Вучоныя запіскі 2019 • Вып. 15
Ч. 2 • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 519.6 + 517.983.54

О. В. Матысик
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: matysikoleg@mail.ru

НЕЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с ограниченным положительным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для этого метода исследуется априорный выбор числа итераций. Обосновывается применение правила останова по невязке, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова и решена модельная задача.

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y, X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение 1. *Задачу отыскания решения* $x \in X$ *уравнения* (1) *называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части* $y = y_0 \in Y$ *уравнения* (1) *его решение*:

а) существует в пространстве X *;*

б) определено в пространстве X *однозначно;*

в) устойчиво в пространстве X *, т. е. непрерывно зависит от правой части* $y \in Y$.

В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения I-го рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т. д.

Однако обычные методы, применяемые для решения корректных задач, невозможно было применить к некорректным задачам, поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. Это было сделано в 1943 г. А. Н. Тихоновым [2].

Определение 2. *Задача отыскания решения уравнения* (1) *называется корректной по Тихонову на множестве $M \subset X$, а множество M – ее классом корректности, если:*

а) точное решение задачи существует в классе M;

б) в классе M решение задачи единственно при любой правой части $y \in F = AM \subset Y$;

в) принадлежащее множеству M решение задачи устойчиво относительно правых частей $y \in F$.

Если $M = X$ и $F = Y$, то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А. Н. Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 1950-х гг., но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М. М. Лаврентьева [3], А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина [4], В. К. Иванова, В. В. Васина и В. П. Тананы [5], О. А. Лисковца [6], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [7].

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А. Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики.

Определение 3. *Параметрическое семейство операторов $\{R_\alpha\}$, действующих из пространства правых частей Y в пространство решений X, называется регуляризующим (регуляризующим алгоритмом или регуляризатором), если:*

1) при любом $\alpha > 0$ оператор R_α определен на всем пространстве Y;

2) если существует точное решение исходной задачи $x \in X$, то для любого $\delta > 0$ существует $\alpha(\delta)$ такое, что для всех $y_\delta \in Y$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ имеет место соотношение $\|R_{\alpha(\delta)} y_\delta - x\|_X \to 0,\ \ \delta \to 0.$ Параметр α называется параметром регуляризации, $x_{\alpha,\delta} = R_{\alpha(\delta)} y_\delta$ – регуляризованными решениями.

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных. В работе [8] А. Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это метод регуляризации решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В. К. Иванов в работе [9] излагает метод квазирешений. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и метод невязки, предложенный Д. Л. Филлипсом (D. L. Phillips) [10] и В. К. Ивановым [11].

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [12–23].

В настоящей статье предлагается неявный итерационный метод решения некорректных задач, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k. Для рассматриваемого метода исследована сходимость в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова; обоснована возможность применения к методу правила останова по малости невязки; решена численная модельная задача.

Выбор параметра k и, следовательно, соответствующей схемы для решения некорректных задач зависит от степени s истокопредставимости точного решения $(x = A^s z,\ s > 0)$. В работе показано, что для $s \le 5$ целесообразно использовать предложенный метод при $k = 1$, для $6 \le s \le 27$ при $k = 2$ и т. д.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным явным методом итераций [3; 7; 12–14; 16] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод [3; 7; 12–14; 16] предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе [3; 7; 12–14; 16] на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемом неявном методе ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$), в связи с чем оптимальную оценку для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (томографии) [13; 18–19; 21; 23–24].

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{2}$$

где A – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение (2) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения предлагается неявная итерационная процедура

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \tag{3}$$

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (3) итерации примут вид

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \tag{4}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

2.1. Сходимость при точной правой части. Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряженного оператора A и формулой (3), по индукции получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^{-1} \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n} dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость итерационного процесса (3) при $n \to \infty$ для $\alpha > 0$.

2.2. Сходимость при приближенной правой части. Итерационный процесс (4) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 1. *Итерационный процесс (4) сходится при* $\alpha > 0$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [19; 21; 23]. При этом легко показывается оценка $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2k(n\alpha)^{1/k}\,\delta,\ n \ge 1$.

2.3. Оценка погрешности. Скорость сходимости метода (4) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2), т.е. $x = A^s z,\ s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n} dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности метода (4) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}$ и оптимальную оценку погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \quad (5)$$

Замечание 1. *Оценка погрешности* (5) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [7], *он является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 2. *Оптимальная оценка* (5) *не зависит от* α, *но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать* α *удовлетворяющим условию* $\alpha > 0$ *и так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать* $\alpha_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}$.

Приведем погрешность метода (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^k\right)^2 z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0.$$

Оценка погрешности метода (4) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta + n\alpha\gamma, \quad n \ge 1,$$

где $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \cdot \frac{s}{k^2(s+1)} \times \left(k - \ln\frac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $k = \ln\frac{s}{k}$. Но k должно быть целым числом, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \le s \le 27$ $k_{\text{опт}} = 2$.

3. Апостериорный выбор числа итераций

Априорный выбор числа итераций n получен в предположении, что точное решение x уравнения (2) истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны и тем самым приведенные в разделе 2 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее метод (4) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного процесса (4) определим условием [7, 16, 19, 21–23]

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \ (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \ \varepsilon = b\delta, \ b > 1. \tag{6}$$

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (6) к методу (4). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{(1-\alpha\lambda^k)^{2n}}{(1+\alpha^2\lambda^{2k})^n}\right] \ge 0$. Нетрудно показать (см. [21; 23]), что при $\alpha > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le 2k(n\alpha)^{1/k}, \ n > 0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 1, \quad n > 0,$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, \ n \to \infty, \ \forall \lambda \in (0, M],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}, \quad n > 0, \ 0 \le s < \infty.$$

Аналогично подобным леммам из [7; 19; 21; 23] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0, \ n \to \infty.$

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/k}\|A^s(E - Ag_n(A))v\| \to 0, \ n \to \infty, \ 0 \le s < \infty.$

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Если для некоторых* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$.

Леммы 1–3 использовались при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (4) *выбирается по правилу* (6), *тогда* $x_{m(\delta),\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и пусть* $x = A^s z, \ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + 2k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k}\delta. \tag{7}$$

Доказательство теорем 2–3 аналогично доказательству подобных теорем из [7; 19; 21; 23].

Замечание 3. *Порядок оценки* (7) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и, как следует из* [7], *он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 4. *Хотя формулировка теоремы* 3 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуется, т. к. они не содержатся в правиле останова* (6). *И тем не менее в теореме* 3 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (6), *как показывает теорема* 2, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

4. Численный модельный пример

4.1. Формулировка и описание алгоритма решения модельной задачи.

Задача. Решаем в пространстве $L_2(0,1)$ модельную задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)\ x(s)\ ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{8}$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s),\ 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t),\ 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$ точной правой частью $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(1-t)$.

Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i,\ i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i = [\ y(t_i)\cdot 10^k\ + 0{,}5]\ /\ 10^k$, где $y(t_i)$ – значения функции y(t) в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1,m}$, $h = 1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и k = 4. При k = 4 величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, имеем $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$.

Заменим интеграл в уравнении (8) квадратурной суммой, например по формуле правых прямоугольников ($\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^n y_k = h[y_1 + y_2 + ... + y_n]$, $h = \frac{b-a}{n}$, $y_k = f(x_k),\ x_k = a + kh$) с узлами $s_j = jh,\ j = \overline{1,m},\ h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx$ $\approx \sum_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ –

остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1,m}$, получим уравнения $\sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i = \overline{1,m}$.

Отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j = \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (9) методом итераций (4) при k = 1, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha^2 \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h \left(\sum_{l=1}^{m} K(t_j, s_l) h x_l^{(n+1)} \right) = x_i^{(n)} - 2\alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) x_j^{(n)} h +$$
$$+ \alpha^2 \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h \left(\sum_{l=1}^{m} K(t_j, s_l) h x_l^{(n)} \right) + 2\alpha \tilde{y}_i, \quad x_i^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{10}$$

При решении задачи итерационным методом (4) вычислялись:

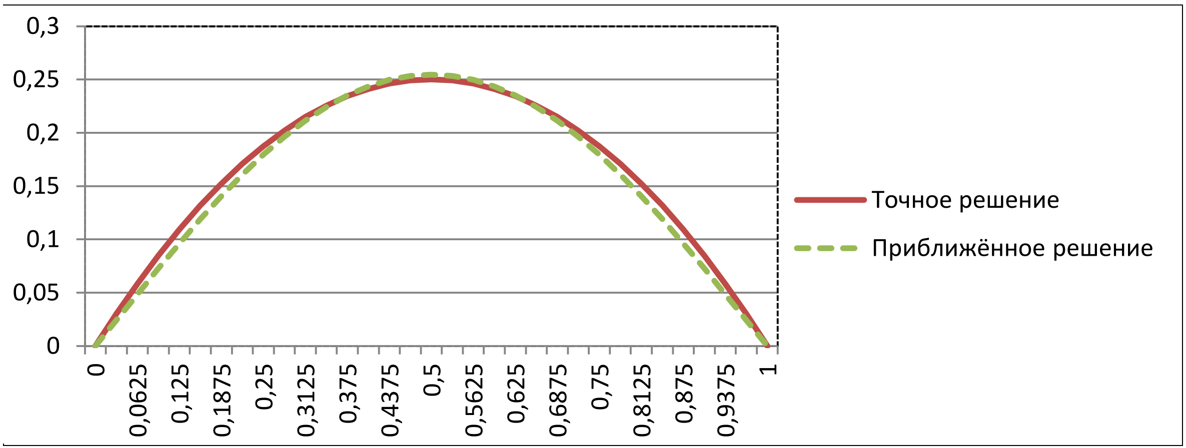
$\left\| Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки,

$\left\| x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности между точным и приближенным решениями $\left\| x - x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x(t_i) - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$.

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Задача была решена методом (4) при $\delta = 10^{-4}$. Результаты счета приведены в таблице (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (4), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности методом итераций (4) при $\alpha = 9{,}4$ требуется только одна итерация, что соответствует результатам раздела 2.

На рисунке изображены графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$.

4.2. Результат работы программы. Программа для решения предложенной задачи была написана на языке программирования C#.



Рисунок

Таблица

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенное решение, полученное методом (4) $\delta = 10^{-4}$
0	0	0	0
0.0312	0.00259	0.03027	0.02429
0.0625	0.00517	0.05859	0.04865
0.0937	0.00768	0.08496	0.07275
0.125	0.01011	0.10938	0.09629
0.1562	0.01243	0.13184	0.11898
0.1875	0.01463	0.15234	0.14056
0.2187	0.01668	0.17089	0.1608
0.2500	0.01855	0.1875	0.17948
0.2812	0.02025	0.20215	0.19641
0.3125	0.02175	0.21484	0.21142
0.3437	0.02304	0.22559	0.22437
0.375	0.02411	0.23438	0.23514
0.4062	0.02495	0.24121	0.24361
0.4375	0.02555	0.24609	0.24972
0.4687	0.02591	0.24902	0.25341
0.5000	0.02604	0.25000	0.25464
$\left\| Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m$			0.00015
$\left\| x^{(n)} \right\|_m$			0.17972
$\left\| x - x^{(n)} \right\|_m$			0.00798

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.

3. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
5. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
6. Лисковец, О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 342 с.
7. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
8. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
9. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61 (103), № 2. – С. 211–223.
10. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, № 1. – P. 84–97.
11. Иванов, В. К. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. К. Иванов. – Киев : Наук. думка, 1968. – 287 с.
12. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
13. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : УРСС, 2004. – 480 с.
14. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : МГУ, 1994. – 207 с.
15. Vogel, C. R. Computational methods for inverse problems / C. R. Vogel. – Philadelphia : SIAM, 2002. – 183 p.
16. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
17. Gilyazov, S.F. Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S. F. Gilyazov, N. L. Gol’dman. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.
18. Kabanikhin, S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications / S. I. Kabanikhin. – De Gruyter, 2011. – 459 p.
19. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2008. –196 с.
20. Забрейко, П. П. Теорема М. А. Красносельского и итерационные процедуры решения некорректных задач с самосопряженными операторами / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 6. – С. 9–14.
21. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2014. – 213 с.
22. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Numer. Appl. Math. – 2014. – № 2 (116). – P. 89–95.
23. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

24. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наук. думка, 1986. – 543 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.09.2019

Matysik O. V. **Implicit Iteration Process for the Approximate Solving of Operator Equations of the First Kind**

For the solution of linear operator equations of the first kind with a limited positive and self-adjoint operator in a Hilbert space is proposed implicit iteration method. For this method an a priori choice of the number of iterations. In the article justified the use of rule residual stop, which makes the proposed method is effective and when there is no information about sourcewise representation of the exact solution. We prove the convergence of the iteration method, the estimate for the moment stop and solved model problem.