

Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь
Установа адукацыі «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.С. Пушкіна»

Вучоныя запіскі

Брэсцкага ўніверсітэта

Зборнік навуковых прац

Выпуск 14

*Частка 2
Прыродазнаўчыя навукі*

Брэст • 2018

Заснаваны ў 2005 годзе

Галоўны рэдактар

А.М. Сендзер

Намеснікі галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан (частка 1. Гуманітарныя і грамадскія навукі)

А.Я. Будзько (частка 2. Прыродазнаўчыя навукі)

Рэдакцыйны савет:

В.Е. Гайдук, К.К. Красоўскі, Л.Г. Лысюк, Б.М. Ляпешка, З.П. Мельнікава, А.Ф. Равінскі

Міжнародны савет:

*А.А. Афонін (Расія), В.Р. Бязрогаў (Расія), Ф.Я. Васілюк (Расія), В.А. Главан (Малдова),
Марцін Грабэ (Германія), М.М. Громаў (Расія), В.В. Дзікусар (Расія), Андраш Золтан (Венгрыя),
Антон Мірановіч (Польшча), В.А. Несцяроўскі (Украіна), Ежы Нікітаровіч (Польшча),
Станіслаў Рудальф (Польшча), Б.В. Саліхаў (Расія), В.Р. Самойленка (Украіна),
Фелікс Чыжэўскі (Польшча), Антоні Юўка (Польшча), Эдвард Ярмах (Польшча)*

Рэдакцыйная калегія:

Г.І. Займіст (адказны рэдактар Часткі 1. Гуманітарныя і грамадскія навукі),

Н.С. Ступень (адказны рэдактар Часткі 2. Прыродазнаўчыя навукі),

*У.В. Амелькін, С.В. Арцёменка, М.А. Багдасараў, В.Ф. Байнёў, В.У. Будкевіч, А.М. Вабішчэвіч,
І.Я. Валітава, В.М. Ватыль, П.А. Вадап'янаў, А.М. Вігчанка, А.А. Волчак, Т.А. Гарупа,
А.М. Грыгаровіч, А.А. Гужалоўскі, А.Л. Гулевіч, Т.І. Доўнар, М.П. Жыгар,
Г.А. Зорын, В.І. Іўчанкаў, М.С. Кавалевіч, Т.А. Кавальчук, Ч.С. Кірвель, У.Л. Ключня, П.П. Крусць,
У.У. Лосеў, А.А. Лукашанец, М.І. Ляўчук, В.С. Манахаў, І. П. Мартынаў, А.А. Махнач,
А.В. Мацвееў, У.А. Плецохоў, Я.В. Радына, С.В. Рашэтнікаў, Д.Г. Ротман, В.Ф. Русецкі, А.А. Савіч,
У.С. Секяржыцкі, М.М. Сендзер, У.А. Сенькавец, Я.У. Скакун, А.С. Сляповіч,
В.А. Сцепановіч, В.І. Сянкевіч, Л.Р. Цігарэнка, М.М. Труш, А.В. Чычурын, І.А. Швед,
Я.К. Яловічава, Я.С. Яскевіч*

Адрас рэдакцыі:

224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

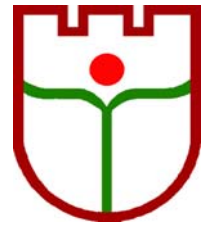
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

ISBN 978-985-555-907-9 (ч. 2)

ISBN 978-985-555-905-5

© УА «БрДУ імя А.С. Пушкіна», 2018

Вучоныя запіскі



Брэсцкага ўніверсітэта

ЗБОРНИК НАВУКОВЫХ ПРАЦ

2018 • Вып. 14 • Ч. 2

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Матысик О.В., Худяков А.П.

Обобщенное тригонометрическое интерполирование эрмитова типа для периодических функций скалярного аргумента.....7

ФІЗІКА

Плетюхов В.А., Кисель В.В., Овсюк Е.М., Войнова Я.А., Веко О.В., Редьков В.М.

Фермион с тремя массовыми параметрами. Общая теория, взаимодействие с внешними полями 16

Секержицкий В.С.

Термодинамическое равновесие в электронно-нейтронно-ядерном замагниченном веществе51

Секержицкий С.С.

Математическое моделирование случайного расположения частиц наполнителя в связующем.....60

ХІМІЯ

Ступень Н.С.

Композиционные магниезильные вяжущие на основе кремнезем содержащих твердых отходов.....66

БІЯЛОГІЯ

Абрамова И.В., Гайдук В.Е.

Синантропизация и урбанизация населения галки (*CORVUS MONEDULA*, *PASSERIFORMES*) в юго-западной Беларуси)75

Ленивко С.М.

О перспективности технологии микрклонального размножения для промышленного розоводства.....82

Матусевич Н.М., Жигар М.П.

Разнообразие структуры коры однолетнего стебля у представителей подсемейства *SPIRAEOIDEAE*89

Шкуратова Н.В.

Морфологические особенности коры некоторых *SALICACEA* в связи с анатомией ритидома 104

НАВУКІ АБ ЗЯМЛІ

Гречаник Н.Ф.

Минеральный состав эоловых аккумуляций на территории юго-западной части Беларуси 112

Залесский И.И., Бровко Г.И.

Реконструкция неоплейстоценовых климатолитов в истоках Припяти 117

Красовский К.К.

Демографический потенциал Беларуси в начале XXI века..... 124

Ремезова Е.А.

К проблеме разработки украинско-белорусского геотуристического бренда «Янтарные пути»..... 134

Ministry of education of Republic of Belarus
Educational establishment «Brest state university
named after A.S. Pushkin»

*Scientific
Proceeding
Of Brest University*

Collection of scientific works

Issue 14

*Part 2
Natural Sciences*

Brest • 2018

Founded 2005

Editor-in-chief

A.N. Sender

Editor-in-chief Deputies

S.A. Marzan (*part 1. The Humanities and Social Sciences*)

A.Ya. Budzko (*part 2. The Natural Sciences*)

Editorial council:

V.E. Gaiduk, K.K. Krasouski, L.G. Lysyuk, B.M. Lyapeshka, Z.P. Melnikava, A.F. Ravinski

International council:

A.A. Afonin (Russia), V.G. Byazrogau (Russia), F.Ya. Vasilyuk (Russia), V.A. Glavan (Moldova),
Martin Grabe (Germany), M.M. Gromau (Russia), V.V. Dzikusar (Russia), Andrash Zoltan (Hungary),
Anton Miranovich (Poland), V.A. Nestsyaruski (Ukraine), Ezhy Nikitarovich (Poland),
Stanislav Rudalf (Poland), B.V. Salikhau (Russia), V.G. Samoilenka (Ukraine),
Felix Chyzhewski (Poland), Antoni Yuvka (Poland), Edvard Yarmokh (Poland)

Editorial board:

G.I. Zaimist (*managerial editor part 1. The Humanities and Social Sciences*),

N.S. Stupen (*managerial editor part 2. The Natural Sciences*),

V.V. Amelkin, S.V. Artsyomenka, M.A. Bagdasarau, V.F. Bainyou, V.U. Budkevich, A.M. Vabishchevich,
I.Ya. Valitava, V.N. Varyl, P.A. Vadapyanau, A.N. Vitchanka, A.A. Volchak, T.A. Garupa,
A.M. Grygarovich, A.A. Guzhalouski, A.L. Gulevich, T.I. Dounar, M.P. Zygar,
G.A. Zoryn, V.I. Iuchankau, M.S. Kavalevich, T.A. Kavalchuk, C.S. Kirvel, U.L. Klyunya, P.P. Krus,
V.V. Loseu, A.A. Lukashanets, M.I. Lyauchuk, V.S. Manakhau, Y.F. Martynau, A.A. Makhnach,
A.V. Matveev, U.A. Pletsyukhou, Y.V. Radyna, S.V. Rashetnikau, D.G. Rotman, V.F. Rusetski, A.A. Savich,
V.S. Sekyazhytski, N.N. Sender, V.A. Senkavets, E.V. Skakun, E.S. Slyapovich,
V.A. Stepanovich, V.I. Senkevich, L.R. Tsitarenka, N.N. Trush, A.V. Chychuryun, I.A. Shved,
Y.K. Yalovichava, Y.S. Yaskevich

Publishing house address:

224016, Brest, Bulvar Kosmonavtov, 21

tel.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

ISBN 978-985-555-907-9 (p. 2)

ISBN 978-985-555-905-5

© EE «BrSU named after A.S. Pushkin», 2018

Scientific Proceeding



of Brest University

COLLECTION OF SCIENTIFIC WORKS

2018 • Issue 14 • Part 2

INDEX

MATHEMATICS

Matysik O.V., Khudyakov A.P.

The Generalized Trigonometric Interpolation of Hermitian Type
for Periodic Functions of the Scalar Argument7

PHYSICS

Pletyukhov V.A., Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Voynova Y.A., Veko O.V., Red'kov V.M.

Fermion with Three Mass Parametersю. General Theory, Interaction with External Fields 16

Sekerzhitsky V.S.

Thermodynamics Balance in Electron-Neutron-Nuclear Magnetized Matter 51

Sekerzhitski S.S.

Mathematical Modeling of Random Arrangement of Filler Particles in a Binder60

CHEMISTRY

Stupen N.S.

Composite Magnesia Binders on the Basis of Silica Containing Solid Waste66

BIOLOGY

Abramova I.V., Gaiduk V.E.

The Synthropisation and the Urbanization of the Eurasian Jackdaw
(*Corvus Monedula* L., Passeriformes) in Southwest of Belarus75

Lenivko S.M.

On the Promise of Microclonal Propagation Technology for Industrial Rosacea82

Matusevich N.M., Zigar M.P.

The Diversity of the Annual Stem Bark Structure
in the Representatives of the Subfamily Spiraeoideae89

Shkuratova N.V.

Morphological Characteristics of Bark Some *Salicacea* in Connection
with the Anatomy Rhytidome 104

SCIENES ON EARTH

Grechanik N.F.

The Mineral Composition Eolian Accumulations of the South-West Part of Territory of Belarus 112

Zalesky I.I., Brovko G.I.

Reconstruction of Neo-Pleistocene Climates in the Area of Pripyat Springhead 117

Krasouski K.K.

Demographic Potential of Belarus in the Beginning of the XXI Century 124

Remezova E.A.

To the Problem of Development of Ukrainian-Belarusian Geotourist Brand «Amber Ways» 134



УДК 519.652+517.548.5

О.В. Матысик¹, А.П. Худяков²

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: priclmath@brsu.brest.by

ОБОБЩЕННОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЭРМИТОВА ТИПА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Работа посвящена исследованию обобщенной интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа. Для периодических скалярных функций одной переменной построены новые интерполяционные тригонометрические многочлены. Для построенной интерполяционной формулы получено явное представление и оценка погрешности.

Введение

Интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для случая функций состоит в построении многочленов, для которых выполнялись бы условия совпадения значений многочлена и его производных некоторых фиксированных порядков во всех или отдельных узлах с соответствующими значениями интерполируемой функции и её производных. Эта задача с пропусками порядков производных, в отличие от задачи Эрмитова типа, не всегда разрешима [1–3].

В более общей постановке интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа условия совпадения в отдельных узлах производных заменяются на условия совпадения заданного дифференциального или некоторого другого вида оператора. В случае алгебраических многочленов интерполяционные формулы такого типа получены в [4; 5].

1. Явный вид интерполяционного многочлена

Пусть имеется совокупность узлов $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2n-1} < t_{2n} < 2\pi$. В этих узлах известны значения 2π -периодической функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_{2n+1}(f; t_j) \equiv L_{2n+1}f(t_j)$, где $L_{2n+1}f(t)$ – дифференциальный оператор вида

$$L_{2n+1}f(t) = (D^2 + n^2) \dots (D^2 + 1^2)Df(t), \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Задача состоит в построении тригонометрического полинома $T_{n+1}(t)$ порядка не выше $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$T_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i = \overline{0, 2n}); \quad L_{2n+1}(T_{n+1}; t_j) = L_{2n+1}(f; t_j). \quad (1)$$

Теорема 1. *Тригонометрический многочлен*

$$T_{n+1}(t) = H_n(t) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\Omega_{n+1}(t)L_{2n+1}(f; t_j)}{\cos \frac{1}{2} \left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right)}, \quad (2)$$



дзе $H_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{l_n(t)}{\sin \frac{1}{2}(t-t_k) l'_n(t_k)} f(t_k)$, $l_n(t) = \sin \frac{1}{2}(t-t_0) \sin \frac{1}{2}(t-t_1) \times \dots \times \sin \frac{1}{2}(t-t_{2n})$,

$\Omega_{n+1}(t) = \cos \frac{1}{2}(t-t_j) l_n(t)$, $\cos \frac{1}{2} \left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right) \neq 0$, ступені не вышэ $n+1$ удзельваюць умовам (1).

Доказательство

Очевидно, что $H_n(t_i) = f(t_i)$ ($i = \overline{0, 2n}$). Так как в произведение $\Omega_{n+1}(t)$ входят множители вида $\sin \frac{1}{2}(t-t_k)$, где $k = 0, 1, \dots, 2n$, то $\Omega_{n+1}(t_i) = 0$ ($i = \overline{0, 2n}$). Таким образом, первая группа условий (1) выполняется.

Многочлен $H_n(t)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше n . И поскольку $L_{2n+1} \cos kt = L_{2n+1} \sin kt = 0$ ($k = \overline{0, n}$), то в силу линейности оператора L_{2n+1} будем иметь $L_{2n+1} H_n(t) = 0$.

Методом полной математической индукции покажем, что имеет место равенство

$$\prod_{k=0, k \neq j}^{2n} \sin \frac{1}{2}(t-t_k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cos \frac{1}{2} \left(2nt - \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} t_i \right) + \tilde{T}_{n-1}(t), \quad (3)$$

где $\tilde{T}_{n-1}(t)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше $n-1$.

Не ограничивая общности рассуждений, для удобства будем считать, что $j=0$. Тогда при $n=1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(t-t_1) \sin \frac{1}{2}(t-t_2) &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{2}(t_2-t_1) - \cos \frac{1}{2}(2t-t_1-t_2) \right) = \\ &= \frac{(-1)^1}{2^{2 \cdot 1 - 1}} \cos \frac{1}{2}(2t-t_1-t_2) + \tilde{T}_0(t). \end{aligned}$$

Предположим, что соотношение (3) верно при $n=m-1$, тогда при $n=m$ получим

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2m} \sin \frac{1}{2}(t-t_k) &= \prod_{k=1}^{2m-2} \sin \frac{1}{2}(t-t_k) \sin \frac{1}{2}(t-t_{2m-1}) \sin \frac{1}{2}(t-t_{2m}) = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \left(\cos \frac{1}{2} \left(2mt - \sum_{i=1}^{2m} t_i \right) + \cos \frac{1}{2} \left(2(m-2)t - \sum_{i=1}^{2m-2} t_i + t_{2m-1} + t_{2m} \right) \right) = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \cos \frac{1}{2} \left(2mt - \sum_{i=1}^{2m} t_i \right) + \tilde{T}_{m-1}(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{T}_{m-1}(t)$ – соответствующий тригонометрический многочлен степени не выше $m-1$.

Таким образом, равенство (3) справедливо для любого натурального n .

Используя соотношение (3), преобразуем далее функцию $\Omega_{n+1}(t)$.



$$\begin{aligned}\Omega_{n+1}(t) &= \frac{1}{2} \sin(t-t_j) \prod_{k=0, k \neq j}^{2n} \sin \frac{1}{2}(t-t_k) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \left(-\sin \frac{1}{2} \left(t_j + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \cos(n+1)t + \cos \frac{1}{2} \left(t_j + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \sin(n+1)t \right) + \tilde{T}_n(t).\end{aligned}$$

Так как $D \cos(n+1)t = -(n+1) \sin(n+1)t$ и при $k = 1, 2, \dots, n$;

$$(D^2 + k^2) \sin(n+1)t = -[(n+1)^2 - k^2] \sin(n+1)t,$$

получаем, что $L_{2n+1} \cos(n+1)t = (-1)^{n+1} (2n+1)! \sin(n+1)t$.

Аналогично показываем, что, поскольку $D \sin(n+1)t = (n+1) \cos(n+1)t$ и $(D^2 + k^2) \cos(n+1)t = -[(n+1)^2 - k^2] \cos(n+1)t$, то $L_{2n+1} \sin(n+1)t = (-1)^n (2n+1)! \cos(n+1)t$.

Кроме того, справедливо равенство $L_{2n+1} \tilde{T}_n(t) = 0$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}L_{2n+1} \Omega_{n+1}(t) &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \left(\sin \frac{1}{2} \left(t_j + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \sin(n+1)t + \right. \\ &\left. + \cos \frac{1}{2} \left(t_j + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \cos(n+1)t \right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \cos \frac{1}{2} \left((2n+2)t - t_j - \sum_{i=0}^{2n} t_i \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Окончательно, при подстановке узла t_j вместо t в формулу (4), с учетом предыдущих формул получим, что и вторая группа равенств (1) справедлива. Теорема 1 доказана.

2. Частные случаи для небольшого числа узлов

Приведем явный вид тригонометрического полинома (2) для $n = 1, 2$.

1. Пусть в узлах $0 = t_0 < t_1 < t_2 < 2\pi$ известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_3(f; t_j)$, где оператор $L_3 f(t) = (D^2 + 1)Df(t) = f'''(t) + f'(t)$.

Тригонометрическим полиномом $T_2(t)$ второй степени, для которого выполнялись бы условия $T_2(t_i) = f(t_i)$ ($i = 0, 1, 2$); $L_3(T_2; t_j) = L_3(f; t_j)$, будет

$$T_2(t) = H_1(t) + \frac{4\Omega_2(t)L_3(f; t_j)}{3 \cos \frac{1}{2}(3t_j - t_0 - t_1 - t_2)},$$

где

$$\begin{aligned}H_1(t) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(t-t_1) \sin \frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin \frac{1}{2}(t_0-t_1) \sin \frac{1}{2}(t_0-t_2)} f(t_0) + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-t_0) \sin \frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin \frac{1}{2}(t_1-t_0) \sin \frac{1}{2}(t_1-t_2)} f(t_1) + \\ &\quad + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-t_0) \sin \frac{1}{2}(t-t_1)}{\sin \frac{1}{2}(t_2-t_0) \sin \frac{1}{2}(t_2-t_1)} f(t_2),\end{aligned}$$



$$\Omega_2(t) = \cos \frac{1}{2}(t - t_j) \sin \frac{1}{2}(t - t_0) \sin \frac{1}{2}(t - t_1) \sin \frac{1}{2}(t - t_2).$$

2. Пусть в узлах $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 2\pi$ известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. А также в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_5(f; t_j)$, имеющего вид

$$L_5 f(t) = (D^2 + 4)(D^2 + 1)Df(t) = f^{(V)}(t) + 5f'''(t) + 4f'(t).$$

Полиномом $T_3(t)$ третьей степени, для которого выполняются условия $T_3(t_i) = f(t_i)$ ($i = \overline{0, 4}$); $L_5(T_3; t_j) = L_5(f; t_j)$, является

$$T_3(t) = H_2(t) + \frac{4\Omega_3(t)L_5(f; t_j)}{15 \cos \frac{1}{2} \left(5t_j - \sum_{k=0}^4 t_k \right)},$$

где $H_2(t) = \sum_{k=0}^4 \frac{l_2(t)}{2 \sin \frac{1}{2}(t - t_k) l_2'(t_k)} f(t_k)$, $l_2(t) = \prod_{k=0}^4 \sin \frac{1}{2}(t - t_k)$, $\Omega_3(t) = \cos \frac{1}{2}(t - t_j) \prod_{k=0}^4 \sin \frac{1}{2}(t - t_k)$.

3. Тригонометрический аналог формулы Тейлора

Введем в рассмотрение тригонометрические многочлены вида:

$$C_n(t) = 2^n (1 - \cos t)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$S_n(t) = 2^{n-1} \sin t (1 - \cos t)^{n-1} = \frac{1}{2n} C_n'(t) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Определим дифференциальный оператор $L_{2n}(f; t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{2n}(f; t) &= (D^2 + (n-1)^2) \dots (D^2 + 2^2)(D^2 + 1^2)D^2 f(t) \equiv \\ &\equiv D(L_{2n-1}(f; t)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

где $D = \frac{d}{dt}$. Причем будем считать, что $L_0(f; t) \equiv f(t)$.

Построим тригонометрический аналог формулы Тейлора.

Теорема 2. Если функция $f(t)$ имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ ($r \geq 1$), то справедлив тригонометрический аналог формулы Тейлора вида

$$f(t) = T_n(t) + R_{n+1}(t), \tag{5}$$

где при $r = 2n + 1$

$$\begin{aligned} T_n(t) &= f(a) + \frac{S_1(t-a)}{1!} L_1(f; a) + \frac{C_1(t-a)}{2!} L_2(f; a) + \\ &+ \dots + \frac{S_n(t-a)}{(2n-1)!} L_{2n-1}(f; a) + \frac{C_n(t-a)}{(2n)!} L_{2n}(f; a); \end{aligned}$$



$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^t C_n(t-s) L_{2n+1}(f; s) ds,$$

а пры $r = 2n$

$$T_n(t) = f(a) + \frac{S_1(t-a)}{1!} L_1(f; a) + \frac{C_1(t-a)}{2!} L_2(f; a) + \dots + \frac{S_n(t-a)}{(2n-1)!} L_{2n-1}(f; a);$$

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{(2n-1)!} \int_a^t \left[S_n(t-s) L_{2n}(f; s) + \frac{n}{2} C_n(t-s) L_{2n-1}(f; s) \right] ds.$$

Доказательство

Докажем формулу методом математической индукции. При $r = 1$ имеем

$$f(t) = T_0(t) + R_1(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds = f(t).$$

Далее, при $r = 2$ имеем

$$f(t) = T_1(t) + R_2(t) = f(a) + \sin(t-a)f'(a) + \int_a^t [\sin(t-s)f''(s) + (1 - \cos(t-s))f'(s)] ds. \quad (6)$$

Вычислив по частям интеграл в (6), будем иметь

$$\int_a^t [\sin(t-s)f''(s) + (1 - \cos(t-s))f'(s)] ds = -\sin(t-a)f'(a) + f(t) - f(a).$$

Подставляя данное выражение в (6), получим верное тождество. Таким образом, при $r = 2$ формула (5) справедлива.

Пусть формула (5) верна для $r = m \geq 1$. Рассмотрим два случая: $m = 2k + 1$ и $m = 2k$.

1) $m = 2k + 1$. Тогда по предположению справедлива формула:

$$f(t) = f(a) + \frac{S_1(t-a)}{1!} L_1(f; a) + \frac{C_1(t-a)}{2!} L_2(f; a) + \dots + \frac{S_k(t-a)}{(2k-1)!} L_{2k-1}(f; a) + \frac{C_k(t-a)}{(2k)!} L_{2k}(f; a) + \frac{1}{(2k)!} \int_a^t C_k(t-s) L_{2k+1}(f; s) ds. \quad (7)$$

Докажем справедливость формулы (5) для $r = m + 1 = 2k + 2$. Разобьем интеграл в (7) на два

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2k)!} \int_a^t C_k(t-s) L_{2k+1}(f; s) ds = \\ & = \frac{1}{(2k)!} \int_a^t 2^k (1 - \cos(t-s))^k \left[\frac{k+1}{2k+1} \cos(t-s) + \frac{k}{2k+1} \right] L_{2k+1}(f; s) ds + \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{(2k)!} \int_a^t 2^k (1 - \cos(t-s))^k \left[\frac{k+1}{2k+1} (1 - \cos(t-s)) \right] L_{2k+1}(f; s) ds,$$

а затем проинтегрируем первый из них по частям. Обозначим

$$u = L_{2k+1}(f; s); \quad dv = 2^k (1 - \cos(t-s))^k \left[\frac{k+1}{2k+1} \cos(t-s) + \frac{k}{2k+1} \right] ds.$$

Продифференцировав по s левую и правую части выражения

$$\begin{aligned} \int 2^k (1 - \cos(t-s))^k \left[\frac{k+1}{2k+1} \cos(t-s) + \frac{k}{2k+1} \right] ds = \\ = -\frac{2^k \sin(t-s) (1 - \cos(t-s))^k}{2k+1} + c_k, \quad c_k = \text{const}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

можно показать, что оно является тождеством. Тогда

$$du = L_{2k+2}(f; s) ds; \quad v = -\frac{2^k \sin(t-s) (1 - \cos(t-s))^k}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2k)!} \int_a^t C_k(t-s) L_{2k+1}(f; s) ds = \frac{S_{k+1}(t-a)}{(2k+1)!} L_{2k+1}(f; a) + \\ + \frac{1}{(2k+1)!} \int_a^t \left(S_{k+1}(t-s) L_{2k+2}(f; s) + \frac{k+1}{2} C_{k+1}(t-s) L_{2k+1}(f; s) \right) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует равенство (5) при $r = 2k + 2$.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $m = 2k$. Тогда также по предположению будет справедлива формула:

$$\begin{aligned} f(t) = f(a) + \frac{S_1(t-a)}{1!} L_1(f; a) + \frac{C_1(t-a)}{2!} L_2(f; a) + \dots + \frac{S_k(t-a)}{(2k-1)!} L_{2k-1}(f; a) + \\ + \frac{1}{(2k-1)!} \int_a^t \left[S_k(t-s) L_{2k}(f; s) + \frac{k}{2} C_k(t-s) L_{2k-1}(f; s) \right] ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Докажем справедливость формулы (5) для $r = m + 1 = 2k + 1$. Аналогично, разобьем интеграл в (9) на два

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2k-1)!} \int_a^t \left[S_k(t-s) L_{2k}(f; s) + \frac{k}{2} C_k(t-s) L_{2k-1}(f; s) \right] ds = \\ = \frac{1}{(2k-1)!} \int_a^t 2^{k-1} \sin(t-s) (1 - \cos(t-s))^{k-1} L_{2k}(f; s) ds + \\ + \frac{1}{(2k-1)!} \int_a^t 2^{k-1} k (1 - \cos(t-s))^k L_{2k-1}(f; s) ds, \end{aligned}$$



а затем проинтегрируем первый из них по частям. Имеем

$$u = L_{2k}(f; s); \quad dv = 2^{k-1} \sin(t-s)(1 - \cos(t-s))^{k-1} ds;$$

$$du = DL_{2k}(f; s)ds; \quad v = -\frac{2^{k-1}}{k}(1 - \cos(t-s))^k.$$

Тогда

$$\frac{1}{(2k-1)!} \int_a^t \left[S_k(t-s)L_{2k}(f; s) + \frac{k}{2} C_k(t-s)L_{2k-1}(f; s) \right] ds = \frac{1}{(2k)!} C_k(t-a) \times$$

$$\times L_{2k}(f; a) + \frac{1}{(2k)!} \int_a^t \left[C_k(t-s)DL_{2k}(f; s) + k^2 C_k(t-s)L_{2k-1}(f; s) \right] ds =$$

$$= \frac{1}{(2k)!} C_k(t-a)L_{2k}(f; a) + \frac{1}{(2k)!} \int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f; s) ds. \quad (10)$$

Аналогично, объединяя (9) и (10), получим равенство (5) при $r = 2k + 1$. Таким образом, формула (5) верна для $r = m + 1$. Следовательно, по методу математической индукции она справедлива для любого $r \in \mathbb{N}$. Теорема 2 доказана.

Отметим, что другие виды формулы Тейлора рассмотрены в [6–8].

4. Оценка погрешности интерполяционного многочлена

Многочлен $H_n(t)$ из теоремы 1 можно представить в виде

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} f(t_k) \omega_{nk}(t), \quad (11)$$

где $\omega_{nk}(t)$ ($k = \overline{0, 2n}$) – фундаментальные полиномы тригонометрического интерполирования: $\omega_{nk}(t) = \frac{l_n(t)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-t_k)l'_n(t_k)}$, где $l_n(t)$ – тригонометрический многочлен, оп-

ределенный в теореме 2.1.

Построим представление остаточного члена для формулы (2).

Теорема 3. Если $f(t)$ имеет на $[0, 2\pi]$ абсолютно непрерывную производную порядка $2n$, то остаточный член формулы (2) имеет вид

$$f(t) - T_{n+1}(t) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^{2\pi} \left[K_n(t-s) - \sum_{k=0}^{2n} K_n(t_k - s) \omega_{nk}(t) \right] L_{2n+1}(f; s) ds -$$

$$- \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\Omega_{n+1}(t) L_{2n+1}(f; t_j)}{\cos \frac{1}{2} \left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right)}, \quad (12)$$

$$\text{где } K_n(u) = \begin{cases} 2^n (1 - \cos u)^n, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$



Доказательство

По формуле (5) для $r = 2n + 1$ и $a = 0$ имеем

$$f(t) = P_{2n}(t) + R_{2n+1}(t) = f(0) + \frac{S_1(t)}{1!} L_1(f; 0) + \frac{C_1(t)}{2!} L_2(f; 0) + \\ + \dots + \frac{S_n(t)}{(2n-1)!} L_{2n-1}(f; 0) + \frac{C_n(t)}{(2n)!} L_{2n}(f; 0) + \frac{1}{(2n)!} \int_0^t C_n(t-s) L_{2n+1}(f; s) ds.$$

В силу того, что функции $S_k(t)$ и $C_k(t)$ являются тригонометрическими многочленами степени k ($k = \overline{1, n}$), соответственно, по синусам и косинусам будем иметь

$$f(t) = \tilde{T}_n(t) + \frac{1}{(2n)!} \int_0^{2\pi} K_n(t-s) L_{2n+1}(f; s) ds = \tilde{T}_n(t) + R_{2n+1}(t), \quad (13)$$

где $\tilde{T}_n(t)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше n .

Подставив (13) в (11), получим $H_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \tilde{T}_n(t_k) \omega_{nk}(t) + \sum_{k=0}^{2n} R_{2n+1}(t_k) \omega_{nk}(t)$.

Как известно [6], формула (11) инвариантна относительно тригонометрических многочленов степени не выше n , поэтому будем иметь $H_n(t) = \tilde{T}_n(t) + \sum_{k=0}^{2n} R_{2n+1}(t_k) \omega_{nk}(t)$.

Откуда

$$f(t) - H_n(t) = R_{2n+1}(t) - \sum_{k=0}^{2n} R_{2n+1}(t_k) \omega_{nk}(t). \quad (14)$$

Подставив в (14) интегральное представление для $R_{2n+1}(t)$, получим равенство

$$f(t) - H_n(t) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^{2\pi} \left[K_n(t-s) - \sum_{k=0}^{2n} K_n(t_k-s) \omega_{nk}(t) \right] L_{2n+1}(f; s) ds. \quad (15)$$

Из (15) и (2) окончательно получим представление остаточного члена для формулы (2) в виде (12). Теорема 3 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$B_k^{(n)} = \left| \sin \frac{t_k - t_0}{2} \dots \sin \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \sin \frac{t_k - t_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{t_k - t_{2n}}{2} \right|, \quad (k = \overline{0, 2n}); \\ B_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{B_k^{(n)}}, \quad C_{n+1} = \frac{|L_{2n+1}(f; t_j)|}{\left| \cos \frac{1}{2} \left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right) \right|}, \quad M_{2n+1} = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |L_{2n+1}(f; \theta)|.$$

Теорема 4. Оценка погрешности формулы (2) имеет вид:

$$|f(t) - T_{n+1}(t)| \leq \frac{2^{2n+1}}{(2n)!} \left[\pi(1 + B_n) M_{2n+1} + \frac{C_{n+1}}{2n+1} \right].$$



Доказательство

С учетом обозначений будут справедливы следующие неравенства

$$|K_n(u)| \leq 2^{2n}, \quad u \in \mathbb{R}; \quad |\omega_{nk}(t)| \leq \frac{1}{B_k^{(n)}}, \quad |\Omega_{n+1}(t)| \leq 1, \quad t \in [0; 2\pi). \quad (16)$$

Из (12) и (16) следует

$$\begin{aligned} |f(t) - T_{n+1}(t)| &\leq \frac{2\pi}{(2n)!} \left(2^{2n} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{2n}}{B_k^{(n)}} \right) M_{2n+1} + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} C_{n+1} = \\ &= \frac{2^{2n+1}}{(2n)!} \left[\pi(1 + B_n) M_{2n+1} + \frac{C_{n+1}}{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков, Н. П. Линейные аппроксимации функционалов / Н. П. Жидков. – М. : МГУ, 1977. – 262 с.
2. Ибрагимов, И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И. И. Ибрагимов. – М. : Наука, 1971. – 518 с.
3. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах / А. Х. Турецкий. – Минск : Выш. шк., 1968. – 320 с.
4. Янович, Л. А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.
5. Янович, Л. А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Актуальные проблемы современного анализа : сб. науч. тр. / Гродн. гос. ун-т им. Я. Купалы ; отв. ред. Ю. М. Вувуникян. – Гродно, 2009. – С. 198–215.
6. Хаусхолдер, А. С. Основы численного анализа / А. С. Хаусхолдер ; под ред. Л. А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.
7. Гуло, И. Н. Квадратурные формулы для стохастических интегралов от неслучайных периодических функций. / И. Н. Гуло, Л. А. Янович // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 3. – С. 14–19.
8. Литвин, О. М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О. М. Литвин, В. Л. Рвачов. – Київ : Наук. думка, 1973. – 122 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.06.2018

Matysik O.V., Khudyakov A.P. The Generalized Trigonometric Interpolation of Hermitian Type for Periodic Functions of the Scalar Argument

The paper is devoted to the study of the generalized interpolation Hermite – Birkhoff problem. For periodic scalar functions of one variable, new interpolation trigonometric polynomials are constructed. For the constructed interpolation formula, an explicit representation and an error estimate are obtained.



УДК 539.12:530.145

**В.А. Плетюхов¹, В.В. Кисель², Е.М. Овсиюк³
Я.А. Войнова⁴, О.В. Веко⁵, В.М. Редьков⁶**

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
³канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики

Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

⁴учитель физики Качищанской средней школы Ельского района

⁵учитель физики гимназии г. Калинковичи

⁶д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник лаборатории теоретической физики
Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: otf@brsu.brest.by

ФЕРМИОН С ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

В рамках подхода Гельфанда – Яглома получено новое 20-компонентное релятивистское волновое уравнение для фермиона со спином $\frac{1}{2}$ и тремя массовыми параметрами. Из компонент волновой функции строятся три вспомогательных биспинора, которые в отсутствие внешнего поля удовлетворяют трем независимым диракоподобным уравнениям с различными массами M_1, M_2, M_3 . Выполнено обобщение на случай псевдоримановой структуры пространства-времени, показано, что в этом случае возникает дополнительное зацепление трех биспинорных компонент через скалярную кривизну Риччи. Теория допускает переход к случаю электрически нейтральных частиц, т.е. возможно существование майрановских фермионов с тремя массовыми состояниями.

1. Уравнение для фермиона с тремя массовыми параметрами, формализм Гельфанда – Яглома

Имея в виду существование нейтрино с различными массами, исследуем в рамках теории релятивистских волновых уравнений возможность описания частицы со спином $\frac{1}{2}$ и тремя массовыми параметрами. При этом в качестве исходного будем использовать подход Гельфанда – Яглома [1; 2]. Для построения уравнения для фермиона с тремя массовыми параметрами будем исходить из следующего набора зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца

$$T = (0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})' \oplus (\frac{1}{2}, 0)' \oplus (1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1), \quad (1.1)$$

или (нумеруем отдельные представления цифрами от 1 до 6)

$$T = 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6, \quad (1.2)$$

где введены обозначения

$$1 = (0, \frac{1}{2}), \quad 2 = (\frac{1}{2}, 0), \quad 3 = (0, \frac{1}{2})', \quad 4 = (\frac{1}{2}, 0)', \quad 6 = (1, \frac{1}{2}), \quad 5 = (\frac{1}{2}, 1). \quad (1.3)$$

Соответствующая схема зацеплений имеет вид

$$\begin{array}{c} 1-2 \\ | \quad | \\ 5-6 \\ | \quad | \\ 3-4. \end{array} \quad (1.4)$$



Базисные вектора пространства определим в виде (см. детали общего формализма в кн. [2])

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow (\mathcal{E}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^1, \mathcal{E}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^1, \mathcal{E}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2, \mathcal{E}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2), (\mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^3, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^3, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^4, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^4), (\mathcal{E}_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}}^6, \mathcal{E}_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}}^6);$$

$$s = \frac{3}{2} \Rightarrow (\mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^6, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^6), (\mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^6, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^6). \quad (1.5)$$

Матрица Γ_4 при этом представима в виде

$$L_4 = \begin{vmatrix} L_4^{(1/2)} & 0 \\ 0 & L_4^{(3/2)} \end{vmatrix}, \quad (1.6)$$

где блоки $L_4^{(1/2)}$ и $L_4^{(3/2)}$ имеют следующую структуру:

$$L_4^{(1/2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{35}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{35}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{64}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{64}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{1/2} \\ c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (1.7)$$

$$L_4^{(3/2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Из требования Р-инвариантности модели получаем ограничения

$$c_{56}^{3/2} = c_{65}^{3/2}, \quad (1.9)$$

тогда блок $L_4^{(3/2)}$ записывается короче

$$L_4^{(3/2)} = \begin{vmatrix} c_{65}^{3/2} \gamma_4 & 0 \\ 0 & c_{65}^{3/2} \gamma_4 \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$



Исключаем из модели присутствие спина $3/2$, это дает ограничения

$$c_{56}^{3/2} = c_{65}^{3/2} = 0 \Rightarrow L_4^{(3/2)} = 0; \quad (1.11)$$

таким образом, блок $L_4^{(3/2)}$ является нулевым.

Рассматриваем блок $L_4^{(1/2)}$. В нем помимо ограничений на $c_{56}^{1/2}$ из требования P-инвариантности уравнения имеем и другие ограничения:

$$\begin{aligned} c_{12}^{1/2} = c_{21}^{1/2}, \quad c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \quad c_{15}^{1/2} = c_{26}^{1/2}, \\ c_{35}^{1/2} = c_{46}^{1/2}, \quad c_{62}^{1/2} = c_{51}^{1/2}, \quad c_{64}^{1/2} = c_{53}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Условие существования лагранжевой формулировки теории приводит к вещественности параметров $c_{12}^{1/2}, c_{34}^{1/2}$ и к условиям

$$c_{62}^{1/2} = \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} (c_{15}^{1/2})^*, \quad c_{64}^{1/2} = \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{34}^{1/2}} (c_{35}^{1/2})^*. \quad (1.13)$$

Введем обозначения:

$$c_{12}^{1/2} = c_1, \quad c_{34}^{1/2} = c_2, \quad c_{15}^{1/2} = c_3, \quad c_{35}^{1/2} = c_4, \quad \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} = f, \quad \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{34}^{1/2}} = g, \quad (1.14)$$

где c_1, c_2 – вещественные, c_3, c_4 – комплексные, а $f, g \in \{-1, +1\}$. С учетом этого спиновый блок $L_4^{(1/2)}$ представляется в виде

$$L_4^{(1/2)} = \begin{vmatrix} c_1 \gamma_4 & 0 & c_1 \gamma_4 \\ 0 & c_2 \gamma_4 & c_4 \gamma_4 \\ f c_3^* \gamma_4 & g c_4^* \gamma_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f c_3^* & g c_4^* & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_4 = \beta^{(1/2)} \otimes \gamma_4, \quad (1.15)$$

где

$$\beta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f c_3^* & g c_4^* & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

В аналогичной форме представима и матрица билинейной формы:

$$\eta = \begin{vmatrix} \eta^{(1/2)} & 0 \\ 0 & \eta^{(3/2)} \end{vmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\eta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} \eta_{12}^{(1/2)} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{34}^{(1/2)} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{56}^{(1/2)} \end{vmatrix} \otimes \gamma_4, \quad (1.18)$$

$$\eta^{(3/2)} = \eta_{56}^{(3/2)} I_2 \otimes \gamma_4, \quad \eta_{56}^{(3/2)} = -\eta_{56}^{(1/2)}; \quad (1.19)$$

не уменьшая общности, можно считать, что

$$\eta_{ij}^{(1/2)} = \pm 1.$$

Найдем явный вид характеристического уравнения для матрицы $\beta^{(1/2)}$:

$$\begin{vmatrix} c_1 - \lambda & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 - \lambda & c_4 \\ f c_3^* & g c_4^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \lambda^3 - \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda[c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2] + (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) = 0. \quad (1.20)$$



Определим спинорный вариант записи системы спинорных уравнений для рассматриваемого случая. Для решения данной задачи необходимо определить оператор перехода от представления функции ψ в модифицированном базисе Гельфанда – Яглома к ее спинорному представлению и наоборот.

Решение этой задачи проведем поэтапно: сначала определим операторы переходов от представления функции ψ в модифицированном базисе Гельфанда – Яглома к ее каноническому представлению, а затем от канонического представления к спинорному. Функцию ψ в указанных представлениях определим соответственно следующим образом:

$$\psi_{G.-Y.} = \begin{pmatrix} \psi_{1/2,1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,3/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,-3/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,3/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{3/2,-3/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{3/2,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,1/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{3/2,-1/2}^{(1/2,1)} \end{pmatrix}, \psi_{canon.} = \begin{pmatrix} \psi_{0,1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{0,-1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,0}^{(1/2,0)} \\ \psi_{-1/2,0}^{(1/2,0)} \\ \psi_{0,1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{0,-1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,0}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{-1/2,0}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{1,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{0,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{-1,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{0,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{-1,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,1}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,0}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,-1}^{(1/2,1)} \\ \psi_{-1/2,1}^{(1/2,1)} \\ \psi_{-1/2,0}^{(1/2,1)} \\ \psi_{-1/2,-1}^{(1/2,1)} \end{pmatrix}, \psi_{spinor} = \begin{pmatrix} \psi^i \\ \psi^{\dot{2}} \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi^{i\dot{1}} \\ \psi^{r\dot{2}} \\ \psi'^1 \\ \psi'^2 \\ \psi_{(11)}^i \\ \psi_{(12)}^i \\ \psi_{(22)}^i \\ \psi_{(11)}^{\dot{2}} \\ \psi_{(12)}^{\dot{2}} \\ \psi_{(22)}^{\dot{2}} \\ \psi_1^{(i\dot{1})} \\ \psi_1^{(i\dot{2})} \\ \psi_1^{(\dot{2}\dot{2})} \\ \psi_2^{(i\dot{1})} \\ \psi_2^{(i\dot{2})} \\ \psi_2^{(\dot{2}\dot{2})} \end{pmatrix},$$

Представление Гельфанда – Яглома для функции ψ может быть определено согласно формуле

$$\psi_{s,m}^r = \sum_{l_3, l'_3} C_{ll'_3 l_3}^{s,m} \psi_{l_3 l'_3}^{(l,l')},$$

где s, m – фиксированы, $l_3 + l'_3 = m$, а каноническое и спинорное – согласно формуле

$$\psi_{l_3 l'_3}^{(l,l')} = \left\{ \frac{(2l)!}{(l+l_3)!(l-l_3)!} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{(2l')!}{(l'+l'_3)!(l'-l'_3)!} \right\}^{1/2} \psi_{(1\dots i\dot{1}\dot{2}\dots\dot{2})}^{(i\dots i\dot{2}\dots\dot{2})},$$

где число индексов типа: $\dot{1}$ равно $l' + l'_3$; $\dot{2}$ равно $l' - l'_3$; 1 равно $l + l_3$; 2 равно $l - l_3$.

В результате получаем

$$\psi_{canon.} = A\psi_{spinor},$$



0	0	c_1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	c_1	0	0	0	0	0	0
c_1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$
0	c_1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	c_2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	c_2	0	0
0	0	0	0	c_2	0	0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$
0	0	0	0	0	c_2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}}$	0	0	0	$-\frac{gc_4^*}{\sqrt{6}}$	0	0	0
0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^*$	0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^*$	0	0
0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^*$	0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^*$	0	0	0
0	0	0	$\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}}$	0	0	0	$\frac{gc_4^*}{\sqrt{6}}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}}$	0	0	0	0	$\frac{gc_4^*}{\sqrt{6}}$	0	0	0	0
0	$\sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^*$	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^*$	0	0	0	0
$-\sqrt{\frac{2}{3}}fc_3^*$	0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}gc_4^*$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}}$	0	0	0	$-\frac{gc_4^*}{\sqrt{6}}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$	0	0
0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$	0
0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_3$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$	0	0
0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$	0
0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_4$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Полученный результат представим в ином виде, более удобном при переходе к системе спинорных уравнений первого порядка в координатном представлении. Определим функцию ψ в виде

$$\psi_{spinor} = \begin{pmatrix} \psi^{\dot{R}} \\ \psi_R \\ \psi'^{\dot{R}} \\ \psi'_R \\ \psi_{(AB)}^{\dot{R}} \\ \psi_R^{(\dot{A}\dot{B})} \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$L_4^{(spinor)} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \sigma^{4\dot{a}R} & 0 \\ c_1 \sigma_{a\dot{R}}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \sigma_{a\dot{R}}^4 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} f c_3^* \{ \sigma_b^{4\dot{a}} \delta_c^R + \sigma_c^{4\dot{a}} \delta_b^R \} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} f c_3^* \{ \sigma_a^{4\dot{b}} \delta_R^{\dot{c}} + \sigma_a^{4\dot{c}} \delta_R^{\dot{b}} \} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(AB)}^{(\dot{a}\dot{c})} \sigma_{\dot{c}}^{4R} \\ 0 & c_3 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(ac)}^{(AB)} \sigma_R^{4c} & 0 \\ c_2 \sigma^{4\dot{a}R} & 0 & c_4 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(AB)}^{(\dot{a}\dot{c})} \sigma_{\dot{c}}^{4R} \\ 0 & c_3 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(ac)}^{(AB)} \sigma_R^{4c} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} g c_4^* \{ \sigma_b^{4\dot{a}} \delta_c^R + \sigma_c^{4\dot{a}} \delta_b^R \} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\delta_B^A, \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}$ – спинорные символы Кронекера, равные 1 при $A=B, \dot{A}=\dot{B}$ и 0 при $A \neq B, \dot{A} \neq \dot{B}$;

$$\delta_{(cd)}^{(ab)} = \frac{1}{2} (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b), \quad \delta_{(\dot{c}\dot{d})}^{(\dot{a}\dot{b})} = \frac{1}{2} (\delta_{\dot{c}}^{\dot{a}} \delta_{\dot{d}}^{\dot{b}} + \delta_{\dot{d}}^{\dot{a}} \delta_{\dot{c}}^{\dot{b}}); \quad \sigma_{\dot{a}\dot{b}}^4 = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}.$$

В аналогичном виде задаются и другие матрицы исследуемого уравнения. При этом σ^4 следует заменить на σ^μ , причем



$$\sigma_{ab}^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_{ab}^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_{ab}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Соответственно, система спинорных уравнений в рассматриваемом случае имеет вид ($\partial_{ab} = \frac{1}{i} \partial_\mu \sigma_{ab}^\mu$)

$$c_1 \partial^{ab} \Psi_b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_3 \partial_b^c \Psi_c^{(ab)} + M \Psi^a = 0, \quad (1.21)$$

$$c_1 \partial_{ab} \Psi^b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_3 \partial_c^b \Psi_{(ab)}^c + M \Psi_a = 0, \quad (1.22)$$

$$c_2 \partial^{ab} \Psi'_b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_4 \partial_b^c \Psi_c^{(ab)} + M \Psi'^a = 0, \quad (1.23)$$

$$c_2 \partial_{ab} \Psi'^b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_4 \partial_c^b \Psi_{(ab)}^c + M \Psi'_a = 0, \quad (1.24)$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \Psi^c + \partial_b^c \Psi^a) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \Psi'^c + \partial_b^c \Psi'^a) + M \Psi_b^{(ac)} = 0, \quad (1.25)$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \Psi_c + \partial_c^b \Psi_a) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \Psi'_c + \partial_c^b \Psi'_a) + M \Psi_{(ac)}^b = 0. \quad (1.26)$$

Определим спин-тензорный вариант записи системы (1.21)–(1.26). Для этого зададим входящие в (1.21–1.26) спиноры формулами

$$\begin{aligned} \Psi^a &= \sigma^{\mu ab} \Psi_{\mu b}, & \Psi_a &= \sigma_{ab}^\mu \Psi_\mu^b, & \Psi'^a &= \Psi_0^a, & \Psi'_a &= \Psi_{0a}, \\ \Psi_{(bc)}^a &= \frac{1}{2} (\sigma_b^{\mu a} \Psi_{\mu c} + \sigma_c^{\mu a} \Psi_{\mu b}), & \Psi_a^{(bc)} &= \frac{1}{2} (\sigma_a^{\mu b} \Psi_\mu^c + \sigma_a^{\mu c} \Psi_\mu^b). \end{aligned} \quad (1.27)$$

При этом уравнение (1.21) принимает вид

$$c_1 \partial^{ab} \sigma_{bc}^\mu \Psi_\mu^c + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \partial_b^c (\sigma_c^{\mu a} \Psi_\mu^b + \sigma_c^{\mu b} \Psi_\mu^a) + M \sigma^{\mu ab} \Psi_{\mu b} = 0,$$

или

$$c_1 \partial^{ab} \sigma_{bc}^\mu \Psi_\mu^c + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-\sigma^{\mu ac} \partial_{cb} \Psi_\mu^b + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu^a) + M \sigma^{\mu ab} \Psi_{\mu b} = 0. \quad (1.28)$$

В случае уравнения (1.22) имеем

$$c_1 \partial_{ab} \sigma^{\mu bc} \Psi_{\mu c} + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \partial_c^b (\sigma_a^{\mu c} \Psi_{\mu b} + \sigma_b^{\mu c} \Psi_{\mu a}) + M \sigma_{ab}^\mu \Psi_\mu^b = 0,$$

или

$$c_1 \partial_{ab} \sigma^{\mu bc} \Psi_{\mu c} + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-\sigma_a^{\mu c} \partial^{cb} \Psi_{\mu b} + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_{\mu a}) + M \sigma_{ab}^\mu \Psi_\mu^b = 0. \quad (1.29)$$

Уравнения (1.28) и (1.29) объединяем в одно

$$ic_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-i\gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu) + iM(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$



или

$$c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-\gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu - 2(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0, \quad (1.30)$$

где

$$\gamma_\mu = \frac{1}{i} \begin{vmatrix} 0 & \sigma^{\mu ab} \\ \sigma_{ab}^\mu & 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_\mu = \begin{vmatrix} \Psi_\mu^a \\ \Psi_{\mu a} \end{vmatrix}.$$

Из уравнений (1.23), (1.24) аналогичным образом получаем

$$c_2 \partial^{ab} \Psi_{0b} + \frac{c_4}{\sqrt{6}} \partial_b^c (\sigma_c^{\mu a} \Psi_\mu^b + \sigma_c^{\mu b} \Psi_\mu^a) + M \Psi_0^a = 0,$$

или

$$c_2 \partial^{ab} \Psi_{0b} + \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-\sigma^{\mu ac} \partial_{cb} \Psi_\mu^b + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu^a) + M \Psi_0^a = 0. \quad (1.31)$$

И аналогично

$$c_2 \partial_{ab} \Psi_0^b + \frac{c_4}{\sqrt{6}} \partial_c^b (\sigma_a^{\mu c} \Psi_{\mu b} + \sigma_b^{\mu c} \Psi_{\mu a}) + M \Psi_{0a} = 0,$$

или

$$c_2 \partial_{ab} \Psi_0^b + \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-\sigma_{ac}^\mu \partial^{cb} \Psi_{\mu b} + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_{\mu a}) + M \Psi_{0a} = 0. \quad (1.32)$$

При объединении (1.31), (1.32) приходим к следующему уравнению:

$$c_2 \hat{\partial} \Psi_0 + \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-i \gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} c_2 \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{c_4}{\sqrt{6}} (\gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu + 2(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M \Psi_0 &= 0; \\ c_2 \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M \Psi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Обратимся к уравнению (1.25). Его можно переписать в виде

$$-\frac{f c_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \sigma^{\mu ck} \Psi_{\mu k} + \partial_b^c \sigma^{\mu ak} \Psi_{\mu k}) - \frac{g c_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \Psi_0^c + \partial_b^c \Psi_0^a) + M \frac{1}{2} (\sigma_b^{\mu a} \Psi_\mu^c + \sigma_b^{\mu c} \Psi_\mu^a) = 0. \quad (1.34)$$

Подействуем на уравнение (1.34) оператором $\sigma_a^{\lambda b}$. В результате находим

$$-\frac{f c_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma_a^{\lambda b} \partial_b^a \sigma^{\mu ck} \Psi_{\mu k} + \sigma_a^{\lambda b} \partial_b^c \sigma^{\mu ak} \Psi_{\mu k}) - \frac{g c_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma_a^{\lambda b} \partial_b^a \Psi_0^c + \sigma_a^{\lambda b} \partial_b^c \Psi_0^a) +$$



$$+M \frac{1}{2} (\sigma_a^{\lambda b} \sigma_b^{\mu \dot{a}} \Psi_\mu^{\dot{c}} + \sigma_a^{\lambda b} \sigma_b^{\mu \dot{c}} \Psi_\mu^{\dot{a}}) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma^{\lambda \dot{a} b} \partial_{b \dot{a}} \sigma^{\mu \dot{c} k} \Psi_{\mu k} + \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \sigma^{\mu \dot{a} k} \Psi_{\mu k}) + \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma^{\lambda \dot{a} b} \partial_{b \dot{a}} \Psi_0^{\dot{c}} + \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_0^{\dot{a}}) - \\ & - \frac{M}{2} (\sigma^{\lambda \dot{a} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\mu} \Psi_\mu^{\dot{c}} + \sigma^{\mu \dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_\mu^{\dot{a}}) = 0, \\ & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \sigma^{\mu \dot{c} k} \Psi_{\mu k} - \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \sigma^{\mu \dot{a} k} \Psi_{\mu k} \right) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \Psi_0^{\dot{c}} - \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_0^{\dot{a}} \right) + \\ & + \frac{M}{2} (2\Psi_\lambda^{\dot{c}} - \sigma^{\mu \dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_\mu^{\dot{a}}) = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Из уравнения (1.26) следует, что

$$- \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k + \partial_c^b \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \Psi_{0c} + \partial_c^b \Psi_{0a}) + \frac{M}{2} (\sigma_a^{\mu b} \Psi_{\mu c} + \sigma_c^{\mu b} \Psi_{\mu a}) = 0. \quad (1.36)$$

Подействовав на уравнение (1.36) оператором $\sigma_b^{\lambda a}$, получаем

$$\begin{aligned} & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k + \sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \partial_c^b \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \partial_c^b \Psi_{0c} + \sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \partial_c^b \Psi_{0a}) + \\ & + \frac{M}{2} (\sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \sigma_a^{\mu b} \Psi_{\mu c} + \sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \sigma_c^{\mu b} \Psi_{\mu a}) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma_{ab}^{\lambda} \partial^{ba} \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k + \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k) + \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma^{\lambda ba} \partial_{ab} \Psi_{0c} + \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{0a}) - \\ & - \frac{M}{2} (\sigma^{\lambda ba} \sigma_{ab}^{\mu} \Psi_{\mu c} + \sigma_{cb}^{\mu} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{\mu a}) = 0, \\ & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k - \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k \right) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \Psi_{0c} - \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{0a} \right) + \\ & + \frac{M}{2} (2\Psi_{\lambda c} - \sigma_{cb}^{\mu} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{\mu a}) = 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Объединения (1.36) и (1.37), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (2\partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \hat{\partial} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu)) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \Psi_0 - i \hat{\partial} \gamma_\lambda \Psi_0 \right) + \\ & + \frac{M}{2} (2\Psi_\lambda + \gamma_\mu \gamma_\lambda \Psi_\mu) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & - \frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu)) + \\ & + i \frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} \Psi_0) + M (\Psi_\lambda - \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu)) = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$



Таким образом, искомая система спин-тензорных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0, \\c_2 \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{4c_4}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + (\partial_\mu \Psi_\mu)\right) + M \Psi_0 &= 0, \\-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu)) + \\+ i \frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} \Psi_0) + M(\Psi_\lambda - \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu)) &= 0.\end{aligned}\quad (1.39)$$

Система уравнений может быть представлена в несколько иной форме. Подействуем на первое уравнение системы (1.39) оператором $\frac{1}{4} \gamma_\lambda$. Получаем

$$\frac{1}{4} c_1 \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \gamma_\lambda (\partial_\mu \Psi_\mu)\right) + \frac{M}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \quad (1.40)$$

Суммируя вновь полученное уравнение с третьим уравнением (1.39), приходим к тому, что

$$\begin{aligned}-\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu)) + i \frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} \Psi_0) + \\ \frac{1}{4} c_1 \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\gamma_\lambda (\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu)) + M \Psi_\lambda &= 0.\end{aligned}$$

Данное уравнение совместно со вторым уравнением системы (1.39) и образует систему, эквивалентную (1.39) (обозначим её, не выписывая, (1.41)).

$$c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$

2. Дальнейший анализ спин-тензорных уравнений

Проведем дополнительные исследования системы уравнений (1.78). Поскольку вектор-биспинор Ψ_μ определяется через биспиноры Ψ_0 , $(\gamma_\mu \Psi_\mu)$, $(\partial_\mu \Psi_\mu)$ (см. второе уравнение в (1.41)), то попытаемся сформулировать систему уравнений первого порядка исключительно относительно указанных биспиноров $(\gamma_\mu \Psi_\mu)$, Ψ_0 , $(\partial_\mu \Psi_\mu)$.

Действуя на второе уравнение системы (1.41) оператором ∂_λ , находим

$$\begin{aligned}-f \frac{\sqrt{6}}{4} c_3^* \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + ig \frac{\sqrt{6}}{4} c_4^* \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + \frac{1}{4} c_1 \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{4\sqrt{6}} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) &= 0.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Из первого уравнения системы (1.41) следует

$$c_1 \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu)) + M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$



$$c_1 \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu).$$

С учетом этого уравнение (2.1) представимо в виде

$$-f \frac{\sqrt{6}}{4} c_3^* \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + ig \frac{\sqrt{6}}{4} c_4^* \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + M(\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \quad (2.2)$$

В свою очередь, из уравнения (1.40) получаем

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu),$$

или

$$\partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \frac{1}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} \left\{ \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right\}. \quad (2.3)$$

Используя (2.3), уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{f|c_3|^2}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{fc_3^*}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} + ig \frac{\sqrt{6}}{4} c_4^* \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + \\ & + M(\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из первого уравнения системы (1.41) получаем уравнение

$$c_2 \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + i \frac{c_4}{\sqrt{6}} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \hat{\partial} \left\{ i \frac{4}{\sqrt{6}} c_4 (\partial_\mu \Psi_\mu) - M \Psi_0 \right\},$$

которое с учетом (2.3) переписывается так:

$$c_2 \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + i \frac{c_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} \left\{ \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right\} = \hat{\partial} \left\{ i \frac{4}{\sqrt{6}} c_4 (\partial_\mu \Psi_\mu) - M \Psi_0 \right\};$$

отсюда следует:

$$\partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 = \frac{i}{c_2} \left\{ -\frac{2}{3} \frac{c_3 c_4}{c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}} + \frac{4c_4}{\sqrt{6}} \right\} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + i \frac{M}{c_2 \sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0.$$

С учетом последнего равенства уравнение (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - igM \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 + \\ & + \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \left\{ \sqrt{6} fc_2 c_3^* - g|c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \right\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является одним из требуемых уравнений первого порядка относительно указанного выше набора биспинорных функций. Для получения еще одного уравнения необходимо из уравнения (2.5) выразить величину $(\partial_\mu \Psi_\mu)$ и подставить результат в первое из уравнений системы (1.41). В результате получаем



$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналагічным образом может быть получено третье из уравнений первого порядка относительно биспинорных функций

$$\begin{aligned} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Итак, система уравнений первого порядка относительно биспинорных функций $\gamma_\mu \Psi_\mu$, Ψ_0 , $\partial_\mu \Psi_\mu$, определяющих вектор-биспинор Ψ_λ , задается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left\{ c_1 c_2 (c_1 + c_3/\sqrt{6}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2 \right\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - \frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - \\ & - i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определим характеристическое уравнение для матрицы, составленной из коэффициентов при операторе $\hat{\partial}$ в системе уравнений (2.8–2.10). Оно имеет вид равенства нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} - \lambda & -i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} & -\frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \lambda & -i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\} & -i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} & -\frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} - \lambda \end{vmatrix}.$$



Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} - \lambda \right\} \left\{ \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \lambda \right\} \left\{ -\frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} - \lambda \right\} + \\ & + \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 \} (-i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2}) (-\frac{4 c_3}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})}) + \\ & + (-i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2}) (-i \frac{4 c_4}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})}) \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \} + \\ & + \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \} \left\{ \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \lambda \right\} \frac{4 c_3}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} - \\ & - i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 \} \left\{ \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} + \lambda \right\} - \\ & - i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} i \frac{4 c_4}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \left\{ \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} - \lambda \right\} = \\ & = -\lambda^3 + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} + \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \right\} - \\ & - \lambda \left\{ \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] \cdot [c_2^2 + g |c_4|^2] - \right. \\ & - \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] \cdot [f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2] - \\ & - \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} (c_2^2 + g |c_4|^2)(f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) \left. \right\} - \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] \cdot \\ & \cdot (c_2^2 + g |c_4|^2)(f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) - \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{g c_3 |c_4|^2}{\sqrt{6}} (\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2)(f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) - \\ & - \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{g c_3 |c_4|^2}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})) - \\ & - \lambda \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{c_3}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})) + \\ & + \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{c_3}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}))(c_2^2 + g |c_4|^2) + \\ & + \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot g |c_4|^2 (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] - \\ & - \lambda \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \cdot g |c_4|^2 (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) + \\ & + \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot g |c_4|^2 \frac{c_3}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\lambda \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \cdot g |c_4|^2 \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2) = \\
 & = -\lambda^3 + \lambda^2(c_1 + c_2) - \lambda(c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2) - (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет относительно простой вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda(c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2) + (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) = 0, \quad (2.11)$$

это уравнение совпадает (как и следовало ожидать) с характеристическим уравнением матрицы $\beta^{(1/2)}$. Это означает, что матрица (вводим сокращенные обозначения для ее элементов) системы уравнений (2.8–2.10)

$$\begin{vmatrix}
 \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} & -i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} & -\frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\
 \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} & -i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\
 \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\} & -i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} & -\frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})}
 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}
 A_1 & B_1 & R_1 \\
 A_2 & B_2 & R_2 \\
 A_3 & B_3 & R_3
 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

может быть приведена к диагональному виду. Соответственно, система (2.8–2.10) примет вид трех независимых диракоподобных уравнений с массами

$$M_1 = \frac{M}{\lambda_1}, \quad M_2 = \frac{M}{\lambda_2}, \quad M_3 = \frac{M}{\lambda_3}. \quad (2.13)$$

Осуществим подобный переход в соответствии с преобразованием

$$(\hat{K} - M)\Psi = 0, \quad \Psi' = S\Psi, \quad S\hat{K}S^{-1} = \hat{K}' = \begin{vmatrix}
 \lambda_1 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_2 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_3
 \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Матрицу преобразования S ищем в виде

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 r_1 & r_2 & r_3
 \end{vmatrix},$$

она удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 r_1 & r_2 & r_3
 \end{vmatrix} \begin{vmatrix}
 A_1 & B_1 & R_1 \\
 A_2 & B_2 & R_2 \\
 A_3 & B_3 & R_3
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 \lambda_1 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_2 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_3
 \end{vmatrix} \begin{vmatrix}
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 r_1 & r_2 & r_3
 \end{vmatrix}.$$



Откуда получаем три системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= \lambda_1 a_1, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 &= \lambda_1 a_2, \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 &= \lambda_1 a_3; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 &= \lambda_2 b_1, \\ b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 &= \lambda_2 b_2, \\ b_1 R_1 + b_2 R_2 + b_3 R_3 &= \lambda_2 b_3; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 &= \lambda_3 r_1, \\ r_1 B_1 + r_2 B_2 + r_3 B_3 &= \lambda_3 r_2, \\ r_1 R_1 + r_2 R_2 + r_3 R_3 &= \lambda_3 r_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Используя явный вид величин R_i (см. (2.12)), из третьего уравнения системы (2.15) будем иметь

$$a_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{\lambda_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]} (a_1 c_3 + ia_2 c_4). \quad (2.18)$$

При учете соотношения (2.18) из второго уравнения системы (2.15) получаем

$$a_2 = a_1 \frac{-igc_3 c_4^* (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \lambda_1}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}, \quad (2.19)$$

$$a_3 = -a_1 \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c_3 (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}. \quad (2.20)$$

При определении постоянных a_2, a_3 в форме (2.19), (2.20) первое из уравнений (2.15) выполняется автоматически, поскольку сводится к соотношению

$$c_2^2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2 \{ \lambda_1^3 - \lambda_1^2 (c_1 + c_2) + \lambda_1 (c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2) + (fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2) \} = 0, \quad (2.21)$$

где λ_1 – решение характеристического уравнения (2.11).

Действуя в той же последовательности, из системы уравнений (2.16) получаем

$$b_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{\lambda_2 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]} (b_1 c_3 + ib_2 c_4), \quad (2.22)$$

$$b_2 = b_1 \frac{-igc_3 c_4^* (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \lambda_2}{\lambda_2 c_2 (\lambda_2 - c_2) + (\lambda_2 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}, \quad (2.23)$$

$$b_3 = -b_1 \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c_3 (\lambda_2 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{\lambda_2 c_2 (\lambda_2 - c_2) + (\lambda_2 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}. \quad (2.24)$$

При этом первое уравнение системы (2.16) сводится к равенству



$$c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2 \{ \lambda_2^3 - \lambda_2^2(c_1 + c_2) + \lambda_2(c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2) + (fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2) \} = 0, \quad (2.25)$$

которое выполняется, т.к. λ_2 – решение характеристического уравнения (2.11).

Подобный результат получается и при решении системы алгебраических уравнений (2.17):

$$r_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{\lambda_3c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2]} (r_1c_3 + ir_2c_4), \quad (2.26)$$

$$r_2 = r_1 \frac{-igc_3c_4^*(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\lambda_3}{\lambda_3c_2(\lambda_3 - c_2) + (\lambda_3 - c_2)[fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2] - \lambda_3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})g|c_4|^2}, \quad (2.27)$$

$$r_3 = -r_1 \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c_3(\lambda_3 - c_2)[fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2]}{\lambda_3c_2(\lambda_3 - c_2) + (\lambda_3 - c_2)[fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2] - \lambda_3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})g|c_4|^2}, \quad (2.28)$$

$$c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2 \{ \lambda_3^3 - \lambda_3^2(c_1 + c_2) + \lambda_3(c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2) + (fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2) \} = 0. \quad (2.29)$$

3. О решениях характеристического уравнения

Запишем характеристическое уравнение (2.11) в краткой форме

$$\lambda^3 + \lambda^2a + \lambda b + c = 0, \quad (3.1)$$

где

$$a = -(c_1 + c_2), \quad b = c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2, \quad c = fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2. \quad (3.2)$$

Выполнив стандартную замену переменной, преобразуем уравнение (3.1) к более простому виду

$$y^3 + py + q = 0, \quad y = \lambda - \frac{c_1 + c_3}{3} = \lambda + \frac{a}{3}, \quad (3.3)$$

$$p = -\frac{a^3}{3} + b = -\frac{1}{3}(c_1 + c_3)^3 + c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2, \quad (3.4)$$

$$q = 2(\frac{a}{3})^3 - \frac{ab}{3} + c = -\frac{2}{27}c_1 + c_3^3 + \frac{c_1 + c_2}{3} \{ c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2 \} + \{ f|c_3|^2 + g|c_4|^2 \}. \quad (3.5)$$

По физическим соображениям требуем вещественность всех трех корней уравнения (3.3). Это возможно при выполнении неравенств

$$p < 0, \quad Q < 0, \quad \text{где } Q = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2. \quad (3.6)$$

Решения уравнения (3.3) могут быть представлены в тригонометрической форме

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}),$$

$$y_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}), \quad \cos \alpha = \frac{-q/2}{\sqrt{-(\frac{p}{3})^3}}, \quad (3.7)$$



что дает для исходных физически интерпретируемых корней следующие выражения:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= y_1 + \frac{c_1 + c_2}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} + \frac{c_1 + c_2}{3} >, \\ \lambda_2 &= y_2 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{c_1 + c_2}{3}, \\ \lambda_3 &= y_3 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{c_1 + c_2}{3}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Нетрудно получить следующие равенства (учитываем требование вещественности корней):

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= c_1 + c_2, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -fc_2|c_3|^2 - gc_1|c_4|^2, \\ p &= \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0, \\ q &= \frac{1}{6}\left\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\right\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \cos \frac{\alpha}{3} &= \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

В первую очередь интерес представляет случай трех положительных корней, при этом соотношения (3.9) дают

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2,3} &> 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2 > 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -fc_2|c_3|^2 - gc_1|c_4|^2 > 0, \\ p &= \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0, \\ q &= \frac{1}{6}\left\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\right\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \cos \frac{\alpha}{3} &= \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}.\end{aligned}\quad (3.10)$$



Очевидно, что случаю трех положительных корней может соответствовать только вариант

$$f = -1, \quad g = -1. \quad (3.11)$$

При этом соотношения (3.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2,3} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2 > 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2|c_3|^2 - 2|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = c_1c_2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +c_2|c_3|^2 + c_1|c_4|^2 > 0, \\ p = \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0, \\ q = \frac{1}{6}\left\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\right\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \cos \frac{\alpha}{3} = \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Введем обозначения

$$|c_4|^2 = a^2, \quad |c_3|^2 = b^2 \quad (3.13)$$

и проанализируем два из приведенных выше соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3};$$

отсюда находим выражения для корней λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}}, \\ \lambda_2 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где под корнем должно стоять положительно число. Замечаем, что поскольку

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3 > 0,$$

то должно выполняться неравенство

$$0 < \lambda_3 < c_1 + c_2;$$

отсюда следует возможность тригонометрической параметризации значений для λ :

$$\lambda_3 = (c_1 + c_2) \cos \alpha, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.15)$$



Соответственно, формулы (3.12) переписываются так:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (c_1 + c_2) \left\{ \frac{1 - \cos \alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3} \frac{1}{\cos \alpha}} \right\}, \\ \lambda_2 &= (c_1 + c_2) \left\{ \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3} \frac{1}{\cos \alpha}} \right\}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Имеет смысл ввести обозначение

$$\Gamma = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3}.\quad (3.17)$$

Тогда можно получить выражения для корней λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha} \right\}\quad (3.18)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha} \right\};\quad (3.19)$$

а также

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}.\quad (3.20)$$

Учтем, что под корнем должно стоять положительное число, т.е.

$$\cos \alpha \sin^4(\alpha/2) > \Gamma.\quad (3.21)$$

Отсюда получаем выражения для трех возможных масс

$$M_3 = \frac{M}{\lambda_3} = \frac{M}{(c_1 + c_2) \cos \alpha} = \mu \cdot \frac{1}{\cos \alpha},\quad (3.22)$$

$$M_2 = \frac{M}{\lambda_2} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}\quad (3.23)$$

$$M_1 = \frac{M}{\lambda_1} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}\quad (3.24)$$

Отмечаем, что корни задавались тремя параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < \dots (c_1 + c_2), \cos \alpha, \Gamma$; три массы также задаются с помощью следующих трех параметров

$$M_1, M_2, M_3 < \dots \mu, \cos \alpha, \Gamma.$$

Заметим, что если

$$a \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma \rightarrow 0,$$

$$M_3 = \frac{\mu}{\cos \alpha}, \quad M_2 \rightarrow \infty, \quad M_1 = \frac{\mu}{1 - \cos^2 \alpha}.\quad (3.25)$$

При этом значения $\alpha = 0, \pi/2$ также особые, поскольку приводят к еще одной бесконечной массе.



Проанализируем неравенство $\cos \alpha \sin^4(\alpha/2) > \Gamma$, которое равносильно задаче

$$f(\alpha) = \cos \alpha \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2}{4} > \Gamma.$$
$$f(\alpha = 0) = 0, \quad f(\alpha = \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Можно ввести переменную $x = \cos \alpha$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{4} x(1 - x^2)^2 > \Gamma, \quad x \in (0, 1);$$

внутри интервала $x \in (0, 1)$ есть точка локального максимума α_0 :

$$\frac{df}{dx} = \frac{(1 - x^2)(1 - 5x^2)}{4}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad f(\alpha_0) = \frac{4}{25\sqrt{5}}.$$

Таким образом, при каждом $\Gamma < \Gamma_0 = \frac{4}{25\sqrt{5}}$ неравенство $f(\alpha) > \Gamma$ имеет решением непустой интервал, содержащий внутри себя точку α_0 .

Случай

$$\Gamma_0 = \frac{4}{25\sqrt{5}}$$

является особым, поскольку при этом интервал значений для параметра α стягивается в одну точку $\alpha = \alpha_0$ и имеем ситуацию, когда две массы равны друг другу:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (c_1 + c_2) \frac{1 - \cos \alpha_0}{2}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$M_3 = \frac{\mu}{\cos \alpha_0} = \mu\sqrt{5}, \quad (3.26)$$

$$M_{1,2} = \frac{\mu}{(1 - \cos \alpha_0)/2} = \mu \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}. \quad (3.27)$$

4. Диагонализация системы уравнений для свободной частицы, дополнительный анализ

Для упрощения дальнейших расчетов будем использовать обозначения

$$A_1 = \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2) \right],$$
$$A_2 = \frac{i}{\sqrt{6}} \frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g |c_4|^2 \right],$$
$$A_3 = \frac{M}{4} \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) \right]; \quad (4.1)$$



$$B_1 = -ig \frac{c_3 c_4^*}{c_2}, \quad B_2 = \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2}, \quad B_3 = -igM \frac{\sqrt{6} c_4^*}{4 c_2}; \quad (4.2)$$

$$R_1 = -\frac{4 c_3}{M \sqrt{6}} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}, \quad R_2 = -\frac{4i c_4}{M \sqrt{6}} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})},$$
$$R_3 = -\frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}. \quad (4.3)$$

Корень λ_1 исследуемого характеристического уравнения, определяющий массовый параметр M_1 , входит в следующую систему (см. предыдущий раздел):

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= \lambda_1 a_1, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 &= \lambda_1 a_2, \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 &= \lambda_1 a_3; \end{aligned} \quad (4.4)$$

решение системы (4.4) имеет вид

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{-igc_3 c_4^* (c_1 + c_3/\sqrt{6}) \lambda_1}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) (c_1 + c_3/\sqrt{6}) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + c_3/\sqrt{6}) g |c_4|^2},$$
$$a_3 = a_1 \cdot \frac{-4}{\sqrt{6} M} \times$$
$$\times \frac{c_3 (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) (c_1 + c_3/\sqrt{6}) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + c_3/\sqrt{6}) g |c_4|^2}. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4–4.5) в первое уравнение системы (4.4), приходим к характеристическому уравнению с корнем $\lambda = \lambda_1$.

С применением обозначений (4.1–4.3) полученная выше система уравнений для трех биспиноров

$$\Psi_0, \quad \gamma_\mu \Psi_\mu, \quad \partial_\mu \Psi_\mu \quad (4.6)$$

запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_1 \hat{\partial} \Psi_0 + R_1 \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M (\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0, \\ A_2 \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_2 \hat{\partial} \Psi_0 + R_2 \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 &= 0, \\ A_3 \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_3 \hat{\partial} \Psi_0 + R_3 \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M (\partial_\mu \Psi_\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти уравнения можно преобразовать в три уравнения для отдельных биспиноров. Для этого сначала суммируем эти три уравнения с коэффициентами a_1, a_2, a_3 соответственно:

$$\begin{aligned} (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3) \hat{\partial} \Psi_0 + \\ + (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3) \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M \{a_1 (\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2 \Psi_0 + a_3 (\partial_\mu \Psi_\mu)\} &= 0, \end{aligned}$$



с учетом (4.4) последнее уравнение можно переписать так:

$$\lambda_1 a_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \lambda_1 a_2 \hat{\partial} \Psi_0 + \lambda_1 a_3 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \{a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2 \Psi_0 + a_3(\partial_\mu \Psi_\mu)\} = 0.$$

Введем биспинор

$$\Phi_1 = a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2 \Psi_0 + a_3(\partial_\mu \Psi_\mu), \quad (4.8)$$

тогда предыдущее уравнение принимает дираковский вид

$$\left(\hat{\partial} + \frac{M}{\lambda_1}\right)\Phi_1 = 0, \quad M_1 = M/\lambda_1. \quad (4.9)$$

Собственное значение λ_2 , определяющее второй массовый параметр M_2 , входит в систему уравнений

$$\begin{aligned} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 &= \lambda_2 b_1, \\ b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 &= \lambda_2 b_2, \\ b_1 R_1 + b_2 R_2 + b_3 R_3 &= \lambda_2 b_3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обратимся снова к уравнениям для трех биспиноров

$$\begin{aligned} A_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_1 \hat{\partial} \Psi_0 + R_1 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0, \\ A_2 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_2 \hat{\partial} \Psi_0 + R_2 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 &= 0, \\ A_3 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_3 \hat{\partial} \Psi_0 + R_3 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) &= 0, \end{aligned}$$

из которых для биспинора

$$\Phi_2 = b_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + b_2 \Psi_0 + b_3(\partial_\mu \Psi_\mu) \quad (4.11)$$

находим уравнение дираковского вида с массой M_2 :

$$\left(\hat{\partial} + \frac{M}{\lambda_2}\right)\Phi_2 = 0, \quad M_2 = M/\lambda_2. \quad (4.12)$$

Наконец, обращаемся к уравнениям, в которые входит корень λ_3 :

$$\begin{aligned} r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 &= \lambda_3 r_1, \\ r_1 B_1 + r_2 B_2 + r_3 B_3 &= \lambda_3 r_2, \\ r_1 R_1 + r_2 R_2 + r_3 R_3 &= \lambda_3 r_3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Поступая аналогично двум предыдущим случаям, получаем

$$\begin{aligned} r_2 &= -r_1 \cdot \frac{igc_3 c_4^* (c_1 + c_3/\sqrt{6}) \lambda_3}{(\lambda_3 - c_2)[fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] + \lambda_3 c_2 (\lambda_3 - c_2)(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - \lambda_3 (c_1 + c_3/\sqrt{6})g |c_4|^2}, \\ r_3 &= -r_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \times \end{aligned}$$



$$\times \frac{c_3(\lambda_3 - c_2)[fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{(\lambda_3 - c_2)[fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] + \lambda_3 c_2 (\lambda_3 - c_2)(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - \lambda_3 (c_1 + c_3/\sqrt{6})g |c_4|^2}; \quad (4.14)$$

а для биспинора

$$\Phi_3 = r_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + r_2 \Psi_0 + r_3(\partial_\mu \Psi_\mu) \quad (4.15)$$

находим уравнение дираковского вида с массой M_3 :

$$(\hat{\partial} + \frac{M}{\lambda_3})\Phi_3 = 0, \quad M_3 = M/\lambda_3. \quad (4.16)$$

5. Учет электромагнитного поля

Присутствие внешнего электромагнитного поля учтем обычным приемом удлинения производной:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x). \quad (5.1)$$

Обращаемся вновь к двум уравнениям (см. (1.41)), которые с учетом внешних полей принимают вид

$$c_2 \hat{D}\Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\Psi_0 = 0, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[D_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[D_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}\Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\Psi_\lambda = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Совершим над этой системой некоторые преобразования. Сначала свернем уравнение (5.3) с матрицей γ_λ . Получим уравнение

$$\begin{aligned} & - \frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda D_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda D_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}\Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda \gamma_\lambda (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\gamma_\lambda \Psi_\lambda = 0, \end{aligned}$$

из которого с учетом тождества $\frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda = 1$ будем иметь



$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}\Psi_0 - \hat{D}\Psi_0 \right] + c_1 \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\
 & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[4(D_\mu \Psi_\mu) - \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\gamma_\lambda \Psi_\lambda = 0, \\
 & (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (D_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Теперь на уравнение (5.3) действуем оператором D_λ :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[D^2(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[D^2\Psi_0 - \frac{1}{4} \hat{D}\hat{D}\Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} \hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\
 & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $D^2 = D_\lambda D_\lambda$. С учётом тождества

$$\begin{aligned}
 \hat{D}\hat{D} &= D_\lambda D_\rho \left[\frac{1}{2}(\gamma_\lambda \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\lambda) + \frac{1}{2}(\gamma_\lambda \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\lambda) \right] = \\
 &= 2D_\lambda D_\rho \sigma_{\lambda\rho} + D^2 = [D^2 + (D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho}]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

уравнение (5.5) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} (D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2\Psi_0 - \frac{1}{4} (D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} [(D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} + D^2] (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\
 & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} [(D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} + D^2] (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Отметим здесь выражение для коммутатора

$$D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda = (-ieF_{\lambda\rho}). \tag{5.8}$$

Уравнение (5.7) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2\Psi_0 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 \right] - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \\
 & + \frac{1}{4} (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) [D^2 + (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho}] (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$



С учетом (5.4) уравнение (5.9) принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 \Psi_0 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 \right] - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) - M \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M (D_\lambda \Psi_\lambda) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \right] (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \right] \Psi_0 - \frac{M}{4} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M (D_\lambda \Psi_\lambda) = 0; \end{aligned} \quad (5.11)$$

обозначаем его как уравнение III. Приведем здесь же два других уравнения:

уравнение I

$$c_2 \hat{D} \Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M \Psi_0 = 0, \quad (5.12)$$

уравнение II

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (D_\mu \Psi_\mu) + M (\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \quad (5.13)$$

Заметим, что только уравнение III содержит оператор второго порядка D^2 .

Наша цель – получить систему уравнений первого порядка для биспиноров

$$\Psi_0, (\gamma_\mu \Psi_\mu), (D_\mu \Psi_\mu).$$

Покажем, как можно исключить из уравнения (5.11) оператор второго порядка. Сначала выделим в уравнении (5.11) отдельные слагаемые:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4} D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{fc_3^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} D^2 \Psi_0 - \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 - \frac{1}{4} M \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M (D_\lambda \Psi_\lambda) = 0. \end{aligned}$$

В этом уравнении преобразуем с помощью (5.10), переписанного в виде

$$\begin{aligned} & D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) = (+ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu), \end{aligned} \quad (5.14)$$

первое слагаемое:

$$-\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4} \left\{ (+ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right\} +$$



$$+\frac{fc_3^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}D^2\Psi_0-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0-\frac{1}{4}M\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0,$$

или

$$-\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4}\frac{4}{\sqrt{6}(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}D^2\Psi_0-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+$$
$$+fc_3^*\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}M\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0.$$

Это уравнение после простой перегруппировки представляем так:

$$-\frac{f|c_3|^2}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)+\frac{M}{4}\left[\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}-1\right]\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}D^2\Psi_0-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\lambda\Psi_\lambda)=0. \quad (5.15)$$

Чтобы преобразовать член $D^2\Psi_0$, обратимся к первому уравнению (5.12) и подействуем на него оператором \hat{D} :

$$c_2\hat{D}\hat{D}\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\hat{D}\Psi_0=0.$$

Отсюда, учитывая тождество (5.6)

$$\hat{D}\hat{D}=D^2+(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho},$$

получаем

$$c_2[D^2+(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}]\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}[D^2+(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}](\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\hat{D}\Psi_0=0,$$

или

$$D^2\Psi_0=-(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+\frac{4ic_4}{\sqrt{6}c_2}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-$$
$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0.$$

В этом соотношении член $D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)$ выражаем с помощью (5.14):

$$D^2(\gamma_\mu\Psi_\mu)=(+ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+$$
$$+\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{M}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu),$$



тогда получаем

$$D^2\Psi_0 = -(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 + \frac{4ic_4}{\sqrt{6}c_2}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) -$$

$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}\left\{(+ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + \frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\} -$$

$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) - \frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0.$$

Отсюда после приведения подобных членов, приходим к равенству

$$D^2\Psi_0 = -\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + iM\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu). \quad (5.16)$$

С учетом этого из уравнения (5.15) исключаем член $D^2\Psi_0$:

$$-\frac{f|c_3|^2}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + \frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^* - (c_1+c_3/\sqrt{6})}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) +$$

$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}\left\{-\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + iM\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\} -$$

$$-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 + \frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + M(D_\lambda\Psi_\lambda) = 0.$$

Собираем подобные члены вместе:

$$\left[-\frac{f|c_3|^2}{(c_1+c_3/\sqrt{6})} + \frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) +$$

$$+\left[\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^* - (c_1+c_3/\sqrt{6})}{(c_1+c_3/\sqrt{6})} - \frac{M}{4}\frac{gc_4^*c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) -$$

$$-\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - \left(\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} + \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}\right)(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + M(D_\mu\Psi_\mu) = 0.$$

Окончательно для уравнения III получаем представление

$$+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1+c_3/\sqrt{6}) - g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) - i\frac{\sqrt{6}}{4}M\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0 -$$



$$\begin{aligned} & -\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+ \\ & +\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\mu\Psi_\mu)=0; \end{aligned} \quad (5.17)$$

оно не содержит оператора D^2 .

6. Приведение системы уравнений во внешнем поле к квазидиагональному виду

Будем исходить из трех уравнений:

уравнение I

$$c_2\hat{D}\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\Psi_0=0, \quad (6.1)$$

уравнение II

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0, \quad (6.2)$$

уравнение III

$$\begin{aligned} & +\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-i\frac{\sqrt{6}}{4}M\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0- \\ & -\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+ \\ & +\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\mu\Psi_\mu)=0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Дальнейшая задача – привести систему уравнений к виду, когда смешивание трех биспиноров

$$(\gamma_\mu\Psi_\mu), \Psi_0, (D_\mu\Psi_\mu). \quad (6.4)$$

осуществляется только через тензор электромагнитного поля.

Обратимся к первому уравнению (6.1):

$$c_2\hat{D}\Psi_0+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0,$$

Исключим член $(D_\mu\Psi_\mu)$ с помощью третьего уравнения (6.3), получаем

$$\begin{aligned} & c_2\hat{D}\Psi_0+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \\ & \left\{+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-i\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0- \right. \\ & -\frac{1}{M}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{M}i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+ \\ & \left. +\frac{1}{M}\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\}+M\Psi_0=0. \end{aligned}$$



Приводим подобные члены

$$\begin{aligned} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{D}\Psi_0 + \\ & + \frac{ic_4}{\sqrt{6}} \left[1 + \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \right] \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4}{3} \frac{1}{M} g |c_4|^2 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4i}{3} \frac{1}{M} fc_3^*c_4 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M\Psi_0 = 0. \end{aligned}$$

В этом уравнении можно упростить второе слагаемое

$$\begin{aligned} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{D}\Psi_0 + \frac{ic_4}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4}{3} \frac{1}{M} g |c_4|^2 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4i}{3} \frac{1}{M} fc_3^*c_4 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M\Psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Аналогично, обратившись к уравнению II:

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (D_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$

исключим в нем также член $(D_\mu \Psi_\mu)$:

$$\begin{aligned} & (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{4} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} i \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{gc_4^*}{c_2} \hat{D}\Psi_0 - \\ & - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} i \frac{2}{\sqrt{6}} gc_4^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \\ & + \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned}$$

Приводим подобные члены:

$$\begin{aligned} & \left[(c_1 + c_3/\sqrt{6}) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \right] \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - i \frac{gc_3c_4^*}{c_2} \hat{D}\Psi_0 - \\ & - \frac{4ic_3}{3} \frac{1}{M} gc_4^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4c_3}{3} \frac{1}{M} fc_3^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned}$$



В этом уравнении можно упростить первый член

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f|c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2 - g_4|c^2) \right] \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{M} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - i \frac{gc_3c_4^*}{c_2} \hat{D}\Psi_0 - \\ & - \frac{4ic_3}{3} \frac{1}{M} gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4c_3}{3} \frac{1}{M} fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Вводим обозначения

$$\gamma_\mu \Psi_\mu = \bar{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_2 = \Psi_0, \quad \bar{\Phi}_3 = D_\mu \Psi_\mu; \quad (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} = \Sigma.$$

Полученную выше систему из трех уравнений записываем так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f|c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2 - g_4|c^2) \right] \hat{D}\bar{\Phi}_1 - \\ & - i \frac{gc_3c_4^*}{c_2} \hat{D}\bar{\Phi}_2 - \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{M} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_3 + \\ & + \frac{4c_3}{3} \frac{1}{M} fc_3^*\Sigma \bar{\Phi}_1 - \frac{4ic_3}{3} \frac{1}{M} gc_4^*\Sigma \bar{\Phi}_2 + M\bar{\Phi}_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{ic_4}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - g|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_1 + \frac{c_2^2 + g|c_4|^2}{c_2} \hat{D}\bar{\Phi}_2 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_3 + \\ & + \frac{4i}{3} \frac{1}{M} fc_3^*\Sigma \bar{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{1}{M} g|c_4|^2 \Sigma \bar{\Phi}_2 + M\Psi_0 = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{M}{4} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_1 - i \frac{\sqrt{6}}{4} M \frac{gc_4^*}{c_2} \hat{D}\bar{\Phi}_2 - \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_3 + \\ & + \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*\Sigma \bar{\Phi}_1 - i \frac{2}{\sqrt{6}} gc_4^*\Sigma \bar{\Phi}_2 + M\bar{\Phi}_3 = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Если воспользоваться обозначениями, которые были введены при рассмотрении случая свободной частицы

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f|c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2 - g|c_4|^2) \right], \\ A_2 &= \frac{i}{\sqrt{6}} \frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g|c_4|^2 \right], \\ A_3 &= \frac{M}{4} \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g|c_4|^2 - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) \right]; \\ B_1 &= -ig \frac{c_3c_4^*}{c_2}, \quad B_2 = \frac{c_2^2 + g|c_4|^2}{c_2}, \quad B_3 = -igM \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{c_4^*}{c_2}; \end{aligned}$$



$$R_1 = -\frac{4}{M} \frac{c_3}{\sqrt{6}} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}, R_2 = -\frac{4i}{M} \frac{c_4}{\sqrt{6}} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}, R_3 = -\frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})};$$

то последние три уравнения записываем коротко таким образом:

$$\begin{aligned} A_1 \hat{D} \bar{\Phi}_1 + B_1 \hat{D} \bar{\Phi}_2 + R_1 \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M \bar{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} \Sigma \bar{\Phi}_1 - \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} \Sigma \bar{\Phi}_2 &= 0, \\ A_2 \hat{D} \bar{\Phi}_1 + B_2 \hat{D} \bar{\Phi}_2 + R_2 \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M \bar{\Phi}_2 + \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} \Sigma \bar{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} \Sigma \bar{\Phi}_2 &= 0, \\ A_3 \hat{D} \bar{\Phi}_1 + B_3 \hat{D} \bar{\Phi}_2 + R_3 \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M \bar{\Phi}_3 + \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* \Sigma \bar{\Phi}_1 - i \frac{2}{\sqrt{6}} gc_4^* \Sigma \bar{\Phi}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Дальше действуем как и в случае свободного поля. Умножаем первое, второе, третье уравнения соответственно на a_1, a_2, a_3 и результаты складываем:

$$\begin{aligned} (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \hat{D} \bar{\Phi}_1 + (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3) \hat{D} \bar{\Phi}_2 + \\ + (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3) \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M(a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [a_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + a_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + a_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ + [-a_1 \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} + a_2 \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} - a_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^*] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0; \end{aligned}$$

откуда, учитывая равенства

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= \lambda_1 a_1, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 &= \lambda_1 a_2, \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 &= \lambda_1 a_3, \end{aligned} \quad (6.11)$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \lambda_1 \hat{D}(a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3) + M(a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [a_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + a_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + a_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ + [-a_1 \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} + a_2 \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} - a_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^*] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Аналогично находим еще два уравнения (заменяя a_i на b_i и на r_i)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \hat{D}(b_1 \bar{\Phi}_1 + b_2 \bar{\Phi}_2 + b_3 \bar{\Phi}_3) + M(b_1 \bar{\Phi}_1 + b_2 \bar{\Phi}_2 + b_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [b_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + b_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + b_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ + [-b_1 \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} + b_2 \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} - b_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^*] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0; \end{aligned} \quad (6.13)$$
$$\begin{aligned} \lambda_1 \hat{D}(r_1 \bar{\Phi}_1 + r_2 \bar{\Phi}_2 + r_3 \bar{\Phi}_3) + M(r_1 \bar{\Phi}_1 + r_2 \bar{\Phi}_2 + r_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [r_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + r_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + r_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \end{aligned}$$



$$+ \left[-r_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + r_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - r_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0. \quad (6.14)$$

Вводим три новых биспинора следующими линейными комбинациями:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3, \\ \Phi_2 &= b_1 \bar{\Phi}_1 + b_2 \bar{\Phi}_2 + b_3 \bar{\Phi}_3, \\ \Phi_3 &= r_1 \bar{\Phi}_1 + r_2 \bar{\Phi}_2 + r_3 \bar{\Phi}_3; \end{aligned} \quad (6.15)$$

тогда система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \hat{D} \Phi_1 + M \Phi_1 + \\ &+ \left[a_1 \frac{4}{3} \frac{f |c_3|^2}{M} + a_2 \frac{4i}{3} \frac{f c_3^* c_4}{M} + a_3 \frac{2}{\sqrt{6}} f c_3^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ &+ \left[-a_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + a_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - a_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \hat{D} \Phi_2 + M \Phi_2 + \\ &+ \left[b_1 \frac{4}{3} \frac{f |c_3|^2}{M} + b_2 \frac{4i}{3} \frac{f c_3^* c_4}{M} + b_3 \frac{2}{\sqrt{6}} f c_3^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ &+ \left[-b_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + b_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - b_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \hat{D} \Phi_3 + M \Phi_3 + \\ &+ \left[r_1 \frac{4}{3} \frac{f |c_3|^2}{M} + r_2 \frac{4i}{3} \frac{f c_3^* c_4}{M} + r_3 \frac{2}{\sqrt{6}} f c_3^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ &+ \left[-r_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + r_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - r_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

7. Обобщение теории на общековариантный случай

Чтобы обобщить подход на риманово пространство-время, нужно сделать ряд изменений.

1. Поскольку в римановом пространстве будем использовать метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$, соответствующий сигнатуре $(+, -, -, -)$, нужно сделать замену

$$M \rightarrow iM. \quad (7.1)$$

2. Затем нужно использовать другие матрицы Дирака (для определенности имеем в виду спинорный базис)

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{vmatrix}. \quad (7.2)$$

3. Нужно изменить выражения для операторов дифференцирования [1.3]

$$D_\alpha(x) = \partial_\alpha + ieA_\alpha(x) \rightarrow D_\alpha(x) = \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x), \quad \hat{D} = \gamma^\alpha(x) D_\alpha(x), \quad (7.3)$$

где $\Gamma_\alpha(x)$ – биспинорная связность, и $\gamma^\alpha(x) = \gamma^a e_{(a)}^\alpha(x)$.



4. Будем учитывать перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma^\rho(x)D_\beta &= D_\beta\gamma^\rho(x), & D_\sigma(x)g_{\alpha\beta}(x) &= g_{\alpha\beta}(x)D_\sigma(x), \\ \hat{D}\hat{D} &= D_\alpha D_\beta \left(\frac{\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha}{2} + \frac{\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha}{2} \right) = -\Sigma(x), \\ D^2 &= D^\alpha D_\alpha, & \Sigma(x) &= (-ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + \frac{R}{4}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $R(x)$ – скалярная кривизна Риччи.

С учетом этого имеем модифицированную общековариантную систему уравнений

$$c_2\hat{D}\Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[(D^\mu\Psi_\mu) - \frac{1}{4}\hat{D}(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) \right] + iM\Psi_0 = 0, \quad (7.5)$$

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D^\mu\Psi_\mu) + iM(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) = 0, \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} + \frac{iM}{4} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) - i\frac{\sqrt{6}}{4}iM\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - \\ - \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D^\mu\Psi_\mu) - i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho}\sigma_{\lambda\rho}(x) + \frac{R}{4})\Psi_0 + \\ + \frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho}\sigma_{\lambda\rho} + \frac{R}{4})(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) + iM(D^\mu\Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Дальнейший анализ повторяется с небольшими формальными изменениями, в результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} i\hat{D}(x)\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + iY_1\Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \\ i\hat{D}(x)\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + iY_2\Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \\ i\hat{D}(x)\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + iY_3\Sigma(x)\Phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{D}(x) &= \gamma^\alpha(x)D_\alpha, & D_\alpha(x) &= \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x), \\ Y_i &= \frac{4c_2c_3}{3iM}(\lambda_i - c_2), & i &= 1, 2, 3; & \Phi &= L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x), \\ \Sigma(x) &= -ieF_{\lambda\rho}(x)\sigma_{\lambda\rho}(x) + \frac{R(x)}{4}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Отметим, что система уравнений (7.8) допускает ограничение в случае майорановских частиц (когда $e = 0$), при этом имеем уравнения

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha(x)(\nabla_\alpha + \Gamma_\alpha)\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + Y'_1\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x)(\nabla_\alpha + \Gamma_\alpha)\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + Y'_2\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x)(\nabla_\alpha + \Gamma_\alpha)\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + Y'_3\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (7.10)$$



где

$$Y'_i = \frac{4c_2c_3}{3M}(\lambda_i - c_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad \Phi = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x). \quad (7.11)$$

Поскольку в любом из майорановских базисов выполняется тождество $[i\gamma^\alpha(x)]^* = i\gamma^\alpha(x) [\Gamma_\alpha(x)]^* = \Gamma_\alpha(x)$; то биспиноры $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$ и биспинор $\Phi(x)$ могут быть либо вещественными, либо чисто мнимыми.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М. Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
2. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 368 с.
3. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.09.2018

Pletyukhov V.A., Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Voynova Y.A., Veko O.V., Red'kov V.M. Fermion with Three Mass Parameters. General Theory, Interaction with External Fields

In the paper, starting from general Gel'fand – Yaglom approach a new 20-component wave equation for spin 1/2 fermion, which is characterized by three mass parameters, is derived. On the base of 20-component wave function, three auxiliary bispinors are introduced, they in absence of external field for these bispinors obey to three separate Dirac-like equations with different masses M_1, M_2, M_3 . It is shown that in presence of external fields, electromagnetic field and gravitational non-Euclidean background with non-vanishing Ricci scalar curvature, the main equation is not split into separated equations, instead a quite definite mixing of three Dirac-like equations arises. It is shown that a generalized equation for Majorana particle with three mass parameters exists as well, such a generalized Majorana equation is not split into three separated equations in curved background if Ricci scalar of space-time model does not vanish.



УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: otf@brsu.brest.by

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В ЭЛЕКТРОННО-НЕЙТРОННО-ЯДЕРНОМ ЗАМАГНИЧЕННОМ ВЕЩЕСТВЕ

Рассчитаны равновесные термодинамические и ядерные параметры холодного сверхплотного электронно-нейтронно-ядерного вещества при наличии сверхсильного магнитного поля. Исследовано влияние сверхсильного магнитного поля на параметры, соответствующие границам электронно-нейтронно-ядерной фазы такого вещества. Проведена оценка эффективного числа отрицательных пионов в тяжелых атомных ядрах.

1. Согласно современным представлениям, при плотностях, характерных для недр белых карликов и оболочек нейтронных звезд, должны быть условия для существования электронно-ядерной (Ae), электронно-нейтронно-ядерной (Aen) или электронно-нуклонной (enp) фаз сверхплотного крайне вырожденного вещества [1]. Во всех перечисленных фазах одним из компонентов вещества является газ свободных электронов, релятивистский при плотностях $\rho > 10^6$ г/см³; при этом температура его вырождения превышает 10^{10} К, что значительно больше предполагаемых температур в указанных астрофизических объектах. В веществе, находящемся в Aen - и enp -фазах, имеются свободные нерелятивистские нейтроны, а в enp -фазе еще и свободные нерелятивистские протоны. Известно, что сверхплотное вещество может находиться в относительно и абсолютно устойчивых состояниях термодинамического равновесия по отношению к бета-процессам и пикноядерным реакциям [1]. Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества.

В настоящей работе мы проведем вычисление равновесных параметров Aen -фазы замагниченного вещества. Следует заметить, что в [2] ставится под сомнение возможность существования Aen -фазы вещества из-за процесса пионизации ядер, альтернативного процессу их нейтронизации. Ниже будет показано, что сверхсильные магнитные поля подавляют процесс пионизации более интенсивно, чем процесс нейтронизации, приводящий к образованию Aen -фазы, и поставленная в настоящей работе задача вполне корректна и актуальна.

2. Представим энергию электронно-нейтронно-ядерного вещества в виде суммы энергий ядер, электронов и свободных нейтронов:

$$E = E_A + E_e + E_n; \quad (1)$$

при этом мы пренебрегаем кинетической энергией ядер и считаем, что электроны образуют крайне вырожденный идеальный газ. Далее, при численных расчетах и оценках не будет учитываться зависимость величины магнитного момента нейтрона от индукции магнитного поля; а также малая величина аномального магнитного момента электрона. Числа частиц компонентов вещества связаны соотношением:

$$N = N_n + AN_A = N_n + \frac{A}{Z} N_e, \quad (2)$$



где N, N_A, N_n, N_e – соответственно числа всех нуклонов, ядер, свободных нейтронов и электронов в объеме V рассматриваемой электронейтральной среды, A и Z – массовое и зарядовое числа ядра. Концентрация всех нуклонов связана с концентрациями компонентов среды и ядерными параметрами соотношением:

$$n = n_n \frac{n_0 - n}{n_0 - n_n} + n_e \frac{A}{Z} \quad (3)$$

где $n_0 = 1,3 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ – концентрация нуклонов в ядре.

Энергию покоя ядра будем вычислять с помощью модифицированной следующим образом формулы Бете – Вайцзеккера:

$$Mc^2 = (A - Z)m_n c^2 + Zm_p c^2 + W, \quad (4)$$

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{3n_A^{1/3}}{2n_0^{1/3}}\right) + c_3 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + c_4 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^4 + c_5 B^2 Z A^{2/3}. \quad (5)$$

Здесь m_n и m_p – массы нейтрона и протона, W – энергия связи ядра, B – индукция магнитного поля; $c_0 = 15,75 \text{ МэВ}$, $c_1 = 17,8 \text{ МэВ}$, $c_2 = 0,71 \text{ МэВ}$, $c_3 = 23,7 \text{ МэВ}$ (значения взяты из [1]), $c_4 = 7,7 \text{ МэВ}$ [3], $c_5 = 6,9 \cdot 10^{-38} \text{ МэВ/Гс}^2$ [4]. Заметим, что в [5] при решении аналогичной задачи при $B = 0$ с использованием модели невзаимодействующих свободных нейтронов берется $c_4 = c_3/27 \approx 0,878 \text{ МэВ}$. Поправка в третьем слагаемом (5) связана с учетом кулоновского взаимодействия протонов ядра с окружающими ядрами (так называемая «кулоновская энергия решетки» [6]).

Энергия свободных нейтронов и их число в объеме V равны [3]

$$E_n = w_n \left(V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad N_n = n_n \left(V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad (6)$$

где (см., например, [7], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы)

$$w_n = n_n (m_n c^2 + \zeta_n) - P_n, \quad (7)$$

$$n_n = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left((\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} \right), \quad (8)$$

$$P_n = \frac{2}{5} n_n \frac{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2}}{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2}}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{Я} = -1,48 \cdot 10^{-38} n_n \frac{40,4 - 1,61 \cdot 10^{-38} n_n}{1 + 6,25 \cdot 10^{-13} n_n^{1/3}} \text{ МэВ}, \quad (10)$$

n_n и P_n – концентрация и давление свободных нейтронов, $\chi_n = \zeta_n + m_n c^2$ – их химический потенциал, $\mu_{Я}$ – ядерный магнетон, $\sigma_n = 1,913$.

Энергия ультрарелятивистского электронного газа в сверхсильном магнитном поле определяется следующим образом [8]:



$$E_e = w_e V, \quad w_e = \frac{\pi^2 \hbar^3 c n_e^2}{2 m_e \mu_B B} = P_e = \frac{1}{2} \chi_e n_e, \quad (11)$$

где n_e, P_e, χ_e – концентрация, давление и химический потенциал электронов, m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора.

Относительно и абсолютно устойчивым состояниям термодинамического равновесия соответствуют минимумы энергии среды E относительно независимых параметров при фиксированных N и B :

$$\frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, имеем системы уравнений, которые позволяют выразить химические потенциалы электронного и нейтронного газов в относительно устойчивом состоянии:

$$\chi_e = \frac{\partial w_e}{\partial n_e} = m_n c^2 - m_p c^2 + 4c_3 - \frac{2Z}{A} (4c_3 + c_2 A^{2/3} (2J-1)) + 8c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^3 - c_5 B^2 A^{2/3}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{\partial w_n}{\partial n_n}, \quad \frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \left(\frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \frac{w_n}{n_n} \right) \frac{n_n}{n_0} = \\ &= m_n c^2 + c_3 - c_0 - \frac{Z^2}{A^2} \left(4c_3 + c_2 A^{2/3} \frac{4J-1}{3} \right) + c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^3 \left(1 + \frac{6Z}{A}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

а в абсолютно устойчивом состоянии позволяют установить однозначное соответствие между массовым числом A и зарядовым числом Z наиболее устойчивого ядра при фиксированном значении индукции магнитного поля B :

$$Z = \sqrt{\frac{c_1 A}{2c_2 J} + \frac{c_5^2 B^4 A^2}{4c_2^2 J^2}} - \frac{c_5 B^2 A}{2c_2 J}, \quad J = 1 - \frac{3n_A^{1/3}}{4n_0^{1/3}}. \quad (15)$$

Полученные соотношения дают возможность, задавая значения B и $n = N/V$ (или значение массовой плотности $\rho \approx m_n n$ вместо концентрации нуклонов n), вычислять равновесные термодинамические и ядерные параметры электронно-нейтронно-ядерного и электронно-ядерного замагниченного вещества (в последнем случае применимы все приведенные выше формулы при условии $n_n = 0$). Порог развала ядер и образования сплошной ядерной материи (электронно-нуклонной *enp*-фазы) можно оценить из условия равенства нулю энергии связи ядра.

Численные оценки показывают, что в сверхсильном магнитном поле границы электронно-нейтронно-ядерной фазы относительно и абсолютно равновесного вещества смещаются в сторону более высоких плотностей, и заметно изменяются пороговые значения термодинамических и ядерных параметров вещества. В таблицах 1 и 2 представлены результаты расчетов значений массового числа A наиболее устойчивого ядра, зарядового числа Z , модуля удельной энергии связи ядра b , химического потенциала электронов χ_e , концентраций n_e, n_n, n соответственно электронов, свободных нейтро-



нов и всех нуклонов вещества, давлений P_e , P_n и P , плотностей энергии w_e , w_n и w , массовой плотности ρ для фиксированных значений индукции магнитного поля B . Заметим, что учет кулоновского взаимодействия мало влияет на значения равновесных параметров электронно-нейтронно-ядерного вещества.

Таблица 1. – Параметры абсолютно равновесного вещества у нижнего порога Aen -фазы

Параметры	$B = 0$	$B = 2 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 4 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 6 \cdot 10^{17}$ Гс
A	112	110	105	97
Z	37	37	36	33
b , МэВ	7,53	7,52	7,49	7,44
χ_e , МэВ	23,8	23,7	23,4	23,0
n_e , см ⁻³	$5,9 \cdot 10^{34}$	$1,8 \cdot 10^{35}$	$3,6 \cdot 10^{35}$	$5,4 \cdot 10^{35}$
w_e , МэВ/см ³	$1,1 \cdot 10^{36}$	$2,2 \cdot 10^{36}$	$4,1 \cdot 10^{36}$	$5,7 \cdot 10^{36}$
P_e , МэВ/см ³	$3,5 \cdot 10^{36}$	$2,2 \cdot 10^{36}$	$4,1 \cdot 10^{36}$	$5,7 \cdot 10^{36}$
n , см ⁻³	$1,8 \cdot 10^{35}$	$5,5 \cdot 10^{35}$	$1,1 \cdot 10^{36}$	$1,5 \cdot 10^{36}$
W , МэВ/см ³	$1,7 \cdot 10^{38}$	$5,1 \cdot 10^{38}$	$1,0 \cdot 10^{39}$	$1,4 \cdot 10^{39}$
ρ , г/см ³	$2,9 \cdot 10^{11}$	$9,2 \cdot 10^{11}$	$1,8 \cdot 10^{12}$	$2,6 \cdot 10^{12}$

Таблица 2. – Параметры абсолютно равновесного вещества у верхнего порога Aen -фазы

Параметры	$B = 0$	$B = 2 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 4 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 6 \cdot 10^{17}$ Гс
A	469	456	421	372
Z	77	75	69	62
χ_e , МэВ	69,9	69,7	69,5	69,1
n_e , см ⁻³	$1,5 \cdot 10^{36}$	$5,4 \cdot 10^{35}$	$1,1 \cdot 10^{36}$	$1,6 \cdot 10^{36}$
w_e , МэВ/см ³	$7,8 \cdot 10^{37}$	$1,9 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$	$5,6 \cdot 10^{37}$
P_e , МэВ/см ³	$2,6 \cdot 10^{37}$	$1,9 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$	$5,6 \cdot 10^{37}$
n_n , см ⁻³	$2,9 \cdot 10^{37}$	$2,9 \cdot 10^{37}$	$3,0 \cdot 10^{37}$	$3,1 \cdot 10^{37}$
w_n , МэВ/см ³	$2,7 \cdot 10^{40}$	$2,8 \cdot 10^{40}$	$2,8 \cdot 10^{40}$	$2,9 \cdot 10^{40}$
P_n , МэВ/см ³	$2,2 \cdot 10^{38}$	$2,2 \cdot 10^{38}$	$2,3 \cdot 10^{38}$	$2,5 \cdot 10^{38}$
n , см ⁻³	$3,6 \cdot 10^{37}$	$3,2 \cdot 10^{37}$	$3,5 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$
W , МэВ/см ³	$3,6 \cdot 10^{40}$	$3,1 \cdot 10^{40}$	$3,5 \cdot 10^{40}$	$3,9 \cdot 10^{40}$
P , МэВ/см ³	$2,4 \cdot 10^{38}$	$2,4 \cdot 10^{38}$	$2,7 \cdot 10^{38}$	$3,1 \cdot 10^{38}$
ρ , г/см ³	$6,0 \cdot 10^{13}$	$5,3 \cdot 10^{13}$	$5,9 \cdot 10^{13}$	$6,4 \cdot 10^{13}$

3. Как отмечалось в [2], систематическое отклонение формулы Бете – Вайцзеккера от экспериментальных данных в области тяжелых атомных ядер можно ликвидировать, допустив наличие в ядрах небольшого числа отрицательных пионов. В ядре возможен излишек именно π^- -мезонов, потому что в изобарах со сравнительно большим числом протонов кулоновская энергия приводит к повышению энергии ядра. Стандартный вид формулы Бете – Вайцзеккера для энергии связи ядра должен быть изменен путем вычитания числа пионов из числа протонов в слагаемых, связанных с кулоновской энергией и энергией асимметрии ядра, а также введением дополнительных слагаемых, связанных с числом пионов. Такая модификация формулы практически устраняет имеющее место расхождение с экспериментальными данными для тяжелых ($A > 200$) ядер.



Итак, следуя представлениям [2; 3], в тяжелых ядрах предположим существование отрицательно заряженных пионов в качестве самостоятельного компонента. Проведем оценку массового A и зарядового Z чисел ядра, соответствующих порогу появления пионов. Используем полуэмпирическую формулу Бете – Вайцзеккера, модифицированную для данной задачи в соответствии с [2; 3]. Масса ядра

$$Mc^2 = N_n m_n c^2 + N_p m_p c^2 + W. \quad (16)$$

где

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{(N_p - N_\pi)^2}{A^{1/3}} + \frac{c_3}{A} (N_n - (N_p - N_\pi))^2 + c_3' \frac{N_\pi^2}{A} + \frac{c_4}{A^3} (N_n - (N_p - N_\pi))^4 + c_\pi N_\pi, \quad (17)$$

N_n, N_p, N_π – числа нейтронов, протонов и пионов в ядре; $c_3' \approx 17,7$ МэВ, $c_\pi \approx 11,9$ МэВ [2]; малой кулоновской энергией решетки здесь пренебрегаем.

Химические потенциалы компонентов ядра связаны соотношением:

$$\mu_p + \mu_\pi = \mu_n. \quad (18)$$

При этом $\mu_j = \frac{\partial Mc^2}{\partial N_j}$, т.е.

$$\mu_n = m_n c^2 + \frac{2c_3}{A} (N_n - (N_p - N_\pi)) + \frac{4c_4}{A^3} (N_n - (N_p - N_\pi))^3, \quad (19)$$

$$\mu_p = m_p c^2 + 2c_2 \frac{N_p - N_\pi}{A^{1/3}} - 2 \frac{c_3}{A} (N_n - (N_p - N_\pi)) - \frac{4c_4}{A^3} (N_n - (N_p - N_\pi))^3, \quad (20)$$

$$\mu_\pi = -2c_2 \frac{N_p - N_\pi}{A^{1/3}} + 2 \frac{c_3}{A} (N_n - (N_p - N_\pi)) + \frac{4c_4}{A^3} (N_n - (N_p - N_\pi))^3 + 2c_3' \frac{N_\pi}{A} + c_\pi. \quad (21)$$

Подставляя в (18) выражения для химических потенциалов с учетом того, что $N_n + N_p = A$, $Z = N_p$, получаем в простейшем случае (при $c_4 = 0$ [1]):

$$N_\pi = \frac{c_\pi' A}{2(c_3 - c_3')} - \frac{c_3(A - 2Z)}{c_3 - c_3'}, \quad (22)$$

где $c_\pi' = c_\pi + m_p c^2 - m_n c^2$ ($c_\pi' = 10,606$ МэВ). Заметим, что формула (22) существенно отличается от соответствующего выражения [2, с. 38]:

$$N_\pi = \frac{c_3(A - 2Z)}{c_3 + c_3'} - \frac{c_\pi' A}{2(c_3 + c_3')}. \quad (23)$$

Ошибка в формуле (23) связана с потерей знака в [2, с. 38] при вычислении химического потенциала пионов.



У порога рождения пионов $N_\pi = 0$ и

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c'_\pi}{2c_3} \right) \approx 0,39. \quad (24)$$

Таким образом, в обычных «земных» условиях существование пионного конденсата возможно в тяжелых ядрах с $A > 230$.

В присутствии сильного магнитного поля с индукцией B выражение для энергии связи ядра (17) претерпевает изменения:

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{(N_p - N_\pi)^2}{A^{1/3}} + \frac{c_3}{A} (N_n - (N_p - N_\pi))^2 + c'_3 \frac{N_\pi^2}{A} + \frac{c_4}{A^3} (N_n - (N_p - N_\pi))^4 + c_\pi N_\pi + N_\pi \mu_\pi B + c_5 B^2 N_p A^{2/3}. \quad (25)$$

Дополнительное слагаемое модифицированной формулы Бете – Вайцеккера $\mu_\pi B$ представляет собой кинетическую энергию пионов в квантующем магнитном поле (в приближении крайнего вырождения все заряженные бозоны находятся на нулевом уровне Ландау); $\mu_\pi = e\hbar / (2m_\pi c) = 2,1 \cdot 10^{-17}$ МэВ/Гс – магнетон, соответствующий пиону с массой m_π .

Несложно убедиться, что в простейшем случае (при $c_4 = 0$ [1]) в сильном магнитном поле с индукцией B у порога рождения пионов

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c'_\pi + \mu_\pi B}{2c_3} \right). \quad (26)$$

Таким образом, сильное магнитное поле уменьшает пороговое значение отношения Z/A , т.е. пионы появляются в более тяжелых ядрах, чем в отсутствие поля. Заметим, что в (26) не учтена поправка $c_5 B^2 N_p A^{2/3}$ [4] к энергии связи ядра, сравнимая с другими слагаемыми (25) при $B > 10^{18}$ Гс. В столь сильных магнитных полях тяжелые ядра имеют тенденцию к делению [4], а говорить о существовании пионов в осколках деления не приходится.

Для расчета числа пионов при влиянии магнитного поля воспользуемся формулой

$$N_\pi = \frac{A(c'_\pi + \mu B)}{2(c_3 - c'_3)} - \frac{c_3(A - 2Z)}{c_3 - c'_3}. \quad (27)$$

Результаты расчетов эффективного числа пионов в тяжелых ядрах в отсутствие и при наличии магнитного поля представлены в таблице 3.

Зависимости числа пионов от числа протонов при $B \neq 0$ и $B = 0$ аналогичны: ядра-изобары содержат тем больше пионов, чем больше число протонов.

Данный вывод, сделанный нами на основании результатов численных расчетов, прямо противоположен результату [2], полученному из-за элементарной ошибки при математических преобразованиях. В то же время в магнитном поле число пионов при заданных A и Z больше.



Таблица 3. – Влияние магнитного поля на число пионов

A	Z	N _π		A	Z	N _π	
		B = 0 Гс	B = 10 ¹⁶ Гс			B = 0 Гс	B = 10 ¹⁶ Гс
254	102	26	31	236	96	34	39
	101	19	24		95	26	31
	100	11	16		94	18	23
	99	3	8		93	11	15
248	100	29	34	230	93	29	34
	99	21	26		92	21	26
	98	13	18		91	13	18
	97	5	10		90	5	10
242	98	32	36	224	91	32	36
	97	24	29		90	24	29
	96	16	21		89	16	20
	95	8	13		87	0	4

Полагая в (27) $N_{\pi} = 0$, можно определить минимальное при заданной индукции B значение A , начиная с которого в наиболее устойчивых ядрах сверхплотного вещества присутствуют пионы. Результаты численных расчетов приведены в таблице 4. Легко видеть, что в сильном магнитном поле порог пионизации смещается в сторону больших массовых чисел.

Таблица 4. – Значения массового числа наиболее устойчивого ядра у порога пионизации

c ₄ , МэВ	A	
	B = 0	B = 2 · 10 ¹⁷ Гс
0,00	83	106
0,88	80	100
7,70	67	76

Полагая у порога рождения свободных нейтронов [7, с 131]

$$\frac{\partial w_n}{\partial n_n} \left(1 - \frac{n_n}{n_0} \right) + \frac{w_n}{n_0} = m_n c^2 - \mu_n B, \quad (28)$$

где $\mu_n = 6,0 \cdot 10^{-18}$ МэВ/Гс – магнитный момент нейтрона, можно определить минимальное значение массового числа наиболее устойчивого ядра A при заданной индукции B , начиная с которого в сверхплотном веществе появляются свободные нейтроны.

Согласно [7, с. 157], при $c_4 \approx 7,7$ МэВ у порога рождения свободных нейтронов в абсолютно равновесном сверхплотном веществе $A = 112$ при $B = 0$ и $A = 110$ при $B = 2,0 \cdot 10^{17}$ Гс. Очевидно, более сильные магнитные поля еще больше увеличивают значение A у порога пионизации и уменьшают значение A у порога рождения свободных нейтронов. Таким образом, не исключена возможность появления свободных нейтронов при массовой плотности, меньшей порога пионизации ядер (ситуация, обратная описанной в [2] для случая немагнитного вещества).



Абсолютно устойчивому состоянию термодинамического равновесия соответствует минимум энергии среды E относительно независимых параметров A , N_p , N_π и N_A при фиксированных $N = nV$ и B :

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial N_p} = \frac{\partial E}{\partial N_\pi} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0. \quad (29)$$

Среда полагается электронейтральной, полное число нуклонов сохраняется, поэтому

$$n = n_n + n_e \left(1 - \frac{n_n}{n_0} \right) \frac{A}{N_p - N_\pi}. \quad (30)$$

Таким образом, мы получаем новую систему уравнений для вычисления равновесных параметров сверхплотного замагниченного вещества.

В таблице 5 представлены численные значения N_π , N_p и удельной энергии связи ядра b для $c_4 = 7,7$ МэВ.

Таблица 5. – Зависимость N_π , N_p , b от A .

$B = 0$				$B = 2 \cdot 10^{17}$ Гс		
A	N_p	N_π	b	N_p	N_π	b
120	48	9	-7,5	43	4	-7,3
140	57	15	-7,1	51	9	-6,7
160	66	21	-6,7	59	14	-6,2
180	75	27	-6,4	67	19	-5,8
200	84	33	-6,1	75	25	-5,4
220	93	40	-5,8	83	30	-5,1

$B = 6 \cdot 10^{17}$ Гс				$B = 10^{18}$ Гс		
A	N_p	N_π	b	N_p	N_π	b
120	33	0	-5,5	24	0	-1,6
140	39	0	-5,7	29	0	-2,1
160	45	2	-5,3	34	0	-2,4
180	52	7	-4,6	39	0	-2,7
200	59	11	-4,2	45	2	-2,6
220	65	15	-3,7	50	5	-1,9

Из таблицы 5 видно, что под воздействием сильных магнитных полей наиболее устойчивыми становятся ядра-изобары с меньшими значениями числа протонов и числа пионов. Тенденция изменения абсолютной величины удельной энергии связи с ростом индукции магнитного поля дает основание полагать, что в сильных магнитных полях с индукцией порядка 10^{18} Гс невозможно существование описанных в [1; 2; 5] экзотически сверхтяжелых ядер со значениями массовых чисел $A \sim 500 \div 700$.

Заметим, что в столь сильных магнитных полях удельная энергия связи средних ядер также заметно уменьшается, очевидно, в связи с деформацией ядра в магнитном поле [4].



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
2. Саакян, Г. С. Физика нейтронных звезд / Г. С. Саакян. – Дубна : Изд-во ОИЯИ, 1995. – 347 с.
3. Саакян, Г. С. Явление пионизации вырожденного вещества / Г. С. Саакян, Л. Ш. Григорян // *Астрофизика*. – 1977. – Т. 13, вып. 2. – С. 295–311.
4. Леинсон, Л. Б. О делении ядер в сильном магнитном поле / Л. Б. Леинсон, В. Н. Ораевский // *Ядер. физика*. – 1978. – Т. 27, вып. 6. – С. 1457–1463.
5. Вартанян, Ю. Л. Нейтронобогатые ядра в Ферми-газе / Ю. Л. Вартанян, Н. К. Овакимова // *Астрон. журн.* – 1972. – Т. 49, вып. 2. – С. 306–315.
6. Володин, В. А. Влияние кристаллической решетки на ядерные свойства сверхплотного вещества / В. А. Володин, Д. А. Киржниц // *Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики*. – 1971. – Т. 13, № 8. – С. 450–452.
7. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
8. Шульман, Г. А. О свойствах холодного плотного вещества с замороженным сверхсильным магнитным полем / Г. А. Шульман // *Астрофизика*. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.10.2018

Sekerzhitsky V.S. Thermodynamics Balance in Electron-Neutron-Nuclear Magnetized Matter

We have calculated the equilibrium thermodynamic and nuclear parameters of cold superdense electron-neutron-nuclear matter during superstrong magnetic field. Influence of a superstrong magnetic field on parameters that correspond to bounds of electron-neutron-nuclear phase of such matter is investigated. Valuation of effective quantity negative piones in heavy atomic nuclei is demonstrate.



УДК 519.27

С.С. Секержицкий

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: Sekerzhitsky@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЦ НАПОЛНИТЕЛЯ В СВЯЗУЮЩЕМ

Исследовано случайное расположение сферических частиц наполнителя одного размера в связующем, для чего в рамках метода Монте-Карло введена функция зависимости числа конфигураций от параметров наполнения. Исследование данной функции на экстремум позволило определить понятие наиболее вероятного состояния, коэффициент наполнения которого ограничивает сверху величину реальных коэффициентов наполнения наполненных систем.

Введение

В настоящее время, как, впрочем, и в последние несколько десятков лет, при создании новых материалов, включая современные наноразмерные технологии, актуальным является вопрос математического моделирования случайного расположения частиц наполнителя в связующем – гомогенной среде. При этом определяющим является коэффициент наполнения $\varphi = \frac{V_H}{V}$ – отношение суммарного объема частиц наполнителя к объему системы в целом. Исследователи провели достаточное число экспериментов, в результате чего в настоящее время общепризнанным является следующий факт: если частицы наполнителя размещаются в связующем без перемешивания, то невозможно достичь величины коэффициента наполнения больше, чем 0,58, при самом же тщательном перемешивании верхняя ее граница равна 0,64 [1].

Автором в течение ряда лет выполнен цикл работ, в рамках которых проведено успешное математическое моделирование данного процесса. При этом в качестве эффективного аппарата был использован метод Монте-Карло, а также введены понятия конфигурация и состояние наполненной системы, с целью теоретического обоснования существования предельных значений коэффициентов наполнения при изготовлении гетерогенных систем с большим числом частиц наполнителя, соответствующим количеству наночастиц в макроскопических объемах. Следует отметить тот факт, что частицы наполнителя, несмотря на их малые размеры, микрочастицами не являются, что позволяет адекватно рассмотреть решение предложенной задачи без привлечения основных положений квантовой механики, но опираясь на ее идеологию. В то же время, количество частиц наполнителя достаточно для применения основных подходов статистической физики.

В настоящей работе рассмотрено приближение невзаимодействующих сферических частиц одного размера (монодисперсный наполнитель), которые удерживаются на своих местах в связующем после окончания процесса «насыпания», без или с перемешиванием. Частицы реального наполнителя отличаются как по форме, так и по степени взаимодействия друг с другом, поэтому, полученные результаты представляют некоторое приближение, что не снижает их ценность.

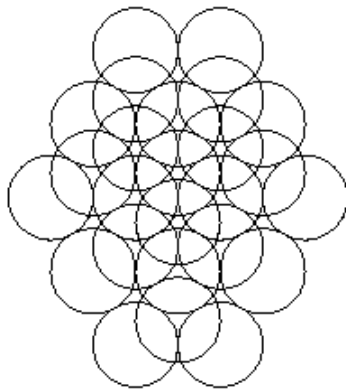
Нами последовательно рассмотрены плотнейшие гексагональная и кубическая упаковки, введена функция состояния, позволяющая рассчитать число конфигураций, соответствующее данному значению коэффициента наполнения, а также обсуждены проблемы, связанные с величиной репрезентативного объема системы.



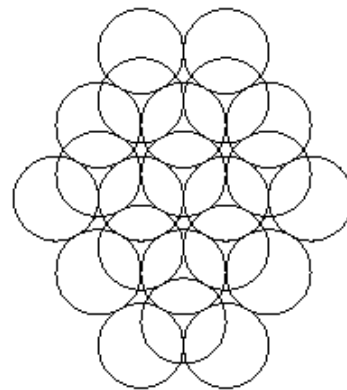
Плотнейшие упаковки

Для того чтобы «уложить» сферические частицы одинакового размера для достижения максимального значения коэффициента наполнения, следует реализовать одну из плотнейших упаковок: на плоскости располагаем шары так, чтобы их центры находились в вершинах правильных шестиугольников, стороны которых равны удвоенному радиусу шаров. Затем такой же слой располагаем над первым, при этом шары второго слоя размещаются во впадинах между шарами первого. Поступаем далее аналогичным образом, и если шары третьего слоя находятся над впадинами между шарами первого слоя, то это кубическая плотнейшая упаковка, а если над шарами первого слоя, то гексагональная (рисунок 1) [2]. Регулярных упаковок, более плотных, чем данные, до сих пор никто не придумал, при этом, как сказано в [1] «while many mathematicians believe and all physics know that density cannot exceeds $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0,74048\dots$, the best rigorous

limit that has been derived is $\sqrt{18}\left(\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0,77963\dots$ ».



а) кубическая



б) гексагональная

Рисунок 1. – Плотнейшие упаковки одинаковых сферических частиц

Для расчета максимальных значений коэффициентов наполнения кубической и гексагональной упаковок поступают следующим образом: если соединить центры соседних шаров, то все пространство системы полностью, без промежутков разобьется на координационные тетраэдры и октаэдры (рисунок 2). Причем число координационных тетраэдров вдвое больше, чем октаэдров. Поскольку каждая частица входит в восемь тетраэдров и шесть октаэдров, и в тетраэдре четыре, а в октаэдре шесть частиц, то числа тетраэдров N_T и октаэдров $N_{ОКТ}$ связаны с числом частиц наполнителя N_1 соотношением:

$$N_T = 2N_{ОКТ} = 2N_1. \quad (1)$$

Объемы тетраэдров и октаэдров связаны с длинами их ребер и, следовательно, радиусами частиц наполнителя



$$V_{\text{окт}} = 4V_T = \frac{8\sqrt{2}}{3} R_1^3. \quad (2)$$

где R_1 – радиус частицы наполнителя.

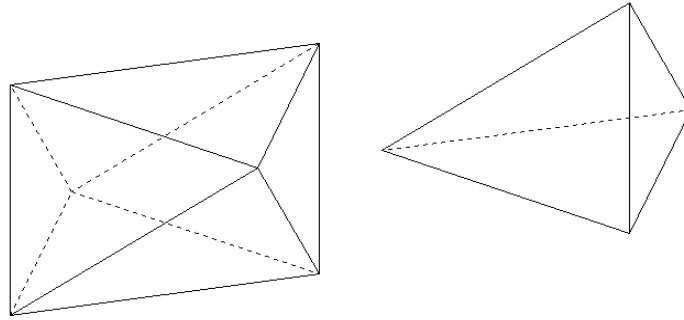


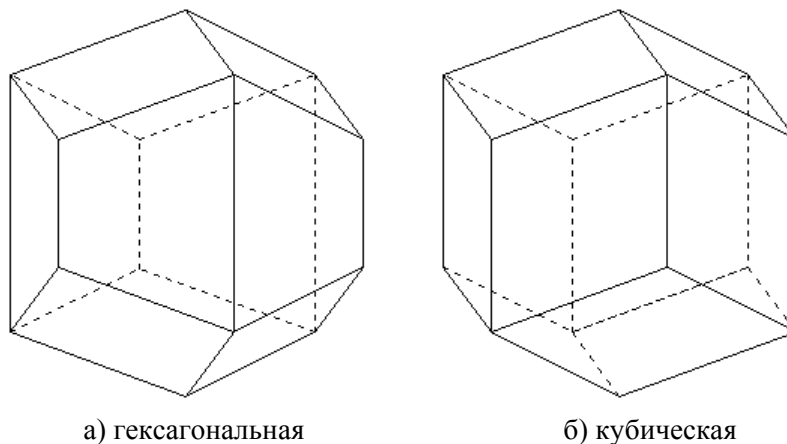
Рисунок 2. – Координационные октаэдр и тетраэдр

Поскольку объем сферической частицы, радиуса R_1 : $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, то коэффициент наполнения плотнейшей упаковки сферических частиц равного размера имеет вид

$$\varphi_0 = \frac{N_1 V_1}{N_T V_T + N_{\text{окт}} V_{\text{окт}}} = \frac{N_1 \frac{4}{3} \pi R_1^3}{2N_1 \frac{2\sqrt{2}}{3} R_1^3 + N_1 \frac{8\sqrt{2}}{3} R_1^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74048, \quad (3)$$

как уже было указано выше.

Традиционное использование координационных тетраэдров и октаэдров в целом ряде случаев весьма затруднительно, поэтому автор предложил использовать для выполнения пространства структурные полиэдры Вороного [2] – множества точек, которые расположены к центру данной сферической частицы ближе, чем к центру любой другой (рисунок 3).



а) гексагональная

б) кубическая

Рисунок 3. – Структурные полиэдры Вороного



Такое определение структурных полиэдров позволяет включить в процесс расчета их объемов, как в случае вышерассмотренных плотнейших упаковок, так и при случайном расположении центров сферических частиц наполнителя метод Монте-Карло, применение которого в совокупности с элементарными геометрическими преобразованиями определяет его объем. В случае плотнейших упаковок

$$N_{II} = N_1, V_{II} = 4\sqrt{2}R_1^3. \quad (4)$$

Отсюда получим то же, что и в (3) значение коэффициента заполнения плотнейших упаковок:

$$\varphi_0 = \frac{N_1 V_1}{N_{II} V_{II}} = \frac{N_1 \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\sqrt{2}R_1^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74048. \quad (3')$$

Если же построить плотнейшую упаковку сферических частиц одного размера только лишь из координационных тетраэдров, что актуально для наполнителя с сильным притяжением их друг к другу, то при малом числе частиц возможно достижение коэффициента заполнения, соответствующее значению коэффициента заполнения одного тетраэдра:

$$\varphi'_0 = \frac{V'_1}{V_T} = \sqrt{18} \left(\arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 0,77963\dots \quad (5)$$

Однако при значительном числе частиц наполнителя, представляющего наночастицы в макроматериале, такой результат не представляется возможным.

Функция состояния

Перейдем теперь от регулярных плотнейших к случайным упаковкам, которые получаются при произвольном расположении частиц наполнителя в связующем. Следуя [3], положим число конфигураций, соответствующих произвольному расположению одной частицы наполнителя в связующем пропорциональным объему системы, незаполненному прочими частицами наполнителя:

$$\omega_1 = \text{const} \left(V - \frac{(N_1 - 1)V_1}{\varphi_0} \right). \quad (6)$$

Поскольку расположение каждой из N_1 невзаимодействующих частиц наполнителя независимо друг от друга, они могут расположиться в данном объеме системы V произвольным образом, образуя фиксированную конфигурацию. Число конфигураций, соответствующих состоянию с объемом V системы из N_1 частиц наполнителя, равно произведению:

$$\Omega = \prod_{i=1}^{N_1} \omega_i = \text{const}' \left(V - \frac{(N_1 - 1)V_1}{\varphi_0} \right)^{N_1}. \quad (7)$$

Для определения постоянной const' используем тот факт, что в число конфигураций, соответствующих состоянию плотнейшей упаковки, при отсутствии перемешивания равно 1.



Окончательно получим:

$$\Omega_{\varphi} = \left(N_1 \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1 \right) + 1 \right)^{N_1}. \quad (8)$$

Альтернативное рассмотрение системы, в которое частицы перемешиваются, приводит к следующему виду функции состояния:

$$\Omega_{\varphi} = N_1! \left(N_1 \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1 \right) + 1 \right)^{N_1}. \quad (9)$$

Следует отметить, что данный результат в рамках вероятностного подхода впервые получен именно автором.

Наиболее вероятные значения коэффициентов заполнения

Для описания наиболее вероятного состояния системы исследуем функции (8) и (9) на экстремум. С этой целью, вместо объема системы V введем параметр C – число частиц в ее плотнейшей упаковке, а также величину $x = \frac{\varphi_0}{\varphi}$, характеризующую ее плотность. С учетом этого (8) и (9) примут вид:

$$\Omega_{\varphi} = \left(\frac{C}{x} (x-1) + 1 \right)^{\frac{C}{x}}, \quad (8')$$

$$\Omega_{\varphi} = \left(\frac{C}{x} \right)! \left(\frac{C}{x} (x-1) + 1 \right)^{\frac{C}{x}}. \quad (9')$$

Проведя расчеты для различных чисел частиц наполнителя в плотнейшей упаковке, обнаружим существование наиболее вероятного состояния как при отсутствии перемешивания, так и в случае его наличия.

Результаты расчетов приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. – Наиболее вероятные значения коэффициентов заполнения (φ_{HB}) для числа частиц наполнителя в плотнейшей упаковке (C) (без перемешивания)

C	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ_{HB}	0,49	0,51	0,53	0,54	0,55	0,55	0,56	0,56	0,57	0,57

Таблица 2. – Наиболее вероятные значения коэффициентов заполнения (φ_{HB}) для числа частиц наполнителя в плотнейшей упаковке (C) (с перемешиванием)

C	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ_{HB}	0,61	0,63	0,63	0,64	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66

Полученные результаты позволяют сделать следующий вывод: величины наиболее вероятных коэффициентов заполнения систем как при отсутствии перемешивания, так и при его наличии смещаются в область максимальных значений (плотнейших упа-



ковок). По-видимому, следует говорить о существовании некоторого репрезентативного объема, учет размеров которого объясняет результаты экспериментов.

Заклучение

В развитие приведенных в работе результатов возможно рассмотрение наполненных систем как с би-, так и с полидисперсным наполнителем. Увеличение числа его фракций приводит к существенному повышению предельных значений коэффициентов наполнения, что необходимо для создания натуральных систем с требуемыми физическими свойствами.

Результаты, полученные в работе, представляют интерес для различных специалистов, занимающихся созданием, в рамках нанотехнологий, новых типов композиционных материалов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Visscher, W. M. Computer Experiments and Disordered Solids / W. M. Visscher, J. E. Gubernatis // Dynamical Properties of Solids / ed. by G. R. Horton and A. A. Maradudin. - Amsterdam, 1980. – Vol. 4. – P. 63–155.
2. Даниэльс, Ф. Физическая химия / Ф. Даниэльс, Р. Олберти. – М. : Мир, 1967. – 389 с.
3. Гиббс, Д. В. Термодинамика. Статистическая физика. / Д. В. Гиббс. – М. : Наука, 1982. – 584 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.10.2018

Sekerzhitski S.S. Mathematical Modeling of Random Arrangement of Filler Particles in a Binder

In this work, the random arrangement of spherical filler particles of the same size in a binder is investigated, for which, in the framework of the Monte Carlo method, a function is introduced depending on the number of configurations on filling parameters. The study of this function on an extreme made it possible to define the concept of the most probable state, the filling coefficient of which limits from above the value of the real filling coefficients of the filled systems.



УДК 577.13:543.424.7

Н.С. Ступень

канд. техн. наук, доц., доц. каф. химии

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: chem@brsu.brest.by

КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАГНЕЗИАЛЬНЫЕ ВЯЖУЩИЕ НА ОСНОВЕ КРЕМНЕЗЕМСОДЕРЖАЩИХ ТВЕРДЫХ ОТХОДОВ

Представлены экспериментальные данные по утилизации стеклобоя и микрокремнезема в качестве комплексной активной мелкодисперсной добавки в магнезиальный цемент на каустическом доломите. Получены результаты по оптимальному содержанию высокодисперсной добавки стеклобоя (15 %) и микрокремнезема (10 %) для получения водостойкой композиции магнезиального цемента с коэффициентом размягчения 0,46.

Введение

Одной из актуальных проблем, связанных с ухудшением качества окружающей природной среды, является нерациональное, экологически опасное и неорганизованное размещение отходов. В настоящее время производство отходов во всем мире возрастает и опережает их переработку, обезвреживание и складирование на полигонах и свалках. Дальнейшее накопление отходов чревато серьезными негативными последствиями как для населения, так и для окружающей среды. Поэтому во всех развитых странах вопросам по сокращению, размещению, хранению, захоронению и переработке отходов производства и потребления уделяется повышенное внимание [1].

Проблема накопления твердых отходов производства и потребления является одной из главных экологических проблем Республики Беларусь. Ежегодно на территории страны образуется около 33–34 млн т производственных отходов, в том числе токсичных – около 240 млн т, а также свыше 3 млн т твердых коммунальных отходов. Всего в стране образуется свыше 800 видов отходов с широким спектром морфологических и химических свойств [2]. В связи с этим разрабатываются технологические схемы утилизации, переработки твердых отходов.

Среди регионов Республики Беларусь наибольший объем образования отходов отмечается в Минской области (в среднем по годам 72,2 % от общего объема), что связано с высокой концентрацией производства в данной области. Далее по величине образования отходов следует Могилевская (7,2 %), Гомельская (6,6 %), Гродненская (4,6 %) области и город Минск (4,2 %). Меньше всего образуется отходов в Брестской (3,6 %) и Витебской (1,6 %) областях [3]. Если рассматривать описываемый показатель на душу населения, то можно сделать вывод о том, что образование отходов на душу населения в Минской области в 23 раза выше среднего показателя по республике. Превышение данного показателя над средним республиканским уровнем отмечается также в Гомельской области (в 3,6 раза). В Гродненской области образование отходов на душу населения составляет 96 % от среднего по республике значения, Витебской области – 60 %, г. Минска – 54 %, Брестской – 24 %, Могилевской области – 13 %. По использованию отходов лидирующее место занимает Минская область (в среднем по годам 31,0 %), за ней следуют Могилевская (22,9 %), Гомельская (15,0 %), Гродненская (12,2 %), Брестская (10,5 %) области. Ниже данный показатель по городу Минску (5,1 %) и Витебской области (3,3 %) [3].



Твердые отходы можно разделить на две группы – отходы промышленных производств (техногенные) и бытовые.

Техногенные отходы образуются на предприятиях металлургической, химической, деревообрабатывающей, энергетической, горнодобывающей, строительных материалов и других отраслей промышленности [4].

Среди множества видов отходов предприятий промышленного значения можно выделить следующие.

1. Доменные шлаки (лидер по масштабам использования). Шлак используется для производства портландцемента, позволяя значительно увеличить его выпуск. Он не только улучшает строительные-технические свойства материала, но и помогает снизить потребление энергетических ресурсов. Относительно новым строительным материалом на основе доменных шлаков являются шлакоситаллиты. Такой материал обладает отличными показателями прочности, а получают его методом каталитической кристаллизации шлакового стекла [5; 6].

2. Отходы сжигания твердых видов топлива – золошлаковая смесь, зола сухого удаления. Это также важные сырьевые ресурсы для выпуска разнообразных строительных материалов. Их применяют в производстве ячеистых и вяжущих бетонов, дорожном строительстве, выпуске стеновых материалов.

3. Отходы химических производств: фосфогипс, фосфорные шлаки. Их сфера применения – выпуск стеновой керамики, изготовление кирпича.

4. Зола – несгорающий остаток с зернами мельче 0,16 мм, образующийся из минеральных примесей топлива при полном его сгорании и осажденный из дымовых газов золоулавливающими устройствами. В зависимости от вида топлива зола подразделяется на антрацитовую, каменноугольную, бурогольную, сланцевую, торфяную и др. [6].

5. Осадки бытовых или промышленных сточных вод, которые содержат, как правило, много органических веществ и значительные количества тяжелых металлов.

6. Неорганические отходы. Наибольшее число исследований посвящено использованию пыли и шлаков.

7. Органические отходы: сельскохозяйственной, целлюлозно-бумажной и деревообрабатывающей промышленности. Используются главным образом в качестве поробразователей и для экономии энергии при обжиге.

Однако широкое применение техногенных отходов сдерживается определенной нестабильностью и неоднородностью многих побочных продуктов промышленности, что может привести к снижению качества строительной продукции. На изменчивость свойств таких отходов оказывают влияние не только условия их образования, но также химико-минералогический состав, условия и длительность хранения в отвалах [4].

Одним из наиболее эффективных направлений является использование промышленных отходов в качестве компонентов жаростойких материалов.

Промышленность строительных материалов является экологическим резервом за счет эффективности утилизации отходов производства и жизнедеятельности человека. Объем утилизируемых отходов в строительной промышленности составляет 10–15 % от их ежегодного образуемого количества [4].

Пыли и шламы с высоким содержанием диоксида кремния (ферросилиция и ферросиликохрома) находят применение в производстве жидкого стекла. Значительное количество пылей и шламов ферроплавильного производства может быть использовано также для получения вяжущих материалов с различными свойствами.



Алюмосиликатное огнеупорное техногенное сырье представлено большой группой каолин- и глиноземсодержащих материалов: вскрышные породы и отходы углеобогащения (каолинит + уголь), пылеунос ТЭС и вращающихся печей для обжига глинозема и шамота, шламовые отходы электрокорунда абразивного производства, высокоглиноземистые алюмотермические шлаки, травильные алюминийсодержащие растворы предприятий цветной металлургии и синтеза органических соединений (фосфаты, алкогляты алюминия и другие), суммарный годовой прирост которых составляет более 600 млн т [4].

Химический и минерально-фазовый состав, строение и свойства золошлаковых материалов (ЗШМ) зависят от состава минеральной части топлива, его теплотворной способности, режима сжигания, способа их улавливания и удаления, места отбора из отвалов. Химический состав ЗШМ от сжигания углей представляет в основном SiO_2 и Al_2O_3 . Кроме того, в состав оксидов входят также Fe_2O_3 , CaO , MgO , Na_2O , K_2O , TiO_2 , SO_3 и др [5].

Шлаки по сравнению с золами содержат меньше органических остатков и аморфизированного глинистого вещества, но больше стеклофазы (до 95 %). Обусловлено это тем, что шлаки большее время находятся в высокотемпературной зоне топки. Кристаллическая фаза в них представлена кварцем, муллитом, магнетитом и т.д.

Перспективна технология получения легких теплоизоляционных изделий (кирпич, блоки, плиты) на основе легкой фракции зол (микросфер) ТЭС. Утилизация зол ТЭС и ГРЭС проводится в очень малых объемах (около 1 % от всех золошлаковых отвалов). Их, в основном, используют как строительный материал в качестве добавки к цементам при производстве бетонов и растворов различного назначения. В последние годы золу стали более интенсивно применять для производства строительного кирпича и кислотоупорного порошка [6].

Весьма перспективна технология производства строительного кирпича из зол ТЭС способом горячего прессования [5].

Многочисленные исследования позволили установить возможность использования отходов ферросплавного производства в качестве гидравлических добавок в вяжущие вещества. Микрокремнезем (микрокремний, микрокремнезем, кремниевая пыль) – побочный продукт производства кремниевых и феррокремниевых сплавов, представляющих собой высокодисперсную пыль кремнезема, улавливаемую фильтрами из отходящих газов. Он образуется при восстановлении высокочистого кварца с углем. Так как микрокремнезем является отходом производства, то его физико-химические свойства, в частности дисперсность и содержание активной формы SiO_2 , во многом определяется конкретными условиями получения сплавов.

По мере увеличения содержания кремния в сплаве увеличивается содержание SiO_2 в кремниевой пыли, но химический состав микрокремнезема для конкретного производства остается постоянным. Микрокремнезем, содержащий не менее 85 % SiO_2 , относится к пуццолановым добавкам с высокой активностью. Микрокремнезем в странах СНГ доступен и использование его перспективно в больших количествах. При введении микрокремнезема значительно улучшаются свойства портландцемента. Использование микрокремнезема в сочетании с водоредуцирующей добавкой повышает прочность, водонепроницаемость, сульфатостойкость и другие свойства цементного клинкера. Повышение прочности цементного камня с добавкой микрокремнезема обусловлено увеличением степени гидратации цемента как за счет создания центров кристаллизации для $\text{Ca}(\text{OH})_2$, так и за счет взаимодействия активного кремнезема с гидроксид-



дом кальция с образованием труднорастворимого низкоосновного мелкокристаллического гидросиликата. Снижение водопроницаемости цементного камня при введении микрокремнезема является результатом уменьшения числа крупных пор. Благодаря этому проницаемость цементного камня уменьшается и устойчивость его к действию агрессивных сред возрастает [5; 7].

Шлаки ферросилиция и силикохрома после измельчения применяют как мелкий пористый наполнитель бетона, а также в качестве сырья для получения микронаполнителя и добавки в строительные растворы [5].

Феррохромовый шлак в значительном количестве можно применять для получения различных специальных покрытий (для разметок асфальтобетонных дорог, в качестве красителя при производстве коврово-мозаичных плиток) взамен дефицитных хромсодержащих пигментов [6].

Использование отходов промышленных предприятий для получения разнообразных строительных материалов имеет значительный экономический и экологический эффект. С экологической точки зрения наиболее трудно утилизируемым твердым отходом считается стекло. Оно не подвергается разрушениям под воздействием воды, атмосферы, солнечной радиации, мороза. Кроме того, стекло – это коррозионностойкий материал, который не разрушается под воздействием большинства сильных и слабых органических, минеральных кислот, солей, а также грибков и бактерий. Стекло способно сохраняться без особых разрушений десятки и даже сотни лет. Одним из способов утилизации твердых отходов является метод восстановления ресурсов, т.е. сбора, сортировки, подготовки отходов различных видов для последующей рециркуляции. Образующийся во время производства брак или бой стекла в большинстве случаев используется этими же заводами повторно. Такое стекло имеет стабильный (в рамках данной технологии) химический состав и находит применение в процессе плавки шихты. Несортированный бой различных видов стекол (оконного, тарного, оптического) имеет довольно широкий диапазон химического состава, поэтому такой стеклобой, в огромных количествах образующийся в отвалах и на свалках, до сих пор не находит должного применения.

В настоящее время разработаны составы и технологии для получения различных видов строительных материалов на основе природных и техногенных стекол. Создаваемые материалы с заданными регулируемыми свойствами можно использовать в разных областях: в промышленном и гражданском строительстве, в атомной промышленности (бетоны радиационной защиты, негорючие теплоизоляционные покрытия), в химической. Энергосберегающая технология изготовления материалов на основе стеклобоя проста, не требует специального оборудования, позволяет организовать производство на свободных площадях действующих предприятий стройиндустрии без существенных капиталовложений.

После сортировки, дробления, помола и отсеивания на фракции стекло можно считать полностью подготовленным для получения строительных материалов. Фракции стеклобоя более 5 мм используются в бетонах в качестве крупного заполнителя, мелкие фракции (менее 5 мм) – в качестве мелкого заполнителя (песка), а тонкомолотый порошок – как связующее. Так как стеклобой при затворении водой не проявляет вяжущих свойств, то чтобы началась реакция гидратации, используют активатор в виде соединения щелочного металла. В щелочной среде стеклобой гидратируется с образованием кремниевых кислот, которые при достижении определенных значений кислотности сре-



ды начинают превращаться в гель. В итоге получается плотный, прочный и долговечный силикатный конгломерат – стеклобетон [6].

Цель работы – исследовать влияние комплексной микродисперсной кремнеземсодержащей добавки, состоящей из микрокремнезема и стеклобоя, на водостойкость магнезиального вяжущего на основе каустического доломита.

Методика и объекты исследования

В экспериментальных исследованиях использованы физико-химические методы, определение показателей пористости образцов по кинетике водопоглощения.

Для исследований использовали полуобжиговый доломит месторождения Руба (Витебская область, Республика Беларусь), раствор бишофита ($MgCl_2 \cdot 6 H_2O$) с массовой долей $MgCl_2$ 15 %, стеклобой бытовых отходов различных фракций, микрокремнезем пылевидной фракции. Стеклобой также содержит аморфную форму SiO_2 .

В экспериментальных исследованиях использовали измельченный стеклобой различных фракций: 4–5 мм, 2–3 мм, $\approx 10^{-3}$ мм (тонкодисперсная фракция).

Для оценки влияния добавки измельченного стеклобоя в магнезиальное вяжущее на основе каустического доломита приготавливали композиционные смеси с содержанием стеклобоя от 0 до 30 % по массе. Исследование свойств композиционных вяжущих проводили на образцах-кубиках $2 \times 2 \times 2$ см, изготовленных из теста нормальной густоты литьевым способом.

Результаты и их обсуждение

Магнезиальные цементы на каустическом магнезите и доломите имеют ряд отрицательных качеств при схватывании и структурообразовании, а также низкую водостойкость. Выявлена техническая возможность применения в качестве заполнителей на каустическом доломите промышленных отходов (древесная мука, золошлаковые смеси, бумажные и пластиковые отходы, отходы переработки автомобильных шин).

Экспериментально определено, что при твердении доломитового цемента с добавкой дисперсного SiO_2 (силика – отход ферросплавного производства) образуются гидросиликаты магния типа серпентина ($3MgO \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$) и сепиолита ($8MgO \cdot 12SiO_2 \cdot nH_2O$). Затвердевший модифицированный цемент на основе доломита обладает повышенной прочностью и водостойкостью при содержании SiO_2 10–20 % [8].

Зависимость коэффициента размягчения (K_p) и водопоглощения (W) от содержания стеклобоя разных фракций в образцах представлены в таблицах 1–3.

Таблица 1. – Зависимость коэффициента размягчения и водопоглощения от содержания стеклобоя (размер частиц 4–5 мм)

№ п/п	Содержание стеклобоя, %	Фракция стеклобоя, мм	Коэффициент размягчения (K_p)	Водопоглощение по массе (W), %
1	0	–	0,85	15,5
2	5	4–5	0,84	15,5
3	10	4–5	0,84	15,6
4	15	4–5	0,82	15,3
5	20	4–5	0,79	14,5
6	25	4–5	0,78	13,6



Таблица 2. – Зависимость коэффициента размягчения и водопоглощения от содержания стеклобоя (размер частиц 2–3 мм)

№ п/п	Содержание стеклобоя, %	Фракция стеклобоя, мм	Коэффициент размягчения (Кр)	Водопоглощение по массе (W), %
1	0	–	0,85	15,5
2	5	2–3	0,81	15,2
3	10	2–3	0,81	15,0
4	15	2–3	0,79	14,3
5	20	2–3	0,76	14,2
6	25	2–3	0,73	13,5

Таблица 3. – Зависимость коэффициента размягчения и водопоглощения от содержания стеклобоя (размер частиц 10^{-3} мм)

№ п/п	Содержание стеклобоя, %	Фракция стеклобоя, мм	Коэффициент размягчения (Кр)	Водопоглощение по массе (W), %
1	0	$\approx 10^{-3}$	0,85	15,5
2	5	$\approx 10^{-3}$	0,81	15,2
3	10	$\approx 10^{-3}$	0,76	13,8
4	15	$\approx 10^{-3}$	0,68	12,1
5	20	$\approx 10^{-3}$	0,63	10,5
6	25	$\approx 10^{-3}$	0,63	10,4
7	30	$\approx 10^{-3}$	0,71	11,3

Полученные данные показывают, что стеклобой, измельченный до размера частиц от 0,5 до 0,2 мм, существенного влияния на водостойкость образцов из магнезиального вяжущего не оказывает (таблицы 1 и 2). Стеклобой тонкодисперсной фракции с размером частиц $\approx 10^{-3}$ мм оказывает существенное влияние на водостойкость исследуемых образцов. Уменьшение коэффициента размягчения и водопоглощения особенно заметно при содержании стеклобоя 20 % по массе.

Дальнейшее увеличение содержания стеклобоя до 25 % не изменяет значения исследуемых величин, а при содержании добавки 30 % наблюдается снижение водостойкости магнезиального композиционного вяжущего.

Повышение водостойкости магнезиального цемента на каустическом доломите при модификации его стеклобоем объясняется двумя факторами: 1) уменьшением количества пор и изменением структуры поровой системы в образцах и 2) сложными физико-химическими взаимодействиями в ходе твердения.

Установлено, что образцы, содержащие тонкодисперсный стеклобой, имеют истинную плотность тем меньше, чем больше в них добавки. Это объясняется, по нашему мнению, меньшей истинной плотностью стеклобоя по сравнению с плотностью оксида магния с одной стороны и меньшей плотностью гидроксидов или оксохлоридов магния и кальция с другой. Достигается более плотная упаковка зерен оксида магния и кальция и стеклобоя высокой дисперсности. Установлено, что с увеличением содержания стеклобоя до 20–25 % общая пористость затвердевшего камня уменьшается с 44 % (контрольные образцы) до 28,35 % (в 1,55 раза) [9].

На основе полученных данных сделали вывод о возможности модифицирования каустического доломита комплексной добавкой, содержащей микрокремнезем (отход ферросплавного производства) и стеклобой. Полученные экспериментальные данные представлены в таблицах 4–6.



Таблица 4. – Зависимость коэффициента размягчения и водопоглощения от содержания стеклобоя и микрокремнезема (размер частиц 4–5 мм)

№ п/п	Содержание стеклобоя, %	Содержание микрокремнезема, %	Коэффициент размягчения (Кр)	Водопоглощение по массе (W), %
1	0	0	0,87	19,9
1	0	25	0,70	14,0
2	5	20	0,79	14,5
3	10	15	0,62	12,1
4	15	10	0,65	12,7
5	20	5	0,75	13,5
6	25	0	0,78	13,6

Таблица 5. – Зависимость коэффициента размягчения и водопоглощения от содержания стеклобоя и микрокремнезема (размер частиц 2–3 мм)

№ п/п	Содержание стеклобоя, %	Содержание микрокремнезема, %	Коэффициент размягчения (Кр)	Водопоглощение по массе (W), %
1	0	0	0,87	19,9
1	0	25	0,73	13,9
1	5	20	0,71	13,2
3	10	15	0,60	12,0
4	15	10	0,62	12,3
4	20	5	0,72	13,0
6	25	0	0,73	13,5

Таблица 6. – Зависимость коэффициента размягчения и водопоглощения от содержания стеклобоя (размер частиц 10^{-3} мм)

№ п/п	Содержание стеклобоя, %	Содержание микрокремнезема, %	Коэффициент размягчения (Кр)	Водопоглощение по массе (W), %
1	0	0	0,87	19,9
1	0	25	0,58	8,8
1	5	20	0,59	8,8
3	10	15	0,46	7,4
4	15	10	0,56	8,3
5	20	5	0,63	10,5
6	25	0	0,63	10,4

Порошок стекла при смешивании с водой не обеспечивает вяжущих характеристик. В щелочной среде магнезиального вяжущего образуются кремниевые кислоты, которые постепенно трансформируются в гель, который заполняет открытые поры в структуре цементного клинкера. В результате химического взаимодействия гелеобразного SiO_2 с оксидами кальция и магния образуются на ранних стадиях субмикроструктурные и гелевидные гидросиликаты магния и кальция (данные петрографического анализа). Гелевидные зерна SiO_2 могут быть дополнительными центрами кристаллизации оксохлоридов и гидросиликатов магния и кальция, которые и обеспечивают прочность и водостойкость стекломagneзиальных композиций. Установлено, что изменение прочности и водостойкости образцов из стекломagneзиальных композиций растянуто во времени и завершается примерно после шести месяцев твердения [9].

Анализ экспериментальных данных показал, что использование комплексной добавки микрокремнезема и стеклобоя достаточно эффективно. Следует отметить сниже-



ние коэффициента размягчения и водопоглощения композиционного вяжущего в сравнении с микрокремнеземом и стеклобоем по отдельности. Особенно эффективна комплексная добавка с содержанием 15 % микрокремнезема и 10 % стеклобоя с размером частиц 10^{-3} мм.

Присутствие аморфного кремнезема способствует увеличению скорости гидратации оксида магния. Скорость образования гидросиликатов при комнатной температуре в значительной степени зависит от дисперсности SiO_2 . Установлено, что если кварцевые частицы имеют размеры меньше 20–30 мк, то они довольно быстро взаимодействуют с гидроксидом магния, образуя гидросиликаты. Это, в частности, обусловлено тем, что скорость образования гидросиликатов при комнатной температуре увеличивается с повышением концентрации силановых групп ($-\text{Si}-\text{OH}$), которая, в свою очередь, связана с дисперсностью кварцевого порошка. При помоле кварца происходит частичное разрушение связи $-\text{Si}-\text{O}-\text{Si}-$ с образованием связи $-\text{O}-\text{Si}-$, которая с влагой воздуха легко образует на поверхности зерен кварца силановые связи $-\text{Si}-\text{OH}$.

Гидросиликаты магния образуются первоначально в виде гелевидных пленок, которые значительно устойчивее пленок $\text{Mg}(\text{OH})_2$. Эти выводы были получены путем измерения электропроводности жидкой фазы.

Заключение

1. Установлена возможность использования стеклобоя в виде тонкодисперсной добавки в комплексе с микрокремнеземом в магнезиальный цемент на каустическом доломите.
2. Введение в магнезиальный цемент комплексной добавки является эффективным способом повышения его водостойкости.
3. Разработаны составы водостойких магнезиальных композиций с содержанием 15–10 % микрокремнезема и 10–15 % стеклобоя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнедов, А. Н. Отходы производства. Обращение, учет, платежи в бюджет за размещение / А. Н. Гнедов. – Минск : Дикта, 2014. – 256 с.
2. Национальная стратегия по обращению с твердыми коммунальными отходами и вторичными материальными ресурсами в Республике Беларусь на период до 2035 года [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.government.by/upload/docs/filea1a9a20a06fc7fe5.PDF>. – Дата доступа: 25.09.2018.
3. Совместная система экологической информации. Образование отходов [Электронный ресурс] // Нац. стат. ком. Респ. Беларусь. – Режим доступа : <http://www.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/otrasli-statistiki/okruzhayuschaya-sreda/sovместnaya-sistema-ekologicheskoi-informatsii2/i-othody/i-1-obrazovanie-othodov/>. – Дата доступа: 13.12.2017.
4. Отходы производства и потребления. Классификация и виды [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://instr.deal.by/a31974-othody-proizvodstva-potrebleniya.html>. – Дата доступа: 25.09.2018.
5. Козубская, Т. Г. Использование техногенных отходов в производстве строительных материалов / Т. Г. Козубская // Строит. материалы. – 2002. – № 2. – С. 10.



6. Фахратов, М. Эффективная технология использования промышленных отходов в производстве бетона и железобетона / М. Фахратов // Строит. материалы. – 2003. – № 12. – С. 48–49.

7. Ступень, Н. С. Добавки в бетонные композиции: экологические и химические аспекты / Н. С. Ступень // Прыроднае асяроддзе Палесся: асаблівасці і перспектывы развіцця : зб. навук. прац / Палес. аграр.-экал. ін-т НАН Беларусі ; рэдкал.: М. В. Міхальчук (гал. рэд.) [і інш.]. – Брэст : Альтернатива, 2016. – Вып. 8. – С. 29–31.

8. Ступень, Н. С. Композиционные вяжущие на основе белорусских доломитов / Н. С. Ступень // Тез. докл. IV Междунар. науч. конф. «Прыроднае асяроддзе Палесся: асаблівасці і перспектывы развіцця». – Брэст : Альтернатива, 2008. – С. 205.

9. Ступень, Н. С. Стекломагнезиальные композиции: экологические аспекты / Н. С. Ступень // Прыроднае асяроддзе Палесся: асаблівасці і перспектывы развіцця : зб. навук. прац / Палес. аграр.-экал. ін-т НАН Беларусі ; рэдкал.: М. В. Міхальчук (гал. рэд.) [і інш.]. – Брэст : Альтернатива, 2018. – Вып. 11. – С. 98–100.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.09.2018

Stupen N.S. Composite Magnesia Binders on the Basis of Silica Containing Solid Waste

The article presents experimental data on utilization of cullet and microsilica as a complex active fine additive in magnesium cement on caustic dolomite. The results on the optimal content of highly dispersed addition of cullet (15 %) and microsilica (10 %) to obtain a water-resistant composition of magnesium cement with a softening coefficient of 0,46.



УДК 591.553 (476.7)

И.В. Абрамова¹, В.Е. Гайдук²

¹канд. биол. наук, доц., декан географического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
²д-р биол. наук, проф. каф. зоологии и генетики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: iva.abramova@gmail.com

СИНАНТРОПИЗАЦИЯ И УРБАНИЗАЦИЯ НАСЕЛЕНИЯ ГАЛКИ (*CORVUS MONEDULA*, *PASSERIFORMES*) В ЮГО-ЗАПАДНОЙ БЕЛАРУСИ

*На основании многолетних (1967–2017 гг.) собственных исследований в юго-западной Беларуси и литературных данных прослежены синантропизация и урбанизация галки (*Corvus monedula*, *Passeriformes*) в юго-западной Беларуси в XX – начале XXI в. Показано, что эти процессы проходили наиболее интенсивно в 1990-е гг. и в начале XXI в. в урбанизированных экосистемах региона – в городах Брест, Ивацевичи и других населенных пунктах. В последние десять лет численность галки летом варьировала в пределах 70–104 ос./км², зимой – 90–140 ос./км².*

Введение

Антропогенная трансформация ландшафтов и возникновение новых биотопов, благоприятных для многих видов птиц, в том числе и галки, возможность использования новых богатых кормовых ресурсов, укрытий и убежищ антропогенного происхождения способствуют приобретению специфических адаптаций – изменение их поведения, обособление антропогенных популяций. По мере повышения степени антропогенизации ландшафтов происходит снижение видового разнообразия птиц в городах и поселках, сопровождающееся возрастанием численности некоторых видов в них. В результате негативная тенденция снижения численности одних видов может нивелироваться возрастанием численности других, и общая численность птиц может даже увеличиться.

Экологии, биоценологическому и хозяйственному значению врановых птиц посвящены ряд совещаний, проходивших в различных городах России: Москве (1984), Липецке (1989, 1993), Ставрополе (1992), Казани (1997), Саранске (2002) и др.

В настоящее время врановые птицы входят в состав основного синантропного ядра авифауны антропогенных ландшафтов многих регионов. Галку можно использовать в качестве модели для рассмотрения особенностей синантропизации и урбанизации птиц. Это дает возможность проследить изменение в поведении и экологии этого вида при разной степени связи с антропогенным и урбанизированным ландшафтом [1–5].

Материал и методы

Материал для данной работы был собран в 1967–2017 гг. в населенных пунктах (города Брест, Ивацевичи, Береза, Дрогичин, Каменец, Пружаны; деревни Томашовка, Страдечь, Любищицы и др.) и естественных экосистемах Брестской области. Применяли общепринятые методы полевых исследований [6]. В данном исследовании основное внимание уделялось урбанизированным экосистемам – городам и поселкам. Наиболее полные данные собраны в г. Бресте и его окрестностях. Используются сведения, опубликованные в [7; 8]. В г. Бресте в 1986–2017 гг. проведены учеты птиц на постоянных маршрутах в период сезона размножения и зимой (микрорайоны Восток и Ковалево – Южный городок – ул. Набережная – Брестская крепость; Гребной канал – ул. Московская – ул. Ленина – Северный городок – д. Тюхиничи). Длина маршрута составляла 25 км,



ширина 200 м, площадь 500 га. Общая протяженность пройденных учетных маршрутов более 900 км. Маршрут включал застройку старого, нового и индивидуального типов, долины рек Мухавец и Западный Буг в пределах Бреста.

В урбанизированных экосистемах наряду с учетом птиц на маршруте вели также синхронный подсчет птиц на небольших фиксированных площадках (окруженные домами газоны и скверы, участки кустарников и леса и т.д.). Полученные данные затем пересчитывались на 1 км² каждого местообитания. Целенаправленные многолетние наблюдения и исследования, учеты численности птиц проводились в г. Бресте, г. Ивацевичи, д. Томашовка и дачном поселке Леснянка Брестского р-на, д. Любищицы Ивацевичского р-на. Это позволило установить динамику плотности населения вида, изменение поведения, характер размещения птиц урбанизированных и природных популяций. В других местообитаниях, в том числе и естественных экосистемах, исследования и наблюдения проводились не каждый год.

Результаты исследования и их обсуждение

Галка – типичная птица населенных пунктов, в которых гнездится в различных постройках, дуплах деревьев и грачевниках. Процессы синантропизации и урбанизации галки в XX в. в России и на сопредельных территориях рассмотрены в ряде работ В.М. Константинова [1–4] с анализом литературных данных и других орнитологов [9; 10]. Показано, что в XX в. многочисленные стаи галок зимовали в крупных городах центральной России. Весной часть из них покидали города и гнездились в отдалении от поселений человека. Лишь отдельные пары гнездились в пригородах и лесопарковых зонах больших городов. Интенсивная урбанизация галки проходила во второй половине XX в. на обширной территории европейской России. Галки являются одной из самых обычных гнездящихся птиц Ленинградской области. В антропогенных ландшафтах она встречается во все сезоны года, в естественных биотопах летом обычна, но зимой редка [10].

Процесс синантропизации и урбанизации галки в Беларуси слабо изучен. Однако литературные сведения и наши наблюдения дают возможность проследить эти процессы на протяжении XX–XXI вв.

В Беларуси галка, как правило, гнездится в городах и городских поселках, охотно селится в старых парках, в рощах вблизи поселений человека, в разных старых лесах с дуплистыми деревьями. Отметим, что в Ленинградской области [10] галки, гнездящиеся в естественных лесных биотопах, появляются на гнездовых участках не раньше второй половины марта. С августа большинство из них оставляют эти участки и перемещаются в антропогенные ландшафты к потенциально возможным источникам корма.

По данным А.В. Федюшина и М.С. Долбика [11], в первой половине XX в. галки размножались в Минске, Пинске, Столине и др. Уже во второй половине XX в. отмечено, что галка селится в лесопарках, парках, скверах, старых уличных насаждениях, придорожных полосах и других биотопах [12; 13]. М.С. Долбик [12] в 1970-х гг. отмечал, что в последней трети XX в. процесс урбанизации галки приблизился к завершению.

В зимний период в 1980–1983 гг. А.Н. Иванютенко выявил в Минске 6 видов врановых. В парковой зоне фоновым видом является галка (10,0 %); в районах застройки нового типа (1–5 лет) на долю этого вида приходилось 13,0 %; в сомкнутых застройках – 9,7 %; в районах с застройкой индивидуального типа – 18,2 % [14]. По сведениям В.В. Гричика и Л.Д. Бурко [15], галка селится в населенных пунктах, брошенных хуторах, опушках леса в пойменных лесах. Птицы, гнездящиеся в городах, видимо ведут оседлый образ жизни. В Белорусском Полесье галки приступают к выбору гнездового



участка и строительству гнезда в конце марта – первой половине апреля [16]. Откладка яиц во второй–третьей декадах апреля.

В Беларуси начало кладок яиц приходится на третью декаду апреля, в отдельные годы на середину апреля, появление птенцов – в первой половине мая [13]. В урбанизированных ландшафтах, по нашим наблюдениям, галка начинает строить гнезда и откладывает яйца на 6–10 дней раньше, чем в естественных экосистемах. Репродуктивный период у птиц, по сравнению с лесными популяциями, удлиняется на 1–2 недели. Галка гнездится в дуплах деревьев, в нишах зданий, в полостях опор, под карнизами высотных зданий, на колокольнях. Птицы тяготеют к скальному ландшафту, который для них является исходным. Например, в корпусе № 1 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина галки в течение ряда лет (2010–2017 гг.) гнездились под карнизами здания с четвертого по седьмой этаж в количестве 4–8 пар. На территории дачных поселков Леснянка и Машиностроитель (Брестский р-н) галки многократно пытались строить гнезда в печных дымоходах, после чего дачники установили решетки, лишившие птиц возможности гнездиться в этих нишах.

Летнее перемещение птиц начинается с третьей декады июня. В это время происходит объединение птиц в стаи, начинаются кочевки в поисках корма. Летние стаи галок смешанные, они состоят из молодых и взрослых птиц, встречаются обособленно или вместе с серыми воронами и грачами в городах и поселках, на лугах и полях. Стаи галок (часто совместно с серыми воронами и грачами) посещают свалки и другие кормные места, особенно осенью и зимой.

На территории Бреста имеются значительные пространства, покрытые древесной растительностью, в том числе хвойными, лиственными и плодово-ягодными насаждениями (сады) и кустарниками. В старой части города сохранились деревянные жилые постройки, сараи, высокие деревья, сады и кусты. Наибольшее число галок отмечено в многоэтажных кварталах города, в долине р. Мухавец, в парках, в Брестской крепости, на гребном канале (таблица).

Количество гнезд галок на постоянных маршрутах в Бресте варьировало в 1967–2017 гг. в пределах 30–90 шт., при этом в 1967–1980 гг. оно составляло 30–50 гнезд, в 1981–1997 гг. – 60–70, в последние 10 лет достигло 80–90. За период наблюдений плотность гнездования увеличилась в 3 раза, от 6,0 ос./км² в 1970 г. до 18 ос./км² в 2016–2017 гг. В Бресте, в целом по нашим данным, количество гнездящихся пар в настоящее время составляет около 1 100 пар.

Численность галки в Беларуси на конец XX в. оценивалась в 350–400 тыс. пар, отмечено некоторое уменьшение численности в связи с изменением структуры застройки городов [17]. В юго-западной Беларуси численность галок в последние 10 лет оценивается в 60–75 тыс. гнездящихся пар. Численность стабильна.

И.В. Абрамова в ходе многолетних исследований плотности летнего и зимнего населения птиц различных экосистем, в том числе и урбанизированных, установила, что плотность населения галок варьирует в широком диапазоне [8]. Наибольшая плотность вида летом выявлена в урбанизированных ландшафтах: г. Ивацевичи (60,2 ос./км²), пойменные экосистемы г. Бреста (40,3 ос./км²), гребной канал и болото в микрорайоне Ковалево (г. Брест) (40,2 ос./км²), д. Томашовка (38,5 ос./км²). В зимний период плотность галок возрастает почти в 2 раза в индивидуальной застройке Бреста, в 1,5 раза в парках и ряде других экосистем. В других городах (Барановичи, Кобрин, Пинск, Береза и др.) плотность населения галки в зимний период была примерно в 1,5–2 раза выше, чем летом (таблица).



Наибольшая плотность галки в 2007–2017 гг. отмечена на территории пойменных экосистем г. Бреста (летом 50,3 ос./км² и зимой 73,5 ос./км²), а также в микрорайоне Ковалево (многоэтажные здания, индивидуальная застройка, гребной канал и болото) – 48,2 ос./км² летом и 98,4 ос./км² – зимой.

Таблица. – Обилие населения галок в урбанизированных экосистемах юго-западной Беларуси в 2007–2017 гг., ос./км²

Экосистемы	Лето	Зима
г. Барановичи	46,8	60,4
г. Кобрин	32,6	60,0
г. Ивацевичи	30,2	76,4
г. Пинск	18,5	60,7
г. Береза	18,0	50,7
г. Иваново	20,6	40,5
г. Столин	32,4	50,0
г. Высокое	15,2	30,6
г. Брест, индивидуальная застройка	15,4	38,8
г. Брест, многоэтажные кварталы	40,6	60,5
Парки г. Бреста	46,5	70,9
Пойменные экосистемы г. Бреста	50,3	73,5
Гребной канал и болото	48,2	98,4
д. Томашовка, Брестский р-н	30,5	41,2
д. Любищицы, Ивацевичский р-н	10,6	20,8
Дачные поселки Леснянка и Машиностроитель	4,0	7,0

Отметим, что в районах индивидуальной застройки Гомеля зимой 1975–1980 гг., в отличие от районов современных многоэтажных строений и смешанной застройки, резко возросла численность галок – до 140,7 ос./км² [17]. На территории мелкого населенного пункта (д. Покалюбичи) Гомельской области в 1998–2003 гг. по сезонам года средняя плотность галки варьировала от 7,5 до 65,0 ос. на 10 га [18]. По данным учетов, в 1982–1983 гг. в поселениях человека в Беловежской пуще плотность галок составляла 94,0 ос./км², зимой – 101,0 ос./км² [19].

Нами прослежена сезонная динамика численности галки в микрорайонах Ковалево и Восток г. Бреста в 2007 и 2017 гг. (рисунок 1). Осенью и зимой плотность населения птиц значительно выше по сравнению с летом и достигает в 2017 г. 110,0 ос./км². В 2007 г. плотность населения птиц была несколько ниже как летом (60–70 ос./км), так и зимой (90–96 ос./км²), чем в 2017 г.

Плотность населения галок в 1987–2017 гг. летом и зимой варьировала по годам (рисунок 2). Летом она была наименьшей в 1987–1999 гг., постепенно увеличивалась и в 1994–2010 гг. поддерживалась на уровне 40–50 ос./км², а последние 10 лет она поддерживалась на уровне 70–104 ос./км². В зимний период также отмечено колебание численности птиц по годам. В 1987–2006 гг. она не превышала 60 ос./км². В последние годы отмечено увеличение численности птиц, которое составило 70–104 ос./км² летом и 90–140 ос./км² зимой.

В естественных лесных экосистемах вид относительно редок, плотность в июне–июле не превышает 5,0, варьируя в пределах 1,0–5,0 ос./км²; зимой она значительно уменьшается и находится в пределах 0,2–2,3 ос./км², в некоторые годы галка не попадалась в учеты [8].

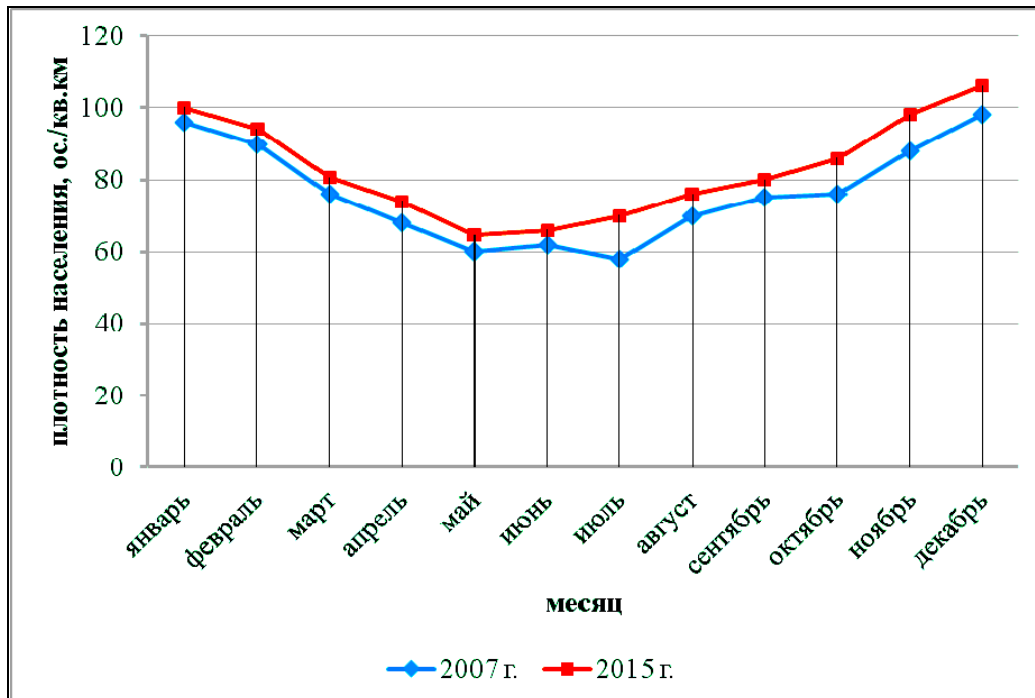


Рисунок 1. – Сезонная динамика численности галки в микрорайонах Ковалево и Восток Бреста

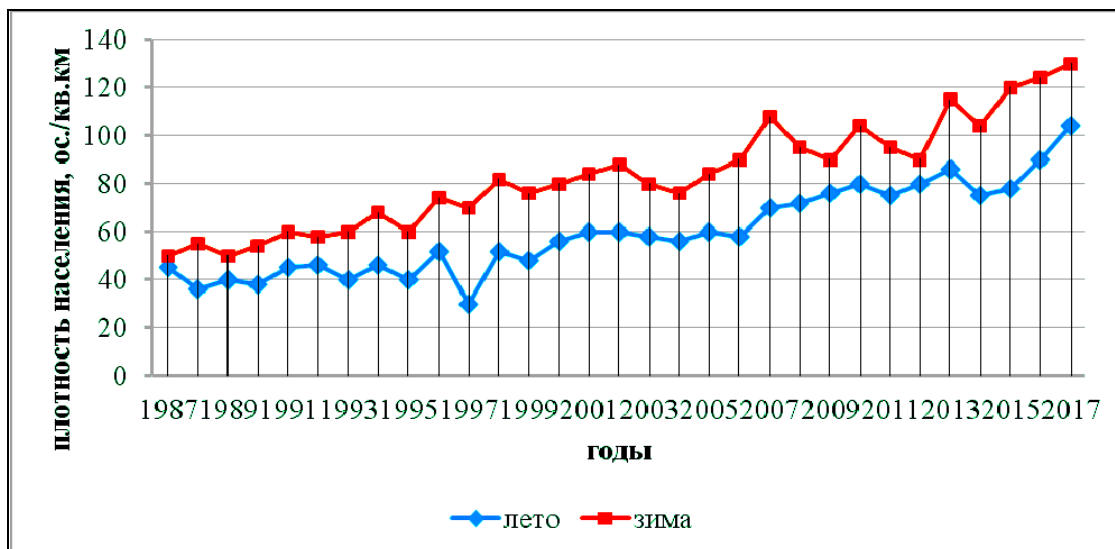


Рисунок 2. – Многолетняя динамика плотности населения галки в микрорайонах Ковалево и Восток Бреста летом и зимой

В период выкармливания птенцов галки добывают преимущественно насекомых: жуков, гусениц чешуекрылых, червей и др. Летом и осенью птицы включают в кормовой рацион семена ржи, пшеницы, ячменя и других растений. В последнее десятилетие галки в течение всего года в городах и поселках (Брест, Ивацевичи и др.) концентрируются на свалках, около мусорных контейнеров, где кормятся пищевыми отходами. Попадая в новые условия урбанизированного ландшафта, галки, как и другие птицы, приобретают специальные адаптации: в первую очередь изменяется поведение птиц. Они перестают воспринимать человека как источник опасности.



На территории европейской России урбанизация галки в последние три десятилетия XX в. приобрела характер массовой экспансии в городах и привела к формированию городских популяций. В городах европейской части России и Беларуси утечка продуктов питания до конца 1980-х гг. была значительной. Было распространено контейнерное хранение бытовых отходов (включая пищевые отходы во дворах).

Тем самым птицам было доступно изобилие источников корма в течение круглого года. Наряду с этим терпимое отношение человека к галке в городе способствовало успешному освоению видом городских территорий. Начиная с 1991–1992 гг. экологический кризис сопровождался резким снижением утечки продуктов питания человека, что привело к значительному ухудшению состояния кормовой базы для синантропных птиц, в том числе и галки, тренд численности которой в ряде регионов отрицательный.

Заклучение

Основной причиной синантропизации и урбанизации галки в юго-западной Беларуси является обилие и доступность кормов антропогенного происхождения, которые используют птицы в городах и поселках. Здесь они почти полностью переходят на питание пищевыми и хозяйственными отходами. Возможность добывать корм в течение года, улучшение температурных условий, покровительственное отношение людей, практически отсутствие пернатых хищников способствуют формированию урбанизированных популяций этого вида. Синантропизация и урбанизация галки происходит на уровне отдельных особей и их групп, популяций. Проявляется это в увеличении плотности населения птиц в урбанизированных ландшафтах, особенно осенью и зимой. В городах и поселках региона она гнездится значительно раньше, чем в естественных ландшафтах, а гнездовой период более растянут. У городских популяций птиц возрастает оседлость, уменьшается миграционная активность.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Врановые как модель синантропизации и урбанизации птиц / В. М. Константинов [и др.] // Материалы Всесоюз. науч.-метод. совещ. зоологов педвузов. – Махачкала, 1990. – Ч. 2. – С. 119–120.
2. Константинов, В. М. Особенности урбанизации врановых птиц / В. М. Константинов // Экология, эволюция и систематика животных : материалы Всесоюз. науч.-практ. конф. с междунар. участием. – Рязань : Голос губернии, 2009. – С. 15–19.
3. Константинов, В. М. Особенности экологии и поведения галки в антропогенных ландшафтах Ставропольского края / В. М. Константинов, А. Н. Хохлов // Экологические проблемы Ставропольского края и сопредельных территорий : тез. докл. краевой науч.-практ. конф. – Ставрополь, 1989. – С. 220–229.
4. Константинов, В. М. Об оседлости урбанизированных популяций врановых птиц / В. М. Константинов, В. А. Марголин, И. Г. Лебедев // Докл. МОИП. Зоология и ботаника. Ресурсы живой природы, их использование и охрана. – М., 1990. – С. 18–20.
5. Храбрый, В. М. Пути приспособления птиц к урбанизированному ландшафту / В. М. Храбрый // Птицы и урбанизированный ландшафт. – Каунас, 1984. – С. 4–8.
6. Вергелес, Ю. И. Количественные учеты населения птиц: обзор количественных методов учета птиц / Ю. И. Вергелес. – Беркут, 1994. – Т. 3, №1. – С. 43–48.
7. Гайдук, В. Е. Экология птиц юго-запада Беларуси. Воробьинообразные : монография / В. Е. Гайдук, И. В. Абрамова. – Брест : Изд-во БрГУ, 2013. – 298 с.



8. Абрамова, И. В. Структура и динамика населения птиц экосистем юго-запада Беларуси / И. В. Абрамова. – Брест : Изд-во БрГУ, 2007. – 208 с.
9. Храбрый, В. М. Многолетняя динамика гнездовой численности врановых в Санкт-Петербурге / В. М. Храбрый // Экология врановых птиц в антропогенных ландшафтах : материалы VI Междунар. конф. – Саранск, 2002. – С. 130–132.
10. Мальчевский, А. С. Птицы Ленинградской области и сопредельных территорий : в 2 т. / А. С. Мальчевский, Ю. П. Пукинский. – Л. : ЛГУ, 1983. – Т. 2. – 502 с.
11. Федюшин, А. В. Птицы Белоруссии / А. В. Федюшин, М. С. Долбик. – Минск : Наука и техника, 1967. – 519 с.
12. Долбик, М. С. Ландшафтная структура орнитофауны Белоруссии / М. С. Долбик. – Минск : Наука и техника, 1974. – 312 с.
13. Никифоров, М. Е. Птицы Беларуси: справочник-определитель гнезд и яиц / М. Е. Никифоров, Б. В. Яминский, Л. П. Шкляр. – Минск : Выш. шк., 1989. – 479 с.
14. Иванютенко, А. Н. Распределение и численность врановых птиц г. Минска в зимний период / А. Н. Иванютенко // Биологические основы освоения, реконструкции и охраны животного мира Белоруссии : тез. докл. V зоол. конф. – Минск : Наука и техника, 1983. – С. 121–122.
15. Гричик, В. В. Животный мир Беларуси. Позвоночные : учеб. пособие / В. В. Гричик, Л. Д. Бурко. – Минск : Изд. центр БГУ, 2013. – 399 с.
16. Кусенков, А. Н. Зимняя численность и некоторые черты экологии врановых птиц в урбанизированных ландшафтах Белорусского Полесья / А. Н. Кусенков, А. Д. Тиханский // Материалы Всесоюз. науч.-метод. совещ. зоологов педвузов. – Махачкала, 1990. – Ч. 2. – С. 141–142.
17. Птицы Беларуси на рубеже XXI века / М. Е. Никифоров [и др.]. – Минск : Изд. Н. А. Королев, 1997. – 188 с.
18. Горошко, З. А. Динамика численности врановых птиц мелкого населенного пункта Полесья / З. А. Горошко, А. Н. Кусенков // Экологические проблемы Полесья и сопредельных территорий : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 19–21 окт. 2005 г. ; редкол.: А. Н. Кусенков [и др.]. – Гомель : ГГУ, 2005. – С. 40–42.
19. Дацкевич, В. А. Исторический очерк и некоторые итоги орнитологических исследований в Беловежской пуще (1945–1985) / В. А. Дацкевич. – Витебск : ВГУ, 1998. – 115 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.06.2018

Abramova I.V., Gaiduk V.E. The Synthropisation and the Urbanization of the Eurasian Jackdaw (*Corvus Monedula* L., Passeriformes) in Southwest of Belarus

*The article tracks the processes of the synanthropization and the urbanization of the Eurasian Jackdaw (*Corvus monedula*, Passeriformes) in Belarus. The field work was performed in the years 1967–2017 applying the conventional bird count methods. These processes took place most intensively in the last decade of the 20 and beginning of the 21 centuries in the cities (Brest, Ivatsevichi, etc.) and settlements. For example, in Brest from 2007 to 2017 years the number of nesting pairs of Eurasian Jackdaw on a route 25 km long and 200 m wide varied from 70 to 104 birds/km² in summer and from 90 to 140 birds/km² in winter.*



УДК 582.734.4:581.16:57.085.23

С.М. Ленивко

канд. биол. наук, доц., зав. каф. зоологии и генетики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: zoology@brsu.brest.by

О ПЕРСПЕКТИВНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ МИКРОКЛОНАЛЬНОГО РАЗМНОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННОГО РОЗОВОДСТВА

Представлен анализ современного состояния товарного оборота и промышленного производства срезной продукции роз на внутреннем рынке Республики Беларусь. Показано, что перевод цветочного производства на круглогодичное выращивание напрямую связан с внедрением технологии микроклонального размножения, которая позволит получать в достаточном количестве высококачественный посадочный материал для выращивания в теплице. Полученный таким образом посадочный материал позволит исключить транспортную составляющую и может стать реальным способом экономии для отечественного производителя цветочной продукции.

Введение

За последние 50 лет разведение цветов превратилось из летнего увлечения садоводов-любителей выращивать их для себя и просто для того, чтобы порадовать окружающих, в глобальную индустрию, технологический цикл которой рассчитан по часам. Производство цветов стало важной статьёй дохода не только для южных стран, но и стран с холодным климатом. Оранжерейные технологии давно победили зависимость цветоводства от времени года. Использование новейших технологий в странах Западной Европы позволяет получать и экспортировать различную цветочную продукцию высокого качества – свежесрезанные цветы, цветы в горшках, посадочный материал, удовлетворяя спрос покупателей далеко за пределами стран-производителей.

По мнению специалистов, ключевые перспективы и тенденции развития цветочного рынка обусловлены главным образом ростом благосостояния населения [1]. Прогнозируется общемировая тенденция перехода от восприятия цветов как атрибутов праздничных мероприятий, семейных событий, государственных торжеств к восприятию ежедневного обязательного атрибута оформления и украшения дома. Следовательно, главными драйверами роста продаж станут увеличение средней частоты покупки и флористические услуги [2], что уменьшит зависимость продаж от сезона. В связи с этим актуальной задачей для Республики Беларусь, как импортозависимой страны, является наращивание тепличных комплексов по круглогодичному выращиванию срезной продукции цветов для решения вопросов как импортозамещения на внутреннем цветочном рынке, так и увеличения объемов экспорта.

Современное состояние производства срезной продукции роз

Активно развивающийся в последнее время в нашей стране внутренний рынок цветов практически полностью удовлетворяет запросы белорусского покупателя за счет импорта. С каждым годом увеличивается спрос как на популярные, так и на экзотические цветы. Растет интерес к профессиональному составлению букетов, в том числе наполненных большим количеством разнообразных цветов. Однако в рейтинге цветочных предпочтений белорусов первое место занимают розы. Если в 2012 г. на розы приходилось 50,4 % от общего объема ввозимых в страну срезанных цветов, то в 2017 г. их доля



в структуре импорта выросла до 64,8 %. За ними следуют хризантемы и гвоздики с долей 18,8 % и 15,4 % соответственно.

В настоящее время на цветочных рынках стран СНГ, в том числе и Республики Беларусь, можно приобрести розы с таких частей света, как Южная Америка, Африка, Европа и Азия.

В 2012 г., по данным Национального статистического комитета Беларуси, основная часть срезанных роз поставлялась из Колумбии (37,0 %) и Нидерландов (31,3 %). Значительная часть импорта (19,3 %) приходилась на эквадорские розы (рисунок 1). Поставка свежих роз из Кении составила 9,8 %.

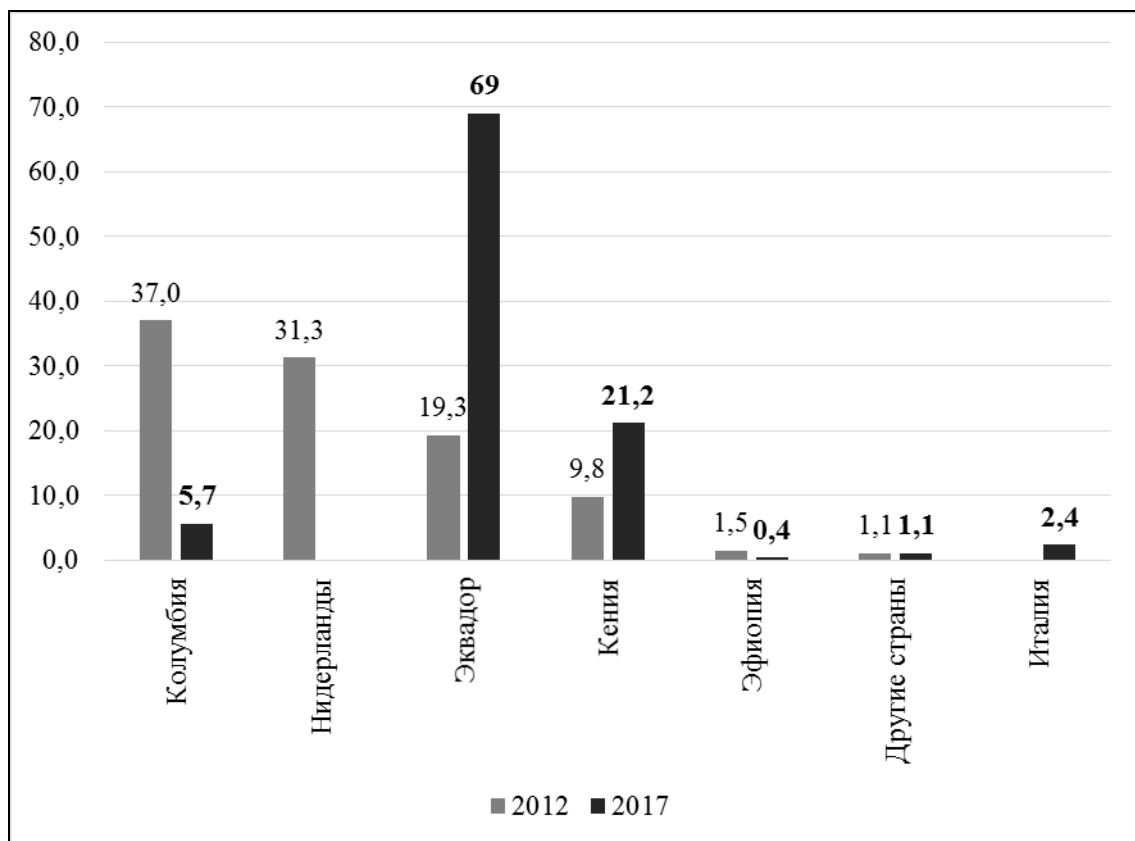


Рисунок 1. – Структура импорта свежих роз Республики Беларусь в 2012 г., в январе–ноябре 2017 г.

В 2017 г. структура стран-экспортеров роз в Республику Беларусь изменилась, особенно по странам Южной Америки (рисунок 1). Лидером по поставкам стал Эквадор (69,0 %), нарастив объем ввозимых роз с 2 млн до 189 млн штук в год. При этом рост экспорта колумбийских роз не был столь стремительным (с 3,6 млн до 15,6 млн штук в год), что сказалось на смене лидерства. Объем поставок роз из Колумбии составил всего 6,0 %. Несмотря на изменение в 2017 г. лидерства в импорте роз по странам-поставщикам, по-прежнему самый высокий показатель экспорта (74,7 %) отмечен из Южной Америки (в 2012 г. был 56,3 %).

Возросли поставки роз из Африки (с 11,3 % в 2012 г. до 21,6 % в 2017 г.). Так, Кения увеличила поставки роз в натуральном выражении почти в 60 раз, в процентном – в 2 раза от общего объема импорта роз по сравнению с 2012 г. Менее значительным –



в 6 раз (с 150 тыс. до 1 млн штук в год) был рост поставок роз из другой африканской страны – Эфиопии, что объясняет снижение объема ее поставок в структуре импорта.

Италия обошла в поставках Нидерланды – основного поставщика цветочной продукции Европы – и вышла на уровень страны-«миллионщика» по количеству (в штуках) ввозимых роз. Объем поставок свежесрезанных роз в натуральном выражении из Нидерландов сократился в 5 раз – с 3 млн штук в 2012 г. до 600 тыс. штук в 2017 г.

В 2017 г. расширился список стран, экспортирующих более 100 тыс. штук роз в год; в их числе Уганда, Армения, Украина, Россия, Испания.

География ключевых стран-экспортеров роз в Южной Америке (Эквадор и Колумбия), в Африке (Кения) указывает на благоприятное расположение их производственных плантаций в горных районах на высоте от 1 600 м вдоль экваториальной линии, что способствует росту сильных цветов с высокими толстыми стеблями и максимально крупными крепкими бутонами, имеющими насыщенный яркий цвет. Кроме подходящих географических и климатических условий для промышленного выращивания роз в открытом грунте, расширению площадей способствовали дешевая рабочая сила и внедрение цветочными хозяйствами современных технических систем полива, борьба с вредителями, контроль качества продукции. Согласно материалам крупнейшей выставки срезанных цветов России «ЦветыЭкспо-2017», эквадорские плантации цветов занимают площадь равную 4 200 га и насчитывают более 400 разновидностей растений, 74,0 % этой площади, т.е. 3 100 га, занято под розами [3].

В мире не так много регионов, где сложился идеальный климат и условия для выращивания цветов в промышленных масштабах, однако вполне достаточно «цветочных» государств. Крупнейшим производителем цветов в Европе являются Нидерланды, использующие для массового разведения роз условия защищенного грунта. Голландские розы по сравнению с эквадорскими имеют более короткий и тонкий стебель, бутон меньших размеров, однако их достоинством является более устойчивый запах и свежесть. Голландские розы не подвергаются длительной транспортировке в специальных холодильных установках, им не требуется много времени на пробуждение, как розам из Эквадора, у которых за достаточно продолжительный период между срезом и продажей большая часть аромата улетучивается. Кроме того, у сортов роз существует обратная генетическая корреляция между запахом и длительностью цветения: чем сильнее запах, тем короче цветение и, как следствие, меньшая стойкость. Главной особенностью и отличительной чертой цветочного производства Нидерландов являются их уникальные селекционные технологии, позволяющие только им выращивать радужные и синие розы. Ряд европейских стран, среди которых лидируют Италия и Германия, активно развивают современные технологии выращивания цветов и посадочного материала, что позволяет им конкурировать с южными странами.

Проведенный анализ официальной статистической информации по внешней торговле товарами Республики Беларусь за период с января 2012 г. по ноябрь 2017 г. показал, что в 2016 г. впервые экспорт роз из Беларуси вырос в 21 раз по сравнению с 2015 г. Намечившаяся тенденция к росту экспорта сохранилась и в 2017 г. (рисунок 2).

Однако зарегистрированный подъем экспорта связан с реэкспортом, когда крупные оптовые компании перегоняют через нашу страну с нидерландских аукционов в Россию миллионы роз. В Республике Беларусь, судя по разнице импорта-экспорта роз в натуральном выражении, реализуется около 11–12 млн штук роз. В то же время возрастающий спрос на розы в России должен послужить стимулом для интеграции белорусского производителя в цветочный рынок.

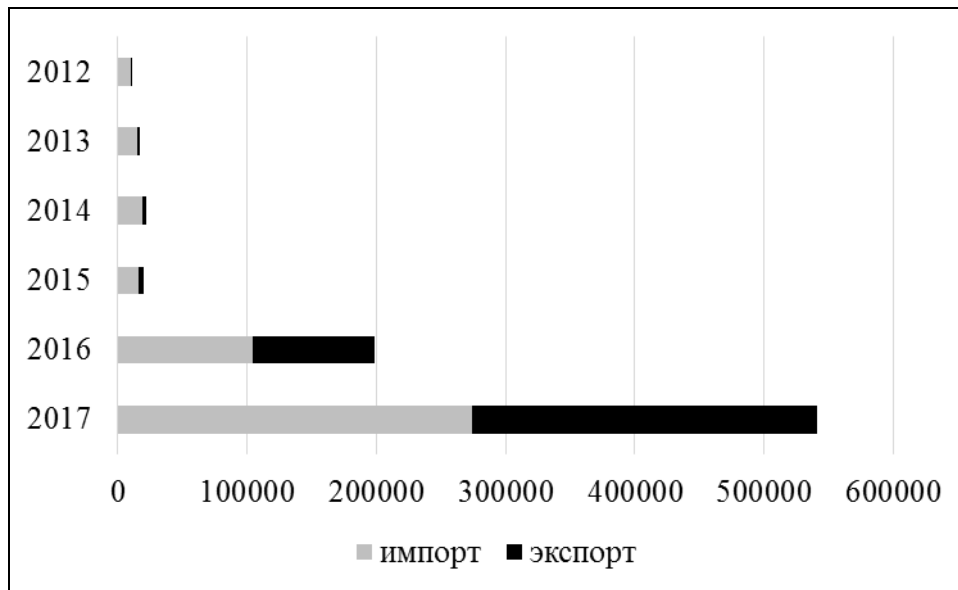


Рисунок 2. – Соотношение импорта и экспорта роз в Республике Беларусь, тыс. шт.

Белорусские производители роз

Доля национального производителя на внутреннем цветочном рынке пока мала и составляет, по мнению специалистов, занимающихся разведением роз, не более 6 % [4]. Более точно сегмент, занимаемый белорусскими производителями роз, определить трудно из-за отсутствия официальной статистики. Круглогодичным производством срезанных цветов занимаются единичные хозяйства и фермеры.

Большинство отечественных предприятий, занимающихся выращиванием и поставкой цветов, созданы на базе тепличных комплексов, специализирующихся на выращивании свежих овощей и зеленных культур. Так, лидерами индустриального овощеводства Республики Беларусь в Минской области, которые также занимаются выращиванием цветочной продукции, являются УП «Агрокомбинат «Ждановичи»» и УП «Минский парниково-тепличный комбинат». В 2006 г. УП «Агрокомбинат «Ждановичи»» выбрало новое направление – цветоводство – и с 2012 г. занялось разведением роз высокого качества. В настоящее время на комбинатах «Кунцевщина» и «Богатырево» УП «Агрокомбинат «Ждановичи»» освоена технология производства 16 сортов роз в теплицах площадью 2,2 га. По материалам газеты Минского района «Прысталічча» [5], в общем объеме выращиваемой цветочной продукции на срез в Республике Беларусь продукция УП «Агрокомбинат «Ждановичи»» за 2016 г. составила 15,5 %. По итогам работы за январь–март 2017 г. удельный вес агрокомбината в производстве роз в Республике Беларусь составил 11,1 %, а в г. Минске и Минской области – 25,5 %. Использование новейших технологий позволяет получать цветочную продукцию высокого качества и формировать постоянный спрос на внутреннем рынке. За январь–март 2017 г. производство роз составило 705,5 тыс. штук, что на 27,7 тыс. штук больше по сравнению с соответствующим периодом 2016 г.

Наращивает товарные объемы продаж и УП «Минский парниково-тепличный комбинат». На территории его цветочно-оранжерейного комплекса «Цветы столицы» в 2 га выращивают около 10 сортов роз по голландской технологии. В холодное время года на предприятии ежедневно срезают около 10–12 тыс. роз, а летом их количество возрастает до 15–17 тыс. штук.



Производительность розария общей площадью более 1 га производственного комплекса «Агромир», одного из ведущих агропредприятий Витебской области по выращиванию овощей в закрытом грунте, превышает 3 млн цветов в год.

Наряду с овощами собственное производство 21 сорта роз, 10 сортов тюльпанов и другой цветочной продукции налажено на ОСП «Тепличное хозяйство» ОАО «ДОРОРС» Минской области (площадь теплиц – 3,5 га).

Это далеко не полный список тепличных хозяйств, техническая оснащенность которых позволяет заниматься постоянным выращиванием роз наряду с производством овощных культур. Однако доля производства срезной цветочной продукции в таких «непрофильных» теплицах невелика. Зависимость от сезонных продаж, затраты на энергоносители во многом сдерживают широкомасштабное развитие промышленного производства цветов на срез. В то же время высокие темпы роста импорта и доходности цветочного бизнеса в мире свидетельствуют о необходимости модернизации отечественного промышленного производства цветов, реализации планомерной стратегии цветочного импортозамещения. Хорошим примером является опыт россиян. Внутреннее производство срезанных цветов и реализация тепличной цветочно-декоративной продукции в последние годы в России росли стремительными темпами. Этот рост осуществлялся как за счет введения новых тепличных комплексов, так и за счет выхода на полную производственную мощность комплексов, построенных в последние годы. К 2015 г. площадь современных теплиц, занятых под производство цветов, достигла 168 га [2]. За 2005–2014 гг. российские производители не только освоили строительство современных теплиц, но и передовые технологии выращивания роз, хризантем, гербер, тюльпанов, лилий.

Агротехнические приемы выращивания срезной продукции роз и обоснование необходимости внедрения технологии микроклонального размножения

Промышленное выращивание срезной продукции роз представляет собой высокотехнологичный процесс и производится в теплицах, которые должны быть оснащены системами поддержания микроклимата: отоплением с возможностью автоматического регулирования и поддержания температуры; системой капельного или прикорневого полива и увлажнения воздуха; системой проветривания и вентиляции; дополнительной подсветкой и системой зашторивания. Рентабельность производства роз на срезку во многом зависит от правильно разработанной технологии их выращивания.

Большинство отечественных производителей используют гидропонную систему выращивания роз, с которой мы ознакомились в тепличном комплексе ПКУП «Коммунальник» (участок № 2, Волынка) г. Бреста. Субстратом являются кубики из минеральной ваты, основное преимущество которых состоит в возможности полного контроля над питательной средой растения и при необходимости быстрого регулирования ее основных параметров. Использование минераловатного субстрата наряду с оптимальным микроклиматом, правильной формировкой куста роз, своевременными капельными минеральными подкормками, регулировкой освещения и защитой растений от болезней и вредителей играет главную роль в получении высоких экономических результатов.

Основополагающим этапом технологического процесса является закладка розария. Посадочным материалом в тепличном комплексе ПКУП «Коммунальник» являются саженцы роз, получаемые производителем путем черенкования выращиваемых сортов. Для получения черенков выбирают розы с крепкими здоровыми листьями и используют среднюю часть полуодревесневших побегов в стадии цветения. Черенок сре-



зают на две почки по направлению листа, оставляя 0,5 см стебля над верхней почкой. С одного побега получают в среднем от 4 до 5 черенков. Сохраненный верхний лист в дальнейшем будет направлять в черенке циркуляцию питательной среды. Нижние листья удаляют, а верхние укорачивают примерно на треть, что способствует уменьшению испарения влаги.

Нарезанные черенки промывают в воде и выдерживают в течение 1 часа в растворе стимулятора корнеобразования. Высаживают черенки в подготовленные минераловатные кубики и помещают в парники с температурой воздуха 22–26 °С и влажностью 85 % на 2–3 недели для формирования каллюса и первичных придаточных корешков. После укоренения производят посадку саженцев в теплицы на специальные маты из минеральной ваты, подводят капельный полив. В теплицах ПКУП «Коммунальник» розы выращивают по голландской технологии. Формирование куста роз начинается в момент посадки саженца на постоянное место и продолжается всю жизнь куста. Оно неразрывно связано со срезом цветоносов, а срез цветоносов является составной частью формирования куста. При формировании куста роз соблюдают соотношение вегетативной массы и количества цветоносов. При нарушении этого соотношения в сторону преобладания цветоносов, растение не даст генетической продуктивности, т.к. не будет достаточного количества продуктов фотосинтеза и энергии для интенсивного пробуждения почек, роста и развития цветоносов.

От высадки черенка до срезки первого цветоносного побега проходит от 3,5 до 4 месяцев. После срезки новый цветонос вырастает примерно через 6 недель. Продуктивность одного куста розы составляет в среднем 5 лет, но самый высокий уровень продуктивности приходится на второй–четвертый год. В год с одного куста срезают примерно 7–9 цветоносных побегов. Следовательно, за весь период культивирования продуктивность одного куста роз составляет около 40–45 цветоносов.

Отечественный производитель делает основной акцент на выращивание небольших по высоте роз до 60 см. Срезная продукция роз отличается ярко выраженным стойким ароматом, который особенно присущ сортам красного цвета. Такой особенностью не могут похвастаться эквадорские и голландские розы. Промышленное цветоводство, по мнению специалистов, окупается только в том случае, если каждые пять недель на стебле гарантированно прорастает новый бутон [6]. Минимальная урожайность сорта, считают специалисты, должна быть не менее 200 штук/м² для преодоления порога окупаемости теплицы [7].

Наибольшие трудности в отлаженном технологическом процессе выращивания срезной продукции роз связаны с получением высококачественного посадочного материала в необходимых количествах. Так, для закладки одного рассадочного парника требуется 2 000 черенков, на получение которых требуется израсходовать 500 штук маточных побегов в стадии цветения при производительности в летний период 1 000 штук роз в день (в осенне-весенний период 400 штук, в зимний – 200) срезной продукции для реализации. Получение достаточного количества саженцев таким способом занимает несколько лет. При этом скорость размножения – момент экономический, очень важный в технологическом процессе. Кроме того, многие сорта роз плохо черенкуются, что вынуждает тепличные хозяйства прибегать к приобретению саженцев у иностранных производителей.

Как показал опыт российских производителей цветочной продукции, не перспективным оказалось базирование собственного цветочного производства на посадочном материале, поставляемом в основном из европейских стран [2].



Решение данной проблемы видится в освоении технологии микроклонального размножения роз, что позволит не только создать высококачественный посадочный материал для промышленного цветоводства, но и получить его в достаточном количестве, не расходуя при этом побеги в стадии цветения пригодные в качестве срезной продукции для реализации.

В практике зарубежной и отечественной биотехнологии накоплен достаточно большой опыт по культивированию растений в стерильных лабораторных условиях, позволяющий при необходимости обеспечить разработку метода клонального микро-размножения практически любой культуры. Этот метод, включенный в систему производства посадочного материала, обеспечивает ряд бесспорных преимуществ по сравнению с другими способами размножения. Это прежде всего существенное повышение комплексности и эффективности оздоровления, быстрое размножение единичных ценных экземпляров, длительное хранение материала в условиях *in vitro*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малевская-Малевиц, Е. Цветущий патриотизм / Е. Малевская-Малевиц // С.-Петербург. бизнес-журн. – 2008. – № 21–22. – С. 150–156.
2. Цветочный рынок России: состояние, структура, перспективы [Электронный ресурс] // Выставка «ЦветыЭкспо». – Режим доступа: <http://www.flowers-expo.ru/flowers-expo/analytics.html>.
3. Эквадор стал лидером по количеству экспортеров на крупнейшей выставке срезанных цветов в России «ЦветыЭкспо-2017» [Электронный ресурс] // Культурная дипломатия. – Режим доступа: <http://culturedip.interaffairs.ru/index.php/sobytiya2/item/15-47-1547>.
4. Розы пахнут валютой [Электронный ресурс] // Советская Белоруссия. – Режим доступа: <https://www.sb.by/articles/rozy-pakhnut-valyutoy.html>.
5. Пристоличный портал [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://pristalica.by>.
6. Глогер, Е. Цветочный бизнес [Электронный ресурс] / Е. Глогер // Гео – Непознанный мир: Земля. – 2011. – № 165. – Режим доступа: <http://www.geo.ru/archive/geo-165>.
7. Подбор сортовой базы роз для выращивания под срез в теплице [Электронный ресурс] // Экокультура. – Режим доступа: <http://ecoculture.biz/podbor-sortovoj-bazy-rozdlya-vyrashhivaniya-pod-srez-v-usloviyah-zakrytogo-grunta.html>.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.02.2018

Lenivko S.M. On the Promise of Microclonal Propagation Technology for Industrial Rosacea

The article presents an analysis of the current state of commodity turnover and industrial production of shear products of roses on the domestic market of the Republic of Belarus. It is shown that the transfer of flower production to year-round cultivation is directly related to the introduction of microclonal propagation technology, which will allow to obtain in sufficient quantity a high-quality planting stock for growing in a greenhouse. The planting material obtained in this way will allow to exclude the transport component and can become a real way of saving for the domestic producer of floral products.



УДК 581.8

Н.М. Матусевич¹, М.П. Жигар²

¹канд. биол. наук, доц. каф. ботаники и экологии

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. биол. наук, проф. каф. ботаники и экологии

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: botany@brsu.brest.by

РАЗНООБРАЗИЕ СТРУКТУРЫ КОРЫ ОДНОЛЕТНЕГО СТЕБЛЯ У ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ ПОДСЕМЕЙСТВА *SPIRAEOIDEAE*

Проведено сравнительное изучение анатомического строения коры однолетнего стебля 13 представителей подсемейства *Spiraeoideae* семейства *Rosaceae* Juss.: *Spiraea vanhouttei* (Briot) Zab., *Spiraea media* Franz Schmidt., *Spiraea japonica* L., *Spiraea hypericifolia* L., *Spiraea chamaedrifolia* L., *Spiraea salicifolia* L., *Sorbaria sorbifolia* (L.) A. Br., *Sibiraea laevigata* Maxim., *Physocarpus opulifolius* (L.), *Holodiscus discolor* (Pursh.) Maxim., *Exochorda racemosa* L., *Quillaja saponaria* L. и *Quillaja brasiliensis* L. Отмечены отличительные особенности коры у изученных представителей, проанализировано их систематическое положение.

Введение

Кора составляет значительную часть древесного стебля, выполняя в нем целый ряд важных функций: защитную, транспортную, механическую, ассимиляционную, запасную, синтетическую. Поскольку гистологический состав коры значительно многообразнее, чем древесины, этот сложный тканевый комплекс обладает большим набором диагностических признаков и может быть с успехом использован для решения вопросов филогении и таксономии, научной и судебно-криминалистической диагностики [1–3].

Для большинства родов их принадлежность к Спирейным не вызывает сомнений. Мало общего с другими родами *Rosaceae* Juss. имеют некоторые примитивные роды (*Quillaja*, *Kageneckia*, *Exochorda*), являющиеся, по-видимому, последними реликтами древнего комплекса родов, в прошлом более многочисленных, широко распространенных и более богатых видами.

В. Фоке [4] включил роды *Quillaja* и *Exochorda* в трибу *Quillajaeae* подсемейства Спирейные. Г. Шульце-Менц [5] относит *Quillaja* к трибе *Quillajaeae*, а *Exochorda* – к трибе *Exochordeae* в составе *Spiraeoideae*. Г. Юэл [6], основываясь на положении семян, относил род *Exochorda* к *Prunoideae*. К этому же выводу приходят и другие авторы, которые также относят экзорду к подсемейству Сливовые [7–9]. Тем не менее среди ученых существует мнение, что наличие арбутина в *Exochorda* свидетельствует о принадлежности этого рода к подсемейству *Spiraeoideae*, и он не может быть перенесен в *Prunoideae*, у видов которого арбутин отсутствует. Дж. Стеббинс считает, что *Exochorda* является возможным живым связующим звеном между подсемействами Спирейные и Сливовые [10].

Большие разногласия имеют место и в определении систематического положения рода *Quillaja*. В. Фоке, Г. Шульце-Менц выделили в подсемействе *Spiraeoideae* трибу *Quillajaeae*; П. Голдблатт [11] предлагает выделить *Quillaja* в отдельное подсемейство. Д. Морган с соавторами [12] сделали вывод, что квилаха вообще не может быть отнесена к семейству *Rosaceae* и по некоторым признакам не соответствует ни одной группе этого семейства, в частности основное число хромосом $x = 14$ не известно у Ро-



зоцветных. А.Л. Тахтаджян выдзяляе в сямействе *Rosaceae* аддельнае подсямейства *Quillajoideae* с родом *Quillaja* [13; 8].

Проблематичным является и положение рода *Holodiscus* в системе *Rosaceae*. Он похож на Спирейные по многим морфологическим характеристикам, но имеет отличия по признакам семян и плодов [12]. Этот род в системах В. Фоке [4] и Г. Шульце-Менца [5] выделен в самостоятельную трибу *Holodisceae* в составе подсемейства *Spiraeoideae*. А.Л. Тахтаджян в системе 1987 г. относит холодискус в составе трибы *Holodisceae* к подсемейству *Quillajoideae*, а в системе, предложенной им в 1997 г., выделяет трибу *Holodisceae* в составе подсемейства *Spiraeoideae*.

Неоднозначно трактуется также положение родов *Physocarpus* и *Sorbaria*. В. Фоке [4] роды *Physocarpus*, *Spiraea*, *Sibiraea*, *Sorbaria* включает в состав трибы *Spiraeae*. Г. Шульце-Менц [5], А.Л. Тахтаджян [7; 8] в состав трибы *Spiraeae* включает только роды *Spiraea* и *Sibiraea*. Род *Physocarpus* ими отнесен к трибе *Neillieae*, а *Sorbaria* они рассматривают в составе трибы *Sorbarieae*.

Цель работы – изучение анатомического строения коры у представителей *Spiraeoideae*, а также выявление особенностей коры, имеющих диагностическое значение.

Материал и методы исследования

Нами было изучено анатомическое строение коры однолетних стеблей 13 представителей подсемейства Спирейные семейства Розоцветные.

Выполнение работы предусматривало сбор полевого материала, его фиксацию, изготовление временных и постоянных препаратов и их анализ. Материал для исследования был собран в Ботаническом институте РАН в ноябре месяце, когда камбий находился в недействительном состоянии, и зафиксирован в смеси 96 %-го спирта и глицерина (1:1). Однолетние стебли брали с трех особей из нижней части кроны с южной стороны растения. Затем, после 10-дневной выдержки в фиксаторе, готовили постоянные препараты по общепринятой в анатомии растений методике [13]. Для этого фиксированный материал помещали в воду на 20–30 мин., чтобы спирт из материала диффундировал в растворитель. Из верхних, средних и нижних междоузлий стебля готовили микрообразцы, которые использовали для получения срезов.

Для постоянных препаратов их изготавливали на санном микротоме с замораживающим столиком, при изготовлении временных препаратов срезы делали от руки с использованием лезвия и сердцевины бузины. Срезы толщиной 10–30 мкм выполняли в поперечном и продольном радиальном и продольном тангентальном направлениях. Затем их помещали в сафранин на 20 мин., после чего переносили в нильский синий на 3 мин. Далее срезы проводили через серию спиртов разных концентраций (50, 70, 96 %-ный и абсолютный спирт). После этого срезы обрабатывали карболксиллом, ксиллом, затем заключали в канадский бальзам.

Анализ полученных препаратов проводили на световых микроскопах Л-212 и Биолам Р-15. Измерения осуществляли винтовым окулярным микрометром МОВ-1-15х, визированным по объективной линейке.

Результаты исследования

Кора видов рода *Spiraea* L. состоит из эпидермы, колленхимы, паренхимы первичной коры, эндодермы, перидермы, кольца первичных механических элементов, первичной флоэмы, вторичной флоэмы.



Эпидерма к концу первого года жизни стебля слущивается, ее остатки можно заметить в верхних междоузлиях, но она сильно деформирована.

Колленхима также смята, сшелушивается, поэтому выявить тип колленхимы, форму ее клеток в конце вегетационного периода у всех видов не удастся. У спиреи японской и спиреи Ван-Гутта тангентальный размер клеток ткани на поперечном срезе составляет 25–29 мкм, а радиальный – 10–14 мкм. У обоих видов она округлая, сложена овальными в поперечном сечении клетками с равномерно утолщенными оболочками, которые у спиреи японской лигнифицированы. У последней в ткани встречаются друзы. У спиреи дубравколистной поперечное сечение клеток колленхимы округлой и овальной формы.

Коровая паренхима тоже сильно смята, сшелушивается вместе с эпидермой и колленхимой, и лишь в некоторых участках стебля наблюдается ее связь с нижележащими тканями. Число слоев клеток коровой паренхимы невелико: один–два у спиреи Ван-Гутта, до двух–трех у остальных видов. Ширина этой ткани доходит до 75 мкм, поскольку слагающие ее клетки очень крупные. Форма клеток в поперечном сечении – от овальной до неправильно-квадратной, иногда с извилистыми очертаниями стенок. Клетки тонкостенные, могут располагаться плотно или с межклетниками. Особенно большие межклетные пространства отмечены у спиреи японской, в них находятся крупные друзы. Ширина коровой паренхимы составляет 65–75 мкм.

Эндодерма имеется в однолетнем стебле всех изученных видов. У спиреи японской уже в средних междоузлиях эта ткань начинает слущиваться, и в нижних участках стебля ее нет. У остальных видов она имеется и занимает самое наружное положение. При этом эндодерма обладает некоторым сходством с лежащей глубже феллемой: по окраске содержимого клеток, по утолщенной внешней периклиальной стенке. У всех видов спирей она однослойная. Тангентальный их размер 10–25 мкм, радиальный – 10–18 мкм. Клеточное содержимое эндодермы после отмирания темно-коричневого цвета, лишь у спиреи японской и спиреи Ван-Гутта оно светло-коричневой окраски. У всех видов, за исключением спиреи японской, внешняя тангентальная стенка утолщена в среднем до 3 мкм, имеет кутикулу, у спиреи японской клетки эндодермы тонкостенные. На радиальном срезе форма клеток разнообразная: овальная (спирея иволистная), овально-прямоугольная (спирея средняя), прямоугольная, вытянутая по оси органа (спирея зверобоелистная), округло-квадратная и бочонковидная (спирея Ван-Гутта).

Перидерма имеется у всех видов типичного строения. Феллоген однослойный, на поперечном срезе оболочки его клетки утолщенные, часто сильно вытянутые в тангентальном направлении, радиальный размер составляет 2–2,5 мкм, тангентальный – до 17 мкм. Закладывается он под эндодермой, из перицикла. Феллема однородная по окраске содержимого, может иметь от 1 (спирея японская) до 4 (спирея средняя) клеток в радиальном ряду. Преобладают прямоугольные, вытянутые в тангентальном направлении (спирея средняя, спирея иволистная), выпукло-прямоугольные (спирея зверобоелистная, спирея дубравколистная, спирея Ван-Гутта). У спиреи помимо выпукло-прямоугольных есть и выпукло-квадратные клетки, а у спиреи японской могут быть квадратные, прямоугольные, вытянутые в радиальном направлении, и трапецевидные. Утолщение клеточных оболочек феллемы у всех видов, за исключением спиреи японской, неодинаковое. Наиболее утолщена наружная периклиальная стенка, особенно у молодых клеток. Например, у спиреи Ван-Гутта внешний слой пробки имеет толщину наружной периклиальной клеточной стенки около 3 мкм, а у клеток внутреннего слоя –



до 4 мкм. У спіреи дубравколістнай, пачом вонешняй перыклинальнай, утолщаны антклинальныя стэнкі на ўсім іх пратяжэнні. У спіреи японскай феллема состоіт з тонкостенных, неплотна сложенных клетак. Окраска клеточнага зместага тажа неаднакавая: тэмна-корычневая (спірея звербоелістная, спірея іволістная, спірея дубравколістная), светла-корычневая (спірея Ван-Гутта, спірея японская), в некотрых клетках спіреи японскай зместага зерністае. Феллодерма імае разлчынае чысла слагаюшых ёе слоёв: ад аднаго да чатырех. У ўсех вядоў на папярэчым срэзе она состоіт з клетак овальнай фармы. У спіреи Ван-Гутта клеточныя стэнкі утолщаны. В феллодерме спіреи сярэдняй і спіреи дубравколістнай сустрачаюцца адыначна ромбаідныя, у спіреи іволістнай – прызматычскыя крысталлы. Шырына перыдермы – 20–50 мкм.

Кольца перычных механычскых элементоў у ўсех вядоў сплошнае, гетэрагеннае, сложене валакнамі і склереідамі. У спіреи японскай развіты тажа септыраваныя валакна. На папярэчым срэзе групы валакноў імаюць овальныя очертанія (спірея японская, спірея дубравколістная, спірея іволістная, у апошняй, кроме таго, сустрачаюцца і шапковыдныя па фарме групы). Ровна выцягнутыя па акружнасці стэбля, не возвышаюшыся над склереідамі узкыя групы валакноў характэрны для спіреи звербоелістнай, спіреи сярэдняй і спіреи Ван-Гутта. Форма папярэчнага сечення валакноў овальна-прямюгольная, чысла слоёв – ад аднаго–чатырех (спірея Ван-Гутта) да чатырех–шасці (спірея іволістная). Полосты клетак точечныя (спірея сярэдняя), акруглыя (спірея Ван-Гутта, спірея дубравколістная) і овальныя (спірея японская, спірея іволістна). Шырына кольца 20–42 мкм. Крысталлы оксалата кальцыя могуць распалагацца па абейм сторонам кольца і в кольце (спірея звербоелістная, спірея японская) ілі снаружы кольца і в кольце (спірея сярэдняя, спірея Ван-Гутта, спірея іволістная, спірея дубравколістная). Крысталлы спіреи японскай і спіреи іволістнай імаюць ромбаідную фарму, у спіреи сярэдняй і спіреи дубравколістнай – ромбаідную і прызматычскую, у спіреи звербоелістнай і спіреи Ван-Гутта – ромбаідныя, прызматычскыя і кубычскыя крысталлы. Перычная флоэма сільна вядоізменена, т.к. ёе элементы частычна аблітэрыравалы, частычна дылатыравалы. Втарычная флоэма вклучае праводяшыя і паренхымныя элементы. Шырына ёе варыруе в прэделах 45–61 мкм. Сітовыдныя трубкаў сабраны в групы па тры–пять (спірея японская), чатыры–шасці (спірея сярэдняя і спірея Ван-Гутта), но в чарэдаванні іх і клетак вертыкальнай паренхымы заканамернасці не абнаружено. В папярэчым сеченні сітовыдныя трубкаў могуць быць овальнымы (спірея сярэдняя), овальнымы і акруглымы (спірея японская, спірея дубравколістная), овальнымы, 5-угольнымы і прямюгольнымы, выцягнутымы в тангентальным напраўленні (спірея іволістная), квадратна-акруглымы і 5-угольнымы (спірея Ван-Гутта), для спіреи звербоелістнай, спіреи Ван-Гутта, спіреи іволістнай, спіреи сярэдняй характэрны ізвылістыя стэнкі. Праводяшыя элементы імаюць большы дыаметр, чэм клеткі аксіальнай паренхымы. Тангентальны размер сітовыдных трубок колеблется в прэделах 11–16 мкм, радыальны – 5–10 мкм. Сярэдняя дына членікоў сітовыдных трубок состоітага 120–200 мкм. Папярэчныя стэнкі іх орыентыраваны наклонно па адношэнні к продольным. Сітовыдныя пластынкы прастыя.

Флоэмныя лучы у ўсех вядоў 1-, 2-, 3-рядныя, у спіреи іволістнай 3-рядныя лучы сустрачаюцца рэдка, а для спіреи звербоелістнай, спіреи сярэдняй і спіреи Ван-Гутта характэрны тажа 4-рядныя лучы. Лучы в большыстве гомогенныя, у спіреи японскай, спіреи іволістнай, спіреи звербоелістнай сустрачаюцца тажа і гетэрагенныя. Чысла іх слоёв ад 47 (спірея іволістная) да 141 клетак (спірея сярэдняя). Шырына лучей на-



ходится в пределах 57–65 клеток, высота колеблется от 370 до 420 мкм. Самые высокие лучи у спиреи японской, самые низкие – у спиреи иволистной. Клетки аксиальной паренхимы имеют меньшие размеры поперечника и в лубе представлены в меньшем числе, чем проводящие элементы. Расположение их диффузное. В клетках аксиальной паренхимы имеются кристаллы. Они мелкие, малочисленные. У всех видов кристаллы ромбоидной формы, а у спиреи японской, спиреи иволистной, спиреи дубравколистной, кроме того, имеются также короткие кристаллы призматической формы. У спиреи звероелистной и спиреи японской кристаллы ромбоидной формы имеются в клетках сердцевинных лучей.

В качестве диагностических признаков можно рассматривать отсутствие трихом в эпидерме, слушивание к концу первого года жизни стебля эпидермы и периферических тканей коры, наличие эндодермы, глубокое залегание феллогена, неодинаковое утолщение стенок клеток феллемы, наличие феллодермы в составе перидермы, гомогенную феллему, преобладание феллемы над феллодермой, сплошное гетерогенное механическое кольцо и наличие у него кристаллоносной обкладки, наличие кристаллов в аксиальной паренхиме вторичной флоэмы.

Видоспецифические признаки: строение клеток эндодермы (характер их содержимого, толщина стенок), особенности перидермы (число слоев клеток феллемы, неодинаковое утолщение клеточных стенок у нее, форма клеток феллемы на поперечном срезе, степень развития феллодермы), особенности кристаллоносной обкладки у кольца механических элементов, локализация кристаллов оксалата кальция во вторичной флоэме.

Кора *Sorbaria sorbifolia* (L.) F.Br. включает эпидерму, колленхиму, паренхиму первичной коры, эндодерму, перидерму, кольцо механических элементов, первичную флоэму, вторичную флоэму.

Эпидерма и вся первичная кора сшелушиваются и в конце вегетационного периода просматриваются лишь в некоторых участках верхних междоузлий. Эпидерма сильно смята, представлена одним слоем клеток, которые на поперечном и продольных срезах прямоугольной, реже квадратной формы. Полость клеток заполнена темно-коричневым содержимым. Наружная периклиальная стенка более выпуклая и утолщенная, с кутикулой. Имеются одноклеточные кроющие волоски, которые расположены перпендикулярно эпидерме. Верхушки у них заостренные и притупленные, иногда загнутые. Оболочки утолщенные. Длина волосков до 73 мкм.

Колленхима также сильно деформирована и особенности ее строения плохо просматриваются.

Паренхима первичной коры по морфологической структуре гомогенная. Она сложена очень крупными тонкостенными клетками неправильно прямоугольной формы в поперечном и продольном сечениях, с извилистыми антиклинальными и периклиальными стенками. Сеть межклетников не выражена. Имеются единичные друзы и призматические кристаллы. Ширина ткани на поперечном срезе около 70 мкм, тангентальный размер клеток 38–50 мкм, радиальный – 30–35 мкм. Глубже располагается слой крупных клеток овально-прямоугольной формы с тонкими оболочками. Л.И. Лотова, А.К. Тимонин [14] интерпретируют его как эндодерму.

Перидерма типичная. Феллоген однослойный, закладывается в самом внутреннем слое первичной коры. Феллема 2-, реже 3-слойная, клетки ее вытянуты в тангентальном направлении. В поперечном и радиальном сечениях они имеют прямоугольные очертания. Тангентальный размер их равен 20–22 мкм, радиальный – 8–10 мкм. Клетки с внутренним содержимым, которое у одних клеток имеет темную окраску, у других –



бесцветную, т.е. по окраске содержимого пробка гетерогенная. Клеточные стенки тонкие. Феллодерма состоит из 3–5 слоев живых паренхимных клеток с утолщенными оболочками. В клетках внутреннего слоя, расположенного снаружи механического кольца, встречаются редкие друзы и кристаллы ромбоидной формы. В поперечном сечении клетки овальные и округлые, на радиальном срезе они имеют округлые очертания. Тангентальный размер их 25–35 мкм, радиальный – 20–22 мкм. Слой перидермы достигает 45 мкм.

Механическое кольцо сплошное, гетерогенное, состоит из групп волокон, имеющих на поперечном срезе овальную форму, и склереид. Волокна узкопросветные, полости клеток на поперечном срезе в большинстве щелевидные. Тангентальный размер клеток склеренхимы до 22 мкм, склереид – до 36 мкм, радиальный – до 15 и 27 мкм. Кристаллоносная обкладка отсутствует.

Первичная флоэма частично облитерировала, частично дилатировала и только в отдельных местах ее можно отличить от периферической части вторичной флоэмы. В ее составе – проводящие и паренхимные элементы.

Вторичная флоэма сложена проводящими элементами и паренхимой (вертикальной и горизонтальной). Ситовидные трубки расположены диффузно, часто группами по 2–5. В поперечном сечении они многоугольно-извилистые, реже – округлых очертаний. Проводящих элементов в составе луба больше, чем аксиальной паренхимы. Поперечные сечения членников ситовидных трубок широкие, тангентальный размер их составляет 10–12 мкм, радиальный – 6–7 мкм, у клеток вертикальной паренхимы – 15–16 и 12–14 мкм соответственно. Длина членников достигает 200–300 мкм. Аксиальная паренхима расположена диффузно или образует короткие тангентально ориентированные участки из 3–5 клеток. Клетки луба, находящиеся вблизи камбия, мельче клеток, удаленных от него, что говорит о дилатации элементов флоэмы. Поперечные стенки членников ситовидных трубок располагаются наклонно по отношению к продольным. Ситовидные пластинки простые. Флоэмные лучи 1-, 2-, реже 3-рядные, гомогенные и гетерогенные. Дилатация их слабая. Высота лучей до 660 мкм, ширина – до 45 мкм, слойность – до 55 клеток. Кристаллов оксалата кальция в лубе нет.

В качестве диагностических признаков строения коры можно рассматривать особенности клеток эндодермы (бесцветное содержимое, тонкие клеточные оболочки), строение перидермы (преобладание феллодермы над феллемой, тонкие оболочки клеток феллемы), отсутствие кристаллоносной обкладки у механического кольца и монокристаллов во вторичной флоэме.

Кора *Sibiraea laevigata* Maxim. в самых верхних участках стебля состоит из эпидермы, колленхимы, паренхимы первичной коры, механического кольца, первичной и вторичной флоэмы. К концу вегетационного сезона кора включает в себя перидерму, первичную кору, кольцо первичных механических элементов, первичную флоэму и вторичную флоэму. Изменение гистологического состава обусловлено формированием перидермы, в результате чего более периферические ткани отмирают и слущиваются.

Эпидерма сложена клетками с равномерно утолщенной оболочкой. На ее поверхности хорошо развита кутикула. По форме поперечного сечения клетки овальные и прямоугольно-выпуклые. Клеточное содержимое почти черного цвета. Трихом нет.

Нижележащие клетки колленхимы сильно деформированы и сшелушиваются вместе с эпидермой. Тип колленхимы – уголковая.

Перидерма типичного строения. Феллема 2–4-слойная. Форма ее клеток в поперечном сечении прямоугольная, вытянутая в тангентальном направлении, реже квадратная. Наружные периклиналильные стенки и часть антиклиналильных – утолщенные,



толщина внешней стенки до 2,5 мкм. На радиальных срезах клетки имеют прямоугольную и квадратную форму с выпуклой внешней стенкой. По окраске содержимого пробка гетерогенная. Тангентальный размер клеток в поперечном сечении – 25–30 мкм, радиальный – до 14 мкм. Феллоген однослойный, клетки его прямоугольной формы, с темноокрашенным содержимым, формируется из клеток паренхимы, примыкающих к колленхиме. Феллодерма 1–2-слойная, клетки ее в поперечном и радиальном сечениях овальной и прямоугольной формы с темноокрашенным содержимым.

Паренхима первичной коры состоит из клеток, имеющих на поперечных срезах округлую и овальную формы. Сложение их плотное. Ткань гетерогенная, представлена клетками двух типов: тонкостенными (со светлым содержимым) и с более утолщенными оболочками (с темноокрашенным содержимым). Последние разбросаны по одной или собраны в группы из двух–пяти клеток. Тангентальный размер их поперечника 25–30 мкм, радиальный – до 25 мкм. На радиальных срезах они овальной формы, многие ориентированы большим радиусом перпендикулярно продольной оси стебля. В клетках этой ткани встречаются редкие друзы. Кроме того, в ней среди паренхимных клеток находятся также небольшие группы волокон из двух–семи клеток. Они располагаются на большом удалении друг от друга. На радиальном срезе клетки волокон прозенхимные, их концы не заостренные. Вероятно, их следует интерпретировать как волокнистые склериды.

Кольцо механических элементов прерывистое, гомогенное, состоит из крупных (10–11 слоев) групп волокон. Форма их на поперечном срезе округлая, овальная, вытянутая в тангентальном или иногда радиальном направлении, четырехугольная; волокна толстостенные, с узкими точечными, в большинстве щелевидными полостями. Часть волокон – септированные. Тангентальный размер клеток до 7 мкм, радиальный – 3–5 мкм. Ширина механического кольца до 140 мкм. Кристаллоносная обкладка отсутствует.

Первичная флоэма плохо просматривается. Ситовидные элементы облитерировали, паренхима дилатировала, и она неотличима от периферической части луба.

Вторичная флоэма состоит из проводящих и запасающих элементов. Ситовидные трубки в поперечном сечении 4–5-угольной формы, тангентальный размер их составляет 6–7 мкм, радиальный – 4–5 мкм. Длина члеников до 125 мкм, ситовидные пластинки простые, поперечные стенки наклонные или ориентированы перпендикулярно к продольным. Расположены ситовидные трубки группами по три–шесть. Клеток аксиальной паренхимы больше, чем проводящих элементов. Тангентальный размер паренхимных клеток на поперечном срезе 10–12 мкм, радиальный – до 10–13 мкм, в них имеются друзы и призматические кристаллы оксалата кальция. Сердцевинные лучи 1-, 2-, 3-рядные, гомогенные. Высота их достигает 130 мкм, ширина – 20 мкм, слойность – до 100 клеток. Дилатация лучей хорошо выражена, особенно у двурядных и трехрядных, и начинается от начала годичного слоя флоэмы. Ширина луба 140–150 мкм.

Для коры этого вида специфичны признаки: отсутствие четко выраженной эндодермы, заложение феллогена в периферических слоях первичной коры непосредственно под колленхимой, гетерогенная феллема, наличие в аксиальной паренхиме вторичной флоэмы друз и кристаллов призматической формы, прерывистое гомогенное механическое кольцо и отсутствие у него кристаллоносной обкладки, гетерогенная паренхима первичной коры, развитие в ней волокнистых склерид.

Кора *Physocarpus opulifolius* (L.) в стеблях однолетнего возраста достигает ширины 410–550 мкм. В верхних молодых его участках она включает эпидерму, колленхиму, паренхиму первичной коры, эндодерму, механическое кольцо, перидерму, первич-



ную флоэму, вторичную флоэму. В средних и нижних междоузлиях периферические ткани, расположенные снару́жи от пробки, сду́щиваются, и кора представлена перидермой и лубом.

Эпидерма однослойная. Клетки ее в мертвом состоянии с темно-коричневым содержимым и незначительно утолщенной внешней периклиальной стенкой, с тонкой кутикулой. Форма клеток в поперечном сечении разнообразная: прямоугольная, вытянутая в тангентальном и радиальном направлениях, квадратная, с выпуклой внешней периклиальной стенкой. На радиальных срезах клетки прямоугольные, вытянутые по оси органа. Имеются сосочковидные трихомы.

Колленхима пластинчатая. К концу первого года она сильно деформируется и сду́щивается, что не позволяет дать подробную ее характеристику.

Паренхима первичной коры сложена крупными тонкостенными клетками. Ширина ткани 60–80 мкм, но не за счет числа клеток (их всего три–четыре слоя), а за счет крупных размеров: в поперечном сечении тангентальный размер клеток составляет 30–35 мкм, радиальный – до 20 мкм. Отмечены друзы оксалата кальция. В силу деформации ткани форму клеток на продольном срезе просмотреть не удалось. Внутренний слой клеток содержит крахмал и, вероятно, соответствует эндодерме. Клетки ее тонкостенные, внутреннее содержимое бесцветное.

Кольцо первичных механических элементов прерывистое, шириной до 80 мкм. Оно гомогенное, сложено волокнами, некоторые из них септированные. Клетки склеренхимы крупные, их тангентальный размер 22–30 мкм, радиальный – 17–20 мкм. Расположены они группами, в каждой из которых четыре–семь слоев клеток, на поперечном срезе группы имеют овальные очертания и отделены друг от друга однорядными участками паренхимы. В поперечном сечении клетки волокон имеют овальные и 4-угольные очертания, незначительно утолщенные и одревесневшие оболочки и большую полость округлой или 4–6-угольной формы, иногда с остатками внутреннего содержимого. Кристаллоносная обкладка отсутствует.

Перидерма типичного строения, шириной 130–205 мкм. Феллема содержит 9–12 слоев клеток, гетерогенная: 7–10 наружных слоев ее сложены пустотелыми крупными клетками, которые на поперечном срезе неправильно-квадратные и прямоугольные, вытянутые в тангентальном и радиальном направлениях, с тонкими извилистыми оболочками. На радиальных срезах клетки прямоугольной формы, вытянутые вдоль оси органа. Внутренние один–три слоя клеток феллемы с темно-коричневым внутренним содержимым, узкие, на поперечном срезе имеют прямоугольные очертания. Тангентальный размер клеток феллемы 17–35 мкм, радиальный – 21–33 мкм. Наружные слои этой ткани во многих местах шелушиваются. Феллоген однослойный, закладывается в самом внутреннем слое первичной коры. Феллодерма состоит из двух–трех слоев тонкостенных клеток: прямоугольно-овальных – на поперечном срезе и прямоугольных, вытянутых вдоль оси органа – на радиальном.

Первичная флоэма плохо просматривается, в силу значительной облитерации ситовидных элементов и дилатации паренхимы она неотличима от луба.

Вторичная флоэма имеет ширину 90–140 мкм. В ее составе проводящие, паренхимные элементы, местами, но не по всей окружности кольца луба, встречаются также небольшие группы склеренхимы. Они имеют вытянутые в тангентальном направлении очертания. Оболочки клеток волокон сильно утолщены и одревеснели. В поперечном сечении форма клеток 4–6-угольная. В составе вторичной флоэмы преобладает аксиальная паренхима. Ситовидные трубки в поперечном сечении имеют квадратно-округ-



люю, прямоугольную, выцянутую в тангентальном направлении форму, а также многоугольную с извилистыми очертаниями у проводящих элементов и клеток вертикальной паренхимы, почти равные поперечники. Располагаются ситовидные трубки разбросано, а в том случае, если флоэмные лучи находятся близко друг от друга, образуют радиальные ряды. Поперечные стенки члеников ситовидных трубок расположены наклонно по отношению к боковым. Ситовидные пластинки простые. Длина члеников 100–200 мкм. В клетках аксиальной паренхимы луба встречаются кристаллы щавелевокислого кальция ромбоидной, кубической и призматической форм. Отчетливо заметна диффузная дилатация луба. Сердцевинные лучи расположены довольно густо – до 90 штук на 1 мм² тангентального среза. Они 1- и 2-рядные, гомогенные и гетерогенные, дилатируют уже в средней части годичного прироста луба. Высота лучей до 100 мкм, слойность – до 35 клеток.

К диагностическим признакам коры этого вида можно отнести: наличие сосочковидных трихом в эпидерме, особенности клеток эндодермы (тонкостенные, бесцветные, наличие в них крахмала), значительное преобладание феллемы над феллодермой в составе перидермы, особенности клеток феллемы; гомогенное прерывистое механическое кольцо, размеры клеток паренхимы первичной коры; тканевый состав вторичной флоэмы, присутствие в ее аксиальной паренхиме только монокристаллов.

В верхних участках стебля кора *Holodiscus discolor* (Pursh.) Maxim. включает эпидерму, колленхиму, паренхиму первичной коры, эндодерму, перицикл, перидерму, механическое кольцо, первичную флоэму и вторичную флоэму. В средних и нижних междоузлиях первые три ткани к концу первого года сбрасываются.

Эпидерма однослойная. Наружная периклиальная стенка утолщенная, покрыта кутикулой. В поперечном сечении клетки ее овальные. Имеются кроющие волоски. Они одноклеточные, с толстой одревесневшей оболочкой, расположены перпендикулярно к поверхности. Встречаются как остроконечные, иногда крючковатые, так и волоски с притупленной верхушкой. Длина их в среднем до 60 мкм.

Колленхима округлого, местами уголкового типа, число слоев ее клеток до шести, а в ребрах – до десяти. В поперечном сечении клетки имеют овальную и округлую формы, на продольных срезах – прямоугольную, вытянутую вдоль оси.

Паренхима первичной коры состоит из округлых и овальных в поперечном сечении клеток. Внешние три–пять слоев ее мелкоклетчатые, клетки толстостенные, вблизи эндодермы они более крупные и тонкостенные. Сложение ткани плотное. В процессе роста стебля в толщину клетки коровой паренхимы растягиваются в тангентальном и сминаются в радиальном направлении. Средний тангентальный размер их поперечника составляет 38 мкм, радиальный – 25 мкм.

Эндодерма однослойная. Клетки в поперечном сечении овальной формы, на радиальном – квадратные и прямоугольные. Они живые. Некоторые из них имеют содержимое темно-коричневого цвета. Оболочки тонкие. Тангентальный размер клеток составляет 20–26 мкм, радиальный – 13–16 мкм. Под эндодермой расположены три слоя мелкоклетчатой паренхимы – перицикл.

Перидерма типичного строения. Феллема на поперечном срезе гомогенная, до 40 мкм ширины. Число клеток в радиальном ряду две–четыре. Клетки с живым содержимым, тонкостенные. В поперечном и радиальном сечениях они прямоугольной формы. Тангентальный размер их 10–15 мкм, радиальный – 7–10 мкм. Феллоген однослойный, перициклического происхождения. Феллодерма представлена двумя–тремя



слоями тонкостенных клеток – овальных – на поперечном и овально-прямоугольных – на радиальном срезах, с межклетниками. В ней единично встречаются друзы.

Механическое кольцо сплошное, гетерогенное, состоит из волокон и склереид. Группы волокон на поперечном срезе имеют овальные, вытянутые в тангентальном направлении очертания из пяти–семи слоев клеток, волокна 5–6-угольной формы. Их тангентальный размер 17–20 мкм, радиальный – 10–12 мкм. Склереиды крупнее клеток склеренхимы, вытянуты в тангентальном направлении, в них видны остатки содержимого. Тангентальный размер клеток склереид 26–32 мкм, радиальный – 15–18 мкм. Ширина механического кольца 40–50 мкм. Кристаллоносная обкладка отсутствует.

Первичная флоэма в результате дилатации паренхимы выглядит как паренхимная ткань и сливается с периферической частью вторичной флоэмы.

Вторичная флоэма состоит из проводящих и паренхимных элементов. Ситовидные трубки имеют округлую и овальную формы в поперечном сечении, расположены радиальными рядами. Они крупнее клеток аксиальной паренхимы. Их тангентальный размер 8–10 мкм, радиальный – 5–6 мкм. Поперечные стенки члеников ситовидных трубок ориентированы наклонно по отношению к боковым. Ситовидные пластинки простые. Клетки аксиальной паренхимы округлые, в них заметны друзы, диаметр которых составляет 6–7 мкм. Сердцевинные лучи 1-, 2-, 3- и 4-рядные, дилатация многорядных лучей выражена сильнее. Преобладают гомогенные лучи, но встречаются и гетерогенные. Высота лучей до 180 мкм, ширина до 45 мкм, слойность до 30 клеток. Ширина флоэмы 35–45 мкм.

В качестве диагностических признаков коры могут рассматриваться характер волосков эпидермы, особенности клеток эндодермы, перициклическое происхождение феллогена, тип кристаллов в аксиальной паренхиме, наличие лучей различной рядности (от одного до четырех), их дилатация, отсутствие кристаллоносной обкладки у механического кольца; радиальное расположение ситовидных элементов.

Кора *Exochorda racemosa* L. в конце вегетационного сезона включает в себя перидерму, колленхиму, паренхиму первичной коры, кольцо механических тканей, первичную флоэму, вторичную флоэму.

Перидерма типичного состава. Феллема гомогенная. Клетки ее в поперечном сечении прямоугольные, вытянутые в тангентальном направлении, реже квадратные, на радиальных срезах – прямоугольные, вытянутые вдоль оси органа. Их радиальный размер 3–5 мкм, тангентальный – 6–8 мкм. Характерно довольно сильное утолщение только внутренней периклиальной стенки. Клетки феллемы живые, в них просматриваются ядра, а также образования короткопризматической формы. В своем расположении клетки пробки не образуют четко выраженных тангентальных слоев. Наружные участки феллемы растрескиваются и слущиваются по всей окружности стебля в виде изогнутых чешуек, в радиальном ряду на поперечном срезе насчитывается пять–семь клеток. Ширина пробковой ткани составляет 60–70 мкм. Феллоген однослойный, формируется субэпидермально. Феллодерма представлена тоже одним слоем прямоугольных клеток в поперечном и радиальном сечениях. Оболочка их тонкая.

Колленхима пластинчатая, сложена двумя слоями клеток. Они овальные в поперечном сечении и длинно-прямоугольные на радиальном срезе. Тангентальный размер их 15–20 мкм, радиальный – 10–12 мкм. Ширина ткани составляет 30–40 мкм.

Паренхима первичной коры расположена между колленхимой и кольцом механических тканей. Она гомогенная по составу, содержит пять–семь слоев клеток. В поперечном сечении они овальные, на продольных срезах – квадратные и прямоугольные.



К механическому кольцу примыкает слой квадратных и короткопрямоугольных, вытянутых поперек оси органа клеток, чередующихся со слоями удлиненно-прямоугольных, вытянутых вдоль оси. Оболочки клеток тонкие, сложение этой ткани плотное. В ней изредка встречаются друзы оксалата кальция. Эндодерма не выражена.

Кольцо механических тканей прерывистое, гомогенное. Волокна располагаются группами, имеющими овальные, реже 4-угольные очертания. В составе групп четыре-пять слоев склеренхимы, клетки которой в поперечном сечении имеют овальную форму, а некоторые – в результате деформации – и извилистые стенки. На поперечном срезе клеточные полости щелевидные, овальные, иногда 3–4-угольные. Клетки волокон крупные, их тангентальный размер 25–33 мкм, а радиальный – 24–30 мкм. Кристаллоносная обкладка отсутствует. Ширина механического кольца составляет 75–80 мкм.

В первичной флоэме одни элементы сильно облитерировали, другие, в частности аксиальная паренхима, – дилатировали, поэтому она выглядит в виде сильно паренхиматизированных участков.

Вторичная флоэма сложена проводящими элементами, вертикальной и горизонтальной паренхимой. Ситовидные трубки в поперечном сечении овальные и 5-угольные, расположены в радиальных рядах. Клетки аксиальной паренхимы встречаются в виде коротких, тангентально ориентированных цепочек и распределены диффузно. Проводящие элементы более многочисленны, диаметр поперечника их члеников больше, чем у клеток вертикальной паренхимы. Тангентальный размер члеников ситовидных трубок 5–7 мкм, радиальный – 4–5 мкм, размеры клеток аксиальной паренхимы соответственно 3–4 и 2–3 мкм. Членики ситовидных трубок имеют длину до 120 мкм, ситовидные пластинки сложные, ситовидные поля округлые, довольно крупные. Поперечные стенки члеников ситовидных трубок ориентированы наклонно, однако длина их невелика. Сердцевинные лучи 1- и 2-рядные, их клетки тонкостенные. Лучи гетерогенные, высотой до 130 мкм, ширина их до 50 мкм, слойность до 35 клеток. На 1 мм² тангентального среза насчитывается до 80 лучей. Дилатация лучевая и диффузная, происходит в конце годовичного прироста флоэмы. Кристаллов в лубе не обнаружено.

Признаками, которые можно использовать в качестве диагностических, являются отсутствие эндодермы, гомогенная феллема, развитие кристаллов в ее клетках, утолщение только внутренних периклиальных стенок клеток феллемы, сложные пластинки у члеников ситовидных трубок, отсутствие кристаллов во вторичной флоэме.

Кора однолетнего стебля изученных видов *Quillaja* L. включает в себя эпидерму, перидерму, первичную кору, кольцо механических тканей, первичную флоэму, вторичную флоэму.

Эпидерма состоит из одного слоя клеток, которые в поперечном сечении имеют округлые очертания, а их внешние стенки несколько сводчатые. Оболочки эпидермальных клеток утолщены неодинаково: более толстой у обоих видов является их внешняя периклиальная стенка, покрытая слоем кутикулы. На радиальном срезе эпидермальные клетки вытянуто-прямоугольной формы у квилахи мыльной, у квилахи бразильской – прямоугольной и квадратной формы с выпуклой внешней периклиальной стенкой. Размеры клеток 13–16 мкм (тангентальный) и 8–9 мкм (радиальный) у квилахи мыльной, соответственно 10–13 и 4–5 мкм у квилахи бразильской. Виды отличаются также по внутреннему клеточному содержанию эпидермальных клеток: у квилахи мыльной оно уже в верхних междоузлиях стебля имеет темно-коричневую окраску, а у квилахи бразильской становится таковым лишь в эпидермальных клетках нижних междоузлий однолетнего стебля, а в верхней и средней частях его содержимое светлое.



В эпидерме *Quillaja saponaria* присутствуют выросты – волоски, длина которых достигает 50 мкм. Они кроющие, одноклеточные, с заостренной верхушкой и утолщенной оболочкой, поверхность которой неровная, имеет некоторую скульптурированность. Располагаются трихомы перпендикулярно поверхности органа, иногда верхушка волоска наклонная. Эпидерма *Quillaja brasiliensis* опушения не имеет.

Перидерма состоит из феллемы, феллогена и феллодермы. В составе пробковой ткани у квилахи мыльной в одном радиальном ряду находится пять–шесть слоев клеток, у квилахи бразильской – до четырех слоев. На поперечном срезе они имеют различную форму даже у одного вида. При этом три наружных слоя смятые, с извилистыми очертаниями клеток, с темно-коричневым содержимым, клетки внутреннего слоя живые, их содержимое светлое. На поперечном срезе у квилахи бразильской они выпукло-прямоугольной формы, а у квилахи мыльной – квадратные, прямоугольные, вытянутые в радиальном и тангентальном направлениях, с извилистыми оболочками. На радиальных срезах их очертания прямоугольные, вытянутые вдоль оси органа, и квадратные, с извилистыми оболочками (у квилахи бразильской). У квилахи мыльной клетки феллемы прямоугольные, вытянутые по оси и радиусу органа, а также квадратные и округло-квадратные, с извилистыми очертаниями. Клеточные оболочки незначительно и равномерно утолщены у обоих видов. В некоторых клетках этой ткани имеются округлые образования на поперечных и продольных срезах. Подобные структуры были отмечены в феллеме *Exochorda* и интерпретированы как кристаллы [9]. Можно предположить, что отмеченные структуры у *Quillaja* – это ранняя стадия формирования кристаллов. Феллоген однослойный, феллодерма у квилахи мыльной представлена также одним слоем клеток, а у квилахи бразильской – двумя-тремя слоями. Клетки феллодермы на поперечном срезе прямоугольные (у квилахи мыльной) и узко-прямоугольные (у квилахи бразильской), клеточные стенки тонкие. Формирование перидермы у обоих видов происходит по-разному. У квилахи бразильской она закладывается сначала только в одном участке стебля, на месте будущей чечевички. В средних междоузлиях однолетнего стебля перидерма сформирована уже примерно у половины его окружности, а другая половина остается покрытой эпидермой. Лишь в нижних междоузлиях стебель покрыт перидермой на всей своей поверхности. У квилахи мыльной кольцо ткани перидермы закладывается одновременно по всей окружности однолетнего стебля.

Первичная кора состоит только из клеток коровой паренхимы. У *Q. brasiliensis* в ее составе находится восемь–десять слоев клеток, у *Q. saponaria* их пять–шесть. В поперечном сечении клетки коровой паренхимы имеют овальную, вытянутую в тангентальном направлении форму, у квилахи мыльной они несколько сдавлены, поэтому имеют извилистые очертания. На продольных срезах клетки овально-прямоугольные и округло-квадратные у квилахи бразильской, а у квилахи мыльной внешние слои ткани сложены узкими овально-прямоугольными клетками и отличаются от внутренних слоев, состоящих из квадратных по форме клеток. Первичная кора у *Q. brasiliensis* однородная, клетки ее с тонкими оболочками, у *Q. saponaria* – гетерогенная и включает, помимо тонкостенных паренхимных, более крупные и темноокрашенные клетки с утолщенными оболочками. В них происходит синтез сапонинов. У обоих видов квилахи среди паренхимных клеток первичной коры имеются одиночные склереиды. Их клетки вытянуты и вдоль, и поперек оси органа. У квилахи бразильской они развиты в большем количестве, чем у квилахи мыльной. У обоих видов обнаружены также друзы оксалата кальция, а у квилахи бразильской имеются и стилоиды. Самый внутренний слой первичной коры у *Quillaja saponaria* отличается более крупными размерами его клеток,



темной окраской их внутреннего клеточного содержимого, и эту ткань можно интерпретировать, по-видимому, как эндодерму. В коре квилахи бразильской хорошо различимой эндодермы нет.

Кольцо механических тканей у обоих видов сплошное, гетерогенное, сложено волокнами и склереидами. Группы волокон склеренхимы на поперечном срезе у квилахи бразильской имеют овальные очертания, у квилахи мыльной – овальные и четырехугольные. Клеточные оболочки волокон и склереид у *Q. brasiliensis* слабо одревесневшие, у *Q. saponaria* лигнификация склеренхимных клеток слабая, а у склереид – очень сильная. На радиальных срезах склереиды отличаются также и по форме клеток: у квилахи бразильской они овальные и удлинено-овальные, а у квилахи мыльной склереиды имеют квадратную форму. В поперечном сечении волокон у первого вида преобладают овальные и округлые, реже 5-угольные очертания, у второго вида 4–5-угольные. Кристаллоносная обкладка механического кольца у обоих видов отсутствует.

Первичная флоэма плохо отличима от вторичной флоэмы, т.к. в результате дилатации запасующих клеток и облитерации проводящих элементов она имеет вид однородной паренхимной ткани.

Вторичная флоэма состоит из проводящих и паренхимных элементов. На поперечном срезе у обоих видов квилахи ситовидные трубки собраны в нечетко выраженные радиальные ряды, часть ситовидных трубок у квилахи бразильской образует короткие тангентально ориентированные цепочки. Среди проводящих элементов без видимой закономерности располагаются клетки аксиальной паренхимы. У обоих видов во флоэме преобладают проводящие элементы, они имеют большие размеры поперечника, чем клетки аксиальной паренхимы. На поперечном срезе тангентальный размер ситовидных трубок у квилахи мыльной 14–17 мкм и 11–13 мкм – у квилахи бразильской, радиальный размер соответственно 8–10 мкм и 10–11 мкм. В поперечном сечении ситовидные трубки имеют разнообразную форму: округлую, овальную, прямоугольную, вытянутую в тангентальном направлении, иногда очертания их извилисты. Длина члеников ситовидных трубок у *Quillaja saponaria* 100–140 мкм, у *Quillaja brasiliensis* – 180–230 мкм. Их поперечные оболочки по отношению к продольным стенкам наклонные, ситовидные пластинки простые. Клетки аксиальной паренхимы вторичной флоэмы содержат большое количество кристаллов щавелевокислого кальция. У квилахи бразильской – это стилоиды разной формы (очень длинные, узкие, заостренные с одной или двух сторон), широкие кристаллы уплощенной формы, короткопризматические, имеющие вид параллелепипеда, а у квилахи мыльной, кроме указанных, отмечены кристаллы ромбической формы. Флоэмные лучи однорядные и двурядные, гетерогенные. Клетки их тонкостенные. Высота лучей 350–400 мкм, ширина до 65–80 мкм. Слоистость сердцевинных лучей до 15 клеток (у *Quillaja brasiliensis*) и до 25 клеток у *Quillaja saponaria*. На 1 мм² тангентального среза находится до 60 лучей. Они слабо дилатируют, более выражена дилатация клеток аксиальной паренхимы.

В качестве диагностических признаков рода могут рассматриваться отсутствие эндодермы и колленхимы в составе коры, субэпидермальное заложение перидермы, гетерогенная феллема, наличие кристаллов в ней и равномерное утолщение клеточных стенок, наличие склереид в коровой паренхиме, сплошное гетерогенное кольцо механических тканей и отсутствие у него кристаллоносной обкладки, дилатация лучей и аксиальной паренхимы, развитие 1- и 2-рядных лучей.



Видоспецифические признаки: наличие или отсутствие трихом в эпидерме, го-могенная или гетерогенная паренхима первичной коры и неодинаковое утолщение сте-нок ее клеток, характер заложения перидермы по поверхности однолетнего стебля.

Заклучение

На основании полученных данных о строении коры и топографии ее тканей у однолетних стеблей в подсемействе Спирейные можно выделить несколько ее типов.

1. Начиная с периферии стебля, кора включает: эпидерму, колленхиму, паренхи-му первичной коры, эндодерму, кольцо механических элементов, перидерму, флоэму. После сбрасывания к концу первого года жизни эпидермы, колленхимы, коровой па-ренхимы и механического кольца кора состоит из перидермы и флоэмы. Такой тип строения коры присущ пузыреплоднику.

2. Кора состоит из эпидермы, колленхимы, паренхимы первичной коры, эндо-дермы, перидермы, кольца механических тканей, флоэмы. Эпидерма и первичная кора к концу первого года сбрасываются, и тогда кора включает в себя перидерму, механи-ческое кольцо и флоэму. Кора такого типа характерна для рябинника.

3. Кора включает в себя эпидерму, колленхиму, паренхиму первичной коры, эн-додерму, перидерму, кольцо механических тканей, флоэму. После сбрасывания эпидер-мы, колленхимы и коровой паренхимы кора состоит из эндодермы, перидермы, кольца механических элементов, флоэмы. Такая топография тканей встречается в коре видов рода спиреи и холодискуса.

4. Кора включает эпидерму, колленхиму, паренхиму первичной коры, механиче-ское кольцо, флоэму. После заложения перидермы в периферических участках первич-ной коры кора состоит из перидермы, паренхимы первичной коры, кольца механиче-ских элементов, флоэмы. Такая кора характерна для сибирки.

5. В составе коры выделяют эпидерму, которая после заложения перидермы слу-щивается, перидерму, колленхиму, паренхиму первичной коры, кольцо механических тканей, флоэму. Такого типа кора характерна для экзохорды.

6. Кора состоит из эпидермы, перидермы, паренхимы первичной коры, механи-ческого кольца, флоэмы. Такое строение имеет кора видов рода квилаха.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремин, В. М. Сравнительная анатомия коры сосновых : дис. ... д-ра биол. наук : 03.00.05 / В. М. Еремин. – Воронеж, 1983. – 630 л.

2. Лотова, Л. И. Современное состояние и перспективы развития анатомических исследований коры древесных растений в СССР / Л. И. Лотова // Науч. докл. высш. шк. Биол. науки. – 1985. – № 11. – С. 9–11.

3. Лотова, Л. И. Диагностика листовых древесных пород по микроструктуре коры / Л. И. Лотова // Бюл. МОИП. Отд. биол. – 1987. – Т. 92, вып. 1. – С. 53–57.

4. Focke, W. O. Rosaceae / W. O. Focke // Die natürlichen Pflanzenfamilien / A. Eng-ler, K. Prantl. – Leipzig, 1894. – Т. 3, Abt. 3. – S. 1–61.

5. Schulze-Menz, G. K. Rosaceae / G. K. Schulze-Menz // Syllabus der Pflanzenfami-lien / A. Engler. – Berlin, 1964. – Bd. 2. – S. 209–218.

6. Juell, H. O. Beitrage zur Blütenanatomie und zur Systematik der Rosaceen / H. O. Juell // Kungl. Svensk. Vetensk. Akad. Handl. – 1918. – Bd. 58, № 5. – 81 s.



7. Тахтаджян, А. Л. Система магнолиофитов / А. Л. Тахтаджян. – Л : Наука, 1987. – 439 с.
8. Takhtajan, A. Diversity and classification of flowering plants / A. Takhtajan. – New York, 1997. – 643 p.
9. Лотова, Л. И. Анатомия коры Echiochorda в связи с положением рода в системе сем. Rosaceae / Л. И. Лотова, А. К. Тимонин // Проблемы ботаники на рубеже XX–XXI веков : тез. докл. II (X) съезда Рус. ботан. о-ва. – СПб., 26–30 мая 1998. – СПб., 1998. – С. 51.
10. Стеббинс, Д. Л. О гибридном происхождении покрытосеменных / Д. Л. Стеббинс // Ботан. журн. – 1957. – Т. 42, № 10. – С. 1503–1506.
11. Goldblatt, P. Cytotaxonomic studies in the tribe Quillaeae (Rosaceae) / P. Goldblatt // Annals of the Missouri Botanical Garden. – 1976. – Vol. 63. – P. 200–206.
12. Morgan, D. Systematic and evolutionary implications of rbcL-sequence variation in Rosaceae / D. Morgan, D. Soltis, K. Robertson // Amer. J. Bot. – 1994. – Vol. 81, № 7. – P. 890 – 903.
13. Прозина, М. Н. Ботаническая микротехника / М. Н. Прозина. – М. : Высш. шк., 1960. – 206 с.
14. Lotova, L. I. Anatomy of cortex and secondary phloem of Rosaceae. 3. Quillajoideae / L. I. Lotova, A. C. Timonin // Ботан. журн. – 1999. – Т. 84, № 2. – С. 34–41.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.02.2018

Matusевич N.M., Zigar M.P. The Diversity of the Annual Stem Bark Structure in the Representatives of the Subfamily Spiraeoideae

A comparative study of the anatomical structure of the cortex of the annual stem of 13 members of the subfamily Spiraeoideae of the family Rosaceae Juss was carried out.: Spiraea vanhouttei (Briot) Zab., Spiraea media Franz Schmidt., Spiraea japonica L., Spiraea hypericifolia L., Spiraea chamaedrifolia, L., Spiraea salicifolia L., Sorbaria sorbifolia (L.) A. Br., Sibiraea laevigata Maxim., Physocarpus opulifolius (L.), Holodiscus discolor (Pursh.) Maxim., Exochorda racemosa L., Quillaja saponaria L. and Quillaja brasiliensis L. Noted the distinctive features of the cortex have been studied representatives, analyzed their systematic position.



УДК 581.824

Н.В. Шкуратова

канд. биол. наук, доц., доц. каф. ботаники и экологии
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: botany@brsu.brest.by

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОРЫ НЕКОТОРЫХ *SALICACEA* В СВЯЗИ С АНАТОМИЕЙ РИТИДОМА

Рассматриваются результаты изучения морфологии коры ряда представителей двух родов семейства Salicaceae. Морфология коры исследованных видов изменяется с возрастом и становится сходной в пределах рода. Для видов рода Populus L. в стволовой части характерна кора с узкими продольными трещинами и широкими пластинками, ступенчатым естественным краем. Для видов рода Salix L. присуща однотипная кора с трещинами широко-ромбической формы и лентовидными пластинками ритидома.

Введение

Еще в 1938 г. древесиновед С.И. Ванин предложил использовать морфологические признаки коры для диагностики древесных пород. Одним из признаков, положенных им в основу выделения фенотипов (форм) у многих древесных пород является внешняя структура коры, и этому признаку в дендрологической литературе уделяется значительное внимание [1]. Дендрологи классифицируют деревья по фактуре и трещиноватости (рисунку), окраске коры ствола [2].

Облик коры тесно связан с биологическими особенностями дерева – характером роста, качеством ствола и древесины, устойчивостью к болезням и вредителям, смолопродуктивностью. Следовательно, разные формы имеют селекционно-лесоводственное значение, а форма коры, как легко наблюдаемый признак, имеет большое значение в селекции [3]. При производстве лесотаксационных работ определение возраста деревьев по внешним признакам значительно уменьшает трудоемкость и затраты времени, т.к. исключает рубку модельных деревьев для этой цели [4].

Морфологические признаки обусловлены генетически и взаимосвязаны с анатомическими и физиологическими признаками [5]. Формы коры коррелируют с возрастом растения и существуют указания на возможность определения возраста дерева по внешнему облику коры. Облик коры, характерный для того или иного фенотипа, в благоприятных условиях обитания формируется к 40–50-ти годам, проходя до этого определенные возрастные этапы. В неблагоприятных условиях формирование типичного облика происходит раньше. Типичный для того или иного фенотипа облик коры, достигший отчетливой выраженности, в дальнейшем не меняется и остается специфичным на протяжении всей жизни [3].

Наиболее ярким проявлением возрастных изменений в развитии коры древесного стебля является формирование ритидома. Ритидом, или корка – это комплекс мертвых тканей, формирующихся в результате заложения повторных перидерм. У разных растений это происходит в разное время жизни [6]. Мощность ритидома определяется шириной перидерм, расстоянием между ними, периодичностью их заложения и т.д.

Гладкокорые породы, такие как пихта, бук, граб, ритидом не образуют вообще [6]. В результате возрастных изменений в стволовой части их кора состоит из тех же тканей, что и кора однолетнего стебля, но сильно измененных, а преобладающей тканью является непроводящая флоэма [7]. У корковых пород, т.е. образующих ритидом, кора



ствола приобретает различный облик. Плотный по слоению ритидом растрескивается продольными трещинами, которые могут располагаться по длине ствола параллельными или косо скрученными бороздами, продольно-поперечными квадратами и т.д., характерными для каждого вида древесного растения [3].

С учетом вышесказанного, нам представляется актуальным проведение исследований с целью установления морфологических особенностей коры широко распространенных видов семейства *Salicaceae*, имеющих жизненную форму дерево в связи со спецификой анатомического строения их ритидома.

Материалы и методы

В белорусской флоре и в культуре семейство *Salicaceae* представлено двумя родами – *Populus* L. и *Salix* L. [8]. В качестве объектов исследования были избраны широко распространенные виды, естественно произрастающие в природных сообществах Беларуси и имеющие жизненную форму дерево: *Populus alba* L., *Populus tremula* L., *Populus nigra* L., *Salix alba* L., *Salix fragilis* L., *Salix caprea* L. Учет и сбор материала проводили на территории Брестского района. На территории г. Бреста собран материал культивируемого вида *Salix babylonica* L.

Для исследования отбирали сформировавшиеся особи в возрасте 20–50 лет по 25 штук. Отбирали только здоровые растения, не имевшие внешних признаков повреждения вредителями и болезнями, произрастающие в оптимальных условиях. Измерения и учет характеристик коры производили на высоте ствола 130 см от уровня земли. Трещиноватость коры деревьев оценивали визуально при помощи лупы, учитывая геометрию отдельных пластинок, направление, рисунок и глубину трещин.

Для микроскопического анализа образцы коры ствольной части собирали после окончания вегетации, фиксировали в смеси 96 %-го этанола и глицерина (1:1). Из образцов на санном микротоме готовили тонкие срезы, толщиной 8–25 мкм. Полученные срезы окрашивали регрессивным способом. Методика изготовления постоянных препаратов была общепринятой в анатомии растений [9]. Анализ микропрепаратов производили на световых микроскопах «Микромед 1», «Альтами». Измерения осуществляли с применением винтового окуляр-микрометра МОВ-1-15.

Результаты и их обсуждение

Кора стволов *Populus tremula* и *Populus alba* на протяжении длительного периода сохраняется гладкой. Средневозрастные гладкокорые стволы покрыты крупными ромбическими чечевичками. Чечевички в коре молодых экземпляров овальные или штриховидные, в ствольной части возрастных особей становятся грубыми, ромбовидными. Структура их классическая: в разрывах пробки происходит поочередное отложение слоев плотно сложенной тонкостенной феллемы и рыхло сложенных клеток выполняющей ткани. Общей чертой чечевичек является специфика выполняющей ткани: клетки тонкостенные, часто с извилистым контуром и очень напоминают тонкостенную феллему.

У *Populus alba* гладкокорые стволы светлые, оливково-серые. С возрастом у этого вида стволы становятся корковыми с продольно-трещиноватой структурой в средней и верхней частях и глубоко-продольно-трещиноватой у основания. Также изменяется окраска коры до буровато-серой, иногда почти черной (рисунок 1).

А.П. Царев различает у *Populus tremula* четыре вида коры: гладкозеленокорую, грубозеленокорую, гладкосерокорую, грубосерокорую [10]. В нашем исследовании об-



наружены особи по структуре коры, относящиеся к гладкокорой и грубокорой формам. Наиболее распространена в исследованных условиях гладкокорая форма *Populus tremula*. Кора у этой формы в верхней части ствола гладкая, с редкими чечевичками, окраска зеленая со слегка бронзовым или белесоватым оттенком до серебристой, внизу темно-серая с неглубокими трещинами. Грубый ритидом поднимается по стволу на высоту 0,5–3 м. На грубокорую форму *Populus tremula* приходится 1/4 от числа обследованных экземпляров. Кора в верхней части ствола по цвету сходна с гладкокорой формой. Грубая кора отмечается на высоте от 3 до 6 м и иногда выше. Внизу она темно-серая, с крупными трещинами. Выше по стволу трещины в ритидоме становятся мельче (рисунки 2, 3).

В комлевой части ствола или в высоком возрасте на более высоко расположенных участках кора *Populus tremula* растрескивается, становясь продольно-трещиноватой, бороздчатой, приобретает более темную окраску. Продольные бороздки длинные, глубокие. Зачастую грубая кора остается темной по всей высоте ее распространения, иногда выше по стволу она несколько высветляется, принимая серебристый или светло-серый оттенок.

Утверждение об изменении формы коры в связи с возрастом [3; 11], справедливо для *Populus tremula* и *Populus alba*: у молодых особей на гладкой коре появляется продольная трещиноватость, которая развивается в груботрещиноватую форму. Далее морфологические формы остаются неизменны у всех особей.

У *Populus nigra* выше по стволу кора светло-серая без трещин. В нижней части кора пепельно-серая, у старых деревьев ствол покрыт темно-серой, почти черной, толстой глубоко-трещиноватой корой (рисунок 4).

Таким образом, у тополей, и как у других светолюбивых пород, к зрелому возрасту формируется трещиноватая, толстая кора, характеризующаяся наличием глубоких и только продольных борозд. Характер окраски коры у тополей также меняется с возрастом, и большинство особей, являясь светлокорыми в молодом возрасте, приобретают более темный оттенок феллемы. По мере утолщения ритидома, степень растрескивания коры меняется от поверхностной до глубокой, а окраска – до более темной.

Сравнительное изучение анатомии показало, что все исследованные виды рода формируют ритидом, который структурно очень сходен. Ткани, отторгаемые в его состав, уже больше не подвергаются деформации, в нем хорошо сохраняются волокна и склереиды. Особенности заключаются только в структуре повторных перидерм и их расположении.

Наиболее мощные повторные перидермы (до 400–500 мкм шириной) формирует *Populus nigra*. Располагаются они на расстоянии 100–600 мкм друг от друга, при этом могут быть более или менее параллельными друг другу или извилистыми, как у *Populus alba*.

У тополей с продольно-трещиноватой корой в составе ритидома обнаруживается множество повторных перидерм с включениями различных тканей – первичной коры и непроводящей флоэмы. Каждый последующий феллоген опирается своими концами на предыдущий, поэтому на поперечном срезе хорошо заметны «разветвления» перидерм (рисунки 7, 9). Образовавшийся феллоген функционирует два–три года. Феллема этих перидерм всех видов тонкостенная, ее клетки лишены содержимого, только у *Populus alba* и *Populus nigra* она имеет на поперечном срезе радиальные размеры клеток, большие или равные тангентальным (у *Populus alba* радиальный размер составляет 30–35 мкм, тангентальный – 30–40 мкм). У *Populus tremula* и *Populus nigra* радиальный размер клеток феллемы вдвое меньше тангентального (соответственно 10–15 и 20–30 мкм).



Рисунок 1. – Кора *Populus alba*



Рисунок 2. – Кора *Populus tremula*



Рисунок 3. – Кора *Populus tremula*



Рисунок 4. – Кора *Populus nigra*



Рисунок 5. – Кора *Salix fragilis*



Рисунок 6. – Кора *Salix alba*



Рисунок 7. – Кора *Salix babylonica*



Рисунок 8. – Кора *Salix caprea*

У всех без исключения видов годичные слои тонкостенной феллемы разграничиваются одним слоем сильно уплощенных клеток (радиальный размер меньше танген-



тального в 3 раза), имеющих довольно толстые оболочки (толщина стенки составляет 1/2 радиального размера клетки). Вероятно, уплощению подвергается слой клеток, которым заканчивается годичный прирост феллемы. Они не лигнифицированы и являются настоящим феллоидом, благодаря чему феллема повторных перидерм имеет слоистое строение [12; 13].

В непроводящей зоне флоэмы ствола, включенной в состав ритидома, флоэмные лучи практически не отклоняются от своего первоначального направления и форма поперечного сечения ситовидных трубок больше не изменяется, сохраняя форму своего поперечного сечения.

В ствольной части четко отграничивается последний годичный слой флоэмы шириной 100–400 мкм, выполняющий проводящую функцию. Только у *Populus alba* периферическую часть флоэмы, граничащую с ритидомом и занимающую до 25–30 % общей ширины вторичной флоэмы, можно назвать дилатационной. Она характеризуется чрезвычайно сильной дилатацией горизонтальной и вертикальной паренхимы, формированием многочисленных групп склерид, увеличением количества кристаллоносных клеток. После отторжения в составе ритидома дилатационной флоэмы образуется ритидом насыщенный паренхимной тканью, видимо, в силу этого процесса, плотный по сложению, он растрескивается продольными трещинами на крупные ромбовидные пластины. Но по мере роста стебля в ширину борозды становятся шире, и ритидом в высоком возрасте не отличим от ритидома других видов. *Populus alba* выделяется и по соотношению проводящих и запасающих элементов проводящей флоэмы – ситовидные элементы этого вида занимают до 80 % площади поперечного сечения.

Во флоэме ствольной части у всех видов довольно значительно снижается количество лучей на единицу площади тангентального среза – до 20–50 штук. Структурно лучи не изменяются, оставаясь гомогенными или гетерогенными. Полосы лубяных волокон располагаются обычно на более или менее одинаковом расстоянии друг от друга (у большинства видов в среднем через 100–200 мкм).

Морфология коры исследованных видов рода *Salix* во многом однотипна. Используя терминологию М.В. Шабалиной по исследованию трещиноватости коры ясеня согдианского [12], трещиноватость деревьев ив можно оценивать как удлиненно-ромбовидную. Отмечается, что у деревьев с ромбической формой коры чаще имеются толстые сучья и раскидистые кроны, что характерно и для ив.

Стволы *Salix caprea*, *Salix alba*, *Salix fragilis*, *Salix babylonica* образуют ритидом довольно рано, в сравнении с видами тополей. Кора продольно глубокотрещиноватая, а в комлевой части и в высоком возрасте – грубо-продольно-глубокотрещиноватая. Слоистый ритидом указанных видов образует характерный продольный сетчатый рисунок на поверхности коры. Бороздки глубокие, длинные, далеко друг от друга отстоящие. Такое расположение борозд определяет удлиненно-ромбовидный рисунок коры. Между бороздами отслаиваются с поверхности длинные лентовидные участки ритидома – «ребра»: у *Salix caprea*, *Salix alba*, *Salix babylonica* узколентовидные, у *Salix fragilis* широколентовидные. Ребра уплощенные с поверхности у *Salix caprea*, *Salix babylonica*, *Salix fragilis*, а у *Salix alba* – бугорчатые (рисунки 5–8).

Повторные перидермы формируются в ритидоме исследованных видов рода *Salix* типичного строения. Существенными диагностическими признаками феллоген и феллодерма не обладают. Как и у других древесных пород, наиболее важной в диагностическом отношении является феллема. *Salix babylonica* имеет гомогенную, только тонкостенную феллему. Радиальный размер ее клеток варьирует в пределах 20–50 мкм. Тан-



гентаьный размер составляет 20–44 мкм. Периферические клетки уплощаются: радиальный размер их в 2–3 раза меньше радиального размера клеток внутренних слоев. У *Salix alba*, *Salix fragilis* феллема гетерогенная, т.е. пробка как тонкостенная, так и толстостенная. Толстостенные клетки не лигнифицированы (феллоид), образуют разное количество слоев – от одного до четырех–пяти (*Salix fragilis*), они уплощены, радиальный размер меньше радиального размера тонкостенных клеток.

Примечательно, что у *Salix alba* феллоген повторных перидерм функционирует несколько лет, поэтому феллема этого вида сложена чередующимися слоями тонкостенных и толстостенных клеток.

Перидермы закладываются на разном расстоянии друг от друга: у *Salix alba* и *Salix fragilis* до 800 мкм, у *Salix fragilis* до 11 000 мкм. Подтверждается связь между степенью развития ритидома и габитусом растений: у деревьев ритидом более мощный. *Salix fragilis* наиболее толстокорый вид в сравнении с остальными: при сходной ширине повторных перидерм имеет значительно большее расстояние между повторными перидермами.

У особой *Salix caprea* с габитусом дерева ритидом формируется в более позднем возрасте или только локально, у самого комля. Повторные перидермы содержат тонкостенную феллему. Ширина повторных перидерм варьирует от 50 до 200 мкм. Расположены они почти параллельными, хотя и извилистыми полосами, соединяясь под острым углом.

В силу наличия танидов, волокон, отсутствия склерид во вторичной флоэме и других тканях, тонкостенной феллемы, ритидом у видов ив можно охарактеризовать как «вязкий», эластичный [12].

Заклучение

Морфология коры исследованных представителей семейства *Salicaceae* изменяется с возрастом и становится сходной в пределах рода. Для видов рода *Populus* в стволовой части характерна кора с узкими продольными трещинами и широкими пластинками, ступенчатым естественным краем.

На примере *Populus tremula* показано, что гладкокорая и грубокорая формы представляют собой возрастные этапы развития коры ствола деревьев. Для видов рода *Salix* присуща однотипная кора с трещинами широко-ромбической формы и лентовидными пластинками ритидома.

Вследствие дилатации паренхимы, облитерации проводящих элементов коры, заложения повторных перидерм изменяется морфологический облик коры стволов древесных пород, что придает коре ствола и ритидому специфический облик.

У ивовых с продольно- или ромбовидно-трещиноватой корой ритидом состоит из множества дуговидных повторных перидерм с включениями первичной коры и непроводящей флоэмы. При этом повторные перидермы различной толщины располагаются на расстоянии 100–600 мкм друг от друга, могут быть более или менее параллельными друг другу или извилистыми. Каждый последующий феллоген опирается своими концами на предыдущий, что и определяет локализацию трещин на поверхности коры.

Таким образом, морфологическое строение коры ствола является отображением направленности и интенсивности внутренних процессов развития и обусловлено анатомической структурой коры в целом и ритидома в частности.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванин, С. И. Определитель древесных пород по коре / С. И. Ванин. – Л. : Лес. пром-сть, 1940. – 16 с.
2. Колесников, А. И. Декоративная дендрология / А. И. Колесников. – М. : Лес. пром-сть. – 1974. – 704 с.
3. Еремин, В. М. Анатомия вегетативных органов Сосновых : монография / В. М. Еремин, Е. С. Чавчавадзе. – Брест : Полиграфика, 2015. – 692 с.
4. Рой, Ю. Ф. Типы трещиноватости и защиты свойства корки сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) в условиях юго-запада Беларуси / Ю. Ф. Рой, М. В. Левковская // Весн. Мазыр. дзярж. пед. ун-та імя І. П. Шамякіна. – 2011. – № 3. – С. 3–8.
5. Еремин, В. М. Анатомическая структура хвойных древесных пород Дальнего Востока : дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / В. М. Еремин. – Воронеж, 1972. – 306 л.
6. Бавтуто, Г. А. Атлас по анатомии растений : учеб. пособие для вузов / Г. А. Бавтуто, В. М. Еремин, М. П. Жигар. – Минск : Ураджай, 2001. – 146 с.
7. Анатомия коры деревьев и кустарников : монография / В. М. Еремин [и др.]. – Брест : Изд-во Брест. гос. ун-та, 2001. – 187 с.
8. Определитель высших растений Беларуси / под. ред. В. И. Парфенова. – Минск : Дизайн ПРО, 1999. – 472 с.
9. Прозина, М. Н. Ботаническая микротехника / М. Н. Прозина. – М. : Высш. шк., 1960. – 206 с.
10. Царев, А. П. Сортоведение тополя : монография / А. П. Царев. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1985. – 156 с.
11. Шабалина, М. В. Внутривидовая изменчивость ясеня согдианского *Fraxinus sogdiana* Bunge / М. В. Шабалина // Молодой ученый. – 2014. – № 1. – С. 197–200.
12. Еремин, В. М. Сравнительная анатомия коры ивовых : монография / В. М. Еремин, Н. В. Шкуратова. – Брест : Изд-во Брест. гос. ун-та, 2007. – 196 с.
13. Шкуратова, Н. В. Корка ив как источник анатомической информации / Н. В. Шкуратова // Современная фитоморфология : сб. материалов I Междунар. науч. конф., Львов, 24–26 апр. 2012 г. : в 2 т. – Львов, 2012. – Т. 2. – С. 129–131.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.09.2018

Shkuratova N.V. Morphological Characteristics of Bark Some Salicaceae in Connection with the Anatomy Rhytidome

The article deals with the results of studying the morphology of the cortex of a number of representatives of two genera Salicaceae. The morphology of the bark of the studied species changes with age and becomes similar within the genus. For species of the genus Populus L. in the stem is characterized by a bark with narrow longitudinal cracks and wide plates, stepped natural edge. For species of the genus Salix L. characterized by the same type of bark with cracks of wide-rhombic shape and ribbon-shaped plates of the rhytidome.



УДК 551.43(476)

Н.Ф. Гречаник

канд. геогр. наук, доц.,

доц. каф. географіі і прыродопользавання

Брестскаго дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

e-mail: hrachanik55@mail.ru

МИНЕРАЛЬНЫЙ СОСТАВ ЭОЛОВЫХ АККУМУЛЯЦИЙ НА ТЕРРИТОРИИ ЮГО-ЗАПАДНОЙ ЧАСТИ БЕЛАРУСИ

Охарактеризованы эоловые аккумуляции, их минеральный состав и рельефные формы на территории юго-западной части Беларуси. Минеральный состав эоловых накоплений региона полимиктовый. Эоловые аккумуляции сформировались за счет перевеивания отложений аллювиального, пролювиального, озерного и водно-ледникового генезиса.

Введение

Необходимыми условиями для возникновения и развития эолового рельефа является наличие несвязанного (рыхлого) пылеватого, сухого торфяного, чаще песчаного материала, реже снега, а также среды переноса воздушной оболочки приповерхностными ветрами, достаточными для отрыва и транспортировки вышеперечисленного материала. Воздушные потоки в атмосфере, наиболее динамичной и подвижной среде, принимающей участие в процессах рельефообразования, действуют повсеместно. Однако широкое развитие эолового литоморфогенеза возможно только там, где на обширных пространствах значительную часть времени породы обнажены и слабо покрыты растительностью.

Такие условия сложились в пределах юго-западной части Беларуси, как и в целом на территории Полесья, где она развивалась в перигляциальных условиях в эпоху отступления припятского оледенения в днепровское и сожское время, а также во время поозерского оледенения и начале голоцена.

Широкое распространение эоловых аккумуляций и эолового рельефа связано с геологическими, литологическими особенностями региона и геологической историей его развития. Заметна роль антропогенного фактора в активизации эоловых процессов. Эоловые образования на территории Белорусского Полесья в целом, и его юго-западной части в частности, имеют более чем столетнюю историю изучения.

Сведения о сильных ветрах, вызывающих песчаные ураганы, засыпающих поля, огороды и даже жилища, образуя песчаные холмы, широко распространены в западной части Полесья. П.А. Тутковский рассматривал Полесье как одну из ископаемых пустынь северного полушария, а эоловые образования считал барханами [1]. В.К. Лукашев высказал мнение, что дюнно-бугристый рельеф Полесья не является первичным [2]. С.С. Коржуев утверждал, что эоловые образования региона сформировались в результате переработки песчаных аллювиальных отложений [3]. О.Ф. Якушко и Н.А. Махнач считали, что образование эоловых гряд, бугров, параболических дюн связано не только с переработкой водно-ледниковых песков, но и перевеиванием многочисленных прирусловых валов, образовавшихся в результате интенсивного меандрирования рек [4]. А.В. Матвеев эоловый рельеф Полесья рассматривает как полигенетическое образование [5]. Сведений о минеральном составе эоловых аккумуляций в публикациях перечисленных исследователей нет.



Матэрыял і метады

Матэрыял для ісследований отбирался из рельефных эоловых форм, которые широко распространены на территории региона. Отобранный материал с помощью сит разделялся на фракции. Для определения минерального состава материал каждой фракции просматривался под бинокулярным стереоскопическим микроскопом МБС-10.

Разделение материала по удельному весу на тяжелые и легкие минералы производилось по стандартной методике с использованием бромформа (трибромметан) состава CHBr_3 . Для его стабилизации прибавляли 4 %-ный спирт и доводили раствор до удельного веса 2,7.

Результаты исследования

В настоящее время в пределах исследуемой территории протекают следующие виды эоловых процессов: перенос песчаного, иссушенного торфяного материала и его аккумуляция, а в зимнее время – снега с включением минеральной массы. Проявляется дефляция – процесс выдувания рыхлого, в основном песчаного материала, и реже проявляются процессы корразии – обтачивания, шлифовки, высверливания и разрушения цементированных горных пород материалом, переносимым под действием ветра. Этот процесс наблюдается в крупных карьерах, расположенных на территории Каменецкого, Жабинковского, Кобринского и Ивановского районов.

В искусственной выработке эоловых отложений, слагающих линейно ориентированную меридиональную гряду с абсолютной отметкой 182, 6 м, расположенную северо-восточнее д. Селяхи Брестского района, вскрыты и описаны сверху вниз слои рыхлых песчаных эоловых отложений.

А. 0,0–0,2 – почвенно-растительный слой. Почва песчаная темно-серая с включением полуразложившихся древесных и травянистых остатков, а также корней растительности. Песок мелкозернистый, в нижней части горизонта с включением единичных зерен гравия.

Б. 0,2–1,4 – песок светло-желтый до глубины 0,4 м, ниже – желтовато-белесый, а с глубины 1,0 м – с ржаво-бурыми пятнами ожелезнения, кварцево-полевошпатовый, с примесью темноцветных минералов, разнозернистый, с редким включением гравия диаметром 2 мм в верхней части разреза. Окатанность гравийных и песчаных зерен хорошая, поверхность матовая, и только у единичных зерен имеются совершенно свежие стеклянно блестящие сколы. Слоистость косая, с углами падения слоев 25–28 °.

В. 1,4–5,2 – песок темно-желтый, местами ржаво-бурый мелкозернистый кварцево-полевошпатовый с примесью глинистых частиц и темноцветных минералов, обводненный. Контакт с вышележащим слоем четкий. Слоистость косая. Мощность косых серий до 12 см. В верхней части слоя видны сохранившиеся знаки эоловой ряби, которые маркируются включениями черного органогенного материала. Индекс знаков эоловой ряби (ширина/высота) 15/4 мм.

В представленном разрезе по данным буровой скважины на глубине 12,4 м эоловые пески подстилаются водно-ледниковыми отложениями времени отступления припятского ледника днепровского времени. На основании изучения отобранного материала установлено, что в эоловых отложениях доминируют псаммитовые (песчаные) фракции 0,5–0,25 и 0,25–0,1 мм (таблица). В верхней части, особенно в кровле разреза отложений, содержание псефитового (крупнообломочного) материала составляет 4 %. По степени сортировки пески неоднородны. До глубины 2,0 м доминируют песчаные частицы размером от 2 до 1,2 мм.

Наиболее сортированные разности приурочены к средней части разреза. На глубине 2,5–4,0 м увеличивается содержание материала размерностью 0,25–0,1 мм. Вниз



по разрезу на глубине 4,5–5,2 м резко возрастает количество частиц алевритовой (пылеватой) фракции и пелитовых (глинистых), а также тонкодисперсных частиц. Аналогичная закономерность наблюдается в эоловых аккумуляциях, расположенных у деревень Рытец, Орхово, Харсы, Леплевка, ст. Дубица, Збунин, Знаменка, Страдечи, Медно Брестского района и д. Хотислав Малоритского района.

Таблица. – Гранулометрический состав эоловых отложений правосторонней части долины р. Западный Буг, д. Селяхи, %

Глубина, м	Фракция, мм					
	более 1,0	1–0,5	0,5–0,25	0,25–0,1	0,1–0,01	менее 0,01
0,40	2,6	24,7	39,2	27,7	4,3	1,5
1,2	1,5	15,2	40,6	31,6	8,4	2,7
3,0	0,4	5,0	18,6	38,7	31,3	6,0

Основными минералами эоловых аккумуляций псефитовой размерности являются минералы легкой фракции – кварц (85,2 %), полевые шпаты (7,4 %), мусковит (1,1 %) биотит (0,9 %), выветрелый глауконит (1,0 %). Количество темноцветных минералов тяжелой фракции (гранат, турмалин, циркон, рутил, гематит, роговая обманка, эпидот, пирит) в сумме составляет 4,2 %. Обломки кварца хорошо окатанные, имеют шарообразную форму с матовой поверхностью. Есть кварцевые обломки угловатой формы – остросереберные и остроугольные стеклянного блеска. Гранаты (альмандин, гроссуляр и андрадит) остроугольной, угловатой формы, слабо окатанные, реже в виде бесформенных зерен. Гроссуляр находится в виде кристаллов додекаэдрической формы и обломков зерен различной степени окатанности. Максимальные его концентрации отмечены в эоловых аккумуляциях возле железнодорожной станции Дубица и в эоловых рельефных формах возле озер Белое, Черное и Тайное Брестского района. Циркон и рутил присутствуют в виде угловатых обломков неправильной формы с раковистым изломом, имеются зерна хорошей степени окатанности с шероховатой поверхностью. Турмалин и роговая обманка присутствуют в виде угловато-окатанных, пластинчатых зерен иногда с неровными краями. Для удлиненных обломков турмалина характерна зональная окраска.

Минеральный состав эоловых аккумуляций менееразмерных фракций включает содержание различных минералов. Материал псаммитовой (песчаной), алевритовой (пылеватой) и пелитовой (глинистой) фракций состоит из различных зерен минералов. В целом в их составе присутствуют легкие минералы, среди которых преобладают кварц и полевые шпаты. В процентном отношении это составляет более 80 %. В составе псаммитовой фракции доминируют кварц (65 %) и полевые шпаты (24 %). Содержание слюды незначительное (1 %). Обломки кварца округлой, угловатой формы. Наряду с такими формами в большом количестве присутствуют идиоморфные кристаллы кварца размером 0,5–0,8 мм. Присутствие такого кварца в составе псаммитовой фракции объясняется наличием разно размерных обломков, разной степени выветрелости мелкозернистого кварцевого песчаника в эоловых отложениях западной части региона. В составе псаммитовой фракции песка содержится до 10 % тяжелых минералов с удельным весом более 2,7 г/см³. Среди них выделены роговая обманка, гранат, магнетит, эпидот, рутил, циркон, турмалин, глауконит и пирит. Роговая обманка в виде угловатых, окатанных, реже удлиненных зерен с едва уловимой штриховкой на удлиненных поверхностях. Окраска зерен равномерная черная, реже черно-зеленоватая. Некоторые зерна имеют зональную окраску. Гранаты представлены альмандином, андрадитом и редко гроссуляром. Альмандин красного, коричневатого-красного, малинового цвета, андрадит –



зеленовато-желтого, реже коричневого и бурого цвета. Гроссуляр идентифицируется по характерной бледно-зеленой окраске кристаллических зерен. Зерна граната изометричные, остроугольные, неправильно угловатые, некоторые с раковистым изломом на поверхности грани. Часто среди граната отмечаются изометричные кристаллические формы ромбододекаэдров. Поверхность таких зерен гладкая, матовая. На некоторых зернах отмечаются корочки из лимонита. Магнетит наблюдается в виде неправильных, различной степени окатанности зерен с металлическим блеском. Окраска минерала черная с синеватой побежалостью. Обломки эпидота желтовато-зеленого, типично фиштакково-зеленого цвета с матовой поверхностью. Форма обломков пластинчатая, угловатая, реже – призматическая. Пироксены представлены авгитом и гиперстеном. Авгит среди других минеральных обломков отличается резкой шагреновой поверхностью зерен и растворяется в горячей соляной кислоте. Окраска минерала черно-зеленая и черная. Обломки гиперстена окатанные и полуокатанные, реже удлиненные призматической формы. Цвет коричневатозеленый. Рутил среди тяжелых минералов псаммитовой, алевритовой и пелитовой фракций является доминирующим минералом. Окраска минерала красновато-бурая, зеленоватая, реже – синевато-фиолетовая и черная. Рутил в материале псаммитовой фракции представлен в виде кристаллов удлиненной, тетрагональной и призматической формы. Отмечаются двойники сростания и коленчатые формы обломков. В алевритовой и пелитовой фракции зерна рутила хорошо окатанные, реже наблюдаются угловато-окатанные и таблитчатые обломки. Циркон по распространенности среди тяжелых минералов занимает второе место, особенно много его в алевритовой фракции. В псаммитовой фракции доминируют короткостолбчатые и длиннопризматические формы. В менее размерных фракциях доминируют хорошо окатанные шаровидные и боченковидные формы зерен. Турмалин из эоловых отложений характеризуется черной, реже сиреневой окраской и характерным сечением обломков кристаллов в форме сферического треугольника, а также наличием одновременно штриховки на гранях. По совокупности этих признаков он достоверно различается с другими минералами, обладающими черной окраской. Глауконит встречается в виде шаровидных, лепешковидных и комковидных зерен бледно-зеленой окраски. Этот минерал присутствует как в тяжелой, так и в легкой фракции. Следует отметить, что в эоловых отложениях верхней части разреза преобладает глауконит легкой фракции, и его количество резко сокращается. Это, скорее всего, объясняется иссушением материала отложений и воздействием на него ветра с последующим выносом за пределы эоловых форм в заболоченные понижения. Пирит в материале эоловых отложений присутствует в незначительных количествах. Он встречается в виде зернистых, иногда конкреционных агрегатах темно бурого, реже золотистого цвета.

В алевритовой фракции доминирующим среди легких минералов является кварц (75 %). Количество полевых шпатов по сравнению с псаммитовой размерностью несколько уменьшается (до 19 %), а количество слюд увеличивается (до 4 %). Содержание тяжелых минералов в алеврите составляет более 6 %. Состав минералов и их соотношения между собой совпадают с составом и соотношениями минералов псаммитовой размерности.

Во фракции пелита сохраняется такая же закономерность по составу и соотношению минералов. Наряду с мучнистым кварцем в этой фракции отмечены типичные глинистые минералы группы каолинита (диккит, накрит), группы монтмориллонита (нонтронит) и группы гидрослюдов (гидромусковит, вермикулит, глауконит). В этой фракции присутствуют аутигенный кальцит и лимонит.

Минеральный состав эоловых песков на территории юго-запада Беларуси полимиктовый, включающий легкие и тяжелые минералы. Среди легких минералов во всех



размерных фракціях домінуюцьмі яўляюцца кварц і полевыя шпаты, сродзі цяжэлых – руціл і ціркон.

Эоловыя (перевеяныя) отложения и созданные ими формы рельефа широко распространены на территории юго-западной части Беларуси. Эоловые формы представлены аккумулятивными формами: песчаными буграми и холмами, параллельными и отдельными единичными, линейными меридионально, реже субширотно ориентированными грядами, параболическими, серповидными, кольцевыми и полукольцевыми дюнами, которые сформировались на поверхности песчаных аллювиальных, водно-ледниковых и реже моренных отложений.

Заклучение

Резюмируя вышеизложенное и базируясь на анализе особенностей размещения, строения и минерального состава эоловых аккумуляций и созданных ими форм рельефа на территории юго-западной части Беларуси, можно сделать следующие выводы.

1. Эоловые отложения формировались в перигляциальных условиях верхней части среднего, позднего плейстоцена и голоцена за счет перевеивания водно-ледниковых, реже моренных накоплений припятского ледникового покрова днепровского и сожского времени, пролювиальных, озерных, а также аллювиальных отложений, слагающих в настоящее время пойму и частично первые надпойменные террасы рек региона.

2. В течение длительного времени формирования эоловых аккумуляций изменялась аэромассовая динамика в приземном слое: устойчивые ветры доминировали на начальном этапе, позже доминировали ветра порывистой силы. Подтверждением этого являются хорошо сортированные мелкозернистые пески нижней части разреза селяхинской гряды и разнозернистые с включением гравия пески в верхней части обнажения.

3. Минеральный состав эоловых песков на территории юго-запада Беларуси – полимиктовый, включающий легкие и тяжелые минералы. Среди легких минералов во всех размерных фракциях доминирующими являются кварц и полевыя шпаты, сродзі цяжэлых – руціл і ціркон.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тутковский, П. А. Ископаемые пустыни северного полушария / П. А. Тутковский // Приложение к журналу «Землеведение». – М., 1910. – С. 136–157.
2. Лукашев, В. К. Палеогеологические условия образования дюнно-песчаных отложений Белорусского Полесья : автореф. дис. ... канд. геол.-минерал. наук / В. К. Лукашев ; Акад. наук Белорус. ССР. – Минск : Наука и техника, 1963. – 24 с.
3. Коржуев, С. С. Рельеф Припятского Полесья: структурные особенности и основные черты развития / С. С. Коржуев. – М. : Изд-во АН СССР, 1960. – 141 с.
4. Якушко, О. Ф. Основные этапы позднеледниковья и голоцена Белоруссии / О. Ф. Якушко, Н. А. Махнач. – Минск, 1973. – 85 с.
5. Матвеев, А. В. История формирования рельефа Белоруссии / А. В. Матвеев. – Минск : Навука і тэхніка, 1990. – 144 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 16.10.2018

Grechanik N.F. The Mineral Composition Eolian Accumulations of the South-West Part of Territory of Belarus

The article describes the eolian accumulations, their mineral composition and relief forms on the territory of the South-West Part of Territory of Belarus. The mineral composition of Aeolian accumulations of the region is polymictic. The eolian accumulations were formed due to the location changing of the accumulations of alluvial, proluvial, lacustrine and water-glacial genesis by the wind.



УДК 551.8(477.82)

И.И. Залесский¹, Г.И. Бровко²

¹канд. геогр. наук, доц. каф. геологии и гидрологии

Учебно-научного института водного хозяйства

Национального университета водного хозяйства и природопользования (Ровно, Украина)

²ст. преподаватель каф. геологии и гидрологии

Учебно-научного института водного хозяйства

Национального университета водного хозяйства и природопользования (Ровно, Украина)

РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕОПЛЕЙСТОЦЕНОВЫХ КЛИМАТОЛИТОВ В ИСТОКАХ ПРИПЯТИ

Рассмотрены особенности геологического строения территории истоков р. Припять в неоплейстоценовом разделе четвертичной системы. Приведены характеристики всех климатолитов, составляющих звенья стратиграфической шкалы четвертичной системы Украины. Изложенный материал характеризует условия развития приграничных районов Украины, Польши и Беларуси в течение неоплейстоцена.

Введение

Всемирной концепцией устойчивого развития человеческого общества предусмотрены комплексные стратегии национальных экономик, в том числе Польши, Беларуси и Украины. Пристальное внимание уделяется приграничным территориям этих стран для обеспечения экологического равновесия и уменьшения техногенных нагрузок на природные экосистемы. Одной из общих задач является выполнение корреляции условий геологического развития приграничных территорий за последние 0,8 млн лет, т.е. времени неоплейстоценового периода.

Постановка проблемы исследования

Для выделения территории исследований использована международная разграфка номенклатурных листов. Так, украинская часть территории включает северную и западную часть листа М-3-І (Камень-Каширский), М-35-VII (Ковель), частично лист М-34-VI (Влодава).

Территория истоков р. Припять занимает междуречье Западного Буга и Припяти, по которой проходит Главный Европейский водораздел бассейнов Балтийского и Черного морей.

Изучению подлежат материнские образования верхнего мела, которые подстилают четвертичные отложения ледникового генезиса.

В разные годы (1977–2014) проводились геологическое и инженерно-геологическое картирование масштаба 1 : 200 000–1 : 50 000 для решения различных хозяйственных задач [9].

Научные исследования по разделению бассейнов Западного Буга и Припяти не проводились.

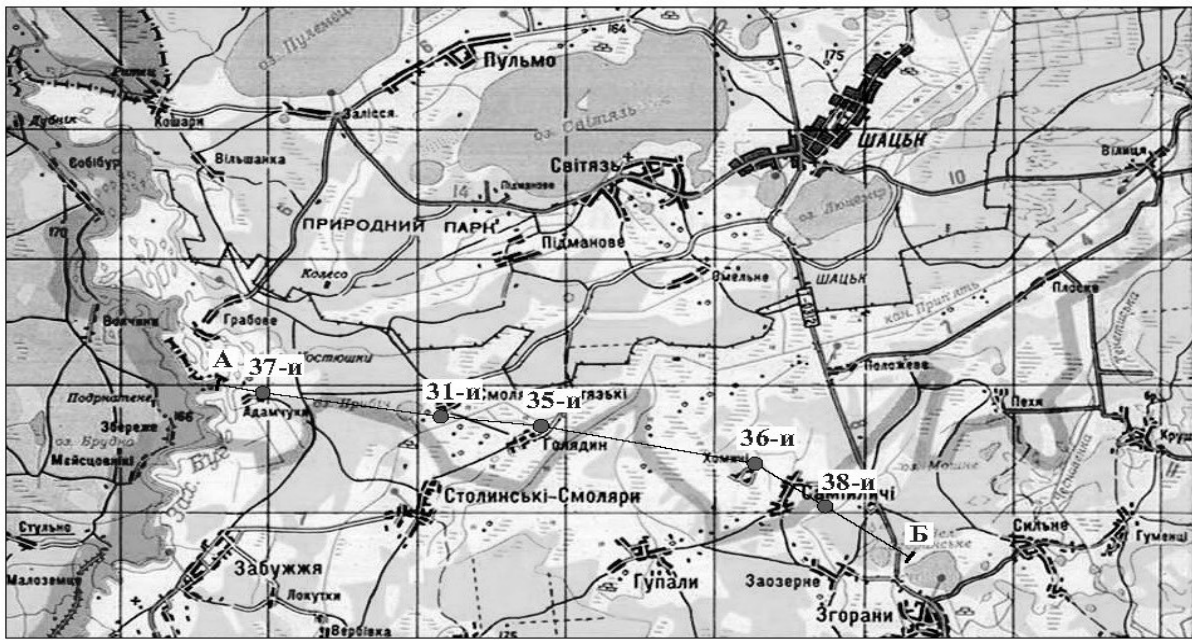
Методика исследований

Участок истоков Припяти в южном направлении расположен в центре территории от побережья оз. Свитязь до южной рамки листа М-35-І (широта с. Згораны Любомльского р-на), в восточном – 20 км от р. Западный Буг (рисунок 1). На выделенной территории собран весь материал по бурению картировочных скважин, проведены маршрутные исследования и дешифрирование космических и аэрофотоснимков раз-



личных лет залетов, что позволило сопоставить данные дешифрирования и определить изменения в современном рельефе [7].

Нами проведен анализ генетических типов рельефа, исследованы морфологические формы и элементы рельефа, исследованы озерные котловины и тыловые участки надпойменной террасы р. Западный Буг. Построены геологические разрезы вкост речных долин, один из которых предоставлен на рисунке 2.



31 - геологическая скважина А Б
● - геологическая скважина | - линия геологического разреза

Рисунок 1. – Обзорная карта. Масштаб 1 : 200 000
Масштаб горизонтальный 1 : 200 000, вертикальный 1 : 500

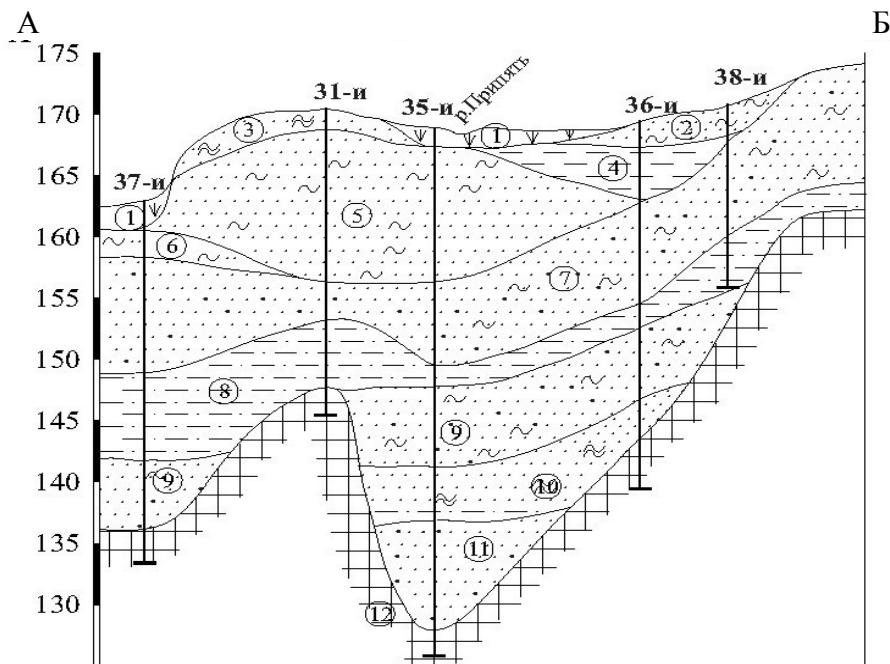


Рисунок 2. – Геологический разрез по линии А–Б

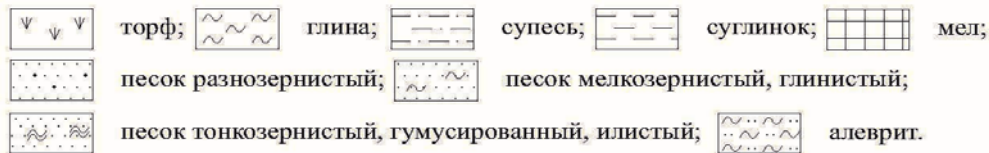


Условныя абзначэння к разрезу

Стратиграфо-генетычныя

- ① - Н Голоцен
- ② - P_{mdf-pč} Верхний неоплейстоцен. Дофиновско-причерноморский климатолит, нерасчлененный. Песок мелкозернистый, глинистый.
- ③ - P_{mbg-vt} Бугско-витачевский климатолит. Песок тонкозернистый, гумусированный, глинистый.
- ④ - P_{mpl-ud} Прилуцко-удайский климатолит. Суглинок серый, ожелезненный.
- ⑤ - P_{1 ts} Средний неоплейстоцен. Песок мелкозернистый, неотсортированный, глинистый.
- ⑥ - P_{1 kd} Кайдакский климатолит. Алеврит темно-серый, плотный.
- ⑦ - P_{1 dn} Днепровский климатолит. Флювиогляциальный комплекс времени дегляциации ледника. Песок разнозернистый, неотсортированный с включением эратиков.
- ⑧ - P_{1 zv} Завадовский климатолит. Супесь зеленовато-серая.
- ⑨ - P_{1 tl} Нижний неоплейстоцен. Тилигульский климатолит. Песок разнозернистый, глинистый.
- ⑩ - P_{1 lb} Лубенский климатолит. Песок мелко-тонкозернистый, гумусированный, глинистый, илистый.
- ⑪ - P_{1 sl} Сульский климатолит. Песок разнозернистый, неотсортированный.
- ⑫ - K_{2 m} Верхний мел, маастрихтский ярус. Мел писчий, мергель.

Литологические



Возраст четвертичных образований и их стратиграфическая принадлежность определялись различными методами (спорово-пыльцевой, палеокарпологический, диатомовый, рентгено-структурный, минералогический, литологический, гранулометрический и др.) [1].

Палеогеографические реконструкции. Формирование и развитие природы верхневьев р. Припять в течение неоплейстоцена реконструировано за комплексом данных различных стратиграфических климатолитов и процессов их определяющих. Схематически они отображены в разрезе, который пересекает истоки и междуречье данного района. Он проложен от с. Адамчуки (скв. 37-и в пойме р. Западный Буг) в направлении с. Смоляры Свитязьские (скв. 31-и), междуречная зандровая равнина, дальше по направлению к руслу р. Припять в районе с. Голядин (скв. 35-и), дальше по заболоченной равнине до с. Хомичи (скв. 36-и) и закончен у с. Самойличи (скв. 38-и склон водораздельного плато).

Следует отметить, что в 1973 г. авторами проведены пешеходные маршруты в районе с. Голядин для установления водораздельного участка между речными долинами западного Буга и Припяти. В тот период это была заболоченная бессточная равнина. Нам удалось установить участок, на котором шириной 3,0 м вода начинала движение в противоположные стороны.

Позже, в 1974 г., проведены мелиоративные мероприятия по спрямлению и углублению русла Припяти, вследствие которых был проложен канал «Припять» в пределах террасы Западного Буга. Таким образом, на данном участке был уничтожен Главный Европейский водораздел.

Характеристика неоплейстоценовых климатолитов. В схеме палеогеографической этапности и детальной стратиграфии позднего кайнозоя от 18.04.2018 г. самым дроб-



ным подразделением считается климатолит. Как правило, он отображает теплый и холодный периоды.

Геолого-структурные особенности территории исследований, тектонические условия и абиотические факторы предопределили развитие природы верховьев Припяти в неоплейстоцене.

В геотектоническом аспекте территория верховьев Припяти является составной частью Волыно-Подольской плиты и находится преимущественно в пределах Волынского палеозойского поднятия. Современная долина Припяти унаследует горст-антиклинальную Шацкую пликативную структуру и ограничивается Пульминецким глубинным разломом, который трассируется через оз. Свитязь и район с. Адамчуки, затем уходит в Польшу [8].

Проявления неотектонических движений выделяется линеаментами, которые трассируют долину Припяти и идентифицируются как разрывные нарушения, выделенные по результатам дешифрирования космических снимков [12].

Неоплейстоценовый комплекс на территории междуречья подстилается морскими отложениями верхнего мела. Вследствие интенсивных размывов мела в пределах ослабленных тектонических зон и процессов ледниковой экзарации и размывов, кровля верхнемеловой толщи приобрела своеобразный облик. Так, на расстоянии 12,5 км между скважинами 35-и – 38-и абсолютные ее отметки изменяются от 128,0 м (35-и) до 162,5 м, составляя перепад 34,5 м. Переуглубленные участки тяготеют к долинам Припяти и Западного Буга.

В основу палеогеографических реконструкций временных эпизодов неоплейстоцена положен литолого-петрографический, палеонтологический и другие принципы. Следов эоплейстоцена не установлено. Среди неоплейстоценового покрова выделяются климатолиты нижнего, среднего и верхнего антропогена. Отдельно выделен голоцен.

В геохронологической иерархии антропогена неоплейстоценовое время начинается с 0,8 млн лет, что обозначает окончание палеомагнетического этапа в истории развития Земли, который установил японский ученый Матуяма, и коррелируется с соответствующими подзонами в Европе. В пределах истоков Припяти наиболее древними осадками являются разнотерные пески сульского климатолита, раскрытые скв. 35-и у с. Голядин в интервале глубин 32,0–40,4 м. Из-за литолого-петрографических особенностей мы их относим к флювиогляциальным образованиям времени отступления ледникового покрова. В разное время реконструкцией продвижения сульского ледника занимались Г.И. Горецкий, К.И. Геренчук, Г.Г. Грузман, А.М. Вознячук, А.В. Матвеев, И.И. Залесский и другие исследователи, которые не пришли к единому решению о границе его распространения. Так, согласно Л.Н. Вознячуку [2], который впервые выделил наревскую (сульскую) морену в Беловежской пуще Беларуси, этот ледник достиг долины р. Припять. Г.И. Горецкий [3] и Б.Н. Гурский [5] южную границу распространения проводят южнее городов Малорита и Пинск, а А.В. Матвеев определяет южный рубеж севернее г. Пинск. Г.Г. Грузман [4] опускает ее до широты Шацк – Сошично – Кухотская Воля, а И.И. Залесский предлагает принять широту распространения сульского ледника по линии Любомль – Маневичи – Дубровица.

Наличие остатков размытой морены в скв. 35-и подтверждает мнение о перекрытии верховьев Припяти ледовым панцирем, и заполнение переуглубления у верхнемеловых отложений флювиогляциалом времени дегляциации.

Осадки раннеплейстоценового межледниковья, которые характеризуют теплый лубенский климатолит, залегают непосредственно на сульских флювиогляциальных пес-



ках и раскрыты скв. 35-и, 36-и. Их мощность составляет 7,0 и 6,0 м соответственно. Это один из наиболее продолжительных (100 тыс. лет) климатолитов нижнего неоплейстоцена (600–500 тыс. лет).

Образования этого времени хорошо коррелируются с разрезами скв. 6 в с. Гвоздница (Беларусь), которая расположена в 20 км севернее скв. 35-и, скв. 1-к в окрестностях с. Краска, что находится в 10 км северо-восточнее скв. 35-и. В пределах образовавшегося треугольника подошва лубенских осадков имеет общий уклон на северо-восток.

Тилигульский климатолит. Это период максимального проникновения ледниковых лопастей окского ледника в южные широты, вплоть до предгорий Карпат, о чем свидетельствуют линейные переуглубления доплейстоценового рельефа. В истоках Припяти в переуглублениях, созданных сульским ледником сохранилась флювиогляциальная толща песков окского оледенения (тилигульское время) мощностью 8,2 м, шириной до 12,0 км, а в пределах палеобугской депрессии отложения мощностью 6,0 м залегают непосредственно на кровле мелового рельефа, которая на 8,5 м выше кровли в скв. 35-и.

Уклон верхнемелового рельефа в северном румбе (против хода ледника) задержал его фронтальное растекание, что предопределило дальнейшее продвижение только по долинам гидрографической сети и активным неотектоническим зонам, которые находились в стадии опускания [6].

Завадовский климатолит продолжительностью около 100 тыс. лет внес существенный вклад в развитие природы ландшафтов истоков Припяти. В это время сформировалась обширная гидрографическая сеть аллювиально-озерных, аллювиальных, озерно-болотных типов отложений, подошва которых изменилась в диапазоне от 142,5 до 157,0 м. Происходила активизация денудационного переноса аллювиального материала с участков высокого залегания верхнего мела и его аккумуляция в речных долинах. Происходила пенепленизация территории.

Днепровский климатолит. Комплекс абиотических составляющих предопределил резкое снижение температуры, минимальность осадков, спад испарения, перегруппировку растительного мира, что было предвестником начала нового оледенения. Днепровский ледник своим Припятским потоком на 50 тыс. лет перекрыл ледовым покровом ландшафты истоков Припяти. Трансгрессия и конечное положение краевой зоны формировались в зависимости от геолого-геоморфологических особенностей доднепровского рельефа и сингенетических тектонических движений, которые усложняли гляциодинамическую обстановку [10].

Ледовый край окончательно установился в 25 км южнее истоков Припяти на верхнемеловых цоколях на широте Любомль-Столинской конечноморенной гряды [12]. Как видно на рисунке 2, четвертичный покров в истоках Припяти состоит из песчанистой толщи времени дегляциации. Ледник эродировал речные долины завадовского межледниковья, углубляя их до отметок 150 м (скв. 35-и), а после отступления сформировалась мощная флювиогляциальная равнина, которая стала частью прадолины Кшна-Припять [11]. Это было время кайдакского климатолита и частично тясминского. Были сформированы проточные озера, новые русла протоков и продолжалась аккумуляция переработанных ледниковых осадков. Нерасчлененные осадки прилуцко-удайского климатолитов свидетельствуют о расширении эрозионно-денудационных и сокращении аккумулятивных процессов.

В бугско-витачевском климатолите активизировались неотектонические процессы, и территория истоков Припяти испытывала опускания с интенсивным накоплением аллювиальных отложений, которые свидетельствуют о формировании долины совре-



менной Припяти. У западной части зандровой равнины преобладали эрозионные процессы, которые способствовали расширению долины Западного Буга.

Дофиновско-причерноморский климатолит. Разнонаправленные неотектонические движения способствовали активизации эолово-делювиальных отложений. Это был период формирования эоловых форм рельефа, в том числе параболических радиальных дюн и полей развееванных песков.

Голоценовый климатолит. В голоценовом межледниковье выделяется три звена – ранний, средний и поздний голоцен. В раннем голоцене сохранились позднеплейстоценовые условия. На суходольных участках продолжались процессы физического выветривания пород ледникового комплекса с формированием элювиально-делювиальных толщ, на которых господствовали эоловые процессы.

Средний голоцен характеризуется активизацией экзогенных процессов – карстовых, суффозионных, эрозионных и элювиально-делювиальных преобразований более древних отложений.

Для позднего голоцена типичной особенностью является возрастание антропогенного влияния на экосистемы. Первый этап нарушения эволюции растительного мира состоялся в конце атлантического периода, приблизительно 5 тыс. лет тому назад, когда наши предки сознательно поджигали лесные массивы для облегчения охоты и обеспечения продуктами питания. Другая волна активизации антропогенного влияния на природную среду началась 2 500 лет назад в связи с развитием земледелия. Третий этап начался с внедрения мелиоративного земледелия и продолжается в наши дни.

Заклучение

В результате реконструкции природных условий территории истоков р. Припять в течение неоплейстоцена, выполненной на основании геологического и гидрогеологического картирования, воспроизведены климатологические особенности, согласно которым возможна корреляция стратиграфических подразделений с аналогами в Польше и Беларуси. В рамках статьи невозможно более детально охарактеризовать геологические события в каждом выделенном подразделении. Предположительно установлены пределы распространения льдов трех неоплейстоценовых оледенений, время разделения речных бассейнов Западного Буга и Припяти. В деталях охарактеризован последледниковый период – голоцен.

Изложенный материал может быть использован при рассмотрении вопросов развития природы в неоплейстоцене в условиях Волынского Полесья и приграничных территорий Польши и Беларуси.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богуцький, А. Б. Плейстоценові зледеніння Волинського Полісся / А. Б. Богуцький, І. І. Залеський // Українське Полісся: вчора, сьогодні, завтра : зб. наук. пр. – Луцьк : Надстир'я, 1998. – С. 100–102.
2. Вознячук, Л. Н. К стратиграфии и палеографии неоплейстоцена Белоруссии и смежных территорий / Л. Н. Вознячук // Проблемы палеографии антропогена Белоруссии / под ред. А. В. Матвеева. – Минск, 1973. – С. 47–75.
3. Горецкий, Г. И. Об активном состоянии ледников при формировании краевых ледниковых образований / Г. И. Горецкий // Краевые образования материковых оледенений. – Киев : Наук. думка, 1978. – С. 5–12.



4. Грузман, Г. Г. Характер распространения и особенности формирования лихвинских диатомовых пород северной Волыни / Г. Г. Грузман, Г. К. Хурсевич // Материалы геологического изучения земной коры Белоруссии / под. ред. В. К. Голубцова. – Минск : Наука и техника, 1978. – С. 114–119.
5. Гурский, Б. Н. Краевые образования Белоруссии / Б. Н. Гурский. – Минск : Наука и техника, 1974. – 365 с.
6. Залесский, И. И. Краевые ледниковые образования северо-запада Украины в районе Любомль – Шацк / И. И. Залесский // Краевые образования материковых оледенений : материалы V Всесоюз. совещ. – Киев : Наук. думка, 1978. – С. 85–95.
7. Залесский, И. И. Реконструкция плейстоценовых ландшафтов Волынского Полесья в связи с вопросами рационального природопользования : автореф. дис ... канд. геогр. наук / И. И. Залесский. – Ровно, 1987. – 19 с.
8. Геологічна будова і корисні копалини верхів'я р. Прип'ять території аркушів М-35-І (Камінь-Каширський), М-34-VI (Влодава) / Ф. О. Гречко [та ін.]. – Рівне, 2008. – 567 с.
9. Отчет по гидрогеологической и инженерно-геологической съемке масштаба 1 : 50 000 для целей мелиорации на территории планшетов М-34-24-В (б.г.) (Собибур, Забужье), М-34-24-Г (Шацк), М-34-36-А (б.г.) (Гуща, Сверже), М-34-36-Б (Полапы), М-35-В-В (Головно) / И. И. Залесский [и др.]. – Ровно, 1977. – 264 с.
10. Dobrowolski, R. Rzeźba poplejstoczeńska Polesia Wołyńskiego / R. Dobrowolski, S. Terpiłowski, I. Zaleski // Гляціал і перигляціал Волинського Полісся : матеріали XIII укр.-пол. семінару, Шацьк, 11–15 верес. 2005 р. / відп. ред. А. Богуцький. – Львів : Видав. центр Львів. Нац. ун-ту ім. І. Франка, 2005. – С. 38–45.
11. Stratygrafia czwartorzędu Polesia Wołyńskiego (NW Ukraina) / L. Lindner [et. al.] // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. – Lublin, 2007. – S. 7–41.
12. Zalessky, I. Morfogenetyczne osobliwosci rzeźby podtocza plejstocenu na Polesiu Wołyńskim / I. Zalessky // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. – Lublin, 1999. – S. 33–40.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.07.2018

Zalesky I.I., Brovko G.I. Reconsruction of Neo-Pleistocene Climates in the Area of Pripyat Springhead

The peculiarities of the geological structure of the source area of the Pripyat River in the neopleistocene section of the quaternary system are considered in the article. The characteristics of all climatolites of the constituent links of the stratigraphic scale of the quarter system of Ukraine are given. The material presented characterizes the conditions for the development of the nature of the border regions of Ukraine, Poland and Belarus during the neopleistocene.



УДК 911.3:314 (476)

К.К. Красовский

*д-р геогр. наук, проф., проф. каф. туризма и страноведения
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: socgeo@brsu.brest.by*

ДЕМОГРАФИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ БЕЛАРУСИ В НАЧАЛЕ XXI В.

На основе данных текущей статистики и материалов переписей населения проведен анализ демографической ситуации в Республике Беларусь и ее регионах в начале XXI в. Выявлены тенденции показателей естественного движения населения и его демографических структур. Обоснована необходимость эффективной долгосрочной научно-обоснованной демографической политики.

Введение

К концу XX в. в Республике Беларусь резко обострилась демографическая ситуация, что стало следствием совпавших по времени трансформационных процессов в экологическом, экономическом и политическом развитии страны. С 2013 г. в демографическом развитии Беларуси и ее регионов начали проявляться положительные тенденции. На 01.01.2014 население страны составило 9 468 тыс. человек, на 01.01.2015 – 9 481 тыс. чел., а на 01.01.2017 демографический потенциал Беларуси впервые за последние 10 лет превысил 9,5 млн человек. Эти особенности демографического развития страны во втором десятилетии XXI в. дали основание для многочисленных публикаций, в которых отмечалось, что демографическая проблема в стране решена. Однако незначительное увеличение демографического потенциала страны не мог стать основанием для констатации завершения этапа депопуляции. Рост населения на протяжении последних пяти лет был обеспечен только за счет положительного сальдо международной миграции, которое составляло ежегодно более 10 тыс. человек и таким образом компенсировало естественную убыль населения.

Анализ данных текущей статистики населения Республики Беларусь за 2017 г. свидетельствуют о новых тенденциях демографического развития не только в стране в целом, но и ее регионах. Прежде всего обращает на себя внимание тот факт, что если в 2013–2016 гг. население в стране хоть незначительно, но увеличивалось, то за прошедший год произошло снижение демографического потенциала Беларуси более чем на 12 тыс. человек (таблица 1).

Общая численность населения Республики Беларусь на 1 января 2018 г. составила 9 492 тыс. человек. На территории страны размещено 203 городских (113 городов, 90 поселков городского типа) и около 23 000 сельских населенных пунктов. Вследствие продолжающегося в стране процесса урбанизации и в начале XXI в. происходит дальнейшее перераспределение населения между городскими и сельскими населенными пунктами в пользу городов и городских поселков, что ведет к дальнейшему увеличению уровня урбанизированности Беларуси. Если в 2000 г. доля городских жителей составляла 69,7 % от общей численности населения, то на начало 2018 г. – 78,1 %. Абсолютная численность городского населения за этот же период увеличилась с 6 985 до 7 412 тыс. человек. Численность сельского населения, как и в конце XX в., по-прежнему постоянно снижалась. За 17 лет XXI в. число сельских жителей уменьшилось почти на 1 миллион человек, составив на 1 января 2018 г. 2 080 тыс. человек.



Таблица 1. – Динамика численности населения Беларуси в 2000–2018 гг.

Год	Все население, тыс. человек	В том числе:		Доля городского населения, %
		сельское, тыс. человек	городское, тыс. человек	
2000	10 019	3 034	6 985	69,7
2001	9 990	2 977	7 013	70,2
2002	9 950	2 919	7 031	70,7
2003	9 898	2 862	7 036	71,1
2004	9 849	2 804	7 045	71,5
2005	9 800	2 744	7 056	72,0
2006	9 750	2 691	7 059	72,4
2007	9 714	2 639	7 074	72,8
2008	9 690	2 582	7 108	73,3
2009	9 493	2 485	7 008	73,8
2010	9 500	2 423	7 077	74,5
2011	9 473	2 353	7 120	75,1
2012	9 464	2 290	7 174	75,5
2013	9 463	2 242	7 221	75,9
2014	9 468	2 214	7 254	76,3
2015	9 481	2 156	7 325	77,3
2016	9 498	2 128	7 370	77,6
2017	9 504	2 104	7 400	77,9
2018	9 492	2 080	7 412	78,1

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

Таким образом, демографический потенциал Беларуси в начале XXI в. продолжал снижаться. В целом население Беларуси за период 2000–2018 гг. уменьшилось на 527 тыс. человек, что привело к серьезным угрозам демографической безопасности страны и ее устойчивому развитию. Как уже отмечалось выше, в значительной степени естественную депопуляцию населения в Беларуси нивелировал миграционный прирост, который все эти годы был положительным. Однако в последние три года положительное сальдо миграции начало резко снижаться. Так, если в 2015 г. оно превысило 18 тыс. человек, то по итогам 2017 г. миграционный прирост составил всего 3 874 человека. В областях Беларуси, за исключением Минской области, сокращение численности населения не преостановилось (таблица 2).

Таблица 2. – Динамика численности населения областей Беларуси, тыс. человек

Область	Год				
	2010	2015	2016	2017	2018
Брестская	1 399	1 389	1 387	1 386	1 385
Витебская	1 229	1 199	1 194	1 188	1 180
Гомельская	1 439	1 424	1 423	1 421	1 416
Гродненская	1 071	1 053	1 050	1 047	1 044
Минская	1 419	1 407	1 417	1 423	1 427
Могилевская	1 097	1 071	1 068	1 064	1 059

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.



Основной причиной снижения населения в регионах было не только отрицательное сальдо миграции, но и естественная убыль населения. Только в Брестской области, единственном регионе страны, по итогам 2015 и 2016 гг. наблюдалось превышение рождаемости над смертностью (соответственно 0,8 и 0,9 ‰). Более благоприятная демографическая ситуация в Брестской области обусловлена тем, что процесс депопуляции на ее территории в связи с более низким уровнем урбанизированности начался на несколько лет позже, чем в других регионах [1]. В остальных областях Беларуси по-прежнему наблюдалась естественная убыль населения (таблица 3).

Таблица 3. – Естественный прирост населения в областях Республики Беларусь, ‰

Область	Год				
	2000	2010	2015	2016	2017
Брестская	-1,9	-2,1	0,8	0,9	-1,0
Витебская	-6,6	-6,6	-3,5	-3,5	-4,8
Гомельская	-4,4	-3,5	-0,2	-0,2	-1,7
Гродненская	-4,8	-4,2	-0,8	-0,8	-2,8
Минская	-6,3	-4,6	-0,7	-0,9	-2,5
Могилевская	-5,4	-4,8	-1,4	-1,5	-3,1
Республика Беларусь	-4,1	-2,2	-0,1	-0,2	-1,8

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

Таким образом, на протяжении всего рассматриваемого периода естественное движение вместе с миграцией являлись основными компонентами динамики населения Беларуси. Естественное движение населения является итогом взаимодействия двух составляющих его процессов – рождаемости и смертности. Основное влияние на динамику естественного движения населения страны в начале XXI в. оказала рождаемость, общий коэффициент которой до 2015 г. увеличивался, а в последнее время снизился с 12,5 ‰ в 2015 г. до 10,8 ‰ в 2017 г. (таблица 4).

Таблица 4. – Динамика общего коэффициента рождаемости в Республике Беларусь, ‰

Год				
2000	2010	2015	2016	2017
9,4	12,2	12,5	12,4	10,8

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

Рост общего коэффициента рождаемости в Беларуси в начале XXI в. стал следствием не только демографической политики по социально-экономической поддержке семей с детьми, пропаганды семейного благополучия и здорового образа жизни, но и влияния демографической волны. В настоящее время в наиболее активном детородном возрасте находятся женщины, родившиеся в 80-х гг. XX в. до аварии на Чернобыльской АЭС и до распада Советского Союза, когда рождаемость в стране была наиболее высокой по сравнению с предыдущим и последующим периодами. Эта особенность возрастной структуры населения, вызванная демографической волной, и привела к совсем незначительному увеличению в последние годы общего коэффициента рождаемости. Однако маловероятно, что данное повышение рождаемости, вызванное структурными сдвигами, сможет продолжаться длительное время. Через несколько лет (а итоги демо-



графічнага развіцця Беларусі за 2017 г. ужо аб гэтым сведчаюць) па меры вступлення ў найбольш актыўны детародны ўзрост малочысленага пакалення, рождаемага ў канцы ХХ в. у перыяд сістэмнай трансфармацыі, паказателі рождаемага пачаюць зніжацца [2].

Агульны каэфіцыент смертнасці ў першае дзесяцігоддзе ХХІ в., так і ў канцы ХХ в., незначальна павялічваўся, а пачынаючы з 2010 г. знізіўся і ў цяперашняе час стабілізаваўся на велічыне толькі больш 12 ‰ (табліца 5). Зніжэнне і стабілізацыя паказатэляў смертнасці ў апошнія гады была ўмоўлена не толькі ўспехамі медыцыны, але і звязана з выміраннем малочысленага пакалення, рождаемага ў час Другой сусветнай вайны. У бліжэйшыя гады агульны каэфіцыент смертнасці з-за вымірання пакалення, рождаемага ў час бабін-бума, стане расці.

Табліца 5. – Дынаміка агульнага каэфіцыента смертнасці ў Рэспубліцы Беларусь, ‰

Год				
2000	2010	2015	2016	2017
13,5	14,4	12,6	12,6	12,6

Істочнік – складзена аўтарам па даных Нацыянальнага статыстычнага камітэта Рэспублікі Беларусь.

Пры захаванні такога рэжыму рождаемага і смертнасці прыродная ўбыль насельніцтва Беларусі і яе рэгіёнаў павялічыцца, што падтвэрджаюць многачысленыя прагнозы, у тым ліку і ООН. Па разлікам дэмаграфістаў, нават для простага ўспроизводства насельніцтва кожная брачная пара, здольная да детародства, у сярэднім павінна мець не менш двух дзяцей. У Беларусі сумарны каэфіцыент рождаемага хоць і павысіўся ў апошнія гады (у 2017 г. да 1,8), аднак, улічваючы попраўку на смертнасць, такім чынам яго паказальнік нават для простага ўспроизводства трэба прызнаць недастатковым. У сувязі з гэтым існуючай у цяперашняе час праблемай рождаемага ў Беларусі можна назваць праблемай нават не трэцяга, а другога дзіцяці.

Выяўленыя асаблівасці дынамікі каэфіцыентаў рождаемага на тэрыторыі Беларусі ў пачатку ХХІ в. і ў будучым у многім будуць ўмоўлены брачна-сямейнай структурай насельніцтва. Бракі і разводы ў навуковай літаратуры звычайна адносяцца да прыроднага руху насельніцтва. Хоць непасрэдна яны і не ўплываюць на дынаміку колькасці насельніцтва, аднак працэсы рождаемага знаходзяцца ў цеснай залежнасці ад гэтых двух дэмаграфічных фактараў. Сучасная брачная структура насельніцтва Беларусі сфармавалася ў выніку ўзаемадзеяння шэрагу сацыяльна-эканамічных, дэмаграфічных і іншых фактараў. Для Беларусі ў цэлым да канца ХХ в. была характэрна досыць высокая ступень брачнасці насельніцтва (акаля 10 бракаў на 1 000 насельніцтва) (табліца 6). На працягу доўгага часу назіралася тэндэнцыя да павялічэння часткі вступаючых у брак у маладым узросте. Пры гэтым гэтая асаблівасць была характэрна як для мужскага, так і жанскага насельніцтва. Калі ў 1960 г. ў узросте да 20 гадоў сярод вступаючых у брак было 2,7 ‰ мужчын і 12,0 ‰ жанчын, то ў 1995 г. – 5,8 і 29,8 ‰ адпаведна. У сувязі з гэтым назіралася павялічэнне паловазростных каэфіцыентаў рождаемага ў узросте да 19 гадоў, а таксама 20–24 гадоў пры адначасовым зніжэнні рождаемага ў узросте старэй 25 гадоў. Павялічэнне рождаемага ў узросте да 24 гадоў звязана са зніжэннем сярэдняга ўзросту мацяры пры нараджэнні першага дзіцяці, а зніжэнне рождаемага ў узросте старэй 25 гадоў – з адмовамі сямей ад нараджэння другога і трэцяга дзіцяці.



Таблица 6. – Брачность и разводимость населения Беларуси

Год	Число браков, тыс. человек	Число разводов, тыс. человек	На 1 000 человек населения	
			браки	разводы
1970	84	17	9,3	1,9
1980	97	31	10,1	3,2
1990	99	35	9,7	3,4
2000	62	43	6,3	4,4
2010	76	37	8,1	3,9
2015	82	33	8,6	3,5
2017	66	32	7,0	3,4

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

В начале XXI в. тенденции брачной структуры населения Беларуси существенно изменились. В первую очередь обращает на себя внимание снижение с 2000 г. общего количества браков и коэффициента брачности, что стало следствием увеличения среднего возраста вступления в брак и существенным образом повлияло на процессы рождаемости. Так, по данным текущей статистики, средний возраст вступления в брак за последние годы увеличился почти на 5 лет и в 2017 г. у женщин составил 25,8 года, у мужчин – 27,9 года. Рост среднего возраста вступления в брак привел к перераспределению удельного веса рожденных детей у женщин различных возрастных групп. Так, в 2017 г. основная доля рожденных детей приходится на возрастную группу женщин от 25 до 29 лет (более 30 %). На 2 % меньше рожденных детей пришлось на возраст матери от 30 до 34 лет. И только на третьем месте находятся матери в возрасте 20–24 лет (менее 20 %). Характерно, что количество рожденных детей первыми и вторыми стало почти одинаковым и составило около 40 и 39 % соответственно. Средний возраст матери при рождении ребенка составил 29,2 года, первого ребенка – 26,5, второго и последующих детей – 31 год. Третьи дети в семьях составили чуть больше 15 % от общего числа новорожденных, что еще раз подтверждает наличие в Беларуси проблемы не только третьего, но и второго ребенка.

Разводимость населения, как и его брачное состояние не оказывает прямого влияния на процессы рождаемости и зависит как от объективных и субъективных факторов, а также от действующего семейно-брачного законодательства.

Из представленных в таблице 6 данных видна тенденция к увеличению на протяжении всего послевоенного периода абсолютных и относительных показателей разводимости населения страны. Рост разводов отражает развитие и трансформацию семьи, повышение требовательности к брачным партнерам. В особенности это относится к городским жителям, т.к. коэффициент разводимости в 2000 г. в городских поселениях Беларуси более чем в 2 раза превышал соответствующий показатель по сельской местности. В последнее десятилетие наметилась тенденция к стабилизации коэффициента разводимости, общее число расторгнутых браков также снижается.

На формирование современной демографической ситуации в Беларуси существенное влияние оказывает половозрастная структура населения. Ее формирование происходило под влиянием социально-экономических, исторических и демографических факторов. В тоже время половозрастная структура сама влияет на естественное и механическое движение населения, на уровень занятости и другие демографические процессы.

Проведенные ранее нами исследования показали, что на протяжении послевоенного периода структура населения по полу в Беларуси постепенно нормализовалась, од-



нако диспропорции, которые возникли во время войн, сохранялись. Так, в 1999 г. мужчины среди всего населения составили 47,3 %, а женщины – 52,7 %. В этот период на 100 мужчин приходилось 111 женщин [1]. Однако и в начале XXI в. для половой структуры населения Беларуси во всех возрастных группах характерна довольно значительная диспропорция мужского и женского населения, формирующаяся прежде всего под влиянием демографических факторов. Мужчины имеют численный перевес в возрастной группе до 14 лет, что связано с общей биологической закономерностью, согласно которой мальчиков рождается больше, чем девочек. Так, в 2017 г. в стране родилось более 52 тыс. мальчиков и около 50 тыс. девочек. Начиная с возрастной группы 15–19 лет картина в соотношении мужского и женского населения меняется на обратную, что обусловлено повышенной смертностью мужского населения. С возрастом перевес доли женщин постепенно нарастает. В возрастных группах старше 60 лет их становится более чем в два раза больше, чем мужчин. Кроме того, следует отметить, что в последние годы существовавшая ранее тенденция на нормализацию половой структуры приостановилась и даже ухудшилась. Так, на 1.01 2018 мужчины среди всего населения страны составили 46,6 %, а женщины – 53,4 %. По сравнению с 1999 г. коэффициент феминизации увеличился со 111 женщин на 100 мужчин до 114.

Возрастная структура населения Беларуси влияет на его воспроизводство, выявление трудоспособного контингента и политику занятости, планирование сети детских и школьных учреждений и т.д. Наиболее точное представление о возрастной структуре дают статистическая, экономическая и демографическая группировки по возрастным группам. Как показывают данные статистики, главной особенностью возрастной структуры населения страны в начале XXI в. является процесс старения, т.е. рост удельного веса людей пенсионного возраста, и снижение доли детей. Проведенный нами анализ динамики возрастной структуры населения Беларуси по регионам, показал, что самая молодая возрастная структура населения характерна для областей Белорусского Полесья. Это обусловлено более благоприятной демографической ситуацией, сложившейся в последние годы в Брестской и Гомельской областях. В целом по стране за анализируемый период доля населения до трудоспособного возраста снизилась с 18,9 до 17,7 %, а удельный вес после трудоспособных людей увеличился соответственно с 21,6 до 25,0 %.

Таким образом, в настоящее время в Беларуси каждый четвертый ее житель находится в пенсионном возрасте. Старение населения, став следствием снижения рождаемости и роста средней ожидаемой продолжительности жизни, ведет к увеличению экономической нагрузки нетрудоспособного населения на экономически активное. В начале 2018 г. нагрузка детей на 1 000 трудоспособных составила 310 человек, а экономическая нагрузка пенсионеров – 438 человек. Общая нагрузка детей и людей пенсионного возраста впервые за всю демографическую историю страны составила почти 750 человек, что ведет к серьезным проблемам в организации и проведении социальной политики государства. Именно это обстоятельство стало одной из причин поэтапного увеличения в Беларуси пенсионного возраста у женщин до 58, а у мужчин до 63 лет.

Другой важной причиной, а может и более значимой для обоснования увеличения возраста выхода на пенсию является рост средней ожидаемой продолжительности жизни населения, показатели которой до 2000 г. снижались, а в последние годы имеют тенденцию к росту (таблица 7). По итогам 2017 г. на территории Беларуси зафиксированы самые высокие показатели средней ожидаемой продолжительности жизни при рождении за весь послевоенный период. По сравнению с 2010 г. к 2017 г. средняя продолжительность жизни увеличилась почти на четыре года и приблизилась к 75 годам. Существенным фактом является снижение разницы в продолжительности жизни мужчин



и женщин. В отдельные годы XX в. эта разница составляла до 13 лет и более, вызывала серьезную тревогу у геронтологов. В настоящее время продолжительность жизни мужчин в Беларуси составляет около 70 лет, женщин – на 10 лет больше.

Таблица 7. – Ожидаемая продолжительность жизни населения Беларуси при рождении, лет

Период исчисления	Все население	В том числе	
		мужчины	женщины
1960	70,3	66,2	73,5
1970	72,5	68,1	76,0
1980	71,1	65,9	75,4
1990	71,1	66,3	75,6
2000	69,0	63,4	74,7
2010	70,5	64,7	76,4
2017	74,1	68,9	79,0

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

Вместе с ожидаемой средней продолжительностью жизни одним из наиболее чувствительных показателей качества жизни населения, его социально-бытовых условий, уровня развития медицины является младенческая смертность. Ее в некоторой степени можно назвать «барометром благосостояния». Как показывают материалы текущей статистики, в целом в Беларуси коэффициент младенческой смертности за послевоенный период снизился более чем в 10 раз (таблица 8).

Таблица 8. – Младенческая смертность в Республике Беларусь, ‰

Год	Дети, умершие в возрасте до 1 года, на 1 000 родившихся		
	Все население	Городское население	Сельское население
1950	57,4	65,2	55,1
1960	34,9	32,1	36,2
1970	18,8	18,1	19,5
1980	16,3	15,3	18,2
1990	11,9	11,8	12,3
2000	9,3	8,3	12,0
2010	4,7	4,2	6,3
2017	3,2	2,8	4,4

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

В настоящее время по младенческой смертности Республика Беларусь находится на одном уровне с высокоразвитыми в экономическом отношении государствами мира, что свидетельствует о значительных успехах отечественной медицины. По итогам 2017 г. младенческая смертность в целом по республике составила 3,2 ‰ (в городских поселениях 2,8, в сельской местности – 4,4 ‰). Из 102 556 родившихся детей в 2017 г. умерло на первом году жизни 332 ребенка, среди которых 181 мальчик и 151 девочка. Структура умерших детей по полу свидетельствует, что уже в раннем возрасте наблюдается половая дифференциация в показателях смертности населения.

Региональный анализ современной демографической ситуации на территории Беларуси свидетельствует, что в целом для регионов характерны те же демографиче-



ские тенденции, что и для страны в целом (таблица 9). В тоже время представленные в таблице данные за 2017 г. свидетельствуют, что наиболее благоприятная демографическая обстановка сложилась в г. Минске – единственном регионе страны с положительным естественным приростом, самыми высокими показателями средней ожидаемой продолжительности жизни и самым низким уровнем детской смертности. Во всех областях страны продолжается процесс депопуляции, однако наиболее высокими темпами происходит естественная убыль населения на территории Витебской области.

Таблица 9. – Демографические показатели населения в областях Беларуси в 2017 г.

Область	Население (1.01.2018), тыс. человек	Рождаемость, ‰	Смертность, ‰	Естественный прирост, ‰	Младенческая смертность, ‰	Ожидаемая продолжительность жизни, лет
Брестская	1 384,4	11,8	12,8	-1,0	3,0	74,5
Витебская	1 180,2	9,6	14,4	-4,8	2,8	73,3
Гомельская	1 415,7	11,3	13,0	-1,7	4,1	73,5
Гродненская	1 043,7	11,1	13,9	-2,8	4,2	73,8
г. Минск	1 982,0	9,9	8,7	1,2	2,3	76,5
Минская	1 426,5	11,5	14,0	-2,5	3,8	73,1
Могилевская	1 058,7	10,5	13,6	-3,1	2,0	73,3
Беларусь	9 491,8	10,8	12,6	-1,8	3,2	74,1

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

Демографическая обстановка в регионе любого ранга является важнейшим фактором формирования структуры занятости населения, его распределения по сферам и отраслям экономики. В современных демографических условиях, когда вследствие отрицательного естественного прироста и старения населения источники дальнейшего увеличения рабочей силы исчерпаны, основным фактором роста производства становится производительность труда, тесным образом связанная с уровнем образования, культуры, профессиональной подготовки, состояния здоровья, отношением к труду.

Последние годы XX в. и первое десятилетие XXI в. внесло коренные изменения в социально-экономическое развитие Республики Беларусь. В этих условиях особую актуальность приобретает эффективность использования трудового потенциала страны. Важнейшими его характеристиками являются занятость населения, ее уровень, динамика и структура. За последние годы произошли существенные изменения в занятости населения по отраслям хозяйства. Сложившаяся в настоящее время отраслевая структура занятости населения в Беларуси определилась как конечный результат соотношения масштабов и темпов развития отдельных ее отраслей. Занятость населения определяется как система отношений между людьми по обеспечению рабочими местами и участия в хозяйственной деятельности, зависящая от способа производства, или как итоговый момент отношений распределения работников по видам экономической деятельности и формам собственности. Практически до конца XX в. основная часть трудоспособного населения Беларуси была занята на предприятиях государственной формы собственности. Однако уже в период с 2000 по 2017 г. число занятых на предприятиях и в учреждениях государственной формы собственности значительно снизилось, а их доля уменьшилась с 57,2 до 40,1 % от всего занятого населения (таблица 10).



Таблица 10. – Распределение занятого населения Беларуси по формам собственности, %

Форма собственности предприятия	Год		
	2000	2010	2017
Государственная	57,2	44,7	40,1
Частная	42,4	53,6	56,0
Смешанная	1,4	3,9	6,3
Иностранная	0,4	1,7	3,9

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

Перестройка экономической системы страны после получения суверенитета привела к возникновению наряду с государственной собственностью предприятий и учреждений частной собственности. По данным за 2017 г. на предприятиях частной формы собственности занято уже 56 % экономически активного населения. Довольно значительно увеличивается число и удельный вес занятых на предприятиях и в учреждениях смешанной и иностранной форм собственности. За период 2000–2017 гг. доля занятых на предприятиях этих двух форм собственности выросла с 1,8 до 10,2 %, т.е. более чем в пять раз.

Экономически активное население включает в себя все занятое население и безработных. Уровень занятости населения Беларуси (отношение числа занятых к численности трудовых ресурсов) в последние годы имеет тенденцию к снижению. Так, если в 2010 г. в стране было занято 4 703,0 тыс. человек, то в 2017 г. всего 4 353,6 тыс. человек. В состав экономически активного населения, кроме занятых, входят безработные. Долгое время категория безработных в составе экономически активного населения в официальной статистике стран бывшего Советского Союза отсутствовала. Впервые факт существования безработицы как социального явления был признан Госкомстатом СССР в 1990 г. С 2000 по 2017 г. уровень безработицы в Беларуси изменялся (таблица 11).

Таблица 11. – Динамика безработицы в регионах Республики Беларусь, %

Область	Год		
	2000	2010	2017
Брестская	1,7	0,8	0,7
Витебская	2,6	0,9	0,7
Гомельская	2,6	0,9	0,7
Гродненская	2,2	0,8	0,6
г. Минск	1,5	0,3	0,2
Минская	1,9	0,7	0,5
Могилевская	2,6	0,8	0,6
Республика Беларусь	2,1	0,7	0,5

Источник – составлено автором по данным Национального статистического комитета Республики Беларусь.

Как свидетельствуют данные статистики, наиболее существенное падение численности безработных в Республике Беларусь произошло в последние годы. К 2017 г. по сравнению с 2000 г. доля безработных в стране уменьшилась с 2,1 до 0,5 %. Среди безработных на протяжении всего анализируемого периода преимущественную долю занимали женщины (в отдельные годы до 80 %). Самым низким уровнем безработицы в начале XXI века характеризовался г. Минск. Кроме того, к настоящему времени исчезли практически различия по доле безработных в регионах Беларуси.



Наиболее синтетическим показателем структурных перемен занятости является ее характеристика по трем секторам экономики: сельское и лесное хозяйство (первичный сектор), промышленность и строительство (вторичный) и сфера обслуживания (третичный). Некоторые экономисты выделяют еще четвертичный сектор – сферу науки и научного обслуживания. Анализ статистики показывает, что основная часть занятого населения страны приходится на вторичный сектор, хотя доля занятых в нем в 2000–2017 гг. снизилась с 34,8,0 до 29,9 %. При этом удельный вес работающих в промышленности снизился с 28,1 до 23,5 %, а в строительстве – с 6,7 до 6,4 %. За этот же период произошло снижение с 15,2 до 9,6 % удельного веса занятого населения в первичном секторе экономики. Таким образом, абсолютные и относительные показатели занятого населения в первичном и вторичном секторах экономики в последние 20 лет имели тенденцию к снижению. Высвобождение рабочей силы из первичного и вторичного секторов экономики вело к его перераспределению в отрасли сферы обслуживания. Доля занятых в этой сфере за анализируемый период значительно выросла и составляет в настоящее время уже более 50 %. Но рост занятых в этот период наблюдался только в некоторых отраслях сферы обслуживания. Наиболее высокие темпы прироста работающего населения были характерны для торговли и общественного питания.

Заклучение

Таким образом, в настоящее время демографическая обстановка и ситуация в сфере занятости населения Беларуси сложилась довольно сложная и противоречивая. В разрезе административных районов наблюдается значительная контрастность демографических показателей, уровня занятости.

Нахождение Республики Беларусь на пути становления политического и экономического суверенитета, переход экономики с плановым управлением народным хозяйством к рыночным отношениям требует более эффективного использования имеющегося народнохозяйственного потенциала, повышенного внимания к социальным аспектам территориальной организации производительных сил, активизации исследования проблем занятости населения и принципиально новых методов и механизмов регулирования этих процессов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский, К. К. Урбанизация в Беларуси: экономико-географический анализ : монография / К. К. Красовский. – Брест : Изд-во БрГУ, 2004. – 203 с.
2. Красовский, К. К. Трансформация демографических структур Беларуси и Литвы / К. К. Красовский, В. Даугирдас // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 1, Філасофія. Паліталогія. Сацыялогія. – 2016. – № 1. – С. 121–127.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.09.2018

Krasouski K.K. Demographic Potential of Belarus in the Beginning of the XXI Century

Analysis of the main demographic criteria of Belarus at the beginning of the 21-st centuries has been conducted on the basis of statistical data. Unfavorable tendencies of birth and death rates, age-sex and matrimonial structures have been detected. The necessity for conducting an effective long-term scientific-grounded demographic policy has been proved.



УДК [908:338.48] (477+476)

Е.А. Ремезова

*д-р геол. наук, доц., зав. отделом геологии и полезных ископаемых
Института геологических наук НАН Украины*

К ПРОБЛЕМЕ РАЗРАБОТКИ УКРАИНСКО-БЕЛОРУССКОГО ГЕОТУРИСТИЧЕСКОГО БРЕНДА «ЯНТАРНЫЕ ПУТИ»

Несмотря на значительный интерес к янтарю, отсутствуют комплексные туристские маршруты, которые бы базировались на знаниях о генезисе янтаря, формировании его россыпей, традициях украинской и белорусской национальных культур по его использованию. С целью разработки туристического маршрута «янтарный путь Украина – Беларусь» проанализированы данные археологических исследований на территории двух стран, многочисленные литературные и архивные источники, материалы археологического музея в Гданьске, геологические данные по генезису и строению залежей янтаря и их распространению в Украине и Беларуси, картографические материалы. Предложены конкретные объекты в каждой из стран, в которой формировались залежи янтаря, показана взаимосвязь природы и этногенеза славян, их культуры и традиций. Рекомендовано использовать кластерный подход для успешного развития туризма, который позволяет объединиться различным предприятиям и организациям в особую структуру для привлечения и обслуживания туристов.

Введение

Янтарь является одним из камней, которые известны человечеству еще с палеолита. С помощью примитивных каменных орудий труда древний человек научился обрабатывать янтарь, используя его для изготовления разнообразных украшений и амулетов в виде фигурок человека и животных. В Украине янтарь также был известен и обрабатывался начиная с позднего палеолита; его находки в виде обломков среди предметов быта известны во многих стоянках охотников-собирателей Приднепровья 14 300–15 600 лет тому назад. Известны изделия из янтаря в древних греческих городах-колониях в Причерноморье, в средневековых поселениях разных областей Украины. Упоминание о добыче и обработке янтаря в Житомирском Полесье есть в работах П.А. Тутковского [8]. Таким образом, на территории Украины известно множество находок янтаря в различных регионах, которые отображают несколько этапов его освоения: 1) конец позднего палеолита (18–14 тыс. лет тому назад); 2) скифо-сарматский (VII в. до н.э. – IV в. н.э.); 3) средние века (Киевская Русь, IX в. – первая половина XIII в.) [5, с. 66].

В Беларуси также известно много находок янтаря. Начиная с 3-го тысячелетия до н.э. – первой половины 2-го тысячелетия известны находки как отдельных кусочков янтаря (Стрелица, Гомельская обл.), так и примитивные изделия из него (Кривица, Витебская обл.). Довольно много янтарных изделий выявлено на территории Берестя – древнего города XIII в., обладавшего развитой культурой. Находки янтаря известны и в других средневековых поселениях Беларуси: Витебске, Полоцке, Пинске, Турове, Новогрудке, Минске, Слуцке и др. [2, с. 48–49].

Однако при возрастающем интересе к этому камню отсутствуют комплексные туристские маршруты, которые бы базировались на знаниях о генезисе янтаря, формировании его россыпей, традициях украинской и белорусской национальных культур по его использованию. Проблема разработки маршрута «Янтарных путей Европы» освящалась преимущественно в публикациях польских исследователей [12–15]. В работе [3] уделено внимание разработке геотуристического бренда «Янтарный путь» в Украине, намечены его задачи и приведен примерный список основных достопримечательностей на маршруте. «Янтарные пути» рассматриваются именно как геотуристический бренд,



поскольку они развивались вокруг геологического феномена янтаря-сукцинита, который использовался активно как один из наиболее ценных товаров древности. Поэтому актуальной задачей является разработка туристического трансграничного маршрута по «Янтарному пути», который бы объединял Украину и Беларусь.

Методы исследований

С целью разработки туристического маршрута «Янтарный путь Украина – Беларусь» проанализированы данные археологических исследований на территории двух стран, многочисленные литературные и архивные источники, материалы археологического музея в Гданьске, геологические данные по генезису и строению залежей янтаря, их распространению в Украине и Беларуси, картографические материалы.

Археологическое обоснование «янтарного пути»

Следует отметить, что так называемый «янтарный путь Европы» трансформировался в различные периоды развития европейской цивилизации. В пределах Украины известно много находок позднего палеолита в хозяйственных комплексах поселений Приднепровья, в поселении Бармаки близ г. Ровно в бассейне р. Горынь, в сезонных охотничьих стоянках в бассейне р. Трубеж у с. Семеновка. Как правило, янтарь добывался из ближайших залежей, обрабатывался кремневыми орудиями труда [5, с. 67].

Согласно исследованиям А.А. Тюняева [9], существование в 3-м тысячелетии до н.э. «янтарного» пути на территории Руси подтверждают находки янтаря, связанные с волосовской культурой (4–2-е тысячелетие до н.э.). На территории лесной зоны Восточной Европы (Литва, Латвия, Эстония, Финляндия и Россия) известны 30 неолитических могильников, на которых встречены захоронения с янтарными украшениями: Кокемяки, Хонкилахти, Лието, Лаукалаа, Валма, Тамула, Звейниеки, Абора I, Квапаны, Крейчи, Крятуонас IC, Залавруга, Тудозеро V, Мыс Бревенный, Крохинские Пески, Каргулино, Кончанское, Репище, Иловец I, Языково I, Вашутино, Сахтыш II, IIА и VIII, Луково Озеро III, Шагара I, Малое Окулово, Лебяжий Бор VI, Лобань I, Тенишево и др. [9]. Известны находки янтаря в пределах Беларуси на стоянках в Стрелице Гомельской обл., Кривине Витебской обл. [2, с. 48]. В Украине этот период обработки янтаря охарактеризован артефактами слабо, хотя следует отметить уникальную находку вблизи с. Иванье Дубновского района Ровненской обл. – дисковидный амулет с соляным знаком в форме креста. Есть и множественные находки изделий из янтаря, например у с. Гордеевка Винницкой обл., где было найдено наибольшее в Европе количество янтарных изделий – более 1 500 [5, с. 69]. Большинство янтарных изделий этого периода отличаются простотой обработки, что свидетельствует об эпизодических сборах янтаря из местных источников, тем более что большинство находок обнаружено в Приднепровье и Полесье, где известны залежи янтаря.

По мнению А.А. Тюняева, «север Евразии уже в бронзовом–железном веках представлял собой крайне активный жизненный регион, который осуществлял торговые отношения не только внутри замкнутых сельских образований, но также и межконтинентальную торговлю некоторыми, видимо, особенно ценными товарами. “Янтарный путь” в этом контексте является ярким и показательным свидетельством древней северной цивилизации. Торговые отношения с Шумером, Вавилоном, Египтом, Микенами, а также с афганскими добытчиками нефрита и лазурита, ставят северорусскую и скандинавские цивилизации в один ряд с южными» [9]. Учитывая находки изделий из янтаря



ря, добываемого на территории Беларуси и Украины, можно предположить, что этот путь действовал не только от Балтики на юг, но и с Приднепровья в другие регионы Европы.

В скифо-сарматский период происходит активизация этой торговли, о чем свидетельствует сгущение находок янтаря в Приднепровье. В этот период происходит формирование «янтарных путей» по Днестру, верховьям Южного Буга от Прибалтики и Карпат, а восточнее – южнее широты Киева, по левым притокам Южного Буга из украинских проявлений янтаря [5, с. 69].

Наиболее богатым на находки янтаря и изделий из него является средневековье. Многочисленные находки изделий из янтаря известны на территории Киева. Здесь археологическими исследованиями выявлены мастерские по обработке этого камня, из которого изготавливались бусы, нательные крестики, серьги, оправы для икон.

Белорусское Полесье также богато находками подобных изделий. Много таких находок известно в культурных слоях XII–XIII вв. в Берестье и в непосредственной близости от городища в раскопках Щебрина, Баранцов, Баранов. Янтарь был обнаружен также в Пинске у Замковой горы, в Городище Пинского района (культурные слои VIII – начала IX в.), в Турове, где наряду с многочисленными изделиями обнаружены необработанные самородки янтаря, а также находки в западной Беларуси (Волковыск, Кульбабчино Гродненской обл.). Более 300 образцов янтаря было обнаружено в Полоцке на территории мастерской ювелира XII–XIII вв. Такие мастерские известны также в Клецке – бывшем центре княжества Туровской земли, на территории Минского замка и в других местах [2].

Янтарь для мастерских поставлялся из разных мест. В 2008 г. во время раскопок мастерской в Киеве на Подоле обнаружены изделия и заготовки из янтаря как прибалтийского происхождения (культурные слои XI в.), так и из местных проявлений (слои датированы XIII в.) [10, с. 16].

Относительно находок янтаря и изделий из него из культурных слоев средневековья следует отметить, что янтарь из раскопок северной и северо-западной Беларуси (Витебск, Полоцк, Гродно, Щучин, Кульбабчино, Волковыск и др.) соответствует янтарям Прибалтики, а янтарь из южных и юго-западных территорий (Берестье, Баранцы, Клецк, Туров и др.) – янтарям из антропогенных обложений [2, с. 72].

Археолог Е.А. Рыбина отметила уменьшение количества находок янтаря в Новгороде на рубеже XI–XII вв. [7]. Сокращение поступления камня в это время наблюдается также в Киеве и других городах. По мнению В.Н. Зоценко, это обусловлено возникшей междоусобицей орденских ставленников с самбами, скальвами, куршами – главными экспортерами балтийского янтаря [4]. Период IX–XI вв. в истории Западной Европы характеризуется ростом могущества рыцарских немецких орденов, которые стремились к захвату чужих земель на востоке. В связи с этим территория Прибалтики на многие годы стала ареной войн. Поэтому падала добыча на побережье Балтийского моря, происходило уменьшение количества привозного янтаря в разных регионах Европы, что способствовало увеличению добычи самоцвета в Поднепровье. Это позволило Киеву стать в XII в. не только его добытчиком, но и экспортером. В то время отсюда вывозили не столько изделия из янтаря, сколько необработанный камень в основном для получения из него ладана и олифы. Аналогично на территории современной Беларуси происходила добыча местного сырья.

Таким образом, археологические находки янтаря и изделий из него подтверждают существование «янтарного пути» в пределах современной Украины и Беларуси. Эти пути на территории двух стран имели множество ответвлений в разные периоды време-



ни и включали местные источники сырья, что подтверждено также находками янтаря, в том числе в относительно удаленных от мест его добычи регионах (Приднестровье).

На этой основе могут быть не только реконструированы древние «янтарные пути», но и предложен трансграничный туристический маршрут, объединяющий две страны – Украину и Беларусь. Традиции использования янтаря как в Украине, так и в Беларуси древние, о чем свидетельствуют материалы раскопок.

Элементами формирующегося туристического маршрута являются:

- 1) природные ландшафты Полесья как среда проживания древнего населения;
- 2) объекты геотуризма (обнажения, геологические разрезы, геологические музеи с экспозициями янтаря);
- 3) места расположения горных выработок, древние и современные копанки, карьеры, шурфы и т.п.;
- 4) музеи янтаря и выставки изделий;
- 5) предприятия по обработке янтаря;
- 6) археологические памятники (места находок древних изделий и заготовок из янтаря, древние поселения, где развивалось ремесло; археологические скансены и музеи);
- 7) памятники истории, связанные с янтарем (торговые ряды, мастерские, церкви, где использован янтарь в качестве украшений оклада икон, алтарей и т.п.);
- 8) этнографические музеи;
- 9) информационные центры;
- 10) элементы туристической инфраструктуры.

Для успешного формирования маршрута «Янтарного пути» следует использовать *кластерный подход*, который позволяет объединиться различным предприятиям и организациям в особую структуру для привлечения и обслуживания туристов [1, с. 96–118]. Кластер представляет собой устойчивое территориально-отраслевое партнерство, объединенное инновационной программой внедрения передовых производственных, инженеринговых, управленческих технологий с целью повышения конкурентоспособности участников кластера. Это могут быть не только музеи, отели и рестораны, производство сувениров и т.п., а также другие производства, использующие «янтарный» бренд: производство косметики, ювелирных и художественных изделий; алкогольных и безалкогольных напитков, кондитерских изделий, продуктов питания; предприятия по оказанию оздоровительных услуг, центры досуга и др. Например, в Польше существует несколько предприятий, выпускающих крема и косметические средства с добавками продуктов, полученных из янтаря; фармацевтические фабрики, выпускающие оздоровительную продукцию; множество предприятий по производству ювелирных изделий и сувенирной продукции из янтаря. Они расположены преимущественно в приморских городах, часто соседствуют с курортами и центрами туризма. Как правило, развитие одного производства стимулировало развитие других и создавало дополнительные рабочие места. Попытки реализации этого подхода есть и в Украине, и в Беларуси, но для других направлений туризма.

Объекты «янтарного пути» в пределах Украины и Беларуси

Согласно последним исследованиям геологов и археологов, украинский «янтарный путь» должен охватывать, в первую очередь, Киевскую, Житомирскую, Ровненскую и Волынскую области. В пределах Киевской обл. объектами геотуризма должны быть стратотип межигорского горизонта и свиты возле с. Новые Петровцы, ряд обнажений вблизи г. Обухова, Вышгорода, Бучи, Ржищева и Пироговский карьер, где извест-



ны находки янтаря. Стратиграфия янтареносных отложений очень разнообразна, эти находки зафиксированы в нижнесарматских(?) кварц-глауконитовых песках, песках и глинах палеогена, в глинистых кварц-глауконитовых песках среднего палеогена, а также в флювиогляциальных среднечетвертичных и аллювиальных раннечетвертичных и более поздних отложениях. Территория Киевского Полесья отличалась многочисленными изменениями условий палеогеографии, что способствовало размыванию янтареносных отложений и их сохранности лишь в виде мелких останцев. Образцы такого янтаря хранятся в Национальном Природоведческом музее Национальной академии наук Украины, отдельные из них имеют вес до одного килограмма.

На территории Киевской обл. во время археологических раскопок найдено много древних изделий из янтаря разного возраста. Отдельные из них входят в экспозиции музеев, среди которых заслуживает внимания музей «Добраничевская стоянка» вблизи Яготина. Здесь было найдено произведение искусства палеолита – фигурка женщины из янтаря, возраст находки – 12 000 лет [5, с. 67]. Интересные находки изделий из янтаря известны также вблизи Ходосовки, где также необходимо создать музей, который показывал бы работу средневековой мастерской по обработке янтаря. Для популяризации традиций использования янтаря в Украине группой исследователей проекта Национальной академии наук Украины и Польской академии наук «Пути янтаря» разработаны два разные квеста, где участники могут познакомиться и с культурой янтаря, и с условиями его образования. Эти квесты могут быть внедрены в программу посещения туристами музея-мастерской. Также в Киеве есть частный музей «Янтарный Путь», где можно увидеть современные янтарные изделия.

В пределах Житомирской обл. объектом «Янтарного пути» должен стать музей драгоценного и декоративного камня в г. Хорошев с коллекцией янтаря из Клесовского месторождения. Янтарь был легендарным камнем давних славян, в быту и верованиях которых тесно переплелись мифы и знания о природе Полесья. Поэтому весьма интересным объектом геотуризма в этом регионе является Полесский заповедник с краеведческим музеем, и музеем природы, и экологической тропой. Здесь известны интересные геологические памятники, с каждым из которых связаны легенды: Камень-Следовик (с. Великая Фосня), Камень Костюшка, Святые Камни (Каменное село, Корабль, Чертова мельница), Камень любви (с. Хочино), урочища Белый берег, Золотава, Лысая Гора и др. Эти места относятся к сакральным древних славян. В геологическом отношении они представляют собой делювиальные развалы гранитов, отшлифованные днепровским ледником. По инициативе экоклуба Рысь» в Полесском заповеднике создан музей под открытым небом «Древлянское село», разработанный как банк данных о древлянах, их религиозных верованиях, обычаях, культуре, практиках медитации, о Святых Местах предков [6]. В этих верованиях янтарю было отведено место как камню бессмертия. В дальнейшем планируется создать археологический скансен в г. Олевске, где будет представлен быт славянских поселений VIII–IX в. В этом районе с давних времен добывался янтарь, также в средние века именно здесь, согласно реконструкциям польских историков и археологов, проходил «янтарный путь Европы». Поэтому стоит дополнить эти объекты экспозициями о янтаре.

В Житомирской обл. проявления янтаря связаны с Пержанским и Барашевским янтареносными районами. Первый из них протягивается узкой полосой вдоль долины р. Уборть от с. Сущани к с. Копище. Проявления янтаря установлены в отложениях олигоцена возле населенных пунктов Перга, Замысловичи, Сущаны, Устиновка. Янтареносные слои представлены зеленовато-серыми, зеленовато-желтыми средне-мелко-



зернистыми кварц-глауконитовыми песками, которые по фациальным признакам близки к продуктивной толще Клесовского месторождения. По узкой эрозионно-тектонической долине, пространственно совпадающей с одним из участков современной р. Перги, происходил размыв янтареносных отложений и их накопление в мелких локальных ловушках. Барашевский янтареносный район охватывает верховье бассейна р. Уж от с. Бараша до с. Ушомир. Здесь установлен ряд проявлений (Бараша, Ушомир, Гулянка). Янтареносными являются верхне-эоценовые, нижне-, среднеолигоценовые, нижнемиоценовые и нижнеантропогеновые отложения. Янтарь здесь характеризуется неглубоким залеганием и поэтому добывается сейчас нелегальными шурфами. В этих районах известны археологические находки янтаря в средневековых памятниках (Житомир, Коростень, Бараша).

Наиболее разработанной является часть маршрута в Ровенской обл. Основные промышленные запасы янтаря связаны с осадочными прибрежно-морскими лагунно-дельтовыми фациями, которые представлены песчано-глинистыми отложениями межигирской свиты олигоцена. Сегодня в регионе ведется промышленная разработка янтаря действующими карьерами. В Ровно есть два музея янтаря – «Янтарный Дворец» и музей «Янтарь Украины», работает экспозиция в краеведческом музее. В 2017 г. открыты частные музеи «Янтарный путь» и узкоколейки Заречье – Антоновка, действует информационный туристический центр (г. Владимирец). В Ровенской обл., как и в Житомирской, существуют сакральные места славян – урочища Каменный Брод и Трех крестов в Рокитновском районе. Здесь известные археологические памятники с находками янтаря и изделий из него (Бармаки II – поздний палеолит, возле с. Иванны Дубновского района и Городок – скифско-сарматские). Также интересны для туристов Ровенский заповедник и ландшафтный парк «Припять-Стоход». Что касается музеев янтаря, то здесь стоило бы дополнить их реконструкциями «янтарного леса», отобразить генезис, формирование залежей, основные преимущества и особенности украинского янтаря.

Янтарь в пределах Волынской обл. часто находится в четвертичных отложениях. Условия накопления янтаря в этих отложениях различны и зависят от ряда факторов: структурно-геологического, который обусловил распределение неровностей исходной поверхности накопления четвертичных отложений, а также залегание и сохранность четвертичных отложений в зависимости от интенсивности неотектонических движений различных структур; палеогеографического, который отражает закономерности движения ледника и его таяние, а в результате образование соответствующих форм рельефа и отложений; эрозионных процессов, которые обусловили переувлажнение палеогеновых отложений и транспортировку материала водотоками. По минералогическому составу пески палеогена отличаются от четвертичных главным образом большим содержанием глауконита и более интенсивной зеленой расцветкой. Известные в антропогене залежи янтаря, исследованные в последние годы, приурочены к отложениям завадовского климатолита, который отмечается благоприятными условиями для разрушения и переотложения межигорских янтареносных пород, накопления перенесенного янтаря в аллювиально-озерных и озерно-болотных отложениях. Эти залежи являются аналогами янтарепроявлений юга Беларуси.

В пределах Волынской области наиболее интересными объектами на «янтарном пути» следует признать: стратотип плейстоценовой ледниковой формации Полесья (с. Ростани Любомльского района); Шацкий национальный природный парк с характерными ледниковыми формами рельефа и озерами (некоторые озерные бассейны рассматриваются как места накопления янтарных залежей) [11]; Черемский заповідник (Ма-



невичский район); Национальный природный парк «Припять-Стоход»; Владимир-Волынский комплекс историко-архитектурных сооружений XII–XVIII вв., остатки валов X–XIV вв. (центр торговли янтарем в средние века); Луцкий историко-культурный заповедник; скансен в Рокинях.

Эти объекты могут быть дополнены экскурсиями по действующим предприятиям по добыче янтаря и его обработке.

Для развития белорусской части «янтарного пути» следует разработать маршруты, которые включали бы места наиболее интересных находок и музейные экспозиции, где они представлены. К ним относятся, например, археологический музей «Берестье» в г. Бресте, музей древнебеларуской культуры в Минске, а также музеи Полоцка, Турова, Гродно и др. Они могут быть дополнены маршрутами в этноскансены и заповедники как освещение среды проживания славян и их традиций.

Завключение

Для развития украинско-беларуского сегмента «янтарного пути Европы» следует осуществить комплекс следующих мероприятий.

1. Уточнить янтарные пути в пределах Украины и Беларуси на основе изучения образцов янтаря из различных археологических объектов.

2. Разработать детально логистику туристических маршрутов «янтарного пути» в пределах в первую очередь Киевской, Житомирской, Ровенской Волынской областей Украины, территории Беларуси, а также специальных атласов для туристов.

3. Создать новые экспозиции и музеи янтаря различного содержания в пределах полесских областей двух стран, подготовить другие геотуристические объекты, информационные центры, используя польский опыт.

4. Создать реконструкцию «янтарного» леса на основе имеющихся данных палинологии.

5. Популяризовать марки продуктов территорий развития «янтарного пути», продвигать туристский бренд в Украине и Беларуси, а также за их пределами, вести его маркетинговую поддержку через специальные информационные центры и сайты.

6. Развивать научные исследования в области наук о земле, экологии, этнографии, археологии, истории; разрабатывать новые методы добычи и обработки янтаря, дизайнерские решения по созданию современных ювелирных изделий из янтаря, выпускать новую продукцию после переработки янтаря.

7. Организовывать выставки, фестивали, гастрофесты, другие мероприятия, популяризирующие янтарь.

8. Развивать международное сотрудничество по вопросам изучения янтаря и янтарных путей Европы.

9. Готовить специалистов сферы туризма для обеспечения успешного функционирования маршрутов «Янтарного пути».

Все эти мероприятия направлены на то, чтобы этот маршрут стал важным туристическим активом и прибыльной сферой экономики регионов Украины и Беларуси.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агроекотуризм в Припятском Полесье / В. Т. Демянчик [и др.]. – Брест : Альтернатива, 2014. – 140 с.



2. Богдасаров, М. А. Янтарь из археологических памятников Беларуси / М. А. Богдасаров. – Брест : Талер, 1995. – 74 с.
3. Науково-методичні засади створення «Українського бурштинового шляху» та формування його геотуристичного бренду / А. Богуцький [та ін.] // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. географічна. – 2013. – Вип. 43, ч. 1. – С. 136–149.
4. Зоценко, В. Н. О происхождении и использовании янтаря в Киеве (X – первая половина XIII в.) / В. Н. Зоценко // Археол. исслед. – Киев : Наук. думка, 1985. – 143 с.
5. Мацуй, В. М. Эволюция смолопродуцирующей растительности и формирование залежей ископаемых смол / В. М. Мацуй. – Киев : Наук. думка, 2016. – 143 с.
6. Поліський природний заповідник. Край лісів та боліт [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://polesye-reserve.org.ua/>.
7. Рыбина, Е. А. Международные связи Новгорода [Электронный ресурс]. – Режим доступу: https://www.ereading.club/chapter.php/137788/50/Yanin_Ocherki_istorii_srednevekovogo_Novgoroda.html.
8. Тутковский, П. А. Янтарь в Волынской губернии / П. А. Тутковский // Тр. О-ва исследователей Волыни. – 1911. – № 6. – С. 19–58.
9. Тюняев, А. А. Скандинавский этап древних торговых путей [Электронный ресурс] / А. А. Тюняев // «Янтарный» путь, его маркеры, география и святы. – Режим доступа: <http://www.organizmica.org/archive/909/sedp.shtml>.
10. Хамайко, Н. В. Бурштин з археологічних розкопок Київського Подолу 2008 р. / Н. В. Хамайко, М. О. Колтовой, О. Ю. Журухіна // Вісн. Нац. наук.-природ. музею. – 2014. – Т. 12. – С. 12–17.
11. Komliev, O. Lacustrine and paludal complexes of Ukraine as amber-bearing objects / O. Komliev, O. Remezova // Amberif 2018/ International Fair of Amber, Jewellery and Gemstones. International symposium. Amber. Science and Art. Abstracts. – Gdańsk, 2018. – S. 121–123.
12. Kosmowska-Ceranowicz, B. Z bursztynem przez tysiąclecia. Muzeum archeologiczne w Gdańsku / B. Kosmowska-Ceranowicz, E. Choińska-Bochdan. – Gdańsk, 2003. – 160 s.
13. Małka, A. Eksploatacja surowca burzstynowego z nagromadzeń czwartorzędowych w okolicach Gdańska w XIX i na początku XX wieku / A. Małka // Prace Muzeum Ziemi. – 2012. – № 50. – S. 45–58.
14. Małka, A. Śladami burzstynowego górnictwa w wojewódstwie Pomorskim / A. Małka. – Gdańsk, 2015. – S. 56–86.
15. The magic of the Amber Road. Treasures of Pruszcz Gdański. Tourist guide. Faktoria Handlowa, Department of Historical Reconstruction. Center of Culture and Sport, 2013. – 18 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.10.2018

Remezova E.A. To the Problem of Development of Ukrainian-Belarusian Geotourist Brand «Amber Ways»

The problems of development of Ukrainian-Belarusian geotourist brand «Amber ways» are considered in the article. In spite of considerable interest to the amber, complex tourist routes which would be based on knowledges about genesis of amber, forming of its deposits, traditions of Ukrainian and Belarusian national cultures on its usage are absent. The concrete objects within the limits of each of countries, which represent as the features of natural environment the beds of amber were formed in which, so it is showed interrelation of nature and etnogenesis of slavs, their culture and traditions, are offered. It is suggested to take cluster approach for successful development of tourism which allows to unite to different enterprises and organizations in the special structure for attraction and service of tourists.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія зборніка навуковых прац разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасьцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *К.М. Мароз, Л.М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падлісана ў друк 27.12.2018. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 16,51. Ул.-выд. арк. 12,13.
Тыраж 100 экз. Заказ № 497.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.
224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.