f(x_{n_1})}{f(x_{n_2})}}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ фиксируем n_1 таким большим, чтобы для любых $n_2 > n_1$ выполнялось неравенство $\left|\frac{f'(\xi_{n_1,n_2})}{g'(\xi_{n_1,n_2})} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для этого фиксированного n_1 существует n_2', что для любых $n_2 \geqslant n_2'$ (условие 2 теоремы): $\left|\frac{1-\frac{g(x_{n_1})}{g(x_{n_2})}}{1-\frac{f(x_{n_1})}{f(x_{n_2})}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2\left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$.

Тогда при $n_2 > n_2'$, имеем:

$$\left|\frac{f\left(x_{n_2}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)} - A\right| = \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - A\right| =$$

$$= \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - A\frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} + A\frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - A\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} - A\right| \left|\frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1 + 1\right| + |A| \left|\frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} - A\right| \left|\frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1\right| + \left|\frac{f'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)}{g'\left(\xi_{n_1,n_2}\right)} - A\right| + |A| \left|\frac{1 - \frac{g\left(x_{n_1}\right)}{g\left(x_{n_2}\right)}}{1 - \frac{f\left(x_{n_1}\right)}{f\left(x_{n_2}\right)}} - 1\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \frac{\varepsilon}{2\left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{\varepsilon}{2} + |A| \frac{\varepsilon}{2\left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \varepsilon.$$

Теорема доказана для случая $x_n < a$.
Аналогично доказывается и для $x_n > a$. А значит справедливо будет и само заключение теоремы 19.3.▶

Теорема 19.4 (четвертое правило Лопиталя). *Если функции* $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ *и* $g : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на интервале* $(c, +\infty)$, *причем*

1) $\forall\, x \in (c, +\infty)\ g'(x) \neq 0$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$ (*любого знака, можно и разного для каждой функции*);

3) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\ (A \in \overline{\mathbb{R}})$,

то существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

◄Вводится подстановка $x = \frac{1}{t}$, и, используются методы, рассмотренные при доказательстве теоремы 19.2 и теоремы 19.3.►

Замечание 19.4. При нахождении пределов можно использовать правила Лопиталя при раскрытии неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^{∞}), (0^0), (∞^0) и других, которые сводятся к неопределенностям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 19.2. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

$$◄ \lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x}} \overset{\text{Пр.Л.}}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1. ►$$

Замечание 19.5. При нахождении предела $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to+\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ (который существует) может быть и так, что предел функции $\frac{f'}{g'}$ в указанной точке и не существует, тогда правило Лопиталя применять нельзя, необходимы другие способы нахождения таких пределов.

Пример 19.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

◀ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$, а функция $y=\sin\frac{1}{x}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $a=0$. С другой стороны, если

$$f\left(x\right)=x^2\sin\frac{1}{x},\quad g\left(x\right)=\sin x,$$

то предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}+\left(-\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right)\right)$$

не существует в точке $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ – не существует (не существует $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$).▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте правила Лопиталя раскрытия неопределенностей типа:

   а) $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x\to a$, $a\in\mathbb{R}$;

   б) $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$;

   в) $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x\to a$, $a\in\mathbb{R}$;

   г) $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$.

2. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17

Правила Лопиталя

Задание 1. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}.$$

◀Указанный предел вычислялся на практическом занятии 9 в задании 8 без применения правила Лопиталя. С применением правила Лопиталя вычисление предела значительно упрощается.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-33x^{10}}{50x^{49}+60x^{29}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-33x^9}{50x^{48}+60x^{28}}=-\frac{31}{110}.\ ▶$$

Задание 2. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

$$◀=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.\ ▶$$

Задание 3. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x .$$

◀Имеем неопределенность (1^∞). Преобразуем предел, используя формулу

$$\lim_{x \to x_0} (u(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} (u(x) - 1) v(x)} . \tag{19.1}$$

В нашем случае:

$$I = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x - 1 \right) x} =$$

$$= \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \right.$$

$$\left. = \lim_{x \to +\infty} (-1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} = -\frac{2}{\pi} \right] = e^{-\frac{2}{\pi}} . \blacktriangleright$$

Задание 4. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I = \lim_{x \to +0} \sqrt[n]{x} \cdot \ln^2 x .$$

◀Имеем неопределенность $(0 \cdot \infty)$.

$$I = \lim_{x \to +0} \frac{\ln^2 x}{x^{-\frac{1}{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x \to +0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n} - 1}} = \lim_{x \to +0} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x \to +0} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{n} \right)^2 x^{-\frac{1}{n} - 1}} = \lim_{x \to +0} \frac{2}{\left(-\frac{1}{n} \right)^2} \sqrt[n]{x} = 0. \blacktriangleright$$

Задание 5. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left((x+1)\cdot x^{x}+x^{x+1}\ln x\right)(\ln x+1)+x^{x+1}\cdot\frac{1}{x}-1}{-1}=-2. \blacktriangleright$$

Задание 6. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

$$\blacktriangleleft I=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{0-\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\right)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(-1)(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{-x^2(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+1-1}{2x}=\frac{e}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 7. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислите предел

$$I=\lim_{x\to +0}|\ln x|^{2x}.$$

$$\blacktriangleleft I=\left(\infty^0\right)=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{2\ln|\ln x|}{\frac{1}{x}}}}\overset{\text{Пр.Л.}}{=}e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{2\cdot\frac{1}{-\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{-2x}{\ln x}}=e^0=1. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

1.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$;

1.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

1.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$;

1.4 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$;

1.5 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$;

1.6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$;

1.7 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

1.8 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$;

1.9 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$;

1.10 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$;

1.11 $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x + 2\ln x}{x}$;

1.12 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$;

1.13 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\mathrm{tg} x - \frac{1}{1 - \sin x}\right]$;

1.14 $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$;

1.15 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$;

1.16 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2 x\right)$;

1.17 $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{2x}+1)}\right]$;

1.18 $\lim\limits_{x\to +0} x^x$;

1.19 $\lim\limits_{x\to +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}\, x}$;

1.20 $\lim\limits_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\, \frac{\pi x}{2a}}$;

1.21 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x\right)^{\frac{1}{x}}$;

1.22 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tg}\, 2x}$;

1.23 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

1.24 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\, x\right)^x$;

1.25 $\lim\limits_{x\to -a} \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)\mathrm{ctg}\, \frac{\pi x}{a}$.

ЛЕКЦИЯ 20
Формула Тейлора и ее приложения

20.1 Формула Тейлора[1]

Рассмотрим задачу о локальном представлении функции в виде многочлена

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-a)^n\right), \; x \to a.$$

При $n = 1$ такая задача привела нас к понятию дифференцируемости.

Легко видеть (убедитесь в этом самостоятельно), что алгебраический многочлен можно записать с помощью его производных в некоторой точке:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Естественно рассмотреть многочлен такого типа для произвольной функции f:

$$T_n(x,a;f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \qquad (20.1)$$

Будем называть (20.1) **полиномом Тейлора** n-го порядка для функции $f : U_a \to \mathbb{R}$ в точке a. Для его существования необходимо существование $f^{(n)}(a)$ (а тогда произ- водные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n?1)}(x)$ должны существовать в окрестности точки a).

[1]Тейлор Брук (1685–1731) – английский математик.

Теорема 20.1. *Если функция $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ раз $(n \in \mathbb{N})$ дифференцируема в окрестности $\mathring{U}_a$ и p – любое положительное действительное число, то для любого $x \in \mathring{U}_a$ существует ξ между a и x такое, что справедлива следующая формула Тейлора:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x), \tag{20.2}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi) \tag{20.3}$$

есть остаток формулы Тейлора в форме Шлемильха[2] *– Роша*[3].

◀Пусть

$$\varphi(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ и } R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x,a).$$

Для определенности считаем, что $x > a$. Введем дополнительно переменную $t \in [a,x]$. Обозначим:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x,t) - (x-t)^p Q(x),$$

где $Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$. Тогда

$$\psi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - (x-t)^p Q(x).$$

---

[2]Оскар Ксавер Шлемильх (1823–1901) — немецкий математик.
[3]Эдуард Альбер Рош (1820–1883) – французский астроном и математик.

На отрезке $[a, x]$ функция ψ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому существует точка $\xi \in (a, x)$ такая, что $\psi'(\xi) = 0$. У нас

$$\psi'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} k\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^{k-1} +$$

$$+p(x-t)^{p-1}Q(x) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x); \;\; \psi'(\xi) = 0,$$

тогда $Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$ и $R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$.

Аналогично рассматривается случай, когда $x < a$. При $x = a$ формула также справедлива.▶

Следствие 20.1. *При выполнении условий теоремы 20.1 справедливо представление:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n! \;\, p} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),$$

где $0 < \theta < 1$ *– некоторое действительное число* $\left(0 < \frac{\xi}{x-a} = \theta < 1 \Rightarrow \xi = a + \theta(x-a)\right)$.

Следствие 20.2. *Если выполняются условия теоремы 20.1,* $p = n+1$, $n \in \mathbb{N}$, *то получим остаток формулы Тейлора в так называемой форме Лагранжа:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{20.4}$$

Если же $p = 1$, *то*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))\cdot(1-\theta)^n}{n!}(x-a)^{n+1} \tag{20.5}$$

(*остаток в форме Коши*).

Замечание 20.1. Если в теореме 20.1 взять $a = 0$, то формула Тейлора называется формулой Маклорена[4].

Теорема 20.2. *Если функция $f : \mathring{U}_a \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ раз $(n \in \mathbb{N})$ дифференцируема в окрестности $\mathring{U}_a$ и существует $f^{(n)}(a)$, то справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано*[5]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right), \tag{20.6}$$

где $\lim\limits_{x\to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$.

20.2 Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

1. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{20.7}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \ 0 < \theta < 1 \text{ (форма Лагранжа)}. \tag{20.8}$$

$$R_{n+1}(x) = o(x^n), \ x \to 0 \text{ (форма Пеано)}. \tag{20.9}$$

На любом отрезке $[-r, r]$, $r > 0$ справедлива оценка остатка (20.8) (учесть, что на $[-r, r]$ $\left|e^{\theta x}\right| < e^r$):

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r. \tag{20.10}$$

[4]Колин Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.
[5]Джузеппе Пеано (1858–1932) – итальянский математик.

2. $f(x) = \sin x,\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}.$

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m,\ m = 0, 1, 2, \dots, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n = 2m - 1. \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{20.11}$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}\sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2} + \pi\right)}{(2n+1)!},\ 0<\theta<1 \text{ (форма Лагранжа)}, \tag{20.12}$$

$$R_{2n+1}(x) = o\left(x^{2n-1}\right),\ x \to 0 \text{ (форма Пеано)}. \tag{20.13}$$

На любом отрезке $[-r, r]$, $r > 0$ справедлива оценка остатка (20.12):

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{20.14}$$

3. $f(x) = \cos x,\ f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\ \forall n \in \mathbb{N},$

$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m - 1,\ m = 1, 2, \dots, \\ (-1)^{n/2}, & \text{если } n = 2m,\ m = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{20.15}$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}\cos\left(\theta x + 2n\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\right)}{(2n+2)!},\ 0 < \theta < 1 \text{ (форма Лагранжа)}, \tag{20.16}$$

$$R_{2n+2}(x) = o\left(x^{2n}\right),\ x \to 0 \text{ (форма Пеано)}. \tag{20.17}$$

На любом отрезке $[-r, r]$, $r > 0$ справедлива оценка остатка (20.16)

$$|R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{20.18}$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \;\; f(0) = 0, \;\; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x), \; \forall x \in [-1, 1], \tag{20.19}$$

причем для $0 \leqslant x \leqslant 1$ используем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \;\; 0 < \theta < 1, \tag{20.20}$$

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}. \tag{20.21}$$

Для $-1 < x \leqslant 0$ берем остаток в форме Коши

$$R_{n+1}(x) = (-1)\, x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}, \tag{20.22}$$

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r}, \;\; -r \leqslant x \leqslant 0, \;\; 0 < r < 1. \tag{20.23}$$

Остаток в форме Пеано для $f(x) = \ln(1+x)$:

$$R_{n+1}(x) = o(x^n), \;\; x \to 0. \tag{20.24}$$

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + R_{n-1}(x), \tag{20.25}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1},\; 0<\theta<1 \text{ (форма Лагранжа)}, \tag{20.26}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}}{n!}(1-\theta)^n x^n,\; 0<\theta<1 \text{ (форма Коши)}, \tag{20.27}$$

$$R_{n+1}(x) = o(x^n),\; x \to 0 \text{ (форма Пеано)},$$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0, \tag{20.28}$$

$\forall\, x \in (-1, 1)$; $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Если $\alpha > 0$, то равенство (20.28) справедливо и при $x = \pm 1$; если $-1 < \alpha < 0$, то (20.28) справедливо при $x = 1$.

Замечание 20.2. Формулы Маклорена используют при приближенных вычислениях и вычислениях пределов.

Пример 20.1. Вычислить $e^{0,11}$ с точностью до 10^{-3}.

◄Используем формулу (20.7) при $x = 0,11$. По формуле (20.8) $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(x+1)!}e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$,

$$|R_{n+1}(0,11)| = \frac{0,11^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta\cdot 0,11} < \frac{3}{9^{n+1}(n+1)!} < 0,001,$$

последнее неравенство выполняется при $n = 2$.

$$\left|\frac{3}{9^{n+1}(n+1)!}\right|_{n=2} = \frac{3}{9^3\cdot 3!} = \frac{1}{18\cdot 81} = \frac{1}{1458} < 10^{-3}$$

$$\left(\text{при } n = 1: \quad \left|\frac{3}{9^{n+1}(n+1)!}\right|_{n=1} = \frac{3}{9^2\cdot 2!} = \frac{1}{27\cdot 2} = \frac{1}{54} > 10^{-3}\right).$$

Тогда

$$e^{0,11} \approx 1 + \frac{0,11}{1!} + \frac{0,11^2}{2!} = 1,11 + 0,00605 \approx 1,116. \blacktriangleright$$

Пример 20.2. Найти $I = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

$$\blacktriangleleft\ I = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4!}}{1} = \frac{1}{24}. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Запишите формулу Тейлора с остатком в форме Шлемильха – Роша, в форме Лагранжа, в форме Коши, в форме Пеано.
2. Запишите разложение по формуле Маклорена элементарных функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \ln(1+x)$, $y = (1+x)^\alpha$.
3. Объясните суть приближенных вычислений значений функции и пределов с помощью разложений элементарных функций по формуле Маклорена.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 18
Формула Тейлора и ее приложения

Задание 1. Вычислить с помощью формулы Тейлора $\sqrt[3]{25}$ с точностью до 10^{-3}.

$$◀ \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27-2} = \sqrt[3]{27\left(1-\frac{2}{27}\right)} = 3\left(1+\left(-\frac{2}{27}\right)\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{27}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{2}{27}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!}\left(-\frac{2}{27}\right)^n+R_{n+1}\left(-\frac{2}{27}\right)\right).$$

Запишем остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа и оценим сверху его модуль.

$$3R_{n+1}\left(-\frac{2}{27}\right) = 3\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n\right)\left(1+\theta\cdot\left(-\frac{2}{27}\right)\right)^{\frac{1}{3}-(n+1)}}{(n+1)!}\left(-\frac{2}{27}\right)^{n+1},$$

где $0<\theta<1$.

Возьмем $n=2$.

$$3R_3\left(-\frac{2}{27}\right) = 3\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(1-\frac{2\theta}{27}\right)^{\frac{1}{3}-3}}{3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3.$$

Тогда

$$3\left|R_3\left(-\frac{2}{27}\right)\right| \leqslant 3\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot 8}{6\cdot 27^3} = \frac{40}{3^{12}} < \frac{1}{3^8} = \frac{1}{6561} = 0,0001524\ldots$$

При $n = 2$:

$$\sqrt[3]{25} \approx 3 - \frac{2}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27^2} = 3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 27 + 4}{3 \cdot 27^2} = 3 - \frac{166}{2187} = 3 - 0,07590\ldots =$$
$$= 2,92409\ldots \approx 2,924.$$

С учетом ошибки округления и оценки остатка формулы Тейлора получим, что $\sqrt[3]{25} \approx 2,924$ с точностью до 10^{-3}. ▶

Задание 2. Вычислить с помощью формулы Тейлора $\sin 12^\circ$ с точностью до 10^{-4}.
◀По формуле Тейлора ($12^\circ = \frac{\pi}{15}$ радиан)

$$\sin\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right).$$

Запишем остаток формулы Тейлора для функции $y = \sin x$ в точке $x = \frac{\pi}{15}$ в форме Лагранжа

$$R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta \cdot \frac{\pi}{15} + (2n+1)\frac{\pi}{2} + \pi\right).$$

Оценим модуль остатка $R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)$ сверху $\left(\frac{\pi}{15} < \frac{1}{4}\right)$:

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right| < \frac{1}{4^{2n+1} \cdot (2n+1)!} \tag{20.29}$$

Возьмем $n = 1$. Тогда

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right| < \frac{1}{4^3 \cdot 6} = \frac{1}{64 \cdot 6} = \frac{1}{384} > 10^{-4}.$$

Возьмем $n = 2$. В этом случае

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right| < \frac{1}{4^5 \cdot 5!} = \frac{1}{64 \cdot 16 \cdot 120} = \frac{1}{122880} = 0,0000081\ldots < 10^{-4}.$$

Тогда

$$\sin 12^\circ \approx \frac{\pi}{15} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{3!} = 0,20943951\ldots - 0,00153117\ldots =$$
$$= 0,207908\ldots \approx 0,2079$$

с точностью до 10^{-4}. ►

Задание 3. Используя формулу Тейлора с остатком в форме Пеано вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} = I.$$

◄При вычислении указанного предела используем принцип отбрасывания бесконечно малых более высокого порядка, а также асимптотические формулы для функций $y = \cos x$, $y = (1+x)^\alpha$, $y = \ln(1+x)$.

1) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$, $x \to 0$;

2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$, $x \to 0$;

3) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n), x \to 0.$$

Тогда

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x(1+o(x)) - \left(1 + \frac{1}{2}2x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}4x^2 + o(x^2)\right)}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -1. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Многочлен $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ разложить по целым неотрицательным степеням двучлена $x + 1$.
2. Написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно:

   2.1 e^{2x-x^2} до члена x^5; 2.2 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена x^{13}; 2.3 $\ln\cos x$ до члена x^6; 2.4 $\sin(\sin x)$ до члена x^3; 2.5 $\operatorname{tg} x$ до члена x^5; 2.6 $\ln\frac{\sin x}{x}$ до члена x^6.
3. Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

   3.1 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

   3.2 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

   3.3 $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 0,1$;

   3.4 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.
4. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:

   4.1 $\sqrt[3]{30}$; 4.2 $\sqrt{e}$; 4.3 $\sin 18°$; 4.4 $\ln 1,2$; 4.5 $\operatorname{arctg} 0,8$; 4.6 $\arcsin 0,8$; 4.7 $(1,1)^{1,2}$.
5. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, найти пределы функций:

   5.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$;

   5.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x}{\operatorname{tg}^3 x}$;

   5.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^3\right)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$;

   5.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

   5.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

   5.6 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$;

   5.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

ЛЕКЦИЯ 21
Применение дифференциального исчисления к исследованию свойств функций

21.1 Возрастание и убывание функции в точке. Критерий строгой монотонности функции на промежутке

Определение 21.1. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется* ***возрастающей*** (***убывающей***) ***в точке*** $x_0 \in X$*, если существует такая окрестность* $U_{x_0} \subset X$*, что для любых* $x \in U_{x_0}$*:*

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)); \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Пример 21.1. Функция $f(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } 0 < |x| < 0,5; \\ 0,5, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ (рисунок 21.1) убывает в точке $x_0 = 0$, однако в каждом из интервалов $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция возрастает (в каждой из точек этих интервалов функция f тоже возрастает).

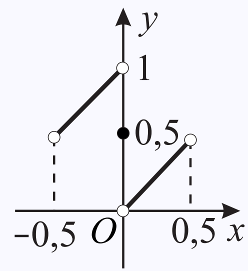


Рисунок 21.1

Теорема 21.1. *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, то эта функция возрастает (убывает) в точке x_0.*

◄Докажем теорему для случая, когда $f'(x_0) > 0$. По определению

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \left(\varepsilon = \frac{1}{2} f'(x_0)\right) \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f)$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \frac{f'(x_0)}{2},$$

$$\frac{1}{2} f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3}{2} f'(x_0).$$

Тогда получаем, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. А это значит, что

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) < f(x_0).$$

Теорема доказана для случая возрастания функции в точке. Аналогично получаем справедливость утверждения об убывании функции в точке.►

Замечание 21.1. $f'(x_0) > 0$ $(<)$ является только достаточным условием (а не необходимым) возрастания (убывания) функции в точке. Например, $f(x) = x^3$ возрастает в точке $x_0 = 0$, но $f'(0) = 0$.

Теорема 21.2 (критерий строгой монотонности функции на промежутке). *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток числовой прямой, функция $f \in C(I)$ и дифференцируема хотя бы во внутренних точках указанного промежутка. Функция f будет возрастающей (убывающей) на промежутке I тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ в точках существования производной на промежутке I, причем $f'(x) = 0$ может быть только в отдельных точках промежутка I, а не на частичных невырожденных промежутках из I.*

◀**Необходимость.** Допустим для определенности, что f возрастает на промежутке I. Тогда для любой внутренней точки $x \in I$ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем: $f'(x) \geqslant 0$.

Допустим, что существует $I_1 \subset I$ (I_1 – невырожденный промежуток) такой, что для любых $x \in I_1$ $f'(x) = 0$. Тогда (критерий постоянства функции на промежутке) $f(x) = \mathrm{const}$ на I_1. Получили противоречие (по условию f – возрастает на I_1). Утверждение необходимого условия доказано.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ на промежутке I и $f'(x) = 0$ может быть только в отдельных точках указанного промежутка. Возьмем любые $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1, x_2]$ функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, значит, справедливо и заключение этой теоремы:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$, $f'(c) \geqslant 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$. Значит, функция f является неубывающей на промежутке I. Докажем, что на самом деле она возрастает на I. Допустим, что это не так: существуют $x_1, x_2 \in I$ $x_1, < x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$. С другой стороны (f неубывающая на $[x_1, x_2]$): для любых $x \in [x_1, x_2]$ $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Отсюда вытекает, что $f(x) = \mathrm{const}$ на $[x_1, x_2]$. Поэтому $f'(x) = 0$ на $[x_1, x_2]$, что противоречит условию. Значит, f возрастает на I. ▶

Пример 21.2. Функция $f(x) = x^3$ возрастает на числовой прямой, так как для любых $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 \geqslant 0,$$

причем $f'(x) = 0$ только в точке $x = 0$.

21.2 Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума

Теорема 21.3 (необходимое условие экстремума). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, и x_0 – точка экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$.*

◀Для функции f в окрестности U_{x_0} выполняются условия теоремы Ферма, а значит, справедливо и заключение указанной теоремы: $f'(x_0) = 0$. ▶

Замечание 21.2. Указанное в теореме условие не является достаточным для существования экстремума функции в точке. Например, $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, значит, $f'(0) = 0$, однако наша функция в точке $x = 0$ экстремума не имеет.

Замечание 21.3. Функция f может иметь экстремум и в точках, в которых она производных не имеет. Например, $y = |x|$ в точке $x = 0$ не дифференцируема, однако имеет в ней минимум.

Определение 21.2. *Внутренние точки области определения функции f, в которых производная функции f равна нулю или не существует, называются* ***критическими****, причем если $f'(x_0) = 0$, то x_0 называется* ***стационарной точкой****.*

Теорема 21.4 (первый достаточный признак строгого экстремума функции в точке). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на $\overset{\circ}{U}_{x_0}$, причем при переходе через x_0 производная функции меняет знак с «+» на «−» (с «−» на «+»), то x_0 – точка строгого максимума (строгого минимума) функции f.*

◀Пусть существует $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ и для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$. Для промежутков $(x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta)$ выполняются все условия достаточного признака строгой монотонности функции f (теорема 21.2), поэтому на $(x_0 - \delta, x_0]$ f – убывает, а на $[x_0, x_0 + \delta)$ – возрастает, значит, $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$. Таким образом, x_0 – точка минимума функции f. Аналогично доказывается и для случая точки максимума.▶

Пример 21.3. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = |x^2 - x|$.

◄ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, \text{ если } x \leqslant 0 \text{ или } x \geqslant 1; \\ x - x^2, \text{ если } 0 < x < 1. \end{cases}$ Если обозначить: $f_1(x) = x^2 - x$ и $f_2(x) = x - x^2$ (на соответствующих промежутках), то $f_1'(x) = 2x - 1$ для $x < 0$ или $x > 1$; $f_1'(0-0) = -1$ и $f_1'(1-0) = 1$; $f_2'(x) = 1 - 2x$, $f_2'(0+0) = 1$, $f_2'(1-0) = -1$; $f_2'(x) = 0$, если $1 - 2x = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$. Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, значит, непрерывна и в точках x_i, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, для каждой из указанных точек существуют проколотые окрестности, где f дифференцируема, причем при переходе через $x_1 = 0$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$», через $x_2 = 1$ с «$-$» на «$+$», а через $x_3 = \frac{1}{2}$ с «$+$» на «$-$».

Вывод: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ – точки строгого минимума, а $x_3 = \frac{1}{2}$ – строгого максимума функции f; $f_{\min}(0) = f_{\min}(1) = 0$; $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ (рисунок 21.2).►

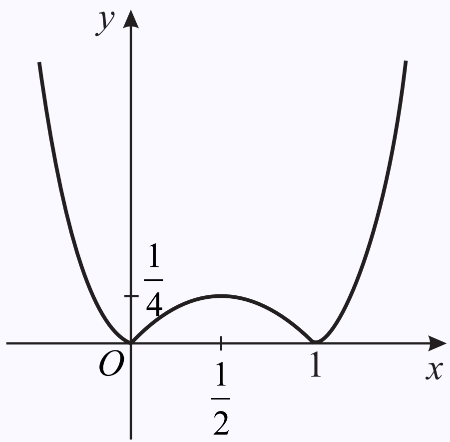


Рисунок 21.2 – Максимумы и минимумы функции

Теорема 21.5 (второй достаточный признак строгого экстремума функции в точке). *Если x_0 – стационарная точка функции $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ и существует $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$, то x_0 – точка строгого максимума (строгого минимума) функции f.*

◄Для определенности считаем, что $f''(x_0) > 0$. Раз существует $f''(x_0)$, то существует $f'(x)$ в некоторой окрестности U_{x_0}. x_0 – стационарная точка функции f, поэтому $f'(x_0) = 0$. По определению

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

А тогда (по теореме о сохранении функцией знака предела): $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ в некоторой окрестности $\mathring{U}_{x_0}$. Значит, $f'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$» при переходе через точку x_0, причем f непрерывна в точке x_0 (следует из дифференцируемости функции f в точке x_0). Из теоремы 21.4 следует, что x_0 – точка строгого минимума функции f.

Аналогично доказывается и для точки строгого максимума.►

Пример 21.4. Исследовать на экстремум следующую функцию $f(x) = \sin x - \sin 2x$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

◄Находим критические точки функции $f(x)$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x) = \cos x - 2\cos 2x; \;\; f'(x) = 0; \;\; \cos x - 2\cos 2x = 0;$$

$$\cos x - 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0; \;\; 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0;$$

$$t = \cos x, \;\; 4t^2 - t - 2 = 0; \;\; t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8;},$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}; \;\; x = \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Только $x_0 = \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Далее находим

$$f''(x) = -\sin x + 4\sin 2x = \sin x\,(8\cos x - 1)\,.$$

$f''(x_0) = \sin x_0 \left(8\frac{1+\sqrt{33}}{8} - 1\right) > 0$. Значит, $x_0 = \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ – точка минимума нашей функции.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения возрастающей и убывающей функции в точке.
2. Сформулируйте достаточное условие возрастания и убывания функции в точке.
3. Сформулируйте критерий строгой монотонности функции на промежутке.
4. Дайте определения точек максимума, минимума, экстремума, критических точек.
5. Сформулируйте необходимое условия экстремума.
6. Как найти точки, «подозрительные» на экстремум?
7. Сформулируйте достаточные условия экстремума.
8. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 22
Применение дифференциального исчисления к исследованию свойств функций

22.1 Наибольшее и наименьшее значения функции

Известно (теорема Вейерштрасса 13.4), что если функция $f \in C([a,b])$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений, причем эти значения функции принимаются или в точках экстремума из интервала (a,b), или – на концах отрезка. Откуда следует порядок (алгоритм) нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции f:

1. Находим критические точки функции f из интервала (a,b).

2. Находим значения функции в указанных критических точках и в точках $x = a$ и $x = b$. Сравниваем полученные значения функции. Наибольшее из них – наибольшее значение функции f, а наименьшее – наименьшее значение функции f на указанном отрезке.

Пример 22.1. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

исследовать на наибольшее и наименьшее значение в ее области определения.

◀Функция f непрерывна на отрезке $[0;4]$, так как

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x = 1 = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1}{x} = f(1+0) = f(1) = 1,$$

а в остальных точках она непрерывна (на $[0,1)$ $y = x$ непрерывна как многочлен, а на $(1,4)$ $y = \frac{1}{x}$ непрерывна как дробно-рациональная функция в своей области определения). Видно, что

$$f'(1-0) = (x)'_{x=1} = 1,\ \ f'(1+0) = \left(\frac{1}{x}\right)'_{x=1} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=1} = -1.$$

Значит, в точке $x = 1$ и функция f производной не имеет, а в остальных точках интервала $(0, 4)$ производная функции существует и она не равна нулю.

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{если } 1 < x < 4. \end{cases}$$

Таким образом, $x = 1$ критическая точка функции f на интервале $(0, 4)$.

$$f(1) = \left(\frac{1}{x}\right)\bigg|_{x=1} = 1;\ f(0) = x\big|_{x=0} = 0;\ f(4) = \left(\frac{1}{x}\right)\bigg|_{x=4} = \frac{1}{4}.$$

Функция f в точке $x = 1$ принимает наибольшее значение, оно равно 1, а в точке $x = 0$ – наименьшее, оно равно 0.▶

Замечание 22.1. Если $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток числовой прямой, не являющийся отрезком, и функция $f \in C(I)$, то ее исследование на наибольшее (наименьшее) значение заключается в следующем (для определенности допустим, что $I = (a, +\infty)$):

1) находим критические точки промежутка I,

2) находим пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$,

3) сравниваем значения функции f в указанных критических точках с найденными предельными значениями α и β.

Если наибольшее (наименьшее) значение из сравниваемых чисел будет среди значений функции в критических точках, то это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке I. Если же наибольшее (наименьшее) значение будет среди чисел α и β, то функция f на промежутке I наибольшего (наименьшего) значения не имеет.

Замечание 22.2. Если функция f непрерывна на конечном промежутке I (например $I = (a, b]$), и если функцию можно непрерывно продолжить на отрезок $[a, b]$, то ее исследование на наибольшее и наименьшее значение можно провести на отрезке. И если это наибольшее или наименьшее значение функция достигает в точках из промежутка I, то оно будет искомым, если нет (например, в точке $x = a$), то функция соответствующего значения на I не имеет.

Пример 22.2. Исследовать функцию $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ на наибольшее и наименьшее значение на промежутке $(0, 2]$.

◀Очевидно, что $f \in C([0, 2])$, поэтому исследуем функцию на отрезке $[0, 2]$. Находим критические точки функции.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Критическими точками функции будут точки $x = 0$ и $x = 1$ (в точке $x = 0$ производная не существует, а в точке $x = 1$ производная функции равна нулю). Находим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 2 - 2\sqrt{2}.$$

Среди полученных значений наименьшим будет -1, а наибольшим 0.

Наименьшее значение достигается в точке $1 \in (0, 2]$, а наибольшее значение получено при $x = 0 \notin (0, 2]$, поэтому наименьшим значением функции f на промежутке $(0, 2]$ будет $f(1) = -1$, а наибольшего значения функция f на промежутке $(0, 2]$ не имеет.▶

Замечание 22.3. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток числовой прямой. Если функция $f \in C(I)$ и имеет на этом промежутке один экстремум – максимум (минимум), то это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции f на промежутке I.

Пример 22.3. Какие размеры должны иметь радиус основания и высота открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме V на его производство пошло наименьшее количество листового металла?

◀Найдем в условии задачи величину, к которой относится слово наименьшее. В нашем случае это будет площадь поверхности открытого цилиндрического бака. Обозначим ее через S. Далее обозначим другие величины, через которые выражаем S. R – радиус основания бака, H – его высота. Получаем:

$$S = 2\pi RH + \pi R^2 = S(R, H). \tag{22.1}$$

Составим уравнение, связывающее R и H:

$$V = \pi R^2 H. \tag{22.2}$$

Составим аналитическое выражение для функции S переменной R. Из (22.2) имеем: $H = \frac{V}{\pi R^2}$.

$$S(R) = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + \pi R^2 = \frac{2V}{R} + \pi R^2. \tag{22.3}$$

С учетом условия задачи область определения функции

$$D(S) = (0, +\infty). \tag{22.4}$$

Получили математическую модель задачи: функцию (22.3) с областью определения (22.4) исследовать на наименьшее значение. Так как область определения не есть отрезок, то функцию S будем исследовать на экстремум.

$$S' = -\frac{2V}{R^2} + 2\pi R = \frac{2\pi R^3 - 2V}{R^2}.$$

Методом интервалов исследуем знак производной. В точке $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ $S'(R) = 0$; если $R > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, то $S'(R) > 0$ $\left(R < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right.$, для $\left.S'(R) < 0\right)$. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ – точка минимума, а так как она единственная точка экстремума и функция S непрерывна на $D(S)$, то в этой точке и будет наименьшее значение функции на указанном множестве. Тогда $H = \frac{\frac{V}{\pi}}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. ▶

22.2 Выпуклые функции. Достаточное условие выпуклости функции на интервале

Пусть функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Возьмем любые $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Проведем через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ графика функции f секущую. Ее уравнение имеет вид: $\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ или

$$y = \frac{f(x_2)(x-x_1) + f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} = l(x).$$

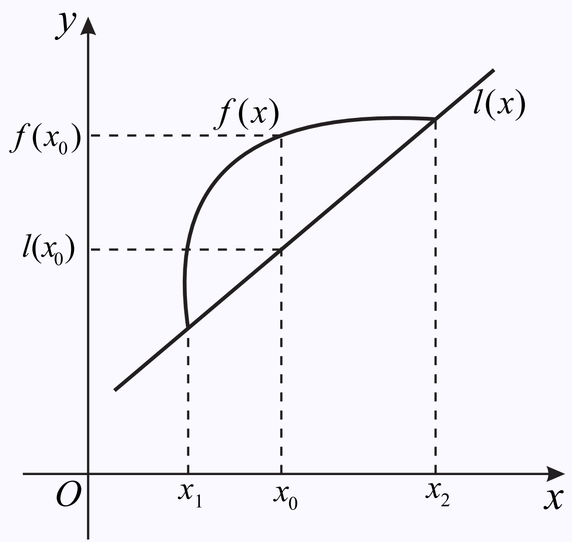


Рисунок 22.1 – Выпуклая вверх на (x_1, x_2) функция

Определение 22.1. *Функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ называется* ***выпуклой вверх*** *(****выпуклой вниз****) на интервале (a,b), если для любых $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, и любой точки $x_0\in(x_1,x_2)$ $l(x_0)\leqslant f(x_0)$ $(l(x_0)\geqslant f(x_0))$ (рисунок 22.1).*

Замечание 22.4. Если неравенства в определении 22.1 строгие, то функция f называется **строго выпуклой вверх** (**строго выпуклой вниз**) на интервале (a,b).

Теорема 22.1 (достаточное условие выпуклости функции на интервале). *Если функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ два раза дифференцируема на интервале (a,b) и для любых $x\in(a,b)$ $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$, то функция f строго выпукла вниз (строго выпукла вверх) на интервале (a,b).*

◀Берем любые $x_1,\ x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, $x\in(x_1,x_2)$. Оценим разность $l(x)-f(x)$:

$$l(x)-f(x)=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}-f(x)=$$

$$=\frac{(f(x_2)-f(x))(x-x_1)-(f(x)-f(x_1))(x_2-x)}{x_2-x_1}=(\text{по теореме Лагранжа } 18.3)=$$

$$=\frac{f'(c_2)(x_2-x)(x-x_1)-f'(c_1)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{(f'(c_2)-f'(c_1))(x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1}=[x_1<c_1<x<c_2<x_2]=$$

$$=(\text{по теореме Лагранжа } 18.3)=\frac{f''(\bar{c})(x_2-x)(x-x_1)(c_2-c_1)}{x_2-x_1},\ c_1<\bar{c}<c_2.$$

Откуда видно, что $l(x)<f(x)$, если $f''(x)<0$ на (a,b) $(l(x)>f(x)$, если $f''(x)>0$ на $(a,b))$. ▶

Замечание 22.5. Доказанный признак выпуклости не является необходимым. Например, функция $f(x)=x^4$ строго выпукла вниз (можно доказать) на $\mathbb{R}$, но $f''(0)=0$ (в остальных точках $f''(x)>0$).

22.3 Точки перегиба. Необходимое и достаточные условия перегиба

Пусть функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема при $x = x_0$ и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$.

Определение 22.2. *Точка x_0 называется* ***точкой перегиба*** *функции f, если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.*

Точка $(x_0, f(x_0))$ называется в этом случае ***точкой перегиба графика функции*** *f.*

Пример 22.4. Точка $x_0 = 0$ является точкой перегиба функции $f(x) = x^3$, потому что существует $f'(0)$ и разница между $f(x)$ и касательной $L(x) = 0$ меняет знак (с «$-$» на «$+$» при переходе через точку $x_0 = 0$.

Теорема 22.2 (необходимый признак перегиба). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в окрестности U_{x_0}, в точке $x = x_0$ f'' непрерывна и x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.*

◀Предположим, что $f''(x_0) \neq 0$, например, $f''(x_0) > 0$. Тогда существует U_{x_0}, что для любых $x \in U_{x_0}$ $f''(x) > 0$ (свойство непрерывных функций), значит (теорема 22.1), функция f является строго выпуклой вниз на указанной окрестности точки x_0, а это противоречит тому, что x_0 – точка перегиба функции f. ▶

Замечание 22.6. Подозрительными на перегиб будут и точки, в которых f'' не существует. Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geqslant 0, \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

$f''(0)$ не существует, но при этом $x = 0$ – точка перегиба функции.

Теорема 22.3 (первое достаточное условие перегиба). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в проколотой окрестности $\mathring{U}_{x_0}$, а $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба функции f.*

Кафедра МАДУП

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

◀ $L(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ – касательная к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Оценим $f(x) - L(x)$:

$$f(x) - L(x) = (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (\text{применяем теорему Лагранжа 18.3 2 раза, } x_0 - \delta < x_0 < \bar{c} < c < x < x_0 + \delta) =$$

$$= f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) = f''(\bar{c})(c - x_0)(x - x_0).$$

Видно, что знак разности $f(x) - L(x)$ совпадает со знаком $f''(\bar{c})$. ▶

Теорема 22.4 (второе достаточное условие перегиба). *Если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

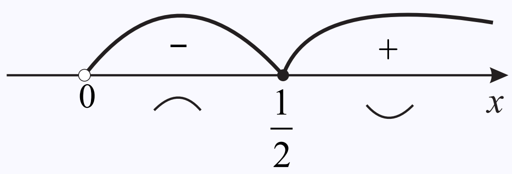
Пример 22.5. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$f(x) = 2x^2 + \ln x, \; x \in (0, +\infty).$$

◀ $f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$;

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}.$$

Методом интервалов находим промежутки знакопостоянства второй производной (с учетом того, что $x > 0$).



Видно, что на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция f является строго выпуклой вверх, а на $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ – строго выпуклой вниз (теорема 22.1); $x = \frac{1}{2}$ – точка перегиба функции (теорема 22.3).▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$.
2. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке $(a, +\infty)$.
3. Дайте определение выпуклости функции на интервале.
4. Сформулируйте достаточное условие выпуклости функции на интервале.
5. Дайте определение точки перегиба функции.
6. Сформулируйте необходимые условия перегиба функции.
7. Сформулируйте достаточные условия перегиба функции.
8. Ответьте на вопросы теста.

Приложения производной к исследованию свойств функций

Задание 1. Определите промежутки монотонности функций:

$$1)\ f(x) = x^5 + 2x^3 + x;\ \ 2)\ \varphi(x) = 1 - x^3;\ \ 3)\ \psi(x) = \frac{x^2}{10} - \ln x.$$

◀Поскольку все эти функции имеют непрерывную производную, обращающуюся в нуль не более чем в конечном числе точек, то решение задачи сводится к установлению для каждой из данных функций промежутков, где производная не меняет знака. Функция будет монотонно возрастающей (убывающей) там, где ее производная больше (меньше) нуля.

1. Для первой функции производная равна $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$. Легко видеть, что $f'(x) > 0$ в любой точке числовой оси. Следовательно, f монотонно возрастает на $\mathbb{R}$.

2. Для функции φ производная равна $\varphi'(x) = -3x^2$. Так как $\varphi'(x) < 0$ при всех x, и лишь в одной точке производная обращается в нуль ($\varphi'(x) = 0$ при $x = 0$), то функция φ будет монотонно убывающей на $\mathbb{R}$.

3. Функция ψ определена при $x > 0$, и ее производная равна $\psi'(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$.

Для определения промежутков монотонности функции ψ исследуем методом интервалов знак производной функции, при условии, что $x > 0$. Так как в промежутке $\left(0, \sqrt{5}\right)$ $\psi'(x) < 0$, то функция ψ монотонно убывает на указанном промежутке; на промежутке $\left(\sqrt{5}, +\infty\right)$ $\psi'(x) > 0$, поэтому функция ψ монотонно возрастает на указанном промежутке. ▶

Задание 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3,\ x \in \mathbb{R}$.

◀Функция непрерывна на всей числовой оси. Ее производная

$$f'(x) = 5(x-2)(x+1)^2\left(x - \frac{4}{5}\right)$$

непрерывна на $\mathbb{R}$. Следовательно, «подозрительными» на экстремум будут лишь точки, в которых производная равна нулю. Решая уравнение $5(x-2)(x+1)^2\left(x-\frac{4}{5}\right) = 0$, получим: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = 2$. Эти стационарные точки разбивают область определения функции на следующие промежутки:

$$(-\infty, -1)\,,\ \left(-1, \frac{4}{5}\right),\ \left(\frac{4}{5},\ 2\right),\ (2, +\infty)\,.$$

Знак «+» производная имеет на промежутках $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \frac{4}{5}\right)$, $(2, +\infty)$. Знак «−» производная имеет на промежутке $\left(\frac{4}{5}, 2\right)$.

Откуда получаем, что при переходе через точку $x_1 = -1$ производная знак не меняет, значит, экстремума нет. При переходе через точку $x_2 = \frac{4}{5}$ производная меняет знак с «+» на «−», а, значит, это точка строгого максимума $f_{\max}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 8,4$. При переходе через точку $x_3 = 2$ производная меняет знак с «−», на «+», а значит, это точка строгого минимума $f_{\min}(2) = 0$.

Заметим также, что постоянство знака производной внутри каждого из промежутков указывает на монотонность функции в каждом промежутке.▶

Задание 3. Исследовать на экстремум функцию $y = |x|$.

◀Находим производную. Для $x > 0$ будет $|x| = x$ и $y' = 1$, для $x < 0$ будет $|x| = -x$ и $y' = -1$. В точке $x = 0$ производная не существует, но функция непрерывна. Однако в этой точке производная меняет знак с «−» на «+», а значит, это точка строгого минимума $f_{\min}(0) = 0$. ▶

Задание 4. Исследовать на экстремум функцию $y = x^{\frac{2}{3}}$.

◀Найдем производную $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. В точке $x = 0$ производная не существует. Следовательно, эта точка является «подозрительной» на экстремум (рисунок 14.2). Однако в этой точке производная меняет знак с «−» на «+», а значит, это точка строгого минимума $f_{\min}(0) = 0$. ▶

Задание 5. Кривую $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$ исследовать на направление выпуклости и найти точки перегиба.

◀Находим производные:

$$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x, \; y'' = 36\,(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Решая уравнение $y'' = 0$, получим $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Вся область определения функции разбивается этими точками на три промежутка: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $(1, +\infty)$. Определяя знак второй производной на каждом промежутке, получим знак «+» на промежутках $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $(1, +\infty)$ и знак «−» на промежутке $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$. На промежутках $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $(1, +\infty)$ функция выпукла вниз, а на промежутке $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ выпукла вверх. Точки $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$ являются точками перегиба, так как при переходе через эти точки вторая производная меняет знак.▶

Задание 6. Кривую $y = \sqrt[3]{x^5}$ исследовать на направление выпуклости и найти ее точки перегиба.

◀Находим производные $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. В данном случае y'' нигде в нуль не обращается. В точке $x = 0$ вторая производная y'' не существует. Но так как $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$, то в точке $x = 0$ кривая имеет перегиб, и направление выпуклости вверх сменяется на направление выпуклости вниз.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Покажите, что функция $y = \operatorname{arctg} x - x$ убывает на всей числовой оси.
2. Покажите, что функция $y = x - \sin x$ возрастает на всей числовой оси.
3. Определите промежутки возрастания и убывания функций:

   3.1 $f(x) = 3x^2 - 2x$;

   3.2 $f(x) = e^x + 5x$.
4. Докажите неравенства, используя достаточное условие критерия строгой монотонности (убывания или возрастания) функции на промежутке:

   4.1 $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$;

   4.2 $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $x > 0$;

   4.3 $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $x \geqslant 0$;

   4.4 $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $x \geqslant 0$;

   4.5 $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2!}$, $x \geqslant 0$;

   4.6 $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$, $x \geqslant 0$;

   4.7 $\ln(1 + x) \leqslant x$, $x \geqslant 0$;

   4.8 $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$, $x \geqslant 0$;

   4.9 $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n}$, $x \geqslant 0$;

   4.10 $\ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \geqslant 0$.

5. Найдите максимумы и минимумы функций:

5.1 $y = x^2 - 6x + 8$;

5.2 $y = x^2(x-4)$;

5.3 $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2}$;

5.4 $y = x^3 - 12x + 1$;

5.5 $y = \sin x + \cos x$;

5.6 $y = e^x + e^{-x}$;

5.7 $y = -x^2\sqrt[5]{(x-2)^2}$;

5.8 $y = \frac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$;

5.9 $y = x^2 e^{-x}$;

5.10 $y = \sin x - x$.

6. Покажите, что кривая $y = x^2 + x^4$ всюду выпукла вниз.

7. Покажите, что кривая $y = \ln(x^2 - 1)$ всюду выпукла вверх.

8. Покажите, что кривая $y = (x+1)^4 + e^x$ всюду выпукла вниз.

9. Исследуйте данные кривые на направление выпуклости и перегиб:

9.1 $y = x^4 - 6x^2 + 5$;

9.2 $y = x^4(12\ln x - 7)$;

9.3 $y = a - \sqrt[3]{x-b}$;

9.4 $y = \ln(1 + x^3)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 20

Наибольшее и наименьшее значения функции

Задание 1. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны. Найти наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

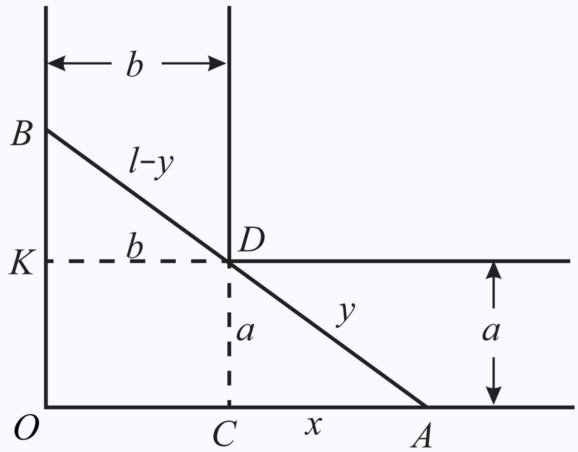


Рисунок 22.2

◄Исследуемая величина $AB = l$ (смотри рисунок 22.2). Считаем, что точка D совпадает с точкой бревна. В этом случае среди множества длин бревен, для которых точка D совпадает с некоторой точкой бревна, надо найти наименьшую длину. Пусть $CA = x$, $DA = y$, тогда $BD = l - y$. Из треугольника CDA находим: $y = \sqrt{a^2 + x^2}$. Треугольники BKD и DCA подобны, поэтому $\frac{x}{y} = \frac{b}{l-y}$. Тогда

$$l - y = \frac{by}{x}; \quad l - y = \frac{b\sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

Пусть

$$l(x)=\frac{b\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+x^2}\cdot\frac{b+x}{x},$$

$$l^2(x)=\frac{\left(a^2+x^2\right)\left(x+b\right)^2}{x^2}=f\left(x\right),\ \ x\in(0,+\infty). \tag{22.5}$$

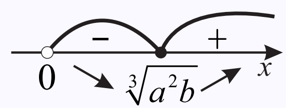
Функции f и l будут иметь наименьшее значение при одном и том же значении x.

Получили математическую модель задачи: функцию f (22.8) исследовать на наименьшее значение на промежутке $(0,+\infty)$. Будем исследовать функцию на экстремум.

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(2x\left(x+b\right)^2+2\left(x+b\right)\left(a^2+x^2\right)\right)x^2-2x\left(a^2+x^2\right)\left(x+b\right)^2}{x^4}=\frac{2\left(x+b\right)\left(x^3-a^2b\right)}{x^3}.$$

Критической точкой функции, при условии, что $x>0$, будет точка $x=\sqrt[3]{a^2b}$.

Методом интервалов исследуем f' на интервалы знакопостоянства.



Значит, $x=\sqrt[3]{a^2b}$ – точка минимума как функции f, так и l. Так как экстремум единственный и он минимум, то он и будет наименьшим значением непрерывной функции в ее области определения. Найдем его

$$l\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2b}+b\right)\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}}{\sqrt[3]{a^2b}}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Из сказанного выше следует, что наибольшая длина бревна, которое можно справлять по этим каналам, будет равна $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (ед. длины).▶

Задание 2. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A (рисунок 22.3); в точке B ($AB = a$) подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен k. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой? Момент уравновешивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага.

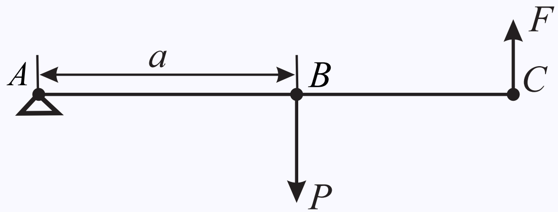
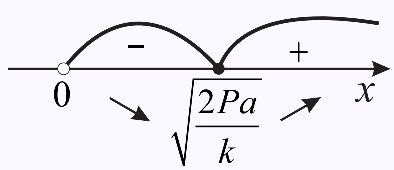


Рисунок 22.3

◄В качестве исследуемой на наименьшее значение величины возьмем уравновешивающую силу F. Пусть $AC = x$ – длина рычага. Из условия $F \cdot x = \frac{x \cdot k}{2} \cdot x + Pa$ (условие равновесия) имеем:

$$F(x) = \frac{k}{2}x + \frac{Pa}{x}, \quad x \in (0, +\infty). \tag{22.6}$$

Функцию F исследуем на экстремум: $F'(x) = \frac{k}{2} - \frac{Pa}{x^2} = \frac{kx^2 - 2Pa}{2x^2}$; $F'(x) = 0$; $x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}$.



Видно, что $x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}$ – единственная точка экстремума непрерывной функции F, которая является точкой минимума. По этой причине в указанной точке функция будет принимать наименьшее значение, то есть искомая длина рычага $x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}$. ▶

Задание 3. Дождевая капля, начальная масса которой m_0 падает под действием силы тяжести равномерно испаряясь так, что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

◀Используем формулу для вычисления кинетической энергии: $E = \frac{mv^2}{2}$.

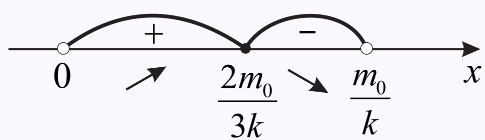
Берем любой момент времени t (капля падает и не испарилась в это время). Тогда убыль массы к указанному моменту времени t будет kt, а масса капли станет равна: $m_0 - kt$. Скорость падения капли в этот момент времени t будет gt. Тогда кинетическая энергия капли в момент времени t будет

$$E(t) = \frac{(m_0 - kt)\, g^2 t^2}{2}. \qquad (22.7)$$

Для функции E находим область определения: $m_0 - kt = 0$, $t = \frac{m_0}{k}$. Тогда $D(E) = \left(0, \frac{m_0}{k}\right)$ (при этом считаем, что капля испарилась, не долетая до Земли).

Функцию E исследуем на экстремум.

$$E'(t) = \frac{g^2}{2}\left(-kt^2 + (m_0 - kt)\cdot 2t\right) = \frac{g^2 t}{2}(2m_0 - 3kt); \quad E'(t) = 0,\ 2m_0 - 3kt = 0,\ 0 < t = \frac{2m_0}{3k} < \frac{m_0}{k}.$$

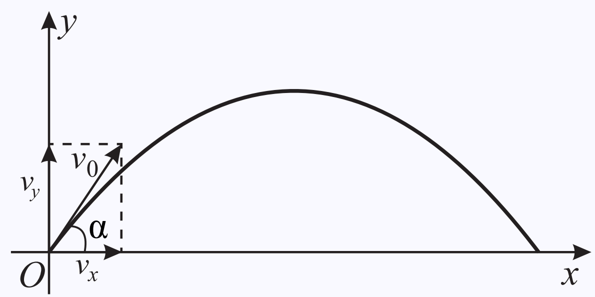


$t = \frac{2m_0}{3k}$ – единственная точка экстремума непрерывной функции E, которая является точкой максимума. Найдем значение функции в этой точке:

$$E\left(\frac{2m_0}{3k}\right) = \frac{4}{27} \cdot \frac{m_0^3 g^2}{k^2}.$$

Значит, через время $t = \frac{2m_0}{3k}$ после начала падения кинетическая энергия E капли будет наибольшей и будет равна $218\frac{4m_0^3g^2}{27k^2}$. ►

Задание 4. Камень брошен с заданной начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком угле α дальность полета камня будет наибольшей.



◄Находим проекцию вектора $\overrightarrow{v_0}$ начальной скорости на координатные оси ($|\overrightarrow{v_0}| = v_0$):

$$v_x = v_0 \cos\alpha, v_y = v_0 \sin\alpha.$$

Берем любой текущий момент времени полета камня и определяем горизонтальные и вертикальные составляющие закона расстояния полета камня:

$$x(t) = v_x t = v_0 \cos\alpha \cdot t, \tag{22.8}$$

и

$$y\left(t\right)=v_{y}t-\frac{gt^{2}}{2}=v_{0}\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^{2}}{2}. \tag{22.9}$$

Полное время полета находим из уравнения

$$v_{0}\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^{2}}{2}=0,\ \ t=\frac{2v_{0}\sin\alpha}{g}. \tag{22.10}$$

Тогда камень пролетел расстояние от точки бросания до точки падения на Землю

$$x=v_{0}\cos\alpha\cdot\frac{2v_{0}\sin\alpha}{g}=\frac{v_{0}^{2}}{g}\sin 2\alpha.$$

Функцию

$$x\left(\alpha\right)=\frac{v_{0}^{2}}{g}\sin 2\alpha,\ \ \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{22.11}$$

исследуем на экстремум.

$$x'=\frac{v_{0}^{2}}{g}\cos 2\alpha\cdot 2;\ \ x'=0,\ \ \cos 2\alpha=0,\ \ 2\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Для интервала $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $n=0$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.
Находим

$$x''=-\frac{4v_{0}^{2}}{g}\sin 2\alpha,\ \ x''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4v_{0}^{2}}{g}<0.$$

Тогда $\alpha=\frac{\pi}{4}$ – точка строгого максимума для функции (22.11), а так как экстремум единственный в области определения непрерывной функции, то это и есть искомый угол.▶

Задание 5. Светящаяся точка C находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена между этими шарами. При каком положении точки C сумма освещенных частей поверхностей шаров (площадей этих поверхностей) будет наибольшей? Длина отрезка линии центров этих шаров равна a и

$$a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}. \tag{22.12}$$

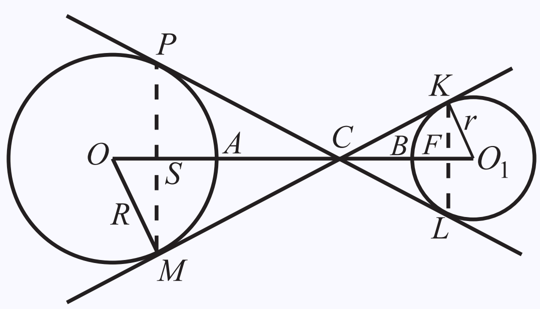
◀Введем обозначение: $OC = x$, тогда $CO_1 = a - x$.

Из подобия ΔOMC и ΔOSM получим: $R^2 = OS \cdot x$, $OS = \frac{R^2}{x}$, $SA = R - \frac{R^2}{x}$. Аналогично: $BF = r - \frac{r^2}{a-x}$. Дальше находим площадь освещенных частей указанных сфер.

$$S = 2\pi R \cdot SA + 2\pi r \cdot BF = 2\pi R\left(R - \frac{R^2}{x}\right) + 2\pi r\left(r - \frac{r^2}{a-x}\right).$$

Получили функцию

$$S(x) = 2\pi\left(R^2 + r^2\right) - 2\pi\left(\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{a-x}\right), \quad x \in [R, a-r]. \tag{22.13}$$



Функция S будет иметь наибольшее значение в той точке области определения, в которой функция

$$f(x) = \frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{a-x}$$

будет иметь наименьшее значение.

$$f'(x) = -\frac{R^3}{x^2} + \frac{r^3}{(a-x)^2} = \frac{r^3x^2 - R^3(a-x)^2}{x^2(a-x)^2};$$

$$f'(x) = 0;\ r^3x^2 = R^3(a-x)^2;$$

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{R^3}{r^3};\ \frac{x}{a-x} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{r^3}};\ \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}};\ x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}.$$

Проверим, является ли точка $x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}$ точкой области определения функции.

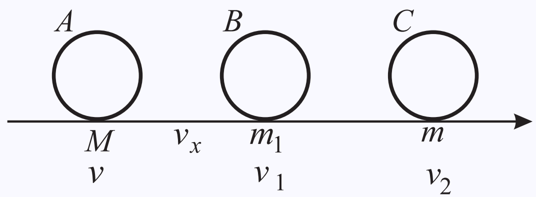
$$\frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}} \leqslant a - r;\ \sqrt{R^3}a \leqslant a\left(\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}\right) - r\left(\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}\right);$$

$$a\sqrt{r^3} \geqslant r\left(\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}\right);\ a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Условие (22.12) выполняется.

Находим $f'' = \frac{2R^3}{x^3} + \frac{2r^3}{(a-x)^3} > 0$. Вывод: точка $x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}$ есть единственная точка минимума непрерывной функции f, а значит, точка максимума функции S, а поэтому при $x = \frac{\sqrt{R^3}a}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}$ площадь освещенности шаров будет наибольшей.▶

Задание 6. Центры 3-х вполне упругих шаров A, B, C расположены на одной прямой. Шар A массы M со скоростью v ударяет в шар C массы m. Какова должна быть масса шара B, чтобы скорость C оказалась наибольшей?



◀Обозначим: m_1 – масса шара B, v_1 – скорость шара B, v_2 – скорость шара C, v_x – скорость шара A после удара.

Используя законы сохранения количества движения и энергии, получим

$$\begin{cases} Mv = Mv_x + m_1 v_1, \\ \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_x^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2}; \end{cases} \tag{22.14}$$

$$\begin{cases} \frac{M(v-v_x)}{M(v^2-v_x^2)} = \frac{m_1 v_1}{m_1 v_1^2}, \\ Mv = Mv_x + m_1 v_1; \end{cases} \tag{22.15}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{v+v_x} = \frac{1}{v_1}, \\ \frac{m_1 v_1}{M} = v - v_x; \end{cases} \qquad \begin{cases} v + v_x = v_1, \\ v - v_x = \frac{m_1 v_1}{M}; \end{cases} \quad 2v = v_1 + \frac{m_1 v_1}{M}; \quad v_1 = \frac{2vM}{M + m_1}. \tag{22.16}$$

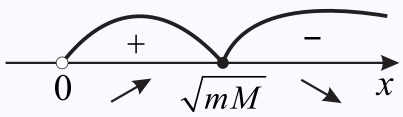
Аналогично (22.16) будет

$$v_2 = \frac{2v_1 m_1}{m_1 + m} = \frac{2 \cdot \frac{2vM}{M+m_1} m_1}{m_1 + m} = \frac{4vMm_1}{(m_1+m)(M+m_1)} = v_2(m_1)\,. \tag{22.17}$$

Обозначим $m_1 = x$. Функция $v_2 = v_2(m_1)$ примет наибольшее значение при тех значениях m_1, при которых функция $f(x) = \frac{x}{(x+m)(M+x)}$ примет ($x \in (0, +\infty)$) также наибольшее значение.

$$f'(x) = \frac{(x+m)(x+M) - x(x+M+x+m)}{(x+m)^2(x+M)^2} = \frac{mM - x^2}{(x+m)^2(x+M)^2},$$

$$x = \sqrt{mM}, \text{ если } f'(x) = 0.$$



Точка $x = \sqrt{mM}$ есть единственная точка максимума непрерывной функции f, а значит, и функции v_2, а поэтому при $m_1 = \sqrt{mM}$ скорость шара C будет наибольшей.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите наибольшие и наименьшие значения функций:

   1.1 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на отрезке $[0, 3]$;

   1.2 $y = x - 2\ln x$ на отрезке $[1, e]$;

   1.3 $y = 2\sin x + \cos 2x$ на полуинтервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   1.4 $y = \sqrt{5-4x}$ на полуинтервале $[-1, 1)$;

   1.5 $y = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$.
2. Какое положительное число, будучи сложенным с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?
3. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3, причем стороны основания относились бы как $1 : 2$. Каковы должны быть размеры всех ребер, чтобы полная поверхность была наименьшей?
4. На окружности дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.
5. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?
6. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?
7. Требуется изготовить коническую воронку с образующей $l = 20$ см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
8. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.
9. В конус, радиус основания которого R и высота H, требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность. Найдите радиус цилиндра.
10. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают).

11. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.
12. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R так, чтобы центр основании конуса лежал в центре шара.
13. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определите размеры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре.
14. Картина высотой $1,4$ м повешена на стену так, что ее нижний край на $1,8$ м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятно для осмотра картины (то есть чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим)?
15. Статуя высотой 4 м стоит на колоне, высота которой $5,6$ м. На каком расстоянии должен встать человек ростом (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?
16. На странице текст должен занимать 384 см^2. Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, правое и левое – по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?
17. Камень брошен вверх с поверхности земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая ускорение силы свободного падения $g \approx 9,8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, найдите: 1) наибольшую высоту подъема камня в зависимости от начальной скорости v_0; 2) скорость камня в самом верхнем положении; 3) время, через которое камень упадет на землю, если скорость измеряется в метрах в секунду.
18. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?
19. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой F. Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против сдвигающей силы. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен k. Под каким углом φ к горизонту надо приложить силу F, чтобы величина ее оказалась наименьшей? Определить наименьшую величину сдвигающей силы.
20. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

21. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.
22. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр равен P. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?
23. Дан ящик с квадратным основанием и объемом V. Каковы должны быть его размеры для того, чтобы поверхность (без крышки) была наименьшей?
24. Прямо над центром круглой площадки радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка (степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?
25. Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? Сопротивлением воздуха пренебрегаем.
26. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S, а уровень воды равен h.
27. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V.
28. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?
29. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный от шоссе в 15 км от упомянутой точки шоссе (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

ЛЕКЦИЯ 23
Исследование функции и построение ее графика

23.1 Вертикальная, горизонтальная и наклонная асимптоты. Критерий горизонтальных и наклонных асимптот

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a – предельная точка множества X.

Определение 23.1. *Прямая $x = a$ называется* ***вертикальной асимптотой*** *графика функции f, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ равен $-\infty$ или $+\infty$.*

Пример 23.1. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, так как

$$f(0+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty.$$

Замечание 23.1. Если функция f дробно-рациональная (отношение многочленов: $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$), то вертикальные асимптоты находим в следующем порядке:

1. Находим действительные нули знаменателя $Q_m(x)$, которые не являются нулями числителя $P_n(x)$. Допустим, это будут x_k, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant m$.

2. Тогда прямые $x = x_k$ будут вертикальными асимптотами (при необходимости находим односторонние пределы $f(x_k \pm 0)$).

Определение 23.2. *Прямая $y = kx + b$ называется* ***наклонной асимптотой*** *графика функции $f : X \to \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$, $x \to \infty$), если функция f представима в виде*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0\right)$.

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Приложение

Закрыть

Следствие 23.1. *Если $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – дробно-рациональная функция, то:*
при $n < m$ прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота;
при $n = m$ прямая $y = a$ – горизонтальная асимптота, где $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$;

при $n = m + 1$ функция f представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$, и $y = kx + b$ – наклонная асимптота.

В остальных случаях дробно-рациональная функция наклонных (горизонтальных) асимптот не имеет.

Пример 23.2. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

◀Находим нули знаменателя.

$$2x^2 - x - 1 = 0,\ D = 1^2 + 8 = 9;\ x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Видно, что нули знаменателя не являются нулями числителя. Значит, $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$ – вертикальные асимптоты.

Так как $n = m + 1$, то функция f имеет и наклонную асимптоту при $x \to \infty$. Выделим целую часть делением числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 - 5x^2 + 4x + 1 & 2x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3 - x^2 - x} & x - 2 \\
-4x^2 + 5x + 1 & \\
\underline{-4x^2 + 2x + 2} & \\
\qquad 3x - 1 &
\end{array}$$

Тогда $f(x) = x - 2 + \frac{3x-1}{2x^2-x-1}$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-1}{2x^2-x-1} = 0$. Значит, $y = x - 2$ – наклонная асимптота при $x \to \infty$. ▶

Теорема 23.1. *График функции $f : X \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$, $x \to \infty$) асимптоту $y = kx + b$ тогда и только тогда, когда:*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty,\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty,\infty)}} (f(x) - kx) = b \in \mathbb{R}.$$

◀**Необходимость.** Так как $y = kx + b$ – асимптота при $x \to +\infty$, то

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$, а из критерия существования у функции конечного предела следует, что $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. ▶

Пример 23.3. Найти асимптоты графика функции $f(x) = 4x + \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$.

◀Вертикальных асимптот функция не имеет, так как она определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдем:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(4 + \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{4}}{x}\right) = 4$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

Значит, $y = 4x + \frac{\pi}{2}$ – асимптота графика функции f при $x \to +\infty$, а $y = 4x - \frac{\pi}{2}$ – при $x \to -\infty$. ▶

23.2 Применение дифференциального исчисления к исследованию функции и построению ее графика

Примерный план исследования функции и построения ее графика

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование функции на четность-нечетность.
3. Исследование функции на периодичность.
4. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат и нулей функции.
5. Исследование функции на непрерывность. Пределы в бесконечных точках.
6. Нахождение интервалов знакопостоянства функции.
7. Нахождение асимптот графика функции.
8. Исследование функции на экстремум и монотонность.
9. Нахождение множества значений функции.
10. Нахождение интервалов выпуклости функции и точек перегиба.

Замечание 23.2. Порядок пунктов исследования (при необходимости) можно менять. Например, когда (пункт 8) получается, что наша функция строго монотонная в своей области определения ($D(f)$ допускает разбиения на конечное число промежутков, на каждом из которых f возрастает или убывает), то функция будет непериодической.

Замечание 23.3. Если исследование функции в некоторых точках слишком громоздко или его практически точно нельзя выполнить, то такие точки исследования опускаются, или применяются приближенные методы.

Пример 23.4. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$ и построить ее график.

◀1. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Функция не является четной и не является нечетной, так как

$$\exists x = 2 \in D(f), \quad f(2) = \frac{7}{4}, \quad f(-2) = -\frac{5}{4}, \quad f(-2) \neq f(2) \text{ и } f(-2) \neq -f(2).$$

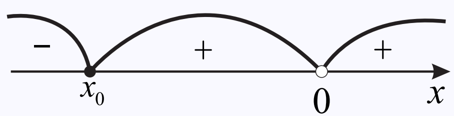
3. Точки пересечения с осями координат:

а) с Oy – нет ($x \neq 0$),

б) с Ox – $x_0 \approx -1,3$ – нуль функции (использование графического метода и теоремы Больцано – Коши).

4. Функция непрерывна в своей области определения как дробно-рациональная.

5. Интервалы знакопостоянства функции (применим метод интервалов):



$f(x) > 0$, если $x \in (x_0, 0)$ или $x \in (0, +\infty)$;
$f(x) < 0$, если $x \in (-\infty, x_0)$.

6. Асимптоты. Так как

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = +\infty = f(0+0),$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = +\infty,$$

то $x = 0$ – вертикальная асимптота.

$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = x + \frac{-x+1}{x^2}$. Значит, $y = x$ – наклонная асимптота.

7. Исследование на монотонность и экстремум.

$$y' = \left(x - \frac{x-1}{x^2}\right)' = 1 - \frac{2-x}{x^3} = \frac{x^3+x-2}{x^3};$$

$$x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right) = 0,$$

$$y'' = 2\frac{3-x}{x^4}, \text{ причем } y''\Big|_{x=1} > 0.$$

Значит, $x = 1$ – точка минимума, $y_{\min}(1) = 1$. На промежутках $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ функция возрастает (по знаку $f'(x)$), а на промежутке $(0, 1)$ – убывает.

8. Функция непериодическая, так как она строго кусочно-монотонная в своей области определения.

9. Множество значений функции. На промежутке $(-\infty, 0)$ функция непрерывна,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty,$$

значит, $E(f) = \mathbb{R}$.

10. Интервалы выпуклости и точки перегиба. $y'' = 2\frac{3-x}{x^4}$; $y'' = 0$ при $x = 3$. Находим (методом интервалов) интервалы знакопостоянства y'': $(-\infty, 0)$; $(0, 3)$ – интервалы строгой выпуклости вниз; $(3, +\infty)$ – интервалы строгой выпуклости вверх. $x = 3$ – точка перегиба, $f(3) = \frac{26}{9}$.

Далее будем строить график функции в следующем порядке.

1. Строим асимптоты.

2. Наносим точки экстремума, перегиба, точки пересечения с осями координат.

3. При необходимости находим другие точки графика функции. Например: а) $x = 2$, $y = \frac{7}{4}$ б) $x = 0,5$, $y = 1,5$; в) $x = -1$, $y = 1$; г) $x = -2$, $y = -\frac{5}{4}$.

График функции изображен на рисунке 23.1.▶

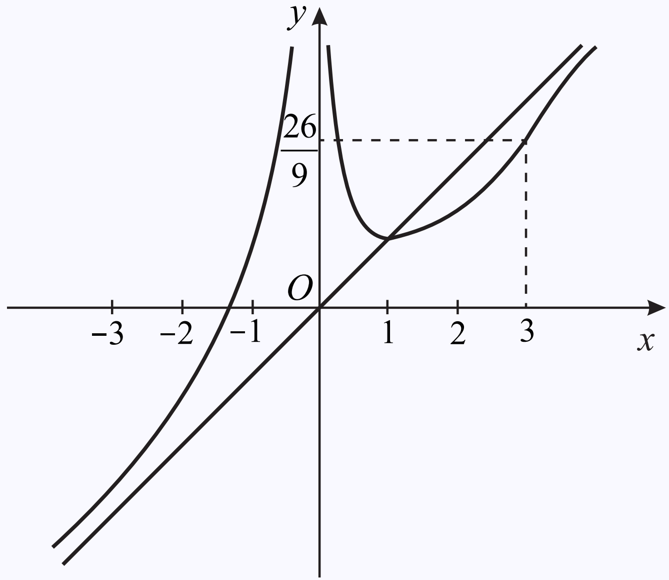


Рисунок 23.1 – График функции $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?
2. Как найти наклонные, вертикальные и горизонтальные асимптоты дробно-рациональной функции?
3. Сформулируйте план исследования функции.
4. Исследуйте и постройте график функции $y = \frac{1}{1-x^2}$.

Исследование функции и построение ее графика

Задание 1. Исследовать функцию $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

◀1. Область определения функции: $D(f) = (0, +\infty)$.

2. Исследование функции на четность-нечетность.

Функция не является четной и не является нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Точки пересечения графика функции с осями координат.

Точки пересечения с осью Oy: точек пересечения с осью нет, так как $x > 0$.

Точки пересечения с осью Ox: $y = 0: \quad x + \frac{\ln x}{x} = 0$ или $x^2 = -\ln x$.

Построим графики функций $y = x^2$ и $y = -\ln x$ (рисунок 23.2).

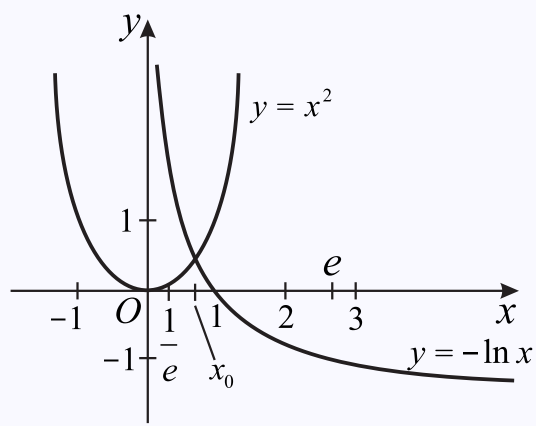


Рисунок 23.2

Используя теорему Больцано – Коши 13.1 об обращении непрерывной на отрезке функции в нуль и рисунок 23.2, находим, что

$$0,65 < x_0 < 0,66.$$

Вывод: x_0 – нуль функции.

4. Исследование функции на непрерывность.

Функция непрерывна в своей области определения (обосновать самостоятельно).

5. Асимптоты графика функции.

$\lim\limits_{x\to+0}\left(x+\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$, значит, $x=0$ – вертикальная асимптота. Других вертикальных асимптот функция не имеет, так как для любых $x = x_0 > 0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ (в силу непрерывности функции в точке x_0).

Исследуем функцию на наличие наклонных и горизонтальных асимптот вида $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x^2}\right) =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0\right] = 1.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Вывод: $y = x$ – наклонная асимптота графика функции.

6. Предельное значение функции в точке $x = +\infty$. Множество значений функции.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.\ E(f) = \mathbb{R}$$

(докажите это самостоятельно, используя теорему о множестве значений функции, непрерывной на промежутке (теорема 11.4)).

7. Исследование функции на монотонность и экстремум.

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$$

Для исследования знака производной изобразим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = \ln x$ (рисунок 23.3). Из рисунка 23.3 видно, что $x^2 + 1 > \ln x$ при $x > 0$.

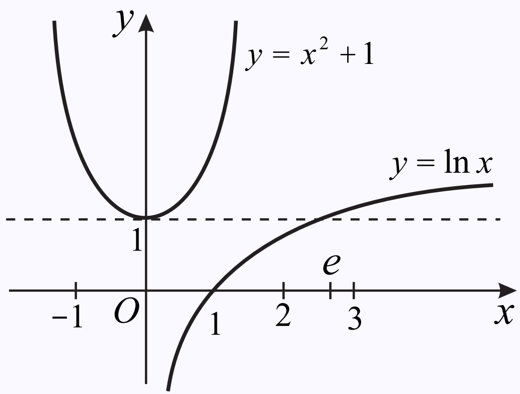


Рисунок 23.3

Вывод: Функция возрастает в своей области определения, а поэтому она экстремумов не имеет.
8. Исследование функции на выпуклость и точки перегиба.

$$f''(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Найдем нули второй производной: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2}$, $4,48 < x_1 < 4,49$, $x_1 \approx 4,49$ (смотри рисунок 23.4).

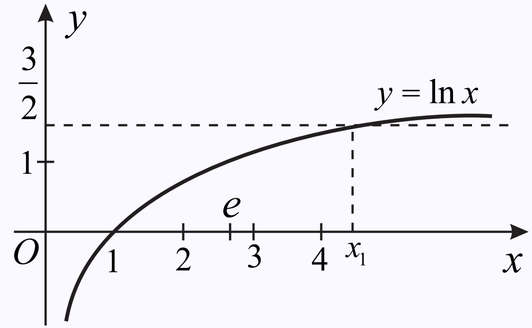


Рисунок 23.4

Методом интервалов исследуем вторую производную на интервалы знакопостоянства (рисунок 23.5): x_1 – точка перегиба, $f(x_1) \approx 4,82$.

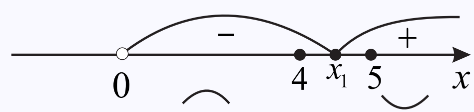


Рисунок 23.5

В интервале $(0, x_1)$ функция f выпукла вверх, а в интервале $(x_1, +\infty)$ – выпукла вниз.

9. Исследование функции на периодичность.

Функция будет непериодической, так как функция возрастает на $D(f)$, а поэтому каждое свое значение принимает в единственной точке. Периодическая же функция любое свое значение принимает на бесконечном множестве точек.

10. Область значений функции $E(f) = (-\infty, +\infty)$.

11. Найдем значения функции в некоторых «рядовых» точках.

а) Найдем точку пересечения графика функции с наклонной асимптотой $y = x$.

$$x + \frac{\ln x}{x} = x, \ \ln x = 0, \ x = 1, \ y = 1, \ A_1(1, 1).$$

б) $f(3) \approx 3,37$; $f(4) \approx 4,35$; $f(5) \approx 5,32$; $f(6) \approx 6,3$; $f(0,5) \approx -0,9$.
Строим график функции (рисунок 23.6).▶

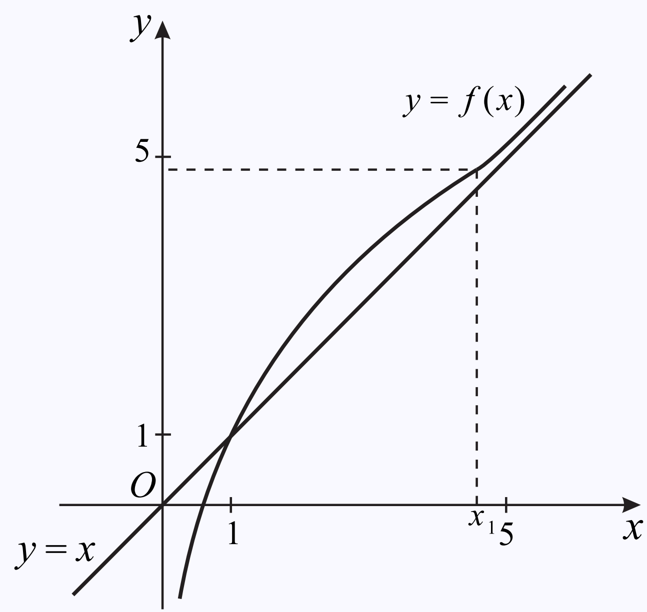


Рисунок 23.6

Задание 2. Исследуйте функцию $y = \frac{3x^2}{3x-1}$ и постройте ее график.

◀1. Область определения функции $D(f) = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

2. Функция не является четной и не является нечетной, так как область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат: $(0, 0)$.

4. Исследуем функцию на непрерывность и выясним характер точек разрыва. Очевидно, что данная функция непрерывна на $D(f)$.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{3x-1} = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{3x-1} = +\infty.$$

6. Найдем интервалы знакопостоянства функции (рисунок 23.7).

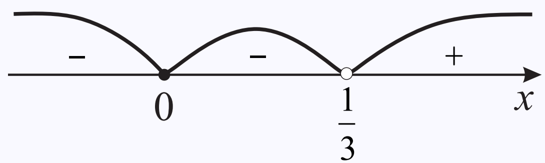


Рисунок 23.7

7. Так как $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}-0} \frac{3x^2}{3x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}+0} \frac{3x^2}{3x-1} = +\infty$, то прямая $x = \frac{1}{3}$ является вертикальной асимптотой.

Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот. Найдем угловой коэффициент k наклонной асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{3x-1} = 1$.

Найдем предел разности $y - kx$ при $x \to \pm\infty$: $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2}{3x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$.

Прямая $y = x + \frac{1}{3}$ является наклонной асимптотой данной кривой.

8. Найдем экстремумы и промежутки возрастания и убывания функции:

$$y' = \frac{6x(3x-1) - 3\cdot 3x^2}{(3x-1)^2} = \frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}.$$

Производная равна нулю в точках $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$.

Производная не существует при $x = \frac{1}{3}$, однако эта точка не принадлежит области определения функции. Поэтому точками, «подозрительными» на экстремум, будут только точки $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$. Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
		max				min	

В точке $x = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x = \frac{2}{3}$ функция имеет минимум.

9. Исследуем функцию на наличие точек перегиба и найдем промежутки выпуклости вверх и вниз

$$y'' = \frac{(18x-6)(3x-1)^2 - (9x^2-6x)(3x-1)\cdot 6}{(3x-1)^4} = \frac{6}{(3x-1)^3}.$$

Нет точек, в которых $y'' = 0$. y'' не существует при $x = \frac{1}{3}$, но $x = \frac{1}{3} \notin D(f)$. Функция не имеет точек перегиба. Составим таблицу:

x	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
y	$\cap$	$\nexists$	$\cup$
y''	$-$	$\nexists$	$+$

10. Функция непериодическая (обосновать самостоятельно с учетом пункта 8 исследования функции).

11. Область значений функции $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

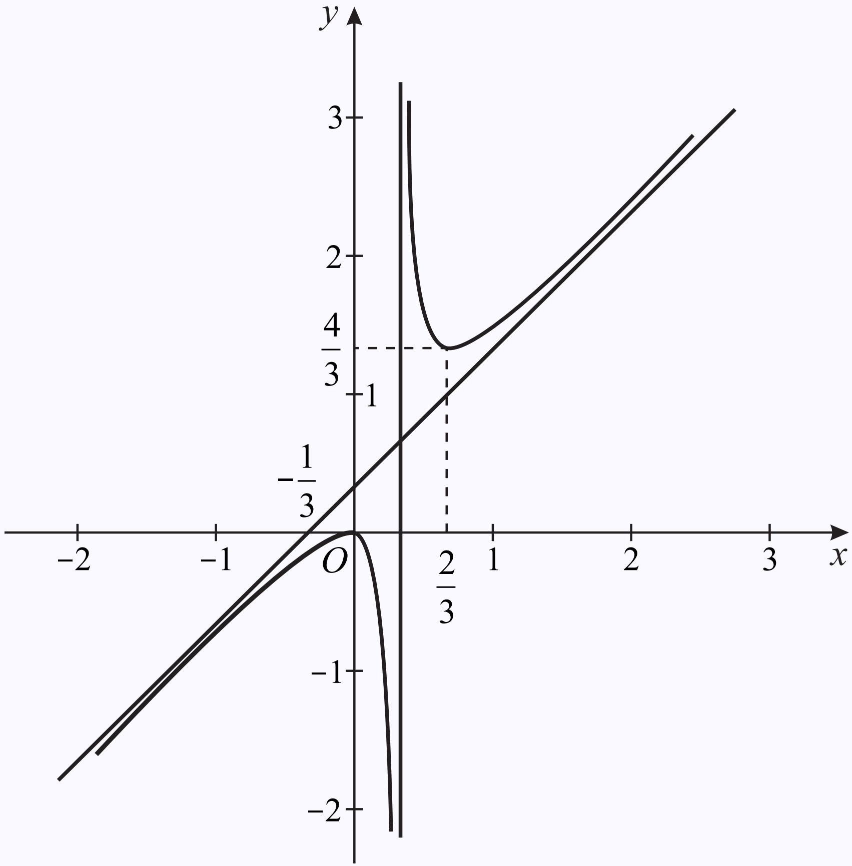


Рисунок 23.8

Используя полученные результаты, построим график функции (рисунок 23.8).▶

Задание 3. Исследовать функцию и построить ее график:

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

◀1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Исследование функции на четность-нечетность.

Функция не является четной и не является нечетной, так как область определения не симметрична относительно начала координат (для точки $x = -1$ симметричная ей точка относительно начала координат $x = 1$ не принадлежит области определения функции).

3. Исследование функции на периодичность.

Функция непериодическая:

$$\forall T \in \mathbb{R},\ T \neq 0,\ x = -T + 1 \in D(f),$$

но

$$x + T = -T + 1 + T = +1 \notin D(f).$$

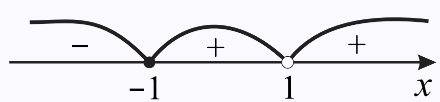
4. Точки пересечения графика функции с осями координат, нули функции.

Точки пересечения с осью Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 1$, $(0, 1)$.

Точки пересечения с осью Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -1$, $(-1, 0)$.

$x = -1$ – нуль функции.

5. Интервалы знакопостоянства функции.



В интервале $(-\infty, -1)$ $f(x) < 0$, а в интервалах $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ $f(x) > 0$.

6. Исследование функции на непрерывность. Пределы в бесконечных точках.

В своей области определения функция непрерывна как дробно-линейная.

Найдем пределы функции в бесконечных точках:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=-\infty.$$

7. Множество значений функции.

С учетом $f\,(1-0)$ и $\lim\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=-\infty$ на основании теоремы о множестве значений непрерывной на промежутке функции заключаем, что $E\,(f)=\mathbb{R}$.

8. Асимптоты графика функции. Так как

$$f\,(1-0)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty,\ f\,(1+0)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty,$$

то $x=1$ – вертикальная асимптота.

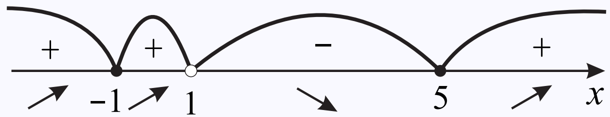
Дальше выделяем целую часть функции.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+3x+1 & x^2-2x+1 \\ \underline{x^3-2x^2+x} & \overline{x+5} \\ -\,5x^2+2x+1 & \\ \underline{5x^2-10x+5} & \\ 12x-4 & \end{array} \qquad f\,(x)=x+5+\frac{12x-4}{x^2-2x+1}.$$

Значит, $y=x+5$ – наклонная асимптота графика функции как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

9. Исследование функции на монотонность и экстремум

$$y'=\frac{3\,(x+1)^2\,(x-1)^2-2\,(x-1)\,(x+1)^3}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2\,(3x-3-2x-2)}{(x-1)^3}=\frac{(x+1)^2\,(x-5)}{(x-1)^3}.$$



Методом интервалов исследуем производную f' на интервалы знакопостоянства.

На промежутках $(-\infty, 1)$ и $[5, +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $(1, 5]$ – убывает (обоснуйте самостоятельно).

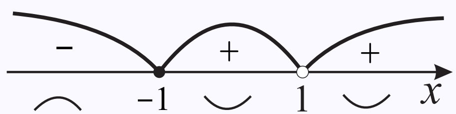
В точке $x = 5$ функция имеет строгий минимум $f(5) = \frac{27}{2}$.

10. Исследование функции на выпуклость и наличие точек перегиба.

$$y'' = \frac{\left(2(x+1)(x-5) + (x+1)^2\right)(x-1)^3 - 3(x-1)^2 (x+1)^2 (x-5)}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x+1)\left((3x-9)(x-1) - (3x^2 - 12x - 15)\right)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)(3x^2 - 12x + 9 - 3x^2 + 12x + 15)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)\cdot 24}{(x-1)^4}.$$

Методом интервалов исследуем вторую производную на интервалы знакопостоянства. $x = -1$ – точка



перегиба, $f(-1) = 0$. В интервале $(-\infty, -1)$ функция выпукла вверх, а в интервалах $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ – выпукла вниз.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{27}{2};\quad f(7) = \frac{8^3}{6^2} = \frac{8\cdot 4^2}{3^2} = 14\frac{2}{9};\quad f(-4) = \frac{(-4+1)^3}{(-4-1)^2} = -\frac{27}{25}.$$

Строим график функции (рисунок 23.9).▶

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

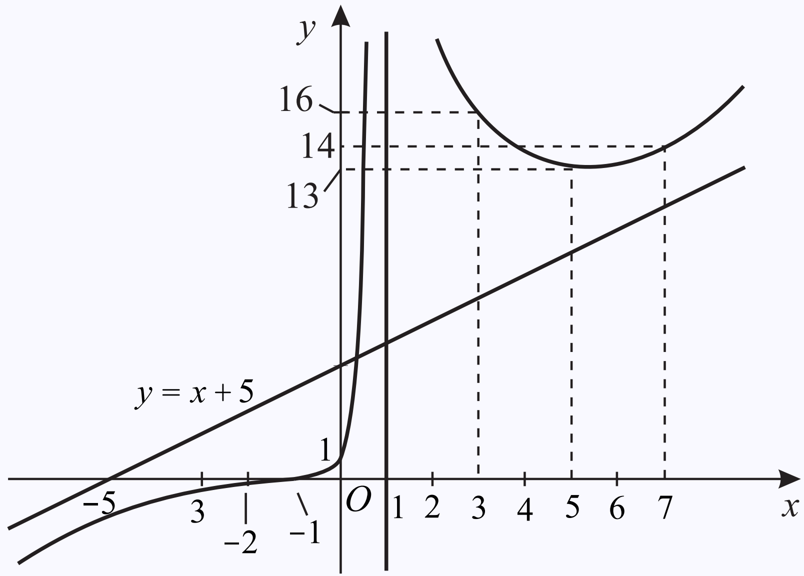


Рисунок 23.9

Задания для самостоятельного решения

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

1.1 $y = \frac{x}{1-x^2}$;

1.2 $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$;

1.3 $y = \frac{x^2-1}{x^2+4}$;

1.4 $y = \frac{(x-1)^4}{x(x^2-4)}$;

1.5 $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$;

1.6 $y = x(x-1)^3$.

2. Исследуйте функции и постройте их графики:

2.1 $y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$;

2.2 $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$;

2.3 $y = \sqrt[3]{1-x^3}$;

2.4 $y = x + \sqrt[3]{(x^2-1)^3}$.

3. Исследуйте функции и постройте их графики:

3.1 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3.2 $y = e^{x^2-2x}$;

3.3 $y = x^3 e^{-x}$;

3.4 $y = \frac{e^{-x^2}}{x+1}$;

3.5 $y = e^{\frac{1-x^2}{x^4}}$;

3.6 $y = x - \ln(x+1)$;

3.7 $y = x^2 + \frac{\ln 2x}{x}$;

3.8 $y = x^3 \ln^2 x$;

3.9 $y = x - \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 22

Исследование функции и построение ее графика

Задание 1. Исследовать функцию $f(x) = \cos^2 x - \cos x$ и построить ее график.
◀1. Область определения функции: $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Исследование функции на четность-нечетность.
а) $D(f) = \mathbb{R}$ – симметрична относительно начала координат;
б) $\forall x \in D(f)$ $f(-x) = \cos^2(-x) - \cos(-x) = \cos^2 x - \cos x = f(x)$.
Функция четная.
3. Функция периодическая, основной ее период $T = 2\pi$.

Замечание 23.4. С учетом четности и периодичности функции ее дальнейшее исследование можно проводить только для отрезка $[0,\pi]$. График для всей области определения получим отображением построенного графика относительно оси Oy и периодическим продолжением.

4. Точки пересечения графика функции с осями координат. Нули функции.
Точки пересечения с осью Oy: $x = 0$, $f(0) = \cos^2 0 - \cos 0 = 0$. График функции проходит через начало координат.
Точки пересечения с осью Ox: $\cos^2 x - \cos x = 0$, $\cos x(\cos x - 1) = 0$,

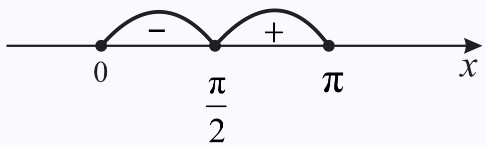
$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = 2\pi n, \end{array}\right. \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Отрезку $[0,\pi]$ принадлежат нули функции: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.
5. Исследование функции на непрерывность. Пределы в бесконечных точках.
Функция непрерывна на $\mathbb{R}$ (обосновать самостоятельно). Пределы в бесконечных точках функции не существуют (обоснуйте самостоятельно).

6. Интервалы знакопостоянства функции.
Выбираем для проверки точки $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3}{4}\pi$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0;$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos^2\frac{3}{4}\pi - \cos\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$



Таким образом, $f(x) > 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; $f(x) < 0$, если $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
7. Асимптоты графика функции.
1) вертикальных асимптот функция не имеет (в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция непрерывна, поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$);
2) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x} = 0$;
3) $b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} (f(x) - kx) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} (\cos^2 x - \cos x)$ – пределы не существуют.
Наклонных и горизонтальных асимптот функция не имеет.
8. Исследование функции на экстремум и монотонность.

$$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + \sin x = \sin x(1 - 2\cos x).$$

Находим критические точки (они будут стационарными).

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Методом интервалов исследуем производную на отрезке $[-\pi, \pi]$ на интервалы знакопостоянства. Вначале определим кратность нулей первой производной. Находим вторую производную

$$f''(x) = \cos x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = \cos x - 2\cos 2x = \varphi(x).$$

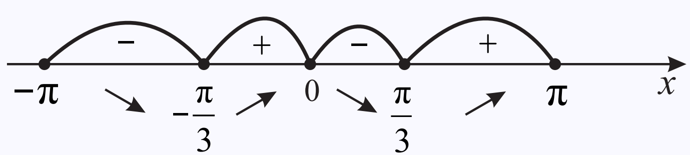
Функция φ – четная.

$$f''(0) = -1, \; f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = f''\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

Все нули f' первой кратности, так как в этих точках $f''(x) \neq 0$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0;$$

при переходе через нули знаки f' меняются, так как все нули первой кратности.



Множество промежутков убывания функции f:

$$A = \left\{\left[-\pi + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], \left[2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]\right\}, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Множество промежутков возрастания функции f:

$$B = \left\{ \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n \right], \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n \right] \right\}, n \in \mathbb{Z}.$$

Множество точек строгого максимума: $C = \{2\pi n, \pi + 2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, причем $f(0) = 0$, $f(\pi) = 2$.
Множество точек строгого минимума:

$$D = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right\}, \ n \in \mathbb{Z},$$

причем $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$.

Замечание 23.5. Можно для исследования на экстремум применить второй достаточный признак строгого экстремума функции в точке.

Найдем значения функции в точках экстремума:
а) $f(0) = 0$ – строгий максимум;
б) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$ – строгий минимум;
в) $f(\pi) = 2$ – строгий максимум.
9. Множество значений функции: $E(f) = \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$.
10. Исследование функции на выпуклость и наличие точек перегиба.

$$f''(x) = \cos x - 2\cos 2x; \ f''(x) = 0; \ \cos x - 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0;$$

$$4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0; \ t = \cos x; 4t^2 - t - 2 = 0; \ D = 1 + 8 \cdot 4 = 33;$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}; \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0,84, \\ t_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx -0,59; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}, \\ \cos x = \frac{1-\sqrt{33}}{8}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2\pi n, \\ x = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} + 2\pi n, \end{array} \right. n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, то $x \approx 0,57$ ($x \approx 32,86°$); если $\cos x = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$, то $x \approx 2,20$ ($x \approx 126,16°$).

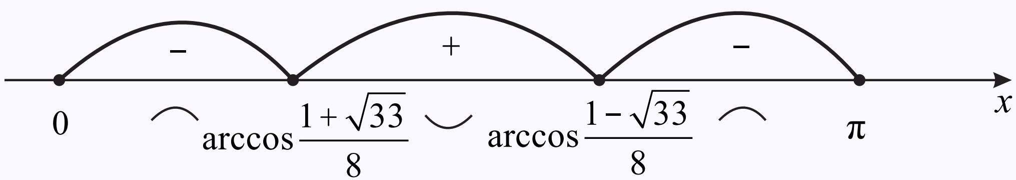
Методом интервалов исследуем знаки f'' на отрезке $[0,\pi]$.
Определим кратность нулей второй производной:

$$f'''(x) = -\sin x + 4\sin 2x;\ \ f'''(x) = 0;\ \ -\sin x + 8\sin x \cdot \cos x = 0;$$

$$\sin x\,(-1 + 8\cos x) = 0;\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{8}.\end{array}\right.$$

Очевидно, что нули f''' на отрезке $[0,\pi]$ не совпадают с нулями f'' на этом промежутке, то есть имеем простые нули f'', а поэтому f'' меняет знаки при переходе через свои нули.

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\pi = 2 > 0.$$



Вывод: $x_1 = \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ и $x_2 = \arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}$ – точки перегиба.

$$f(x_1) = \left(\cos\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)^2 - \cos\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{33}}{8} = \frac{1+\sqrt{33}}{8}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8} - 1\right) \approx -0,13.$$

$$f(x_2) = \frac{1-\sqrt{33}}{8}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8} - 1\right) \approx 0,94.$$

Множество интервалов выпуклости вверх графика функции:

$$\left\{\left(-\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2\pi n,\ \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2\pi n\right);\right.$$

$$\left.\left(\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} + 2\pi n,\ -\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} + 2\pi(n+1)\right)\right\},\quad n \in \mathbb{Z}.$$

Множество интервалов выпуклости вниз графика функции:

$$\left\{\left(\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2\pi n,\ \arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} + 2\pi n\right);\right.$$

$$\left.\left(-\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} + 2\pi n,\ -\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2\pi n\right)\right\},\quad n \in \mathbb{Z}.$$

x_1', x_2' – также точки перегиба:

$$x_1' = -\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8},\quad x_2' = -\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}. \blacktriangleright$$

График функции $f(x) = \cos^2 x - \cos x$ изображен на рисунке 23.10.

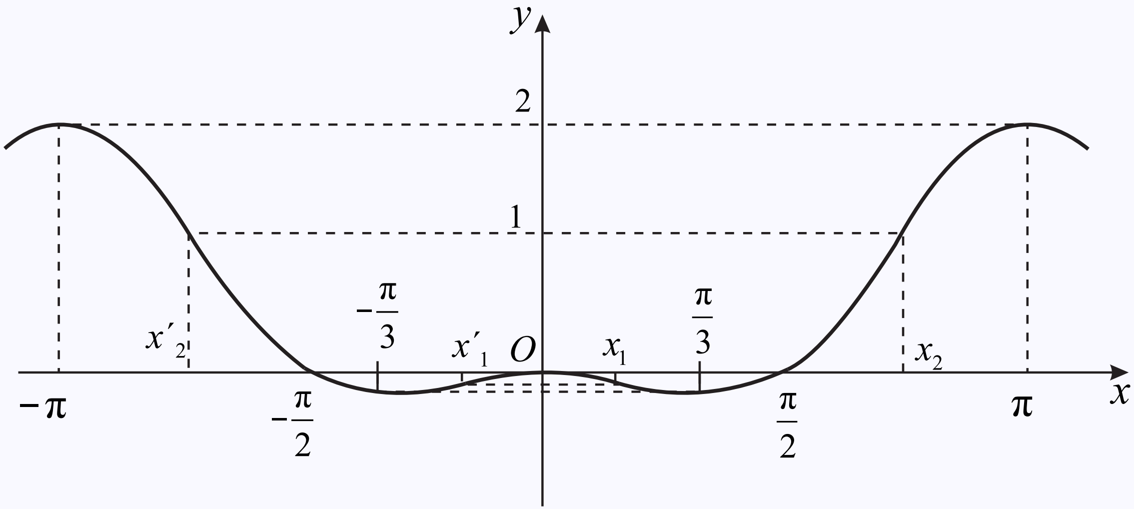


Рисунок 23.10

Задание 2. Построить кривую, заданную параметрически:

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1}, \quad y(t) = \frac{t}{t^2-1}.$$

◀1. Находим общую часть областей определения функций x и y, отметив те значения t_i, включая $t_i = \pm\infty$, для которых хотя бы один из пределов $\lim\limits_{t\to t_i \pm 0} x(t)$, $\lim\limits_{t\to t_i \pm 0} y(t)$ равен $+\infty$ или $(-\infty)$. Получаем:

$$t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

При этом:

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to-1-0} x(t) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to-1+0} x(t) = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = -\infty,\ \lim_{t\to 1+0} x(t) = +\infty,\ \lim_{t\to +\infty} x(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to -\infty} y(t) = 0,\ \lim_{t\to -1-0} y(t) = -\infty,\ \lim_{t\to -1+0} y(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to 1-0} y(t) = -\infty,\ \lim_{t\to 1+0} y(t) = +\infty,\ \lim_{t\to +\infty} y(t) = 0.$$

2. Находим асимптоты кривой.

а) из пункта 1 видно, что $x = -\frac{1}{2}$ – вертикальная асимптота:

$$\lim_{\substack{t\to -1-0\\ x\to -\frac{1}{2}-0}} y\,(t) = -\infty,\quad \lim_{\substack{t\to -1+0\\ x\to -\frac{1}{2}+0}} y\,(t) = +\infty.$$

б) $y = 0$ – горизонтальная асимптота:

$$\lim_{\substack{t\to -\infty\\ x\to -\infty}} y\,(t) = 0,\quad \lim_{\substack{t\to +\infty\\ x\to +\infty}} y\,(t) = 0.$$

в) для нахождения наклонных асимптот воспользуемся соответствующим критерием для нахождения асимптот вида $y = kx + b$

$$\left(k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f\,(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x},\quad b = \lim_{x\to +\infty} (y - kx)\right).$$

У нас $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{\substack{t\to\infty\\ t\to 1}} \frac{1}{t(t+1)} = \begin{cases} 0, & \text{при а), б);}\\ \frac{1}{2}, & \text{при в), г).}\end{cases}$

а) $t \to -\infty$ $(x \to -\infty)$, в) $t \to 1-0$ $(x \to -\infty)$,

б) $t \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, г) $t \to 1+0$ $(x \to +\infty)$.

а,б) $\lim\limits_{t\to\infty} (y - 0x) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{t^2-1} = 0$ $(y = 0)$;

$$\lim_{\substack{x\to\pm\infty\\ t\to 1\pm 0}}\left(y-\tfrac{1}{2}x\right)=\lim_{t\to 1\pm 0}\tfrac{-t^2-2t}{2(t+1)}=-\tfrac{3}{4}.$$

Таким образом, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ – наклонная асимптота.

3. Устанавливаем, обладает ли кривая симметрией, позволяющей сократить и упростить выкладки.

Приведем ниже общую теорию для соответствующих свойств (для нашей задачи ни одно из указанных свойств не имеет места).

Обозначим через T – общую часть областей определения функций x, y.

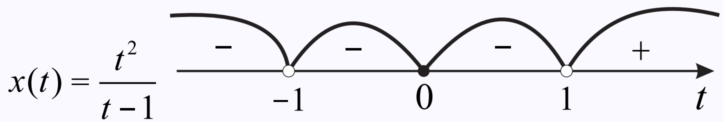
а) $\forall t\in T\ x(-t)=x(t),\ y(-t)=-y(t)$ (симметрия относительно оси Ox);

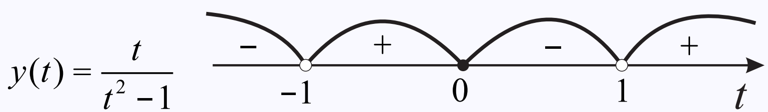
б) $\forall t\in T\ x(-t)=-x(t),\ y(-t)=y(t)$ (симметрия относительно оси Oy);

в) $\forall t\in T\ x(-t)=-x(t),\ y(-t)=-y(t)$ (симметрия относительно начала координат);

г) $\forall t\in T\ x(-t)=x(t),\ y(-t)=y(t)$ (наложение).

4. Находим нули функций x, y и интервалы знакопостоянства этих функций (учитываем общие нули).



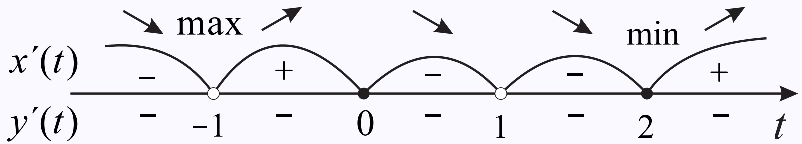


5. Находим точки t_k, в которых хотя бы одна из производных x' или y' равна нулю или не существует.

$$x'(t)=\frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2};$$

$$y'(t) = \frac{t^2 - 1 - 2t^2}{\left(t^2 - 1\right)^2} = \frac{-1 - t^2}{\left(t^2 - 1\right)^2} = -\frac{1 + t^2}{\left(t^2 - 1\right)^2}.$$

Устанавливаем точки максимума и минимума: $x_{\max}(0) = 0$, $x_{\min}(2) = 4$; функция y точек эстремума не имеет (для любых $t \neq \pm 1$ функция принимает отрицательные значения).



Отметим, что точки t_i, определенные в пункте 1, и точки t_k, определенные в пункте 5, разбивают область T на интервалы (t_p, t_{p+1}) знакопостоянства функций x' и y'. Отсюда следует, что на любых таких интервалах (t_p, t_{p+1}) система функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ задает функцию $y = f(x)$ ($x = x(t)$ – строго монотонна на указанных интервалах).

6. Исследуем f'' на интервалы знакопостоянства:

$$f'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{-\left(1+t^2\right)}{(t-1)^2(1+t)^2}}{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}} = \frac{-\left(1 + t^2\right)}{(1+t)^2\, t\,(t-2)};$$

$$f'' = \frac{\frac{d}{dt}\left(f'\right)}{x'(t)} = \frac{\frac{2(t-1)\left(t^3+3t+1\right)}{(t+1)^3 t^2 (t-2)^2}}{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}} = \frac{2\,(t-1)\left(t^3 + 3t + 1\right)}{(t+1)^3\, t^3\,(t-2)^3}.$$

Найдем корни уравнения

$$t^3 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 = -3t + 1.$$

Из рисунка 23.11 следует, что указанное выше уравнение имеет только один действительный корень $t \approx -\frac{1}{3}$.

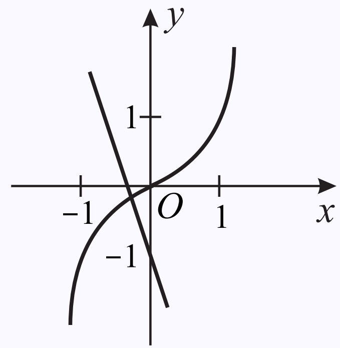
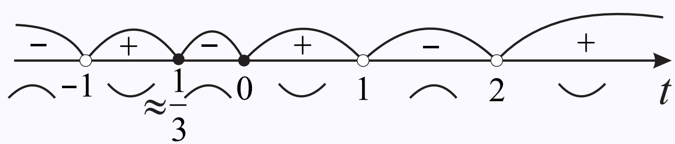


Рисунок 23.11

Интервалы знакопостоянства f'':



7. Составляем таблицу:

(t_p, t_{p+1})	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \approx -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\approx -\frac{1}{3}, 0\right)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
(x_p, x_{p+1})	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \approx -\frac{1}{12}\right)$	$\left(\approx -\frac{1}{12}, 0\right)$	$(0, -\infty)$	$(+\infty, 4)$	$(4, +\infty)$
(y_p, y_{p+1})	$(0, -\infty)$	$\left(-1, \approx -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\approx -\frac{1}{3}, 0\right)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Знак f''	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Используя таблицу, строим ветви кривой, соответствующие указанным интервалам (рисунок 23.12).►

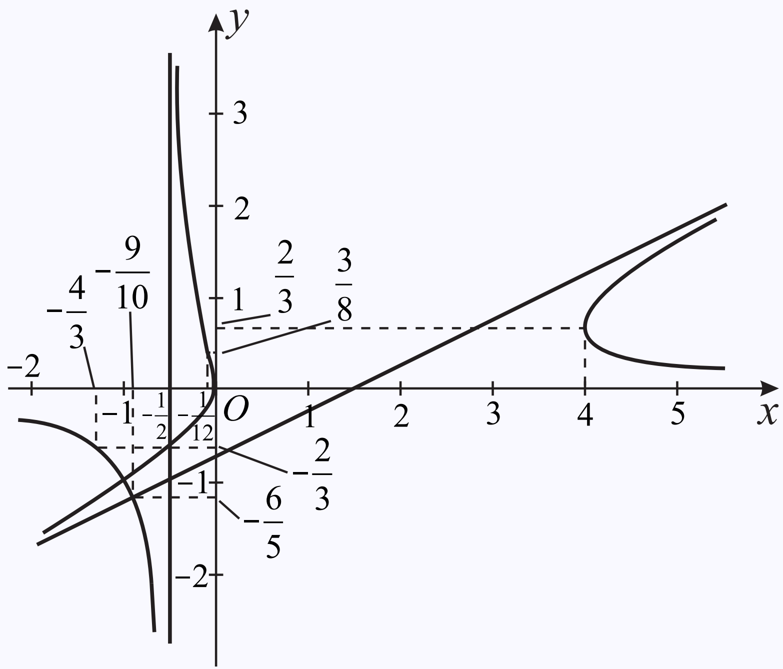


Рисунок 23.12

Задания для самостоятельного решения

1. Исследуйте и постройте графики следующих тригонометрических функций:

1.1 $y = \sin x + \sin 2x$;

1.2 $y = \cos 3x - 3\cos x$;

1.3 $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$;

1.4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

2. Исследуйте и постройте графики сложных функций:

2.1 $y = \ln \sin x$;

2.2 $y = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{x^2+4}$;

2.3 $y = \arcsin \frac{x}{x^2-1}$;

2.4 $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$.

3. Исследуйте и постройте графики функций, заданных параметрически:

3.1 $x(t) = \frac{t^2}{t^2-1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t-1}$;

3.2 $x(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t+1}$;

3.3 $x(t) = \frac{\ln t}{t^2}$, $y(t) = t^2 \ln t$;

3.4 $x(t) = \frac{2t}{t^2+1}$, $y(t) = t^3 - 3t$;

3.5 $x(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}$;

3.6 $x(t) = \frac{t}{3-t^2}$, $y(t) = \frac{t(2-t^2)}{3-t^2}$;

3.7 $x(t) = \frac{t^3}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы № 2

Вариант 1.
Вариант 2.
Вариант 3.
Вариант 4.
Вариант 5.
Вариант 6.
Вариант 7.
Вариант 8.
Вариант 9.
Вариант 10.
Вариант 11.
Вариант 12.

Итоговый тест по разделу «Дифференциальое исчисление»

Ответьте на вопросы теста.

Задания для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Дифференциальное исчисление»

1. Пользуясь определением, найдите производные функций:

   1.1 $y = \arcsin\sqrt{x}$;

   1.2 $y = \cos(x-1)^2$;

   1.3 $y = e^{x^2}$;

   1.4 $y = \operatorname{tg}(x-1)$.

2. Покажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ не имеет производной в точке $x = 0$.
3. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенно значение функции $f(x) = x\ln(x-2)$ при $x = 3{,}001$.
4. Докажите, что функция
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ -\frac{1}{n}, & -\frac{1}{n} \leqslant x < -\frac{1}{n+1}, \end{cases}$$
дифференцируема в точке $x = 0$.
5. Докажите, что многочлен $P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ имеет n корней на $(-1,1)$.
6. Докажите, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$
7. Докажите неравенство $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.
8. Используя формулу Тейлора – Маклорена, вычислите значение $\cos 9^\circ$ с точностью до 10^{-3}.
9. Докажите, что если $a^2 - 3b < 0$, то уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет один и только один, причем простой, действительный корень.
10. Покажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ на отрезке $[0,2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа.

11. Исследуйте функции на монотонность и экстремумы:

11.1 $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2}$;

11.2 $y = \cos 2x - 2\cos x$;

11.3 $y = x^3 - 3x$;

11.4 $y = x^4(x - 12)^2$;

11.5 $y = \cos^2 x - \cos x$;

11.6 $y = \sqrt{|x|}(x - 3)$.

12. Вычислите пределы, используя правила Лопиталя:

12.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$;

12.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$;

12.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

12.4 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\mathrm{tg} x - \frac{1}{1 - \sin x}\right]$;

12.5 $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$;

12.6 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2 x\right)$;

12.7 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\, x\right)^x$;

12.8 $\lim\limits_{x\to +\infty} \pi\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x\right)^{\frac{1}{x}}$.

13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - \sin 2x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутый точки шоссе (шоссе считаем прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

15. Лампа подвешена на высоте 12 м над прямой горизонтальной дорожкой, по которой идет человек, рост которого равен $1,8$ м. С какой скоростью удлиняется его тень, если он удаляется со скоростью 50 м/мин?

16. Круглый металлический диск расширяется при нагревании так, что его радиус равномерно увеличивается на $0,01$ см/с. С какой скоростью увеличивается его площадь в тот момент, когда его радиус равен 2 см?

17. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Определите: а) на какой высоте от поверхности земли оно будет через 1 с; б) через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от Земли (считать $g = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$)?
18. Расходы на топливо для корабля делятся на две части. Первая из них не зависит от скорости и равна 480 у.е. в час. А вторая часть расходов пропорциональна кубу скорости, причем при скорости 10 км/ч эта часть расходов равна 30 у.е. в час. Требуется определить, при какой скорости общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей.
19. Три пункта A, B, C не лежат на одной прямой, причем угол $\angle ABC = 60°$. Одновременно из точки A выходит автомобиль, а из точки B – поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, поезд – к пункту C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?
20. Картина высотой $1,4$ м подвешена на стену так, что ее нижний край на $1,8$ м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (то есть чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим).
21. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определите параметры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре.
22. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.
23. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны. Найдите наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.
24. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A; в точке B ($AB = a$) подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен k. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силы (момент уравновешивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага)?

25. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найдите значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при которой вместимость желоба будет наибольшей.

26. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r и расположена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшей, если длина отрезка линии центров этих шаров равна a и $a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$?

27. Камень брошен с заданной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каком α дальность полета камня будет наибольшей.

28. Сосуд с вертикальной стенкой высоты h стоит на горизонтальной плоскости. Определите положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричели равна $\sqrt{2gx}$, где x – глубина расположения отверстия.

29. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Докажите, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

30. Канат висящего моста имеет вид параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точек подвеса. Найдите угол между канатом и опорными колоннами.

31. Тяжелая балка длинной l м опускается на землю так, что ее нижний конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот, который разматывается со скоростью v м/сек. При этом балка опускается и вагонетка откатывается. Определите ускорение, с которым откатывается вагонетка в тот момент, когда расстояние от нее до стены равно b м.

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Дифференциальное исчисление»

1. Задачи, приводящие к понятию производной (задачи Ньютона и Лейбница).
2. Понятие производной, ее геометрический и механический смысл. Касательная и нормаль к графику функции. Понятие односторонней производной.
3. Понятие дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
4. Понятие дифференциала функции. Геометрический и механический смысл.
5. Производная и дифференциал суммы, произведения, частного. Производные основных элементарных функций.
6. Производная композиции (сложной) функции. Дифференциал композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала.
7. Производная обратной функции.
8. Логарифмическая производная. Производная показательно-степенной функции.
9. Производная и дифференциал высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциалы высших порядков.
10. Параметрически заданные кривые. Параметрически заданные функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
11. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля).
12. Основные теоремы дифференциального исчисления (Лагранжа, Коши).
13. Правила Лопиталя.
14. Формула Тейлора–Маклорена. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций ($y = e^x$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \ln(1+x)$, $y = (1+x)^\alpha$).

15. Возрастание и убывание функции в точке. Критерий строгой монотонности функции на промежутке.
16. Понятие максимума и минимума функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные признаки максимума и минимума.
17. Выпуклые функции. Достаточный признак выпуклости функции на интервале.
18. Точки перегиба. Необходимый и достаточный признаки перегиба.
19. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Критерий горизонтальных и наклонных асимптот.

Литература

1. Математический анализ. Часть 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление : учебно-методический комплекс для студентов физических специальностей университетов // сост. Н.П. Семенчук [и др.]; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. — Брест : БрГУ, 2012. — 255 с.

2. Кротов, В. Г. Лекции по математическому анализу: учеб. пособие / В. Г. Кротов — Минск: БГУ, 2016. — 372 с.

3. Элементарные функции : пособие для студентов физико-математических специальностей университета / сост.: Н.П. Семенчук, Н.Н. Сендер, С.А. Марзан ; Брест. гос. ун-т. – Брест : БрГУ, 2007. – 41 с.

4. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 687 с.

5. Ильин, В.А. Основы математического анализа : в 2 т. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 599 с.

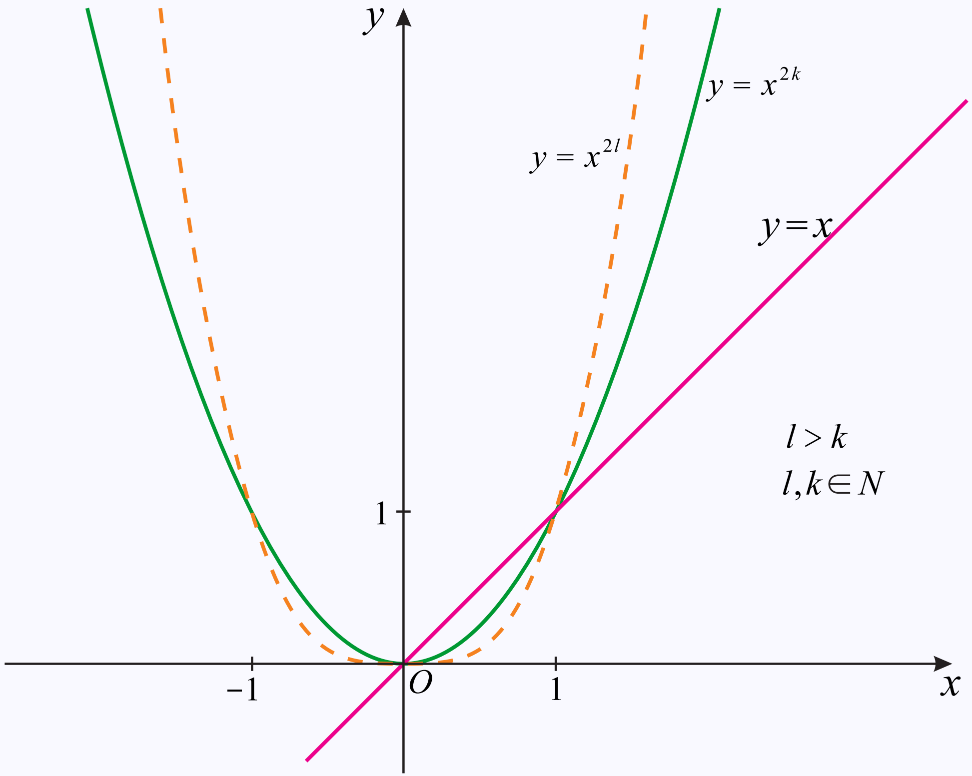
6. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа : в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 1 : Основы математического анализа. – 440 с.

7. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий ; под ред. В.А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 2002. – Кн. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – 725 с.

8. Давыдов, Н.А. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский ; под ред. Н.А. Давыдова. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.

Приложения

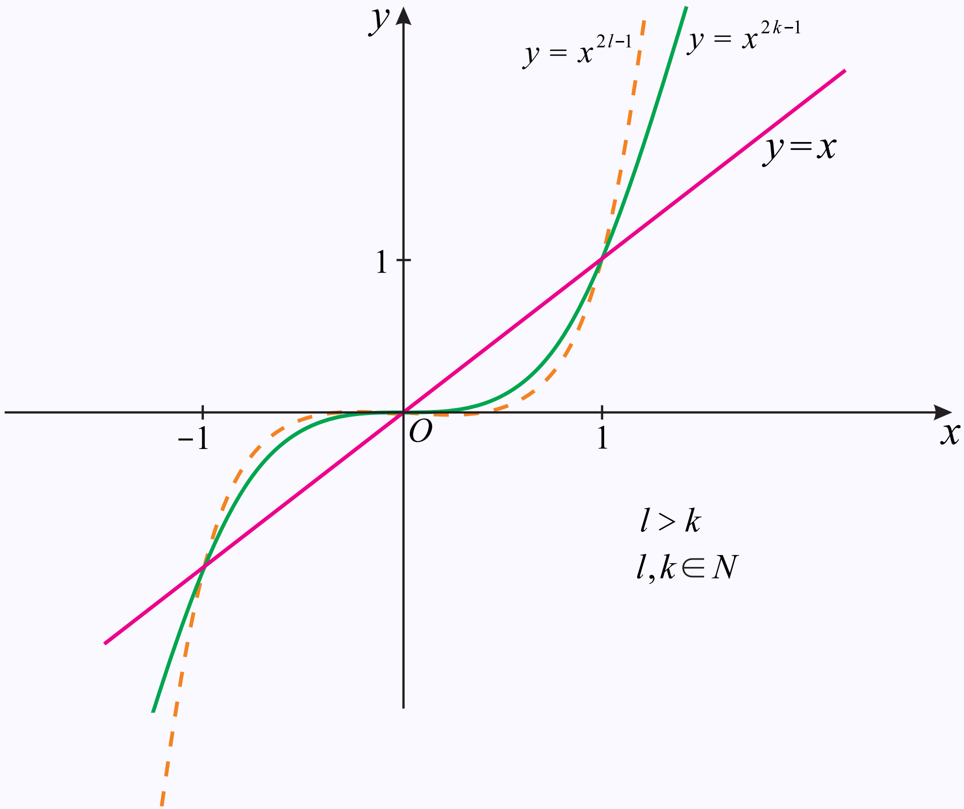
Степенная функция



Степенная функция с натуральным четным показателем

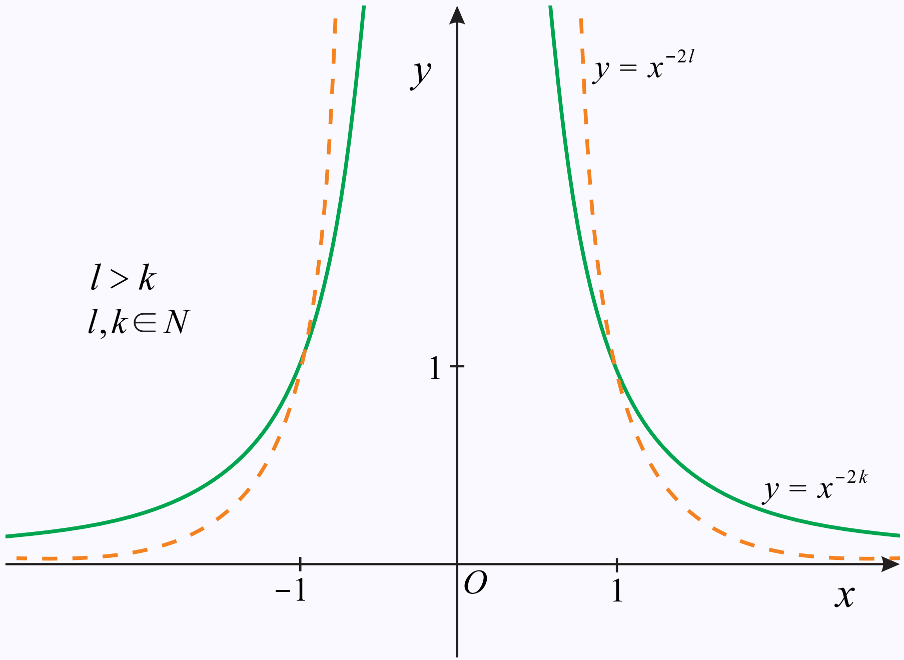
Далее

Степенная функция



Степенная функция с натуральным нечетным показателем

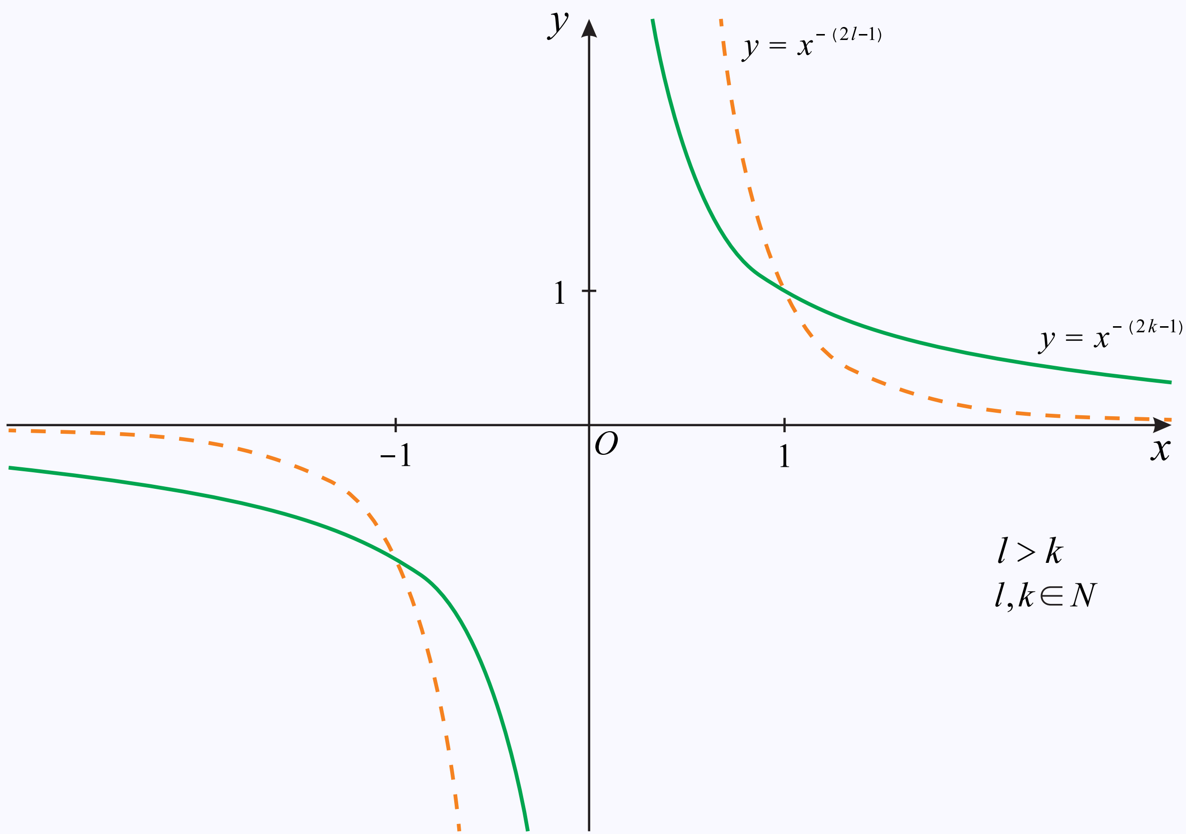
Степенная функция



Степенная функция с четным отрицательным показателем

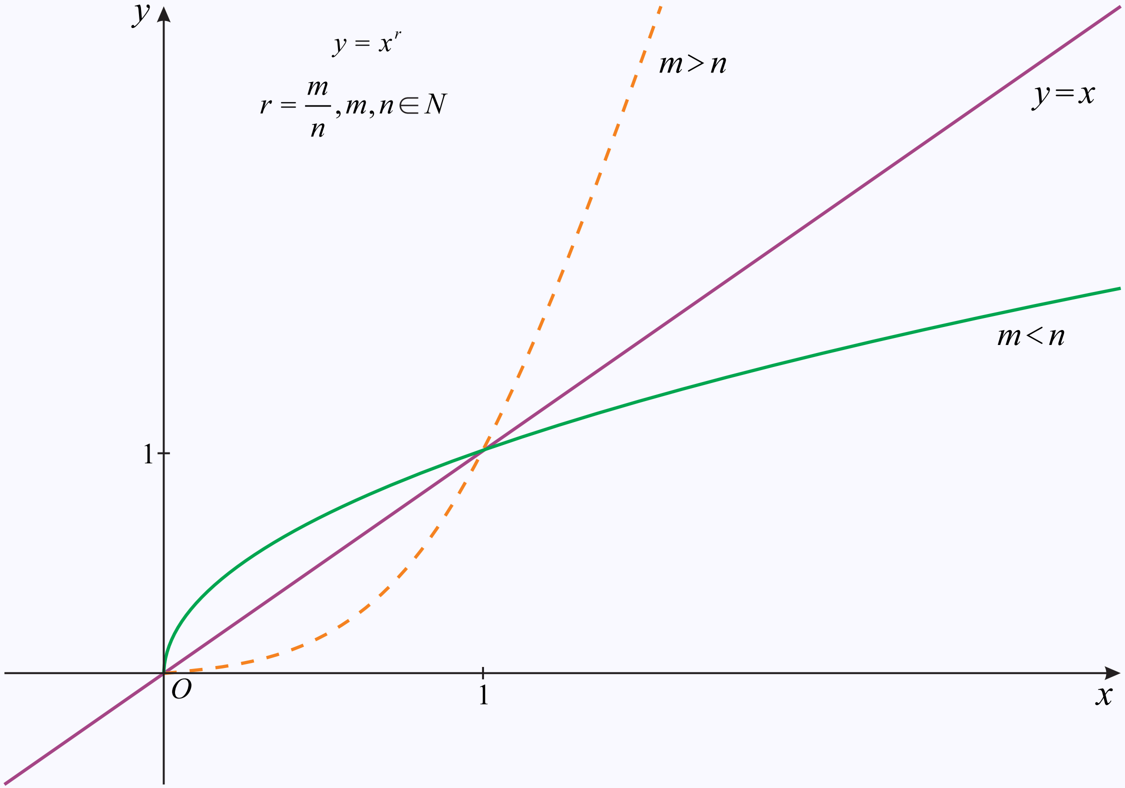
Далее

Степенная функция



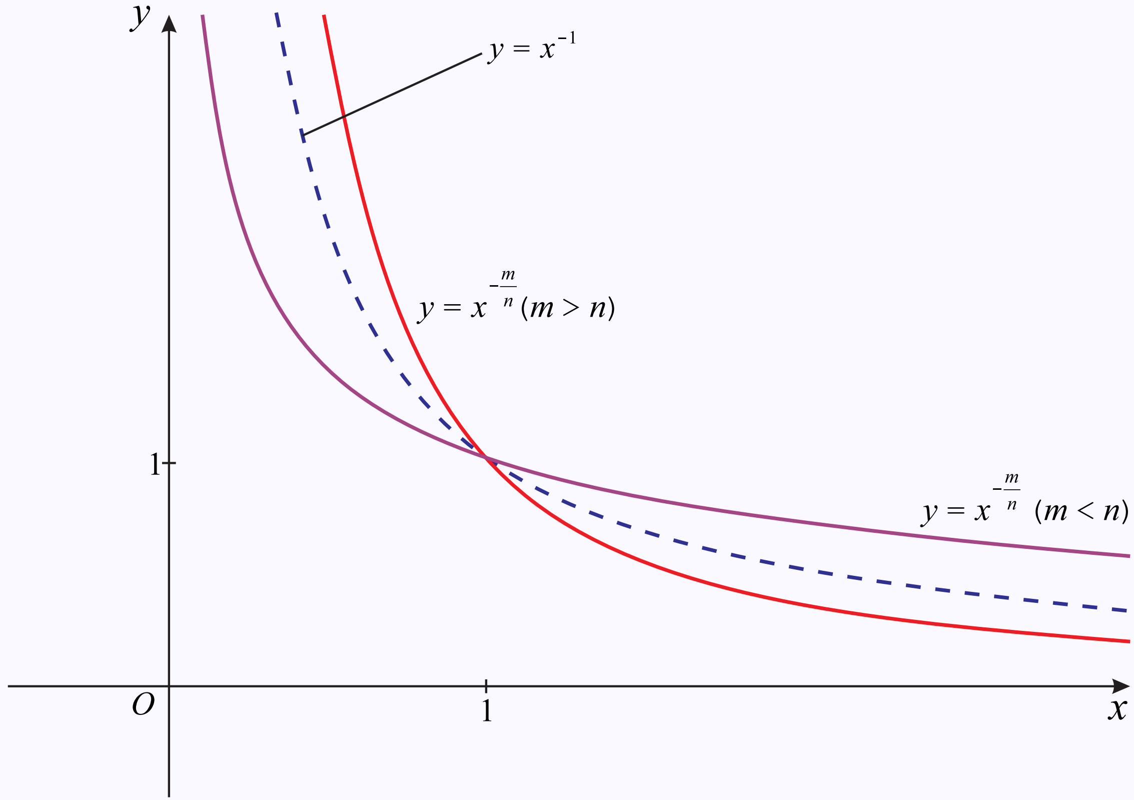
Степенная функция с нечетным отрицательным показателем

Степенная функция



Степенная функция с рациональным положительным показателем

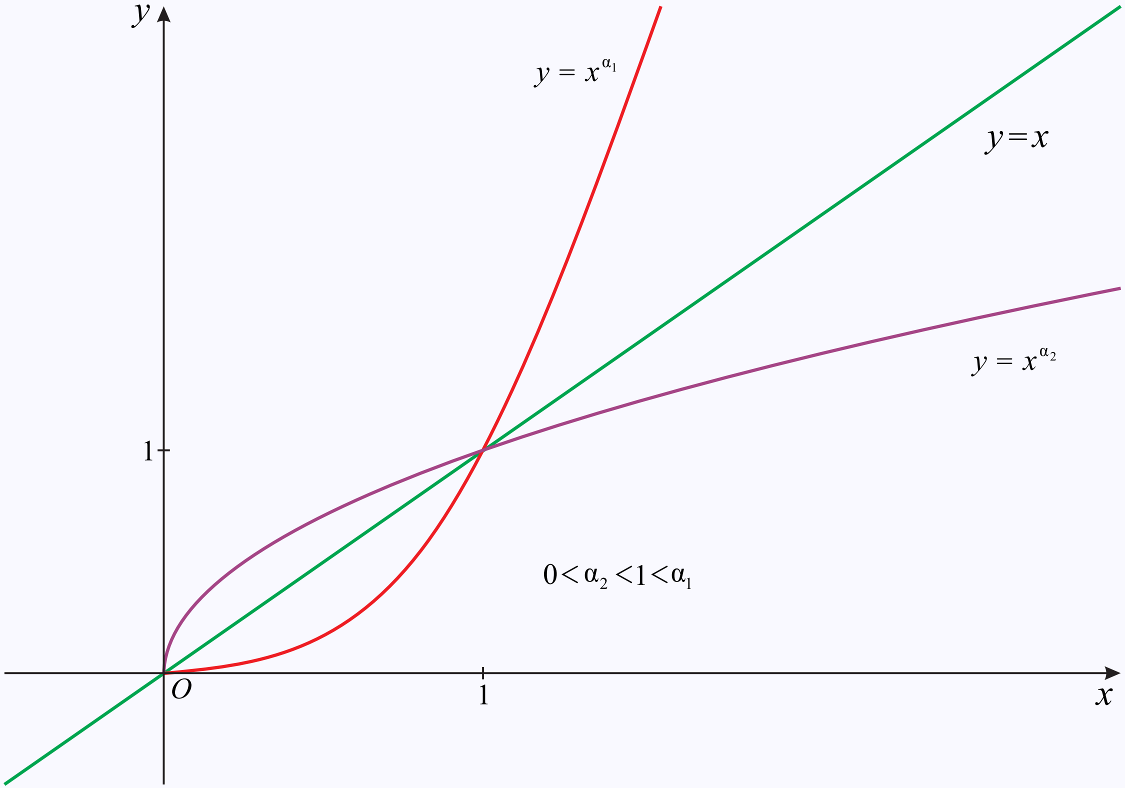
Степенная функция



Степенная функция с рациональным отрицательным показателем

Далее

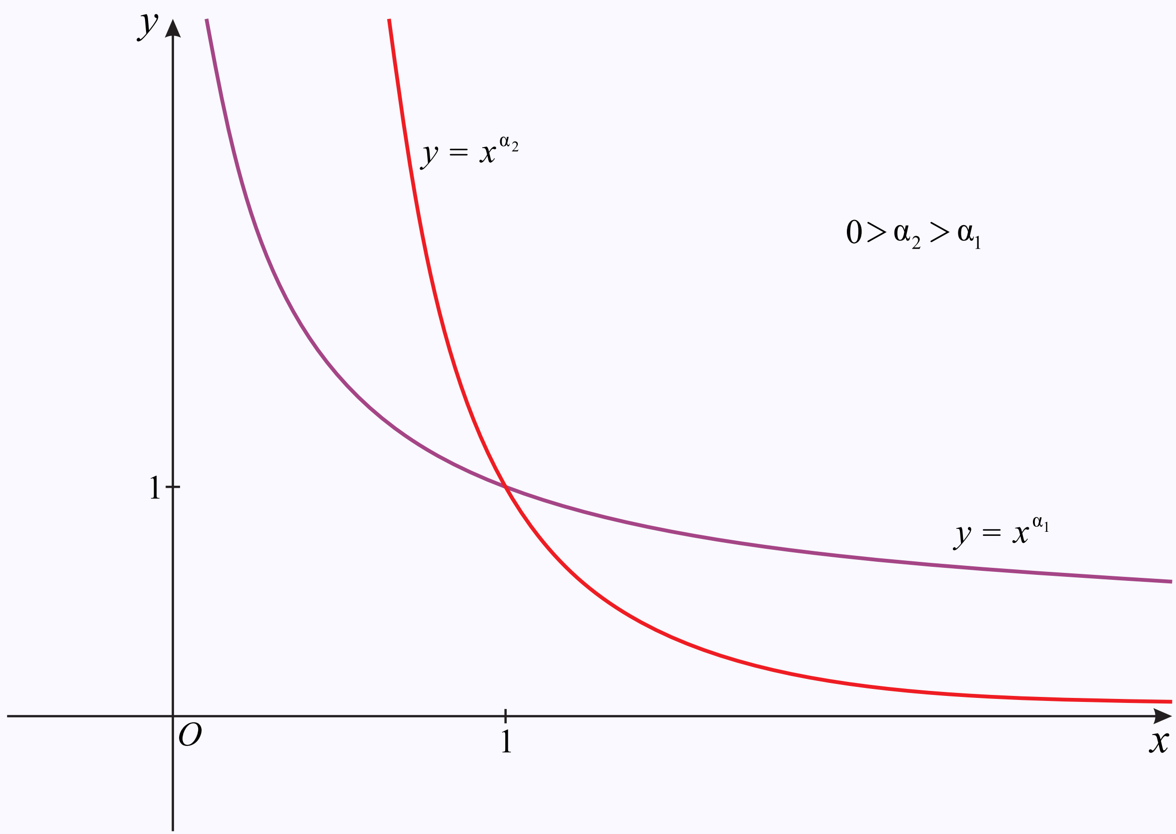
Степенная функция



Степенная функция с действительным положительным показателем

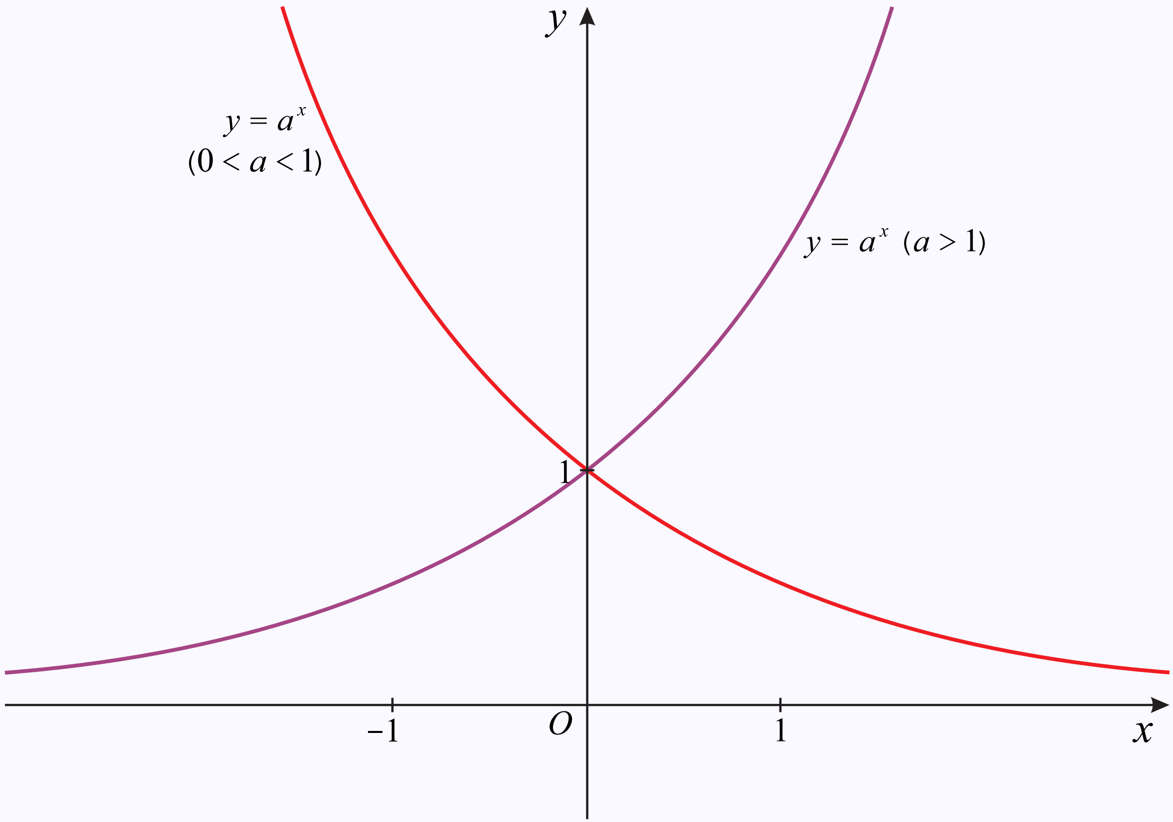
Далее

Степенная функция

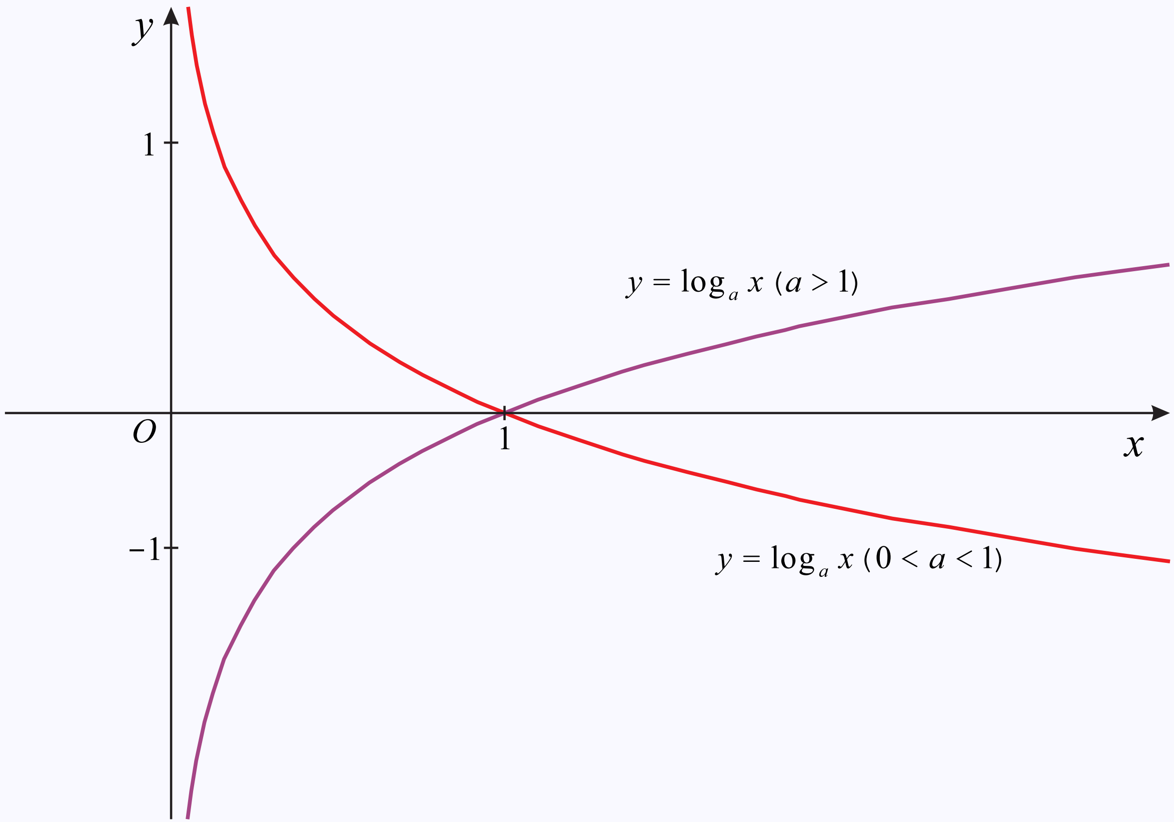


Степенная функция с действительным отрицательным показателем

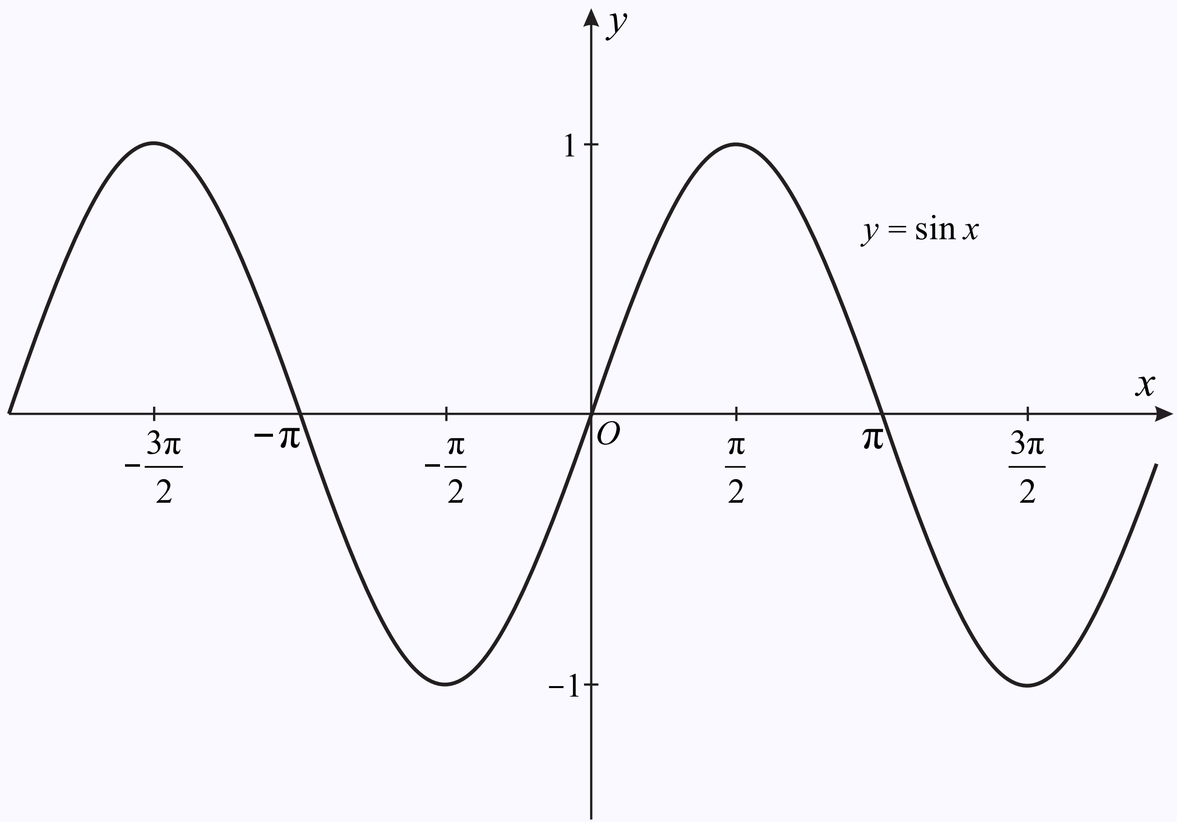
Показательная функция



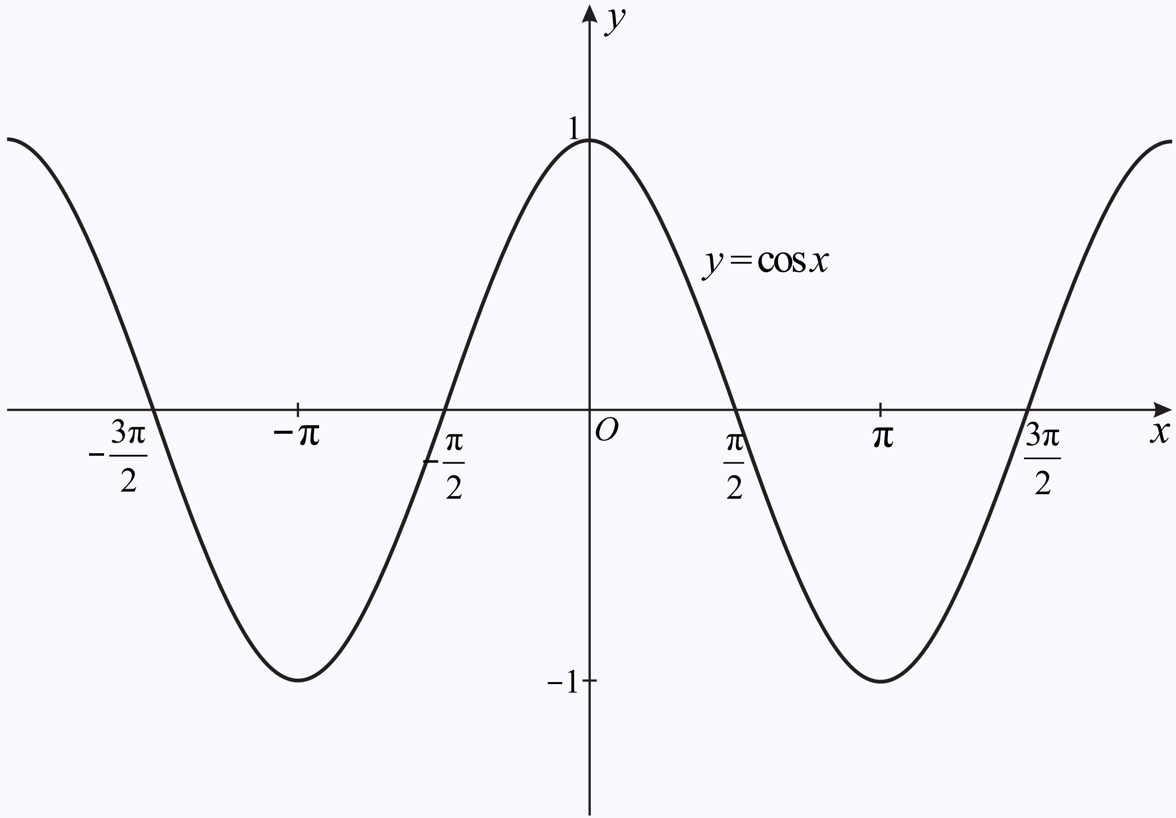
Логарифмическая функция



Тригонометрическая функция синус

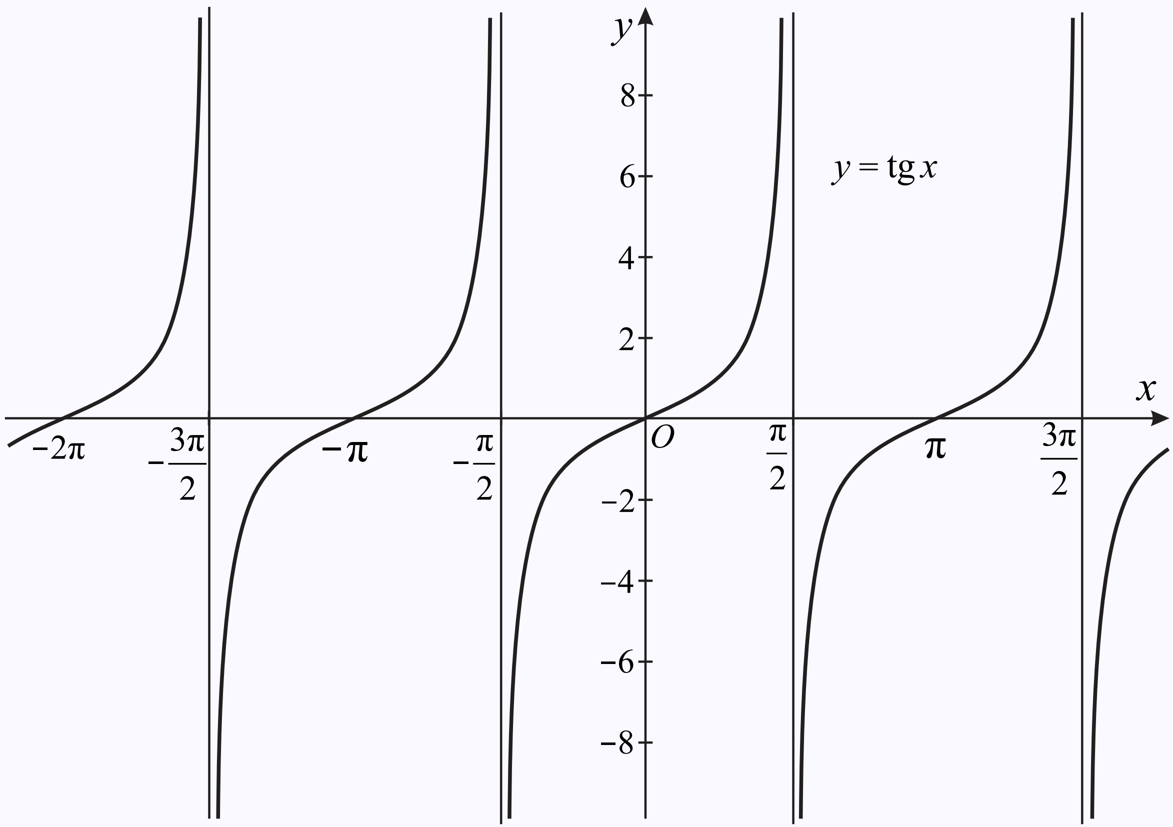


Тригонометрическая функция косинус



Графики основных элементарных функций

Тригонометрическая функция тангенс

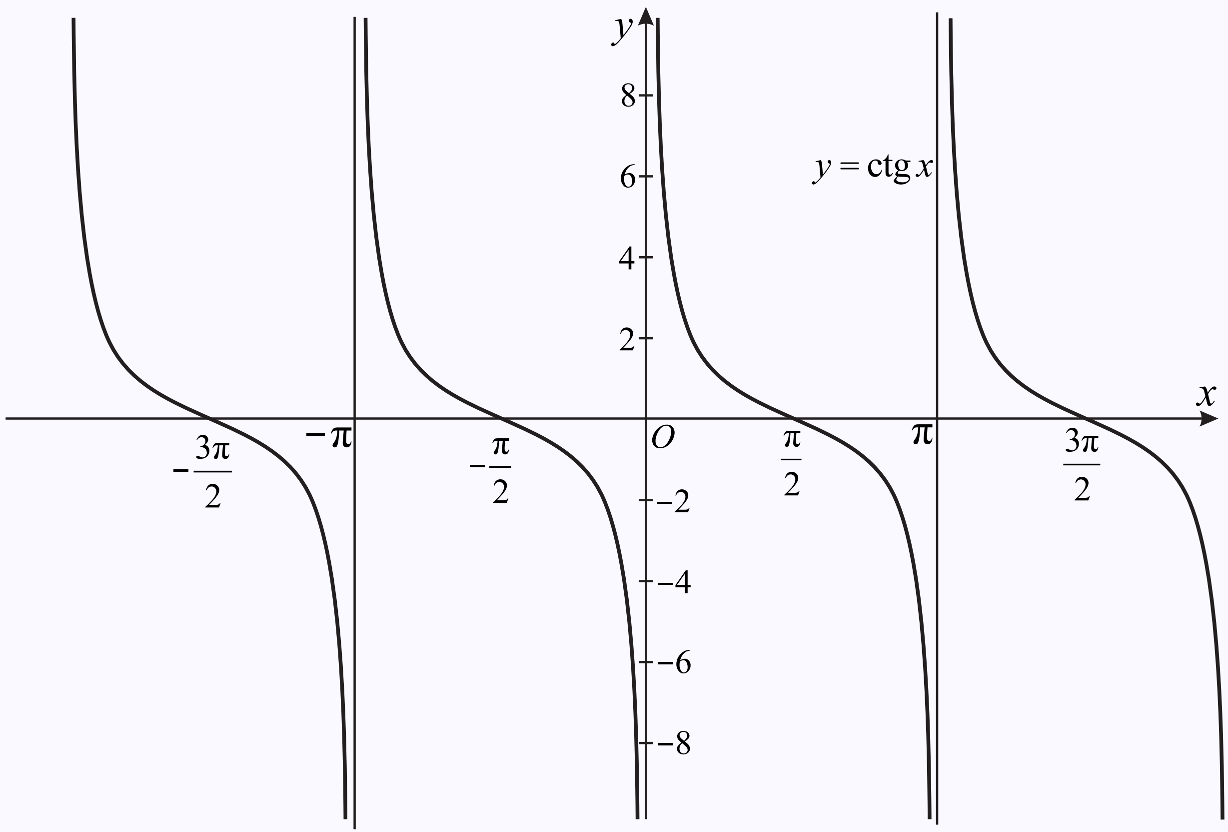


На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

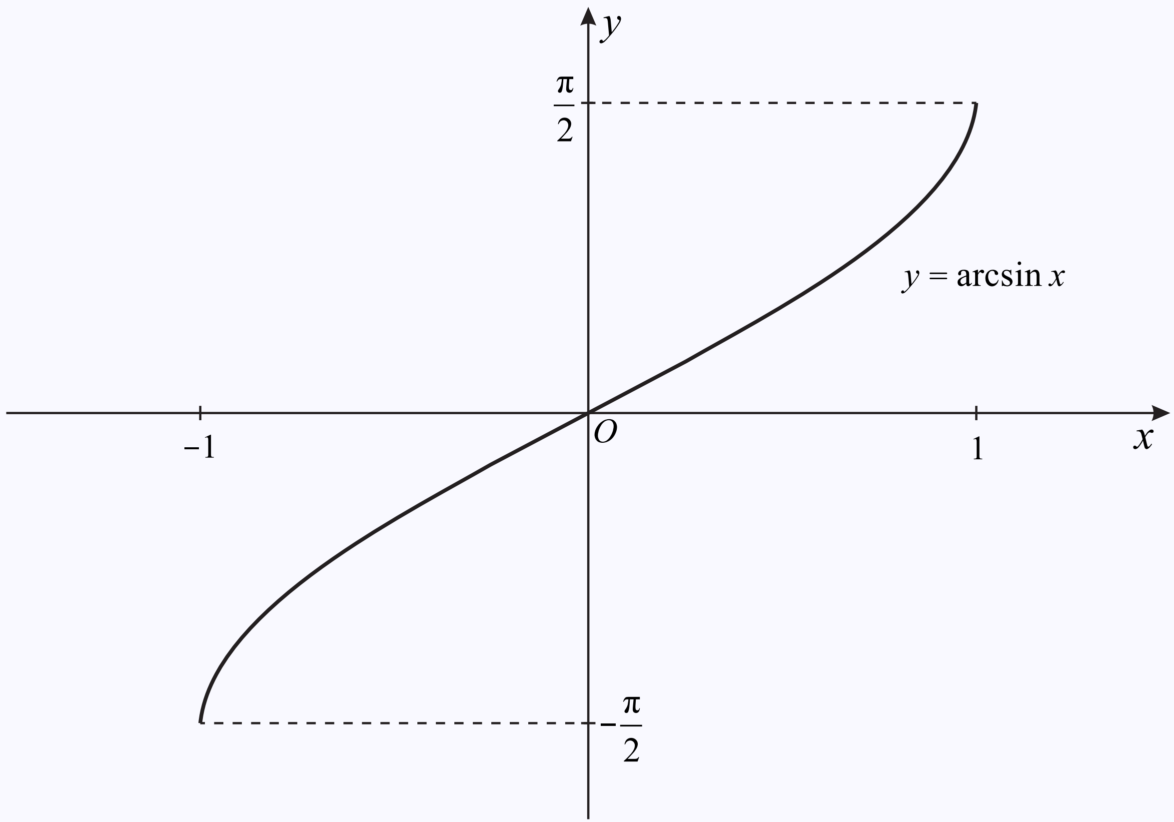
Приложение
Закрыть

Графики основных элементарных функций

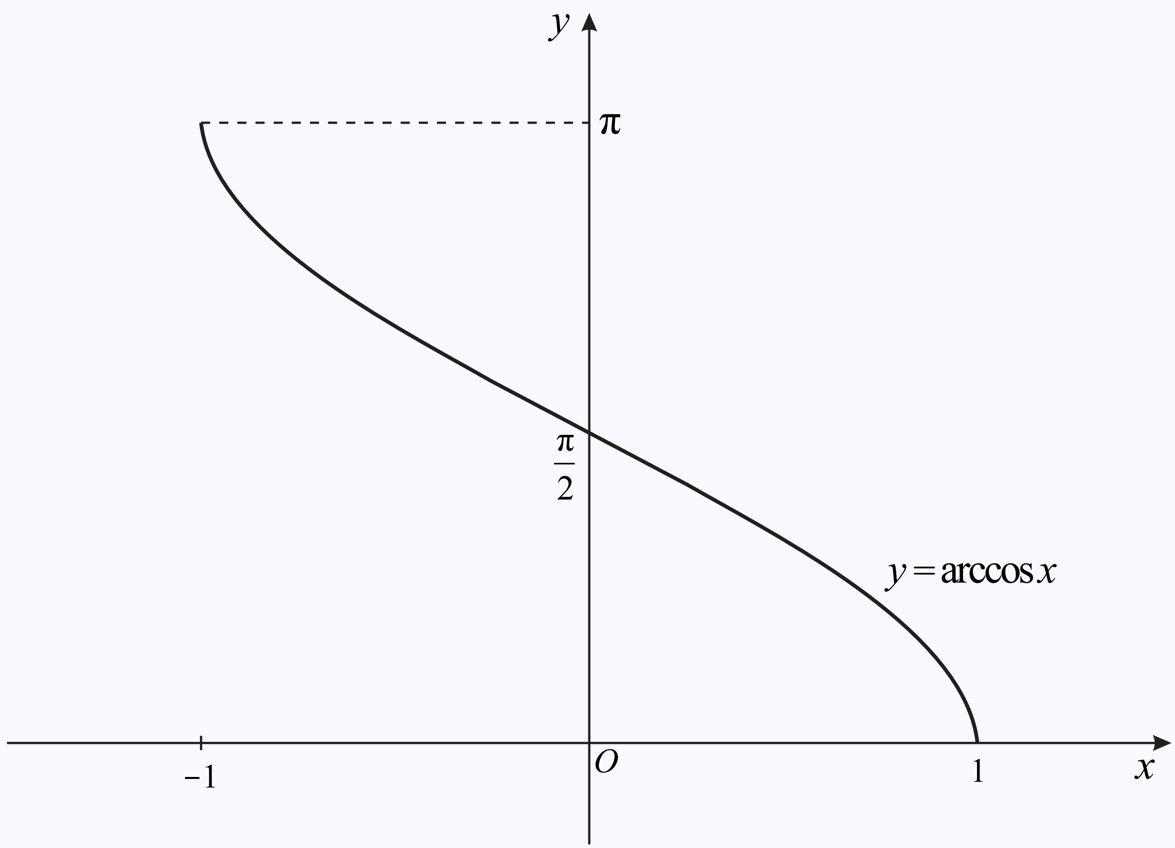
Тригонометрическая функция котангенс



Обратная тригонометрическая функция арксинус

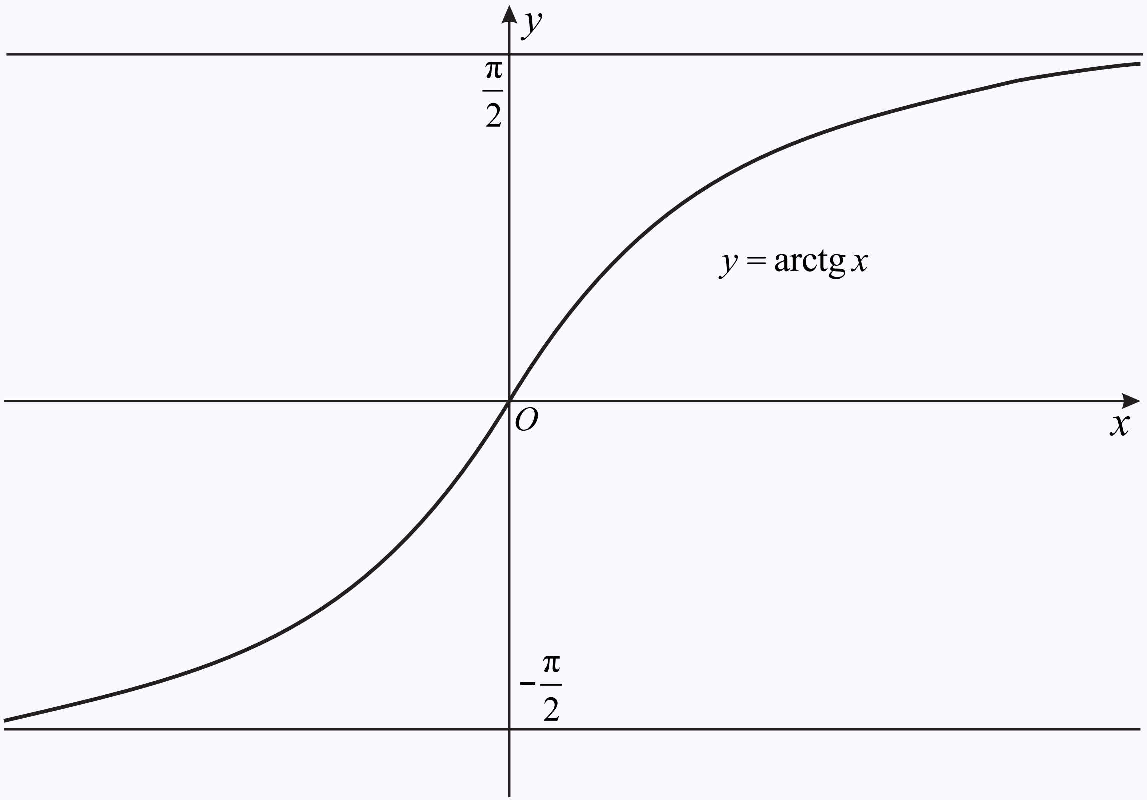


Обратная тригонометрическая функция арккосинус



Графики основных элементарных функций

Обратная тригонометрическая функция арктангенс



Обратная тригонометрическая функция арккотангенс

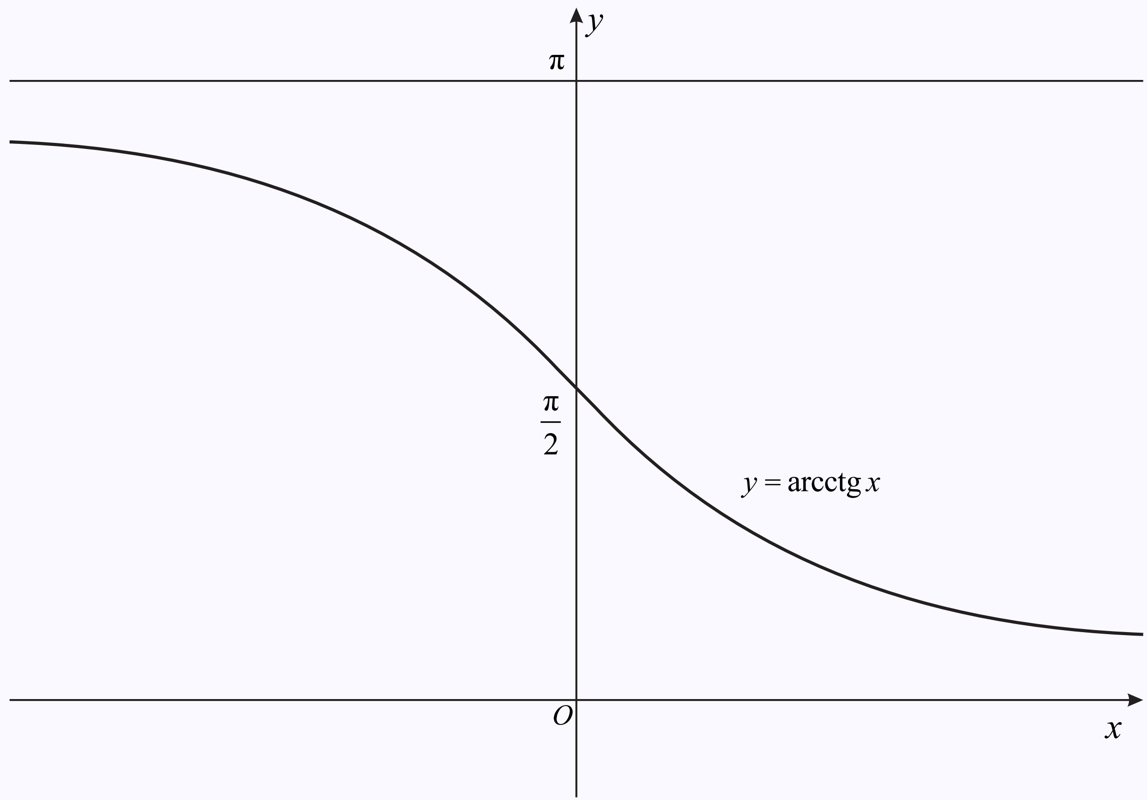


Таблица производных

$C' = 0$, где $C \in \mathbb{R}$.

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$, в частности $(e^x)' = e^x$.

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$(\sin x)' = \cos x$.

$(\cos x)' = -\sin x$.

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 1

1. Решите неравенство: $\left|\frac{3-x}{4+5x}\right| - x < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{\log_{(x-1)} \frac{3x-2}{x+4}} + \frac{3-x}{x^2+4x}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{(-1)^{n-1}\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-4}{2+x} = -\frac{1}{3}$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \sin^2 x$;

   5.2 $f(x) = \cos(3x+2)$.
6. Постройте график функции $y = \frac{3}{2}\sin(2x+3)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-2x}{3x-2}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

   7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 7x}{10x^2}$;

   7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.
8. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $(x \neq -2)$ непрерывна в точке $x = 3$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2+2, & -1 \leqslant x < 1; \\ 2x, & x \geqslant 1 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 2

1. Решите неравенство: $\left|\frac{7x^2-2x+1}{x+3}\right| - 2 < x$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\log_x(3-x)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{n}{n+3}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3-n} = -2$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \cos^2 x$;

   5.2 $f(x) = \sin(4x+2)$.
6. Постройте график функции $y = \frac{4}{5}\cos(3x+1)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

   7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$;

   7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.
8. Докажите, что функция $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leqslant -1; \\ x^2+1, & -1 < x \leqslant 1; \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Вариант 3

1. Решите неравенство: $\left|\frac{x-2}{x^2+2x-3}\right| - 3 < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\log_2(2x+1)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2-n} = -1$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \sin 3x$; 5.2 $f(x) = \operatorname{tg} 4x$.

6. Постройте график функции $y = \frac{5}{3}\cos(4x+1)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; 7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; 7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = (x-2)^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0; \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2; \\ x-3, & x \geqslant 2 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 4

1. Решите неравенство: $\left|\frac{x-5}{x^2+2x-10}\right| - 3 < 0$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \frac{1}{\log_2(3x+5)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{(-1)^{n-1}\left(4 + \frac{1}{2n}\right)\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{2-n} = 1$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x) = \cos 5x$;

   5.2 $f(x) = \sin 2x$.
6. Постройте график функции $y = \frac{2}{3}\sin(5x-2)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$;

   7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

   7.5 $\lim\limits_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.
8. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0; \\ x^2+1, & 0 < x < 1; \\ x, & x \geqslant 1 \end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 5

1. Решите неравенство: $|x-2|-|x-3|<3$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции
$$f(x)=\sqrt{\sin^2 x-0,5}+\frac{1}{\log_3(2x-1)}.$$
3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{2n}{n+4}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{3-n}=1$.
5. Исследуйте функции на периодичность:

   5.1 $f(x)=\sin(4x-1)$; 5.2 $f(x)=\cos^2(3x+1)$.
6. Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\sin(5x-3)$.
7. Вычислите:

   7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; 7.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$;

   7.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; 7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.
8. Докажите, что функция $f(x)=\sqrt[3]{x}+x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция
$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0;\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi;\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$$
непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Вариант 6

1. Решите неравенство: $|4x+5| - x < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\log_x \frac{5x}{2-x}} + \frac{1}{x^2 - 2x + 5}.$$

3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{4 + \frac{2}{n}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10-n^2}{n} = -\infty$.
5. Исследуйте функцию $y = \frac{x^2-10}{x^2-4}$ на ограниченность на интервале $(2, 5)$.
6. Постройте график функции $y = 6\cos(7 - 10x)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin x}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} (2x+1)\left(\ln(x+3) - \ln x\right)$.

8. Докажите, что функция $f(x) = 2x^2 - 1$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0; \\ \cos x, & 0 < x \leqslant \pi; \\ x - 2, & x > \pi \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 7

1. Решите неравенство: $\left|\frac{6x^2-2x+1}{x-1}\right| < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{3x+2}\frac{6x-1}{4-x}} + \frac{1}{x+2}.$$

3. Докажите, что множество действительных чисел вида $\left\{\frac{n}{6-n}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, ограничено. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.
5. Исследуйте функцию $y = 6^{\sin 2x}$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\sin(6x-5)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to\infty} (x-5)\left(\ln(x-3)-\ln x\right)$.

8. Докажите, что функция $f(x) = |x-3|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leqslant -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leqslant 0; \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 8

1. Решите неравенство: $\left|\frac{6-x}{x^2-2x+3}\right| < 2$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \sqrt[5]{\log_{\frac{1}{2}} \frac{7x+5}{x^2-4x}} + \frac{1}{3x-1}.$$

3. Решите уравнение $\sin x - \frac{|2\cos x-1|}{2\cos x-1}\sin^2 x = \sin^2 x$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n (n+1) = 0$.
5. Исследуйте функцию $y = 2^{|\cos 2x|}$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = -6\arcsin(2x+3)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - x + 1$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}; \\ 2, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 9

1. Решите неравенство: $\left|\frac{3x^2-4}{3+2x}\right| - x \leqslant 2$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3 - \log_6(x-2)).$$

3. Решите уравнение $\frac{6}{|x+2|-1} = |x-4|$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-2}{n} = +\infty$.
5. Исследуйте функцию $y = \sin^2 x + \cos x$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = 2 - \arccos(4x-3)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = 4x - x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 0; \\ x^2+1, & 0 < x \leqslant 1; \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 10

1. Решите неравенство: $|x^2 + x - 4| - |x - 3| < 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \frac{1}{4 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{5-x}} + \sqrt{x - 0,5}.$$

3. Решите уравнение $\frac{|4-x|}{x} = 5 + |x|$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-5}{2n-1} = \frac{3}{2}$.
5. Исследуйте функцию $y = \cos^2 x - \sin x$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = x - \sin(3x + 2)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^5+3x}{6x^5-2}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} 5x \operatorname{ctg} 3x$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = 3|x| - x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leqslant 0; \\ -x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 11

1. Решите неравенство: $|4-5x|-|1-x^2| \leqslant x$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \frac{1}{3^x - 3^{-x} + 2} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}.$$

3. Решите уравнение $\frac{|4+x|}{x} = 5 + |x|$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-5}{2n-1} = \frac{3}{2}$.
5. Исследуйте функцию $y = \cos^2 x + \sin x$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = x + \sin(3x+2)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2-5}{3x^2+2x+1}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{4x-10}-\sqrt{6}}{x-4}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = 5|x-3| - x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \leqslant 0; \\ -(x+3)^2, & 0 < x \leqslant 3; \\ \sin x, & x > 3 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 12

1. Решите неравенство: $\frac{|4-x|}{x+2} - |x| \leqslant 1$.
2. Найдите допустимое множество $X \subset \mathbb{R}$, являющееся областью определения функции

$$f(x) = \frac{1}{6^{2x} - 6^x + 27} + \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(4-x)}.$$

3. Решите уравнение $\frac{x}{|3-x|} - |x| = 4$.
4. Докажите, пользуясь определением, что $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.
5. Исследуйте функцию $y = \operatorname{arctg}(x+4)$ на периодичность.
6. Постройте график функции $y = 3x - \cos(x+2)$.
7. Вычислите:

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-5x^5}{4+3x}$;

7.2 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{6+x}{\sqrt{4x}-4}$;

7.3 $\lim\limits_{x\to 1} (4-2x)^{\frac{x}{5x-1}}$;

7.4 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{\sin^2 4x}}$.

8. Докажите, что функция $f(x) = |x-3| - x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
9. Укажите множество точек, в которых функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0; \\ -(4-x)^2, & 0 < x \leqslant 4; \\ |x|, & x > 4 \end{cases}$$

непрерывна, найдите ее точки разрыва, определите их род, постройте график функции.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 1

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = 3x^2 - 4x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

2.1 $y = \left[\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right] e^{-x}$;

2.2 $y = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right)^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{t}}$.
4. Колесо крутится так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Определите угловую скорость ω через 32 с после начала движения.
5. Найдите приближенное значение $\sqrt[3]{64,0081}$, используя понятие дифференциала, а также совершаемые при этом абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\cos x - 1}$;

6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$;

6.3 $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

7. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь располоржен на берегу). Если гонец может идти пешком по 5 км/ч, а на веслах по 4 км/ч, то к какой точке берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

8.1 $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

8.2 $y = x\ln x$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 2

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{x}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$; 2.2 $y = \arccos(\sin^2 x - \cos^2 x)$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$.
4. Два самолета вылетают (не одновременно) из пункта A и летят, один со скоростью 850 км/ч в южном направлении, второй – со скоростью 900 км/ч в северном направлении. С какой скоростью увеличивается расстояние между самолетами во время полета? Какова эта скорость в тот момент, когда расстояние от первого самолета до пункта A равно 75 км, а от второго до пункта A 180 км?
5. Найдите приближенное значение $(5,07)^3$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$; 6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x}$; 6.3 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\sin^{-2} bx}$.

7. Прямо над центром круглой площадки радиусом R надо повесить фонарь. На какой высоте необходимо это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которая ограничивает эту площадку ($I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, φ – угол падения лучей, r – расстояние от источника света до освещенной площадки, k – сила источника света).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$; 8.2 $y = \sin x + \sin 2x$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 3

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sqrt{x}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$;   2.2 $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.
4. Крутится маховое колесо (останавливаемое тормозом), за t секунд поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a, b, c – дополнительные постоянные. Определите угловую скорость и ускорение вращения.
5. Найдите приближенное значение $\log_2 1,9$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;   6.2 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-0,01x}$;   6.3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Картина высотой $1,4$ м повешена на стену так, что ее нижний край на $1,8$ м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (это значит, чтобы угол обзора был наибольшим).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;   8.2 $y = e^{-\frac{1}{x-1}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 4

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \cos 3x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+3}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$;

   2.2 $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = a\cos^3 t$, $\quad y = a\sin^3 t$.
4. Имеется тонкий неоднородный стержень AB длиной 20 см. Известно, что для любой точки C стержня, которая находится от A на расстоянии l см, масса куска стержня вычисляется по формуле $m = 3l^2 + 5l$. Найдите линейную плотность стержня: а) в точке, которая находится от точки A на $l = 5$ см; б) в самой точке A; в) в конце стержня.
5. Найдите приближенное значение $\arcsin 0{,}54$, используя понятие дифференциала, а также совершаемые при этом абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to 0+0} x^3 \ln x$.

7. Капля дождя, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести равномерно испаряясь, так, что уменьшение массы пропорционально времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько минут после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением ветра пренебречь).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x}{x^2-4}$;

   8.2 $y = \frac{\ln x}{x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 5

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{x^2}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$; 2.2 $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.
4. Закон движения задан формулой $S = a + bt + ct^2$. Покажите, что действующая сила постоянная.
5. Найдите приближенное значение $\operatorname{arctg}\sqrt{3,2}$, используя понятие дифференциала, а также совершаемые при этом абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$; 6.2 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; 6.3 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

7. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A; в точке B ($AB = a$) подвешен груз P. Масса единицы длины рычага равна ρ. Какая должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой? (момент уравновешенной силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага).
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$; 8.2 $y = \arcsin\frac{x}{x^2-1}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 6

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \arcsin x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

2.1 $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$; 2.2 $y = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$.
4. Распад радия происходит по закону $R = R_0 e^{-kt}$, где R_0 – количество радия в начальный момент времени $t = 0$, а R – количество радия, который не распался к моменту времени t. Определите закон зависимости скорости распада радия от времени. Покажите, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия.
5. Найдите приближенное значение $\ln \operatorname{tg} 46°$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$; 6.2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$; 6.3 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

7. Три пункта A, B и C расположены не на одной прямой. Угол $\angle ABC = 60°$. Из пункта A выходит автомобиль, а в это время из пункта B – поезд. Автомобиль движется по направлении к B со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени после начала движения расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

8.1 $y = \frac{x^3}{9-x^3}$; 8.2 $y = e^{\frac{1-x^2}{x^4}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 7

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{x^2+2}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; 2.2 $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
4. Постоянный ток определяется как количество электричества, которое протекло через поперечное сечение проводника за единицу времени. Дайте в соответствии с этим определение переменного тока. Определите ток в конце пятой секунды, если известно, что количество электричества, которое протекает через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, задается формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов).
5. Найдите приближенное значение $\lg 10,1$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$; 6.2 $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$; 6.3 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стены каналов прямолинейны. Найдите наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$; 8.2 $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

Вариант 8

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sqrt{4x+1}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \sqrt[3]{\frac{e^{\sin x + \cos x}}{(4x^3+2)^6}}$; 2.2 $y = (x^2+1)^{2x}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = 2\ln \operatorname{ctg} t$, $\quad y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$.
4. Тело кинули вертикально вверх с начальной скоростью a м/с. На какой высоте будет оно через t секунд? Определите скорость движения тела. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте от земли?
5. Найдите приближенное значение $\sin 31^\circ$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$; 6.2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$; 6.3 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. Светящаяся точка находится на линии, соединяющей центры двух не пересекающих друг друга шаров радиусами R и r $(R > r)$, и размешена не внутри этих шаров. При каком размещении точки сумма осветленных частей поверхности шаров будет наибольшей?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$; 8.2 $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Кафедра МАДУП

На весь экран | Начало | Содержание | Назад | ◀ | ▶ | ◀◀ | ▶▶

Приложение | Закрыть

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 9

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

2.1 $y = (x^3 - 2)^2 \sqrt[3]{(x^3+6)^2 e^{\cos^3 x}}$;

2.2 $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a > 0,\ x > 0)$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$x = k\sin t - \sin kt, \quad y = k\cos t + \cos kt.$$

4. С какой скоростью изменяются площадь и диагональ прямоугольника в тот момент, когда одна его сторона $x = 20$ м, а вторая сторона $y = 15$ м, если первая сторона прямоугольника уменьшается со скоростью 1 м/с, а вторая увеличивается со скоростью 2 м/с?
5. Найдите приближенное значение $\operatorname{tg} 44^\circ$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

6.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$;

6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Суточные затраты при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономным?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

8.1 $y = \frac{x^2}{x^2-16}$;

8.2 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 10

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sqrt[3]{x}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = x + x^x + x^{x^x}\ \ (x > 0)$;

   2.2 $y = \ln \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)(x+2)^3}{(x-2)e^{\operatorname{arctg} x}}}$.

3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = t^3 + 3t + 1, \quad y = t^3 - 3t + 1$.
4. С какой скоростью увеличивается площадь круга в тот момент, когда радиус круга $R = 10$ см, если радиус колеса увеличивается равномерно со скоростью 2 см/с?
5. Найдите приближенное значение $2^{2,1}$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\pi x - 1}{2x^2} - \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right]$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. Груз массой P, который лежит горизонтально на шероховатой плоскости, надо сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения равен k?
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{2x^2+4x+2}{2-x}$;

   8.2 $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

Вариант 11

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sin 3x$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right]$; 2.2 $y = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{e^{\arcsin^4 x} + 5}$.
3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически:
$$x = (\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$
4. Резервуар, который имеет форму полусферы с внутренним радиусом R(м), наполняется водой со скоростью Q л в секунду. Определите скорость поднятия уровня воды в резервуаре в тот момент, когда он будет равен $0,5R$.
5. Найдите приближенное значение $\cos 59°$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}-1)}\right)$; 6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x}$; 6.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.
7. Сосуд с вертикальной стеной высотой h стоит на горизонтальной плоскости. Определите положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x – глубина расположения отверстия.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = \frac{1}{x} + 4x^2$; 8.2 $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 12

1. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные следующих функций:

   2.1 $y = \sqrt[x]{(2x\sin x + 1)^2}$;

   2.2 $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1+x^2}$.
3. Найдите вторую производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$.
4. Точка массой m качается вдоль оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = e^{-at}\cos(at + b)$. Найдите скорость движения точки и силу, которая действует на нее.
5. Найдите приближенное значение $e^{2{,}01}$, используя понятие дифференциала, а также абсолютную и относительную погрешности.
6. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите

   6.1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$;

   6.2 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

   6.3 $\lim\limits_{x\to a} \arcsin\frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a)$.
7. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найдите угол α, при котором дальность полета будет наибольшей.
8. Проведите исследование функций и постройте их графики:

   8.1 $y = x^4 - 2x^3 - 1$;

   8.2 $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Предметный указатель

Кафедра МАДУП

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

Указатель обозначений

$\forall$

$\exists$

$\exists!$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

$\in$

$\notin$

$\subset$

$\emptyset$

$\cap$

$\cup$

$\setminus$

Δ

$\overline{\mathbb{R}}$

U_x

$\mathring{U}_x$

C_n^k

$\inf$

$\sup$

$D(f)$

$E(f)$

Γ_f

$[x]$

$\{x\}$

$\circ$

$\lim$

б/м

б/б

$C(X)$

$f|_E$

$\sim$