Вучоныя запіскі 2019 • Вып. 15
Ч. 2 • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 524.354.6-33

В. С. Секержицкий
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: otf@brsu.brest.by

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИЯХ СОСТОЯНИЯ КРАЙНЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ФЕРМИ-ГАЗОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получены уравнения состояния крайне вырожденных идеальных ферми-газов в магнитном поле. Рассмотрены нерелятивистское и ультрарелятивистское приближения, а также предельные случаи слабого и сверхсильного (превышающего квантовый предел) магнитных полей. Результаты могут найти применение при решении задач теоретической астрофизики, связанных с исследованиями физических свойств сверхплотного сильно замагниченного вещества и моделированием сверхплотных астрофизических объектов.

При решении задач теоретической астрофизики, связанных с моделированием сверхплотных астрофизических объектов типа белых карликов и нейтронных звезд, используются приближенные уравнения состояния сверхплотного вещества. Возможность наличия в веществе указанных объектов свободных фермионов и сильных магнитных полей делает актуальным вопрос о влиянии магнитного поля на уравнения состояния ферми-газов.

Рассмотрим сначала нерелятивистские ферми-газы. Следуя [1], в результате стандартных вычислений несложно получить выражение для большого термодинамического потенциала крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа, находящегося в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B:

$$\Omega_j(B) = \Omega_j(B)\frac{R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)}, \tag{1}$$

где

$$\Omega_j(0) = -\frac{2}{5}N_j\zeta_j(0), \qquad \zeta_j(0) = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2}{2m_j}n_j^{2/3}, \tag{2}$$

N_j – число фермионов в объеме V_j, $n_j = N_j / V_j$ – их концентрация, m_j – масса фермиона, $j = e, p, n$ – индексы, соответствующие электронному, протонному и нейтронному газам, $R_{5/2}(x_j)$ и $R_{3/2}(x_j)$ – безразмерные функции параметра $x_j = \dfrac{\zeta_j(B)}{\mu B}$, ζ_j – химический потенциал, для электронов μ – магнетон Бора μ_B, для нуклонов μ – ядерный магнетон $\mu_я$. Для заряженных фермионов

$$R_a(x_q) = a\sum_{n=0}^{l}\left(\left(x_q - 2n - 1 - \sigma_q\right)^{a-1} + \left(x_q - 2n - 1 + \sigma_q\right)^{a-1}\right), \tag{3}$$

$a = 3/2, 5/2$; $q = e, p$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ – номер квантового уровня Ландау. В силу свойств функции распределения Ферми – Дирака суммирование в (3) ведется до тех пор, пока выражение под знаком соответствующего радикала неотрицательно. Для электронейтральной среды $n_p = n_e$ и

$$R_{3/2}\left(x_e\right)=R_{3/2}\left(x_p\right)=\frac{3\pi^2\hbar^3 n_p}{\left(2m_p\mu_я B\right)^{3/2}};\tag{4}$$

здесь учтено, что $m_p\mu_я = m_e\mu_B$. Для нейтронов

$$R_a\left(x_n\right)=\frac{1}{2}\Big(\left(x_n-\sigma_n\right)^a+\left(x_n+\sigma_n\right)^a\Big),\tag{5}$$

причем $\left(x_n-\sigma_n\right)^a=0$ при $x_n\le\sigma_n$. Здесь $\sigma_j=\mu_j/\mu,$ где μ_j – собственный магнитный момент фермиона. При выводе приведенных формул принималось, что спектр энергии свободного заряженного фермиона в квантующем магнитном поле

$$\varepsilon_q=\frac{p_{qz}^2}{2m_q}+\mu B\left(2n+1+2s\sigma_q\right),\tag{6}$$

а для нейтрона

$$\varepsilon_n=\frac{p_n^2}{2m_n}+2s\sigma_n\mu_я B,\tag{7}$$

p_{jz} – проекция импульса p_j фермиона на направление индукции магнитного поля, $s=\mp 1/2$. В (6), (7) энергия фермиона отсчитывается от величины $m_j c^2$.

Формулы (6) и (7) записаны в предположении, что величины σ_j от B не зависят. Это ограничивает применимость полученных соотношений условием B < 10^{17} Гс для нуклонных газов. При B > 10^{17} Гс циклотронная энергия пиона превышает энергию β^--распада нейтрона, и магнитный момент последнего зависит от B. Точная количественная теория этой зависимости до настоящего времени не разработана; качественно можно считать, что вследствие деформации в сверхсильном магнитном поле «пионной шубы» нуклона собственный магнитный момент последнего имеет тенденцию к уменьшению. Таким образом, здесь и далее мы полагаем $\sigma_p\approx 2,793,$ $\sigma_n\approx 1,913$ [2].

Что же касается электронного газа, то $\sigma_e\approx 1,00116$ при B << $4,414\cdot 10^{13}$ Гс. Аномальный магнитный момент электрона имеет довольно сложную зависимость от индукции магнитного поля при B > $4,414\cdot 10^{13}$ Гс [2], но можно считать с достаточной степенью точности $\sigma_e\approx 1$ при любых значениях B.

Заметим также, что в обычных «земных» условиях нейтрон – нестабильная относительно бета-распада частица, и исследование физических свойств нейтронного газа представляет интерес лишь для физики сверхплотных астрофизических объектов, характерные плотности вещества которых превышают порог появления в электронно-ядерном веществе свободных нейтронов в качестве стабильного компонента (ρ > 10^{11} г/см^3) [3].

Используя приведенные выше соотношения и метод термодинамических функций, получим выражения для химического потенциала ζ_j, давления P_j и средней полной энергии E_j крайне вырожденных идеальных нерелятивистских ферми-газов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B:

$$N_j = -\left(\frac{\partial \Omega_j(B)}{\partial \zeta_j}\right)_{V_j,B}, \qquad \zeta_j(B) = \zeta_j(0)\frac{x_j}{R_{3/2}^{2/3}(x_j)}, \tag{8}$$

$$P_j(B) = -\frac{\Omega_j(B)}{V_j} = P_j(0)\frac{R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)}, \tag{9}$$

$$E_j(B) = \Omega_j(B) + N_j\zeta_j(B) = \frac{2}{3}E_j(0)\frac{2,5x_jR_{3/2}(x_j) - R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)} =$$

$$= P_j(0)V_j\frac{2,5x_jR_{3/2}(x_j) - R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)}, \tag{10}$$

где

$$P_j(0) = \frac{2}{5}n_j\zeta_j(0), \qquad E_j(0) = \frac{3}{2}V_jP_j(0). \tag{11}$$

Формулы (8) и (10), как и (2), (11), записаны без слагаемых, определяющих энергию покоя фермионов.

Численные расчеты показывают, что термодинамические характеристики заряженных фермионов осциллируют в магнитном поле. Каждому значению n соответствуют два пика. Характеристики парамагнитного нейтронного газа осцилляций не имеют, т. к. движение нейтрона в магнитном поле не квантуется. В отличие от электронного газа химические потенциалы нуклонов при любых значениях магнитного поля меньше, чем без поля, а давления больше (за исключением области сверхсильных магнитных полей). Средние полные энергии всех ферми-газов меньше соответствующих величин в отсутствие поля.

В случае слабых магнитных полей ($x_j > 10$) для заряженных фермионов

$$R_{3/2}(x_q) \approx x_q^{3/2}\left(1 + \frac{3\sigma_q^2 - 1}{8x_q^2}\right), \qquad R_{5/2}(x_q) \approx x_q^{5/2}\left(1 + \frac{5(3\sigma_q^2 - 1)}{8x_q^2}\right), \tag{12}$$

$$\zeta_q(B) \approx \zeta_q(0)\cdot\left(1 - \frac{(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2B^2}{12\zeta_q^2(0)}\right), \tag{13}$$

$$P_q(B) \approx P_q(0)\cdot\left(1 + \frac{5(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2B^2}{12\zeta_q^2(0)}\right), \qquad E_q(B) \approx E_q(0)\cdot\left(1 - \frac{5(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2B^2}{12\zeta_q^2(0)}\right), \tag{14}$$

для нейтронов

$$R_{3/2}(x_n) \approx x_n^{3/2}\left(1 + \frac{3\sigma_n^2}{8x_n^2}\right), \qquad R_{5/2}(x_q) \approx x_q^{5/2}\left(1 + \frac{15\sigma_n^2}{8x_n^2}\right), \tag{16}$$

$$\zeta_n(B) \approx \zeta_n(0)\cdot\left(1 - \frac{\sigma_n^2\mu^2B^2}{4\zeta_n^2(0)}\right), \tag{16}$$

$$P_n(B)\approx P_n(0)\cdot\left(1+\frac{5\sigma_n^2\mu^2B^2}{4\zeta_n^2(0)}\right),\ldots.. E_n(B)\approx E_n(0)\cdot\left(1-\frac{5\sigma_n^2\mu^2B^2}{4\zeta_n^2(0)}\right). \tag{17}$$

В слабых магнитных полях с ростом индукции B убывают величины $\zeta_j(B)$, $E_j(B)$ и возрастает $P_j(B)$, что вполне согласуется с теорией парамагнетизма Паули [4] (в слабых магнитных полях диамагнетизм Ландау не проявляется). Несложно убедиться, что при $B\to 0$ имеет место $\zeta_j(B)\to\zeta_j(0)$, $P_j(B)\to P_j(0)$, $E_j(B)\to E_j(0)$.

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей для заряженных фермионов $n = 0$, и магнитные моменты всех микрочастиц направлены по полю. Тогда

$$x_q\le 3-\sigma_q,\qquad R_a(x_q)=a(x_q-1+\sigma_q)^{a-1}, \tag{18}$$

и

$$\zeta_q(B)=\frac{\pi^4\hbar^6n_q^2}{2m_q^3\mu^2B^2}+(1-\sigma_q)\mu B, \tag{19}$$

$$P_q(B)=\frac{\pi^4\hbar^6n_q^3}{3m_q^3\mu^2B^2},\qquad E_q(B)=\frac{\pi^4\hbar^6N_q^3}{6m_q^3\mu^2B^2V_q^2}+(1-\sigma_q)N_q\mu B. \tag{20}$$

При этом нижняя граница сверхсильного магнитного поля для протонов и электронов одинакова:

$$B^{(p)}=B^{(e)}=\frac{\pi^{4/3}\hbar^2n_p^{2/3}}{2^{2/3}m_p\mu_я}=3{,}82\cdot 10^{-7}n_p^{2/3}\ (\text{Гс}). \tag{21}$$

Для нейтронов поле сверхсильное, если $x_n\le\sigma_n$.

$$B\ge B^{(n)}=\frac{\pi^{4/3}\hbar^2n_n^{2/3}}{2^{2/3}m_n\mu_я}\frac{18^{1/3}}{2\sigma_n}=2{,}51\cdot 10^{-7}n_n^{2/3}\ (\text{Гс}). \tag{22}$$

В этом случае

$$R_a(x_n)=\frac{1}{2}(x_n+\sigma_n)^a,\qquad \zeta_n(B)=2^{2/3}\zeta_n(0)-\sigma_n\mu B, \tag{23}$$

$$P_n(B)=2^{2/3}P_n(0),\qquad E_n(B)=2^{2/3}E_n(0)-\sigma_nN_n\mu B. \tag{24}$$

Таким образом, химические потенциалы рассматриваемых ферми-газов при заданных их концентрациях уменьшаются с ростом индукции сверхсильного магнитного поля и достигают нуля при

$$B_q=\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{\zeta_q(0)}{(\sigma_q-1)^{1/3}\mu},\qquad B_n=\frac{2^{2/3}\zeta_n(0)}{\sigma_n\mu} \tag{25}$$

для заряженных фермионов и нейтронов соответственно, а при более высоких значениях B (в соответствующих реальных условиях вряд ли достижимых) становятся отрицательными величинами. Давления протонного и электронного газов стремятся к нулю при $B\to\infty$. Давление нейтронного газа во всей области сверхсильных магнитных полей больше соответствующей величины в отсутствие поля в $2^{2/3}$ раза и не зависят от B, что вполне согласуется с теорией парамагнетизма Паули: после ориентации магнитных моментов всех нейтронов по полю нет прироста кинетической энергии. Средние полные энергии всех трех газов в сверхсильном магнитном поле уменьшаются.

Учитывая, что спектр энергии свободного заряженного релятивистского фермиона в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B определяется выражением [2]

$$\varepsilon_q = \sqrt{c^2 p_z^2 + \left(\sqrt{m_q^2 c^4 + 2m_q c^2 \mu B\left(2n+1+2s\right)} + 2s\left(\sigma_q - 1\right)\mu B\right)^2}, \qquad (26)$$

для большого термодинамического потенциала идеального ферми-газа получим:

$$\Omega_q\left(B\right) = -\frac{N_q}{2}\sqrt{\chi_q^2\left(0\right) - m_q^2 c^4}\,\frac{R_1}{R_2^{4/3}}, \qquad (27)$$

Здесь

$$R_1 = \frac{3}{2}\sum_s\sum_n\left(\sqrt{X_q^2 + Y_q}\sqrt{X_q^2 - Z_q} - \frac{1}{2}\left(Y_q + Z_q\right)\ln\left|\frac{\sqrt{X_q^2+Y_q} + \sqrt{X_q^2 - Z_q}}{\sqrt{X_q^2+Y_q} - \sqrt{X_q^2 - Z_q}}\right|\right), \qquad (28)$$

$$R_2 = \frac{3}{2}\sum_s\sum_n\sqrt{X_q^2 - Z_q}, \qquad X_q^2 = \frac{\chi_q^2\left(B\right) - m_q^2 c^4}{2m_q c^2 \mu B}, \qquad Y_q = \frac{m_q c^2}{2\mu B}, \qquad (29)$$

$$Z_q = 2n+1+2s + \frac{\left(\sigma_q - 1\right)^2}{4Y_q} + 2s\left(\sigma_q - 1\right)\sqrt{1 + \frac{2n+1+2s}{Y_q}}, \qquad (30)$$

$$\chi_q^2\left(0\right) - m_q^2 c^4 = \left(3\pi^2\right)^{2/3} c^2 \hbar^2 n_q^{2/3}; \qquad (31)$$

суммирование в (28) и (29) ведется до тех пор, пока $X_q^2 \geq Z_q$.

Для химического потенциала, давления и средней полной энергии соответственно получаем:

$$\chi_q\left(B\right) = \sqrt{m_q^2 c^4 + \left(\chi_q^2\left(0\right) - m_q^2 c^4\right)\frac{X_q^2}{R_2^{2/3}}}, \qquad (32)$$

$$P_q\left(B\right) = \frac{N_q}{2V}\sqrt{\chi_q^2\left(0\right) - m_q^2 c^4}\,\frac{R_1}{R_2^{4/3}}, \qquad E_q\left(B\right) = \frac{N_q}{2}\sqrt{\chi_q^2\left(0\right) - m_q^2 c^4}\,\frac{2\sqrt{X_q^2 + Y_q}R_2 - R_1}{R_2^{4/3}}. \qquad (33)$$

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей имеем:

$$X_q^2 \leq 2 + \frac{\left(\sigma_q - 1\right)^2}{4Y_q} - \left(\sigma_q - 1\right)\sqrt{1 + \frac{2}{Y_q}}, \qquad Z_q = \left(\sigma_q - 1\right)\cdot\left(\frac{\sigma_q - 1}{4Y_q} - 1\right). \qquad (34)$$

Полученные формулы описывают свойства крайне вырожденного идеального релятивистского газа заряженных фермионов в магнитном поле, не оказывающем влияния на величины аномальных магнитных моментов микрочастиц. При $B > 10^{13}$ Гс мы вправе принять $\sigma_e \approx 1$, что не отразится существенно на численных расчетах термодинамических величин, но значительно их упростит. При этом

$$Z_e = 2n + 1 + 2s, \tag{35}$$

$$\varepsilon_e = \sqrt{c^2 p_z^2 + m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 \mu_B B\left(2n + 1 + 2s\right)}. \tag{36}$$

Формулы [5–7], описывающие термодинамические характеристики ультрарелятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле, являются частным случаем полученных нами соотношений при $\sigma_e = 1$ и $\chi_e >> m_e c^2$.

Представим выражения для давления и плотности энергии крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле с индукцией B в виде:

$$P_e\left(B\right) = \frac{n_e}{2}\xi_e\left(0\right)\frac{R_1\left(X_e, Y_e\right)}{R_2^{4/3}\left(X_e\right)}, \tag{37}$$

$$w_e\left(B\right) = \frac{n_e}{2}\xi_e\left(0\right)\frac{2\sqrt{X_e^2 + Y_e}R_2\left(X_e\right) - R_1\left(X_e, Y_e\right)}{R_2^{4/3}\left(X_e\right)}, \tag{38}$$

где

$$\xi_e\left(B\right) = \xi_e\left(0\right)\frac{X_e}{R_2^{1/3}\left(X_e\right)}, \qquad \xi_e\left(0\right) = \left(3\pi^2\right)^{1/3} c\hbar n_e^{1/3}, \tag{39}$$

$$X_e^2 = \frac{\chi_e^2\left(B\right) - m_e^2 c^4}{2m_e c^2 \mu B}, \qquad Y_e = \frac{m_e c^2}{2\mu B}, \qquad R_2\left(X_e\right) = \frac{3}{2}\left(X_e + 2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{X_e^2 - 2n}\right), \tag{40}$$

$$R_1\left(X_e, Y_e\right) = \frac{3}{2}\left(X_e\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \frac{Y_e}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + X_e}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - X_e}\right| + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{l}\left(\sqrt{X_e^2 + Y_e}\sqrt{X_e^2 - 2n} - \frac{Y_e + 2n}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + \sqrt{X_e^2 - 2n}}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \sqrt{X_e^2 - 2n}}\right|\right)\right). \tag{41}$$

Суммирование в (40) и (41) ведется до тех пор, пока выражения под соответствующими радикалами неотрицательные.

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей

$$X_e^2 \le 2, \ldots R_1\left(X_e, Y_e\right) = \frac{3}{2}\left(X_e\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \frac{Y_e}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + X_e}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - X_e}\right|\right), \tag{42}$$

$$R_2\left(X_e\right) = \frac{3}{2}X_e, \qquad \xi_e\left(B\right) = \frac{\pi^2\hbar^3 c n_e}{m_e \mu_B B}. \tag{43}$$

Для ультрарелятивистских электронов в квантующем магнитном поле $\xi_e >> m_e c^2$, $X_e^2 >> Y_e$; при этом в квантовом пределе сверхсильного магнитного поля $R_1\left(X_e\right) = 1{,}5X_e^2$ и уравнение состояния

$$P_e\left(B\right) = w_e\left(B\right) = \frac{1}{2}n_e \cdot \xi_e\left(B\right). \tag{44}$$

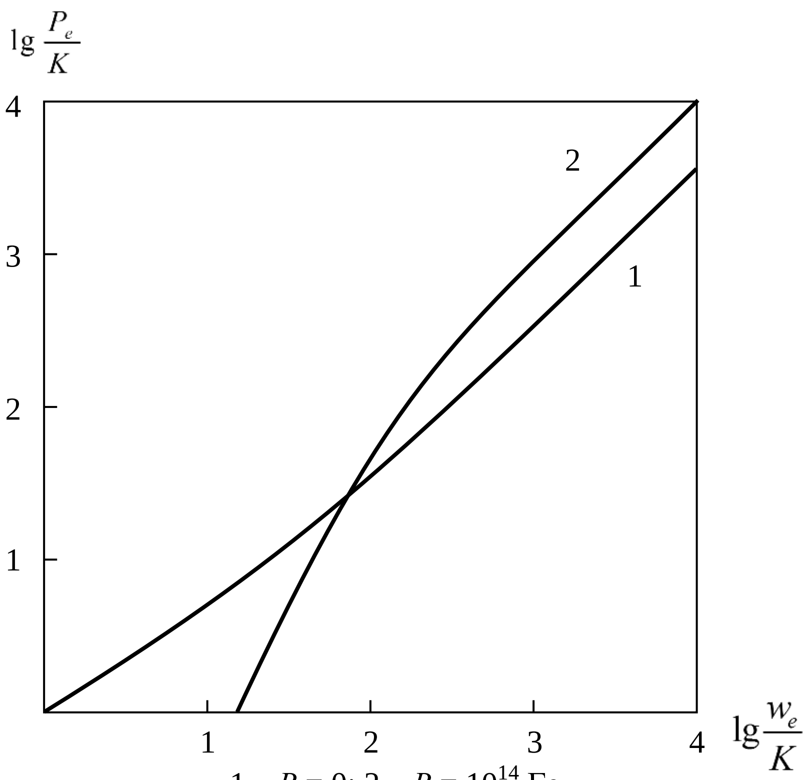
В слабых магнитных полях ($X_e^2 > 10$) для ультрарелятивистских электронов:

$$R_2(X_e) \approx X_e^3\left(1+\frac{X_e^4}{4}\right), \qquad R_1(X_e) \approx \frac{1}{2}\left(X_e^4 + \ln X_e\right), \tag{45}$$

$$\frac{2R_1(X_e)}{R_2^{4/3}(X_e)} \approx \left(1+\frac{\ln X_e}{X_e^4}\right)\left(1-\frac{1}{3X_e^4}\right) \approx 1+\frac{1}{X_e^4}\left(\ln X_e - \frac{1}{3}\right). \tag{46}$$

На рисунке представлены логарифмические зависимости величин P_e / K от w_e / K в отсутствие магнитного поля и в магнитном поле с индукцией 10^{14} Гс, превышающей квантовый предел для рассматриваемого диапазона значений плотности энергии.

Здесь $K = \dfrac{m_e^4 c^5}{32\pi^2\hbar^3}$. Область значений рассматриваемых величин соответствует именно релятивистскому электронному газу; влияние сверхсильного магнитного поля на уравнение состояния в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах вполне очевидно из аппроксимации графиков.



1 – B = 0; 2 – B = 10^{14} Гс

Рисунок. – Уравнение состояния крайне вырожденного идеального электронного газа

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1977. – 552 с.
2. Вонсовский, С. В. Магнетизм микрочастиц / С. В. Вонсовский. – М. : Наука, 1973. – 280 с.
3. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
4. Паули, В. Квантовые теории магнетизма. Магнитный электрон / В. Паули // Тр. по квантовой теории. – М. : Наука, 1977. – С. 34.
5. Шульман, Г. А. Холодная нейтральная плазма в квантующем магнитном поле / Г. А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1974. – № 10. – С. 24–28.
6. Шульман, Г. А. Нейтронизация холодного водорода в присутствии сверхсильных магнитных полей / Г. А. Шульман // Астрофизика. – 1974. – Т. 10, вып. 4. – С. 543–554.
7. Шульман, Г. А. О свойствах холодного плотного вещества с вмороженным сверхсильным магнитным полем / Г. А. Шульман // Астрофизика. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.09.2019

***Sekerzhitsky V. S.* On the Question of Equations State of Extremely Degenerate Ideal Fermi-Gases in Magnetic Field**

The equations of state extremely degenerate ideal fermi-gases in magnetic field i are formulated. The unrelativistic and ultrarelativistic approximations are consider. The maximum cases of low and super-strong magnetic fields are b formulated. Results find application by decision task theoretical astrophysics, that combine with researchs of physical properties superdense strong magnetized matter and modeling super-dense astrophysical objects.